

Difração da luz por fendas

Hugo L. Fragnito, Antonio C. Costa e Gustavo Wiederhecker
Unicamp-IFGW, Agosto de 2013

1 INTRODUÇÃO

Difração é o nome genérico dado aos fenômenos associados a desvios da propagação da luz em relação ao previsto pela óptica geométrica (ou seja, de raios retilíneos) e que põem de manifesto a natureza ondulatória da luz. Fenômenos de difração são observados para todos os tipos de ondas. Raramente observamos a difração da luz no cotidiano. Entretanto, a difração das ondas sonoras é difícil de ser evitada; o som contorna obstáculos de tamanhos relativamente grandes, tais como pessoas, árvores e mobílias de uma sala. Esta diferença entre a difração do som e da luz é devida à diferença entre os respectivos comprimentos de onda. O comprimento de onda do som é da ordem de 1 m, enquanto que o da luz visível é da ordem de 500 nm. Ondas eletromagnéticas utilizadas na transmissão de sinais de rádio, televisão e telefonia móvel, por exemplo, com comprimentos de onda que variam entre algumas dezenas de centímetros até alguns quilômetros, contornam facilmente obstáculos como árvores e carros e até prédios, dependendo do caso.

A difração por uma fenda fina pode ser observada com uma montagem experimental simples e explicada matematicamente com um modelo também simples e que permite extrair conclusões gerais acerca da difração. Além disso, quando a luz se difrata por um conjunto de aberturas periódicas, se observam interessantes fenômenos de interferência entre as ondas originadas em cada abertura.

A figura de difração depende das condições de iluminação e de onde se observa a figura. Se o obstáculo é iluminado com ondas planas e a região onde observamos a difração está longe do obstáculo dizemos que temos *difração de Fraunhofer*. Em todos os outros casos dizemos que temos *difração de Fresnel*. Neste experimento investigaremos a difração de Fraunhofer produzida ao passar um feixe laser por fendas muito finas.

2 Teoria de difração

2.1 Difração de fenda simples

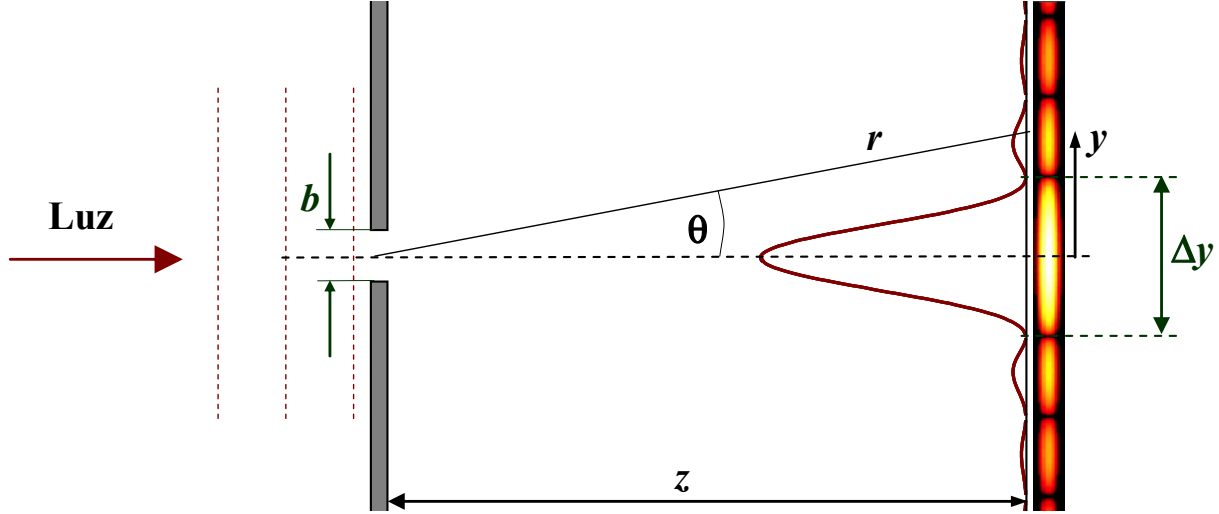


Fig. 1. Difração da luz por uma fenda de largura b vista em um anteparo a uma distância z . A largura do máximo central é Δy .

Na fig.1, um feixe de luz monocromática de comprimento de onda λ passa por uma fenda de largura b e atinge um anteparo a uma distância z . O feixe incidente tem frentes de onda planas, paralelos à fenda, e a distância z é suficientemente grande como para considerar planos também os frentes de onda no anteparo (condição de difração de Fraunhofer).¹ As ondas originárias em cada ponto da abertura interferem entre si e produzem o padrão de difração ilustrado nesta figura. Observamos um máximo central com intensidade I_0 e pontos onde a intensidade luminosa se nula. A intensidade de luz em uma posição $y = r \sin \theta$ sob o anteparo é dada por

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad (1)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{2} kb \sin \theta, \quad (2a)$$

$k = 2\pi/\lambda$ e $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. Se $y \ll z$ podemos usar as aproximações $\sin \theta \approx \theta \approx y/z$ e escrever

$$\beta; \frac{\pi by}{\lambda z}. \quad (2b)$$

¹ A condição para que a difração possa ser considerada de Fraunhofer é que $z \gg b^2/2\lambda$. Por exemplo, se $b = 200 \mu\text{m}$ e $\lambda = 500 \text{ nm}$, deve ser $z \gg 40 \text{ cm}$. Isto está bem discutido no livro de G. Fowles (referência 1 na lista bibliográfica).

Em $y = 0$ (correspondendo a $\theta = 0$ e, portanto, $\beta = 0$) observamos um máximo central de intensidade I_0 . Já nos pontos onde $\beta = n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$) a intensidade luminosa é nula. Estes pontos de mínimos correspondem a valores de y tais que

$$y_n = n\lambda z/b. \quad (\text{mínimos de difração})$$

A largura do máximo central, $\Delta y = y_1 - y_{-1}$, é então

$$\Delta y = 2\lambda z/b. \quad (3)$$

Esta relação nos permite determinar b se λ é conhecido (e vice-versa). No experimento vamos utilizar um laser de λ conhecido e medir z com uma trena e Δy com uma régua, de modo que poderemos determinar b tipicamente com erro menor que 1%. Também dispomos de um microscópio metrológico para medir b diretamente e verificar se o modelo está correto (ou para determinar o λ de um laser desconhecido). Temos então duas formas alternativas de medir b : com o microscópio ou por difração. A pergunta natural aqui é qual método é mais preciso? A precisão do micrômetro do microscópio é de 1 μm e, se $b \sim 200 \mu\text{m}$, com este instrumento podemos medir b com erro de 0,5 %. Por outro lado, mesmo usando uma régua milimetrada, podemos medir o espaçamento entre os mínimos de ordem n , ou seja $n\Delta y$, e dividir por n . O erro também é dividido por n e, para n é grande, podemos determinar Δy com erro menor que 0,5%. Utilizando difração, em princípio, podemos determinar b com melhor precisão do que com o microscópio se λ e z forem conhecidos ou medidos com precisão de 0,1 % ou melhor.

Um experimento adicional interessante é medir o diâmetro de um fio de cabelo utilizando a eq. (3). É possível mostrar que padrão de difração produzido por um dado obstáculo é essencialmente idêntico ao produzido por uma abertura da mesma forma.² Na indústria, a difração se utiliza muito para medir o diâmetro de fios finos e pequenos espaçamentos (como o *gap* de uma vela de carro). Uma grande vantagem de medir por difração é que a medida pode ser feita enquanto o fio é fabricado, sem tocar nele e sem interromper o processo de fabricação.

2.2 Difração de fenda dupla

Um arranjo semelhante pode ser feito para se observar a difração de fenda dupla. O efeito de difração observado quando a luz passa por cada uma das fendas é o mesmo discutido anteriormente, mas o resultado final em qualquer direção depende da diferença de caminho entre as duas contribuições.

² Este resultado é conhecido como *princípio de Babinet*. Veja uma demonstração simples deste princípio no livro de Fowles (ref. 1).

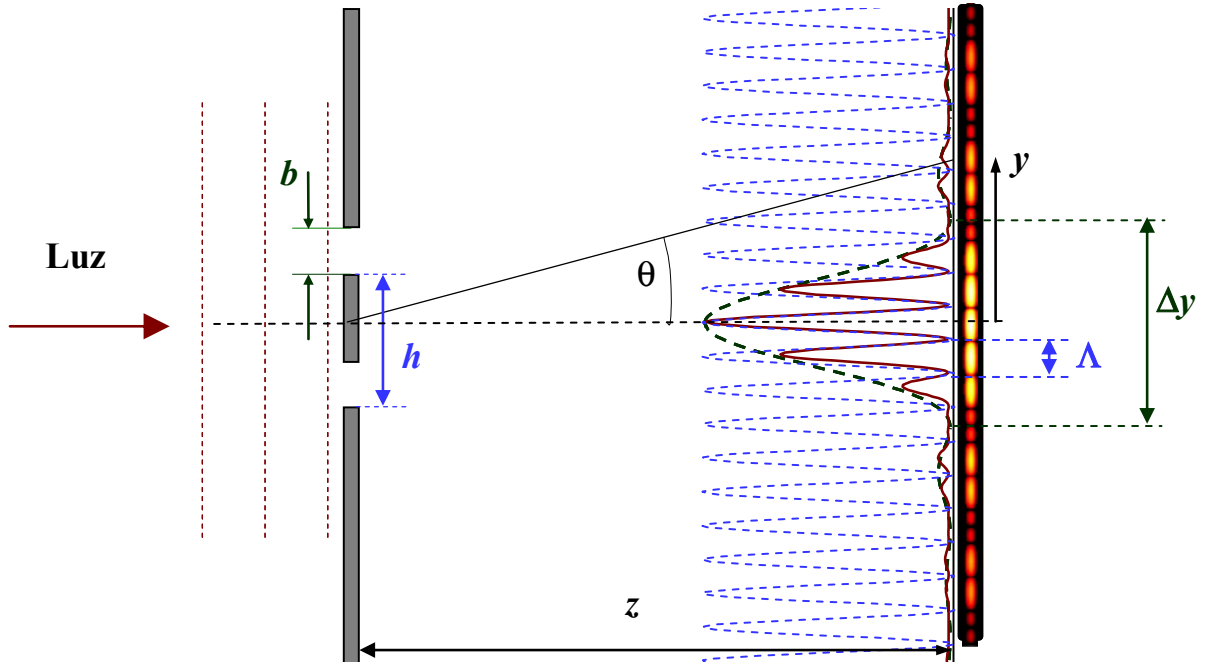


Fig. 2. Difração por uma fenda dupla (neste exemplo $h = 3b$). As franjas de interferência têm período Λ .

A fig. 2 nos mostra que a luz que passa por uma fenda interfere com a que passa pela outra fenda, produzindo no anteparo franjas de máximos e mínimos de luz com período Λ . O padrão de interferência é similar ao do experimento de Young (no qual a largura de cada fenda, b , é muito menor que a separação entre elas, h), ou seja, com distribuição de intensidade

$$I = \frac{1}{2} I_0 [1 + \cos(2\gamma)] = I_0 \cos^2 \gamma, \quad (b \ll h) \quad (4a)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{2} kh \sin \theta. \quad (4b)$$

Este padrão de interferência está representado na fig. 2 com a linha tracejada azul. Se a largura da fenda não é desprezível quando comparada com h , esse padrão de interferência é modulado espacialmente pelo padrão de difração da fenda. Matematicamente, a distribuição de intensidade é o produto entre a função de interferência e a de difração (eq. 1):

$$I = I_0 \left(\cos^2 \gamma \right) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad (5)$$

onde usamos o fato que $(1 + \cos 2\gamma)/2 = \cos^2 \gamma$. Os máximos de interferência correspondem à condição $\gamma = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ou $y = nz\lambda/h$, de modo que a separação entre máximos (ou mínimos) de interferência consecutivos (ou seja, o período das franjas), é

$$\Lambda = \lambda z/h. \quad (6)$$

Medindo z e Λ (e conhecendo λ) podemos usar a eq. (6) para determinar h .

2.3 Difração por N fendas

A figura 3 mostra o padrão produzido por N fendas iguais de largura b e separação h . Novamente, o padrão é o produto entre a função de difração (eq. 1) e a função de interferência das N fendas, $f_N(\gamma) = (\sin N\gamma / N \sin \gamma)^2$:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(N\gamma)}{N \sin \gamma} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2. \quad (7)$$

Note que a eq. 7 é válida também para os casos de uma ($N=1$) ou duas ($N=2$) fendas.

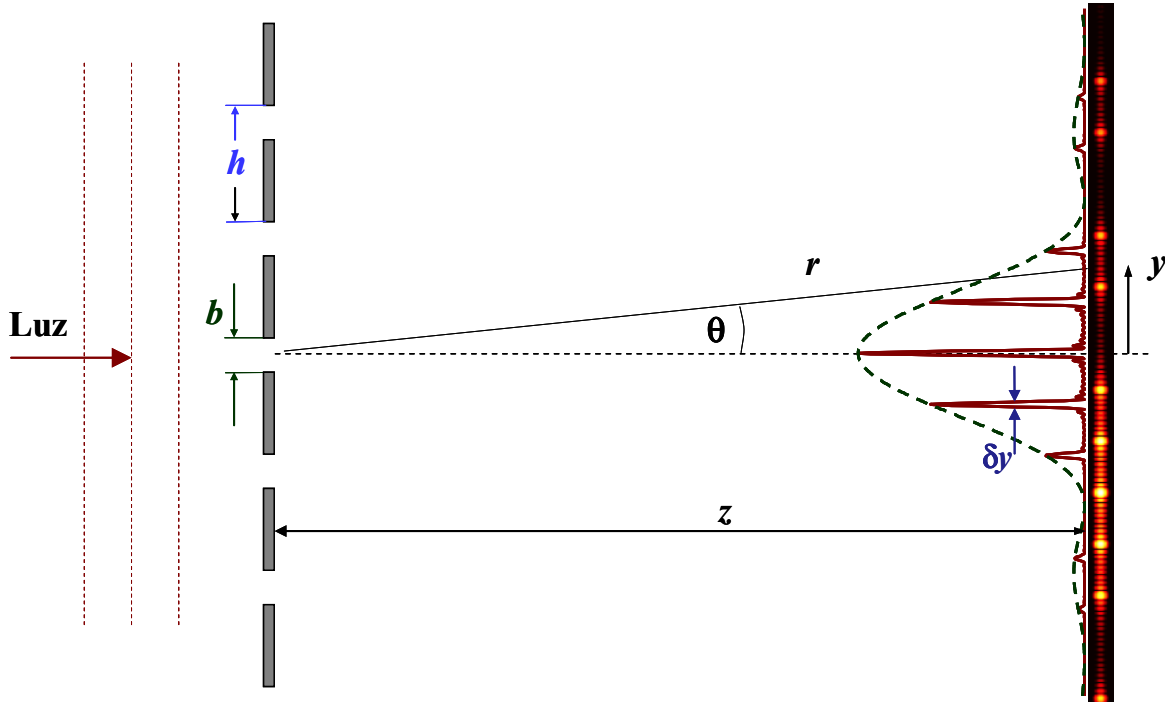


Fig. 3. Difração por uma rede de N fendas (neste exemplo $h = 3b$ e $N = 10$). Os máximos de interferência, com largura δy , ficam cada vez mais finos à medida que aumenta N .

Para entender melhor o padrão de difração é útil analisar o padrão de interferência mostrado na figura 4. Nessa figura representamos a função

$$f_N(\gamma) = \left[\frac{\sin(N\gamma)}{N \sin \gamma} \right]^2. \quad (8)$$

Esta função apresenta máximos absolutos, chamados de *máximos primários*, quando

$$\gamma = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{máximos primários})$$

e que correspondem às posições

$$y_n = nz\lambda/h = n\Lambda. \quad (9)$$

Os máximos primários são também chamados de picos *de ordem n*. Utilizando a regra de L'Hospital, podemos ver que, nesses máximos primários, $f_N(n\pi) = 1$. A separação entre dois máximos primários consecutivos é dada pela eq. 6 e, como já comentado, nos permite medir h .

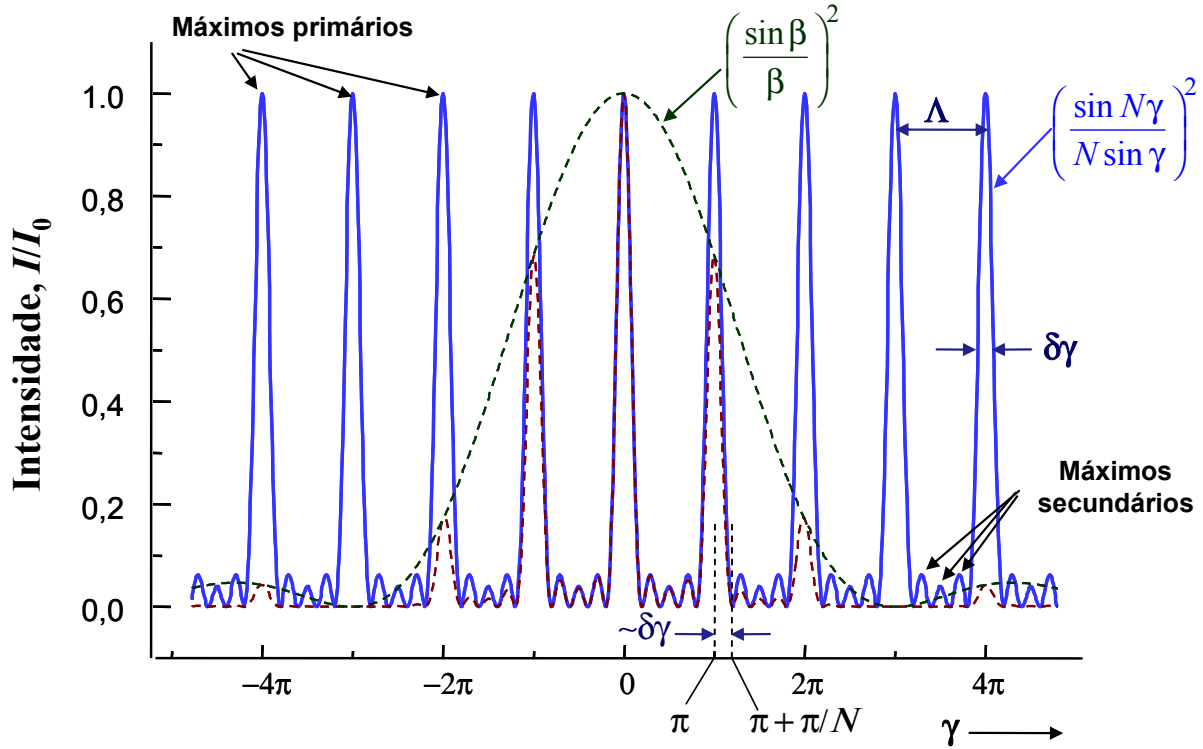


Fig. 4. A função de interferência (linha azul), a de difração (verde tracejada) e o padrão resultante (vermelha tracejada) como função de γ . Neste exemplo, $h = 3b$, de modo que o máximo principal com $\gamma = \pm\pi$ coincide com o primeiro zero de difração ($\beta = \pm\pi$). A largura dos máximos principais é $\delta\gamma \sim \pi/N$. Note que entre dois máximos principais consecutivos há $N - 2 = 3$ máximos secundários, então $N = 5$.

Entre os máximos primários consecutivos temos vários *máximos secundários*, onde $\sin N\gamma$ é perto de ± 1 . O numerador na expressão (8) se anula se $|N\gamma|$ é múltiplo de π e temos, em princípio, um zero da função $f_N(\gamma)$. Porém, se o denominador também se anula (isto é, se γ é também um múltiplo de π) então o numerador e denominador se anulam e temos um máximo primário. Por exemplo, se $N = 5$ (como na figura 4), temos mínimos de interferência para $\gamma = \pi/N, 2\pi/N, 3\pi/N$ e $4\pi/N$, mas se $\gamma = 5\pi/N = \pi$ temos um máximo primário. Vemos então que entre dois máximos primários consecutivos temos sempre $N - 2$ máximos secundários. Isto pode ser utilizado para determinar N experimentalmente.

Com exceção da ordem zero (i.e., o máximo central de interferência, com $n = 0$), as posições dos máximos primários dependem do comprimento de onda. Este fato é utilizado para medir comprimentos de onda. A largura dos máximos é, aproximadamente, $\delta\gamma = \pi/N$, como podemos ver do fato que a posição do mínimo adjacente ao máximo de ordem n é $\gamma = n\pi + \pi/N$ (na fig. 4 isto é ilustrado com o máximo de primeira ordem). Em termos de tamanho no anteparo (vide fig. 3), a largura dos máximos é

$$\delta y = z\lambda/Nh. \quad (10)$$

Se N é grande os máximos são muito estreitos e bem definidos, permitindo medir λ com boa precisão. Um arranjo com muitas fendas é chamado de *rede de difração* ou *grade de difração*. As redes de difração são muito utilizadas em espectroscopia.

3 OBJETIVOS

Os objetivos deste experimento são:

- observar os efeitos de difração produzidos por uma fenda e os efeitos de interferência produzidos por duas ou mais fendas;
- verificar quantitativamente as previsões do modelo de difração de Fraunhofer para uma fenda, medindo a largura da fenda por difração e com um microscópio;
- verificar a validade do modelo no caso de duas ou mais fendas, determinando a largura, número e separação entre fendas através de medidas no padrão de difração/interferência e medidas diretas com microscópio;
- avaliar a potencialidade de redes de difração para medir comprimentos de onda.

4 PREPARAÇÃO

a) Reveja os conceitos de interferência e difração, principalmente os seguintes pontos:

- Interferência – Experimento de Young.
- Difração de Fraunhofer.
- Difração por uma fenda.
- Difração e interferência por fendas múltiplas – rede de difração.

b) No caso de uma fenda com abertura $b = 1 \text{ mm}$, $\lambda = 532 \text{ nm}$ e $z = 2 \text{ m}$, onde você espera achar os primeiros 4 mínimos de difração?

c) Utilizando algum software de sua preferência simule o experimento obtendo um gráfico da intensidade relativa I/I_0 versus y (vide eq. 1 e eq. 2b) para $\lambda = 633 \text{ nm}$, $b = 60 \text{ }\mu\text{m}$ e $z = 2,3 \text{ m}$. Quanto é aproximadamente a intensidade relativa dos primeiros 6 máximos?

c) Simule no computador o padrão de interferência de duas fendas (experimento de Young) levando em consideração os efeitos de difração (eq. 5) para $\lambda = 633 \text{ nm}$, $b = 60 \text{ }\mu\text{m}$, $z = 2,3 \text{ m}$ e $h = 130 \text{ }\mu\text{m}$. Determine a posição dos máximos e mínimos de interferência e de difração.

d) Simule no computador o padrão previsto (eq. 6) para $N = 3, 4, 5, 10$. Que acontece com a largura dos máximos de interferência quando aumenta N ? Quantos mínimos e máximos secundários de interferência têm dentro do máximo central de difração ($-\pi < \beta < \pi$)?

5 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Os experimentos serão realizados com um laser de He-Ne [$\lambda = (632,82 \pm 0,05) \text{ nm}$ no ar] ou um laser de λ conhecido³, e com outro laser de λ desconhecido (no laboratório temos lasers que emitem no vermelho, azul e verde). As aberturas (fendas e aberturas de outras formas) foram impressas por foto-litografia sobre um vidro metalizado.

³ No laboratório dispomos de um laser verde ($\lambda = 532 \text{ nm}$) e lasers no vermelho e no azul (λ desconhecidos).

5.1 Alinhamento

Para que as medidas sejam feitas com precisão, o vidro com as fendas deve ser colocado perpendicular ao feixe do laser. Isso pode ser facilmente feito enviando o feixe refletido no vidro novamente para a saída do laser.

Alinhe também o feixe laser paralelo ao trilho sobre o qual está montado o vidro com as aberturas.

5.2 Reprodução do padrão de difração/interferência

Com uma folha de papel fixada com fita adesiva em um anteparo (ou na parede do laboratório) é possível registrar com um lápis o perfil da difração. Apagando as luzes do laboratório fica mais fácil observar a separação entre os máximos e a variação na intensidade luminosa. Deslocando verticalmente o papel, podemos registrar vários padrões de difração/interferência na mesma folha. Identifique cada padrão anotando a distância z e o código da abertura utilizada. **(Também pode usar uma câmera fotográfica para registrar os padrões, mas não deve esquecer-se de colocar uma régua na mesma foto para usar como referência para medir as posições de máximos e mínimos. As fotos ficam mais bonitas no relatório, mas dão muito mais trabalho.)**

5.3 Medidas com o microscópio metrológico

Para verificar o modelo de difração de Fraunhofer, vamos medir a abertura, número e separação entre fendas utilizando um microscópio metrológico (Fig. 5). Coloque a máscara de vidro com as aberturas sobre a porta-amostra giratória e ajuste o foco; destrave os parafusos micrométricos (as travas estão indicadas na Fig. 5 – mantenha-as apertadas para destravar) e desloque a máscara até achar a abertura desejada no seu campo visual. Gire a porta-amostra até alinhar as fendas paralelamente à linha vertical da cruz do microscópio. Utilize o parafuso micrométrico para deslocar a máscara e medir as dimensões da abertura.

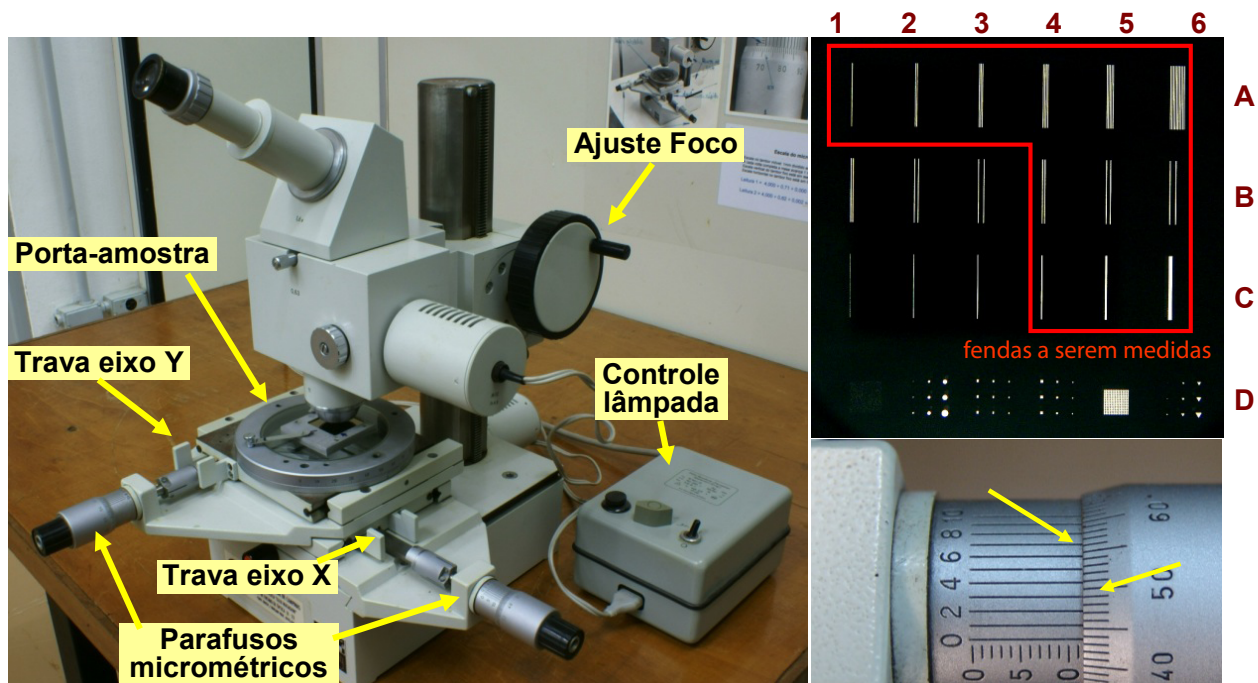


Fig. 5. Microscópio metrológico (esquerda), máscara com diferentes aberturas (direita acima) e detalhe do parafuso micrométrico (direita abaixo). Em cada volta completa o parafuso avança 1 mm e o tambor tem 100 divisões (10 μm cada). Além disso, tem um Vernier com 10 divisões (1 μm cada). Na figura, a leitura é de 11,433 mm. As fendas destacadas em vermelho devem ser medidas

6 Roteiro

1. Anote os instrumentos utilizados, i.e., cor do laser e respectivo comprimento de onda, número do conjunto de fendas.

2. Fendas simples

- a. Montar o conjunto laser, fenda e anteparo. Alinhe o vidro com as aberturas e escolha a abertura correspondente a uma fenda simples (**C4** na Fig. 5). Projete o padrão de difração/interferência sobre o anteparo. Posicione o vidro a uma distância de ~ 1 m do anteparo (utilize a trena para medir z). Cole uma folha de papel milimetrado no anteparo e desenhe a lápis o padrão, indicando claramente as posições dos máximos e mínimos. Meça essas posições (se não tiver papel milimetrado, utilize uma régua). Utilize a eq. 3 para determinar b e seu desvio.
- b. Desloque o vidro horizontalmente até achar a próxima fenda (**C5**) com diferente largura. Desloque ~ 1 cm verticalmente a folha de papel no anteparo e desenhe o novo padrão de difração. Meça a largura do máximo central no papel e determine b e seu desvio. **Repita essa medida para a fenda C6.** Monte uma tabela com os valores de $b \pm \Delta b$ medidos e uma coluna em branco para preencher com os valores que medirá com o microscópio (item 7).

3. Fendas duplas

- a. Desloque o vidro verticalmente até achar uma abertura com duas fendas (**B4**). Desenhe no papel o padrão observado, meça o período de interferência Λ e determine a separação entre as fendas (h) utilizando a eq. 6.

- b. Desloque horizontalmente o vidro até achar o próximo conjunto de duas fendas com diferente separação (**B5 e B6**). Desenhe o padrão, meça o período Λ e determine h . **Não é necessário medir B1,B2,B3**. Monte uma tabela com os valores de h medidos (e seus desvios) e deixando espaço para preencher com os valores a medir com o microscópio.

4. Fendas múltiplas

- a. Posicione o vidro até achar o conjunto de aberturas A1 a A6. Deslocando horizontalmente o vidro passará por aberturas com 1, 2, 3,... N fendas, **todas nominalmente com a mesma abertura e separação**. Veja se consegue descobrir o valor de N para cada abertura A3,...A6 apenas contando o número de máximos secundários. Desenhe os padrões observados para cada abertura (**A4,A5,A6**), medindo as posições dos máximos primários (eq. 9) e a largura dos máximos principais (δy , eq. 10). Apresente os resultados com uma tabela contendo os valores medidos de δy , b e h (e seus respectivos desvios) para, deixando espaço para preencher com os valores de b e h medidos com o microscópio, bem como o valor de N aferido com o microscópio.
5. Também, tente medir o diâmetro de um fio do seu cabelo (ou de um colega, se você não tiver). Havendo tempo, observe os padrões de difração com as outras aberturas que não são fendas (D1 – D6) e interprete os resultados.
6. Meça diretamente com o microscópio, as dimensões b e h e o número de fendas, N , de todas as aberturas utilizadas; preenchendo então os espaços nas tabelas dos itens anteriores. **Preste atenção para não fazer medições repetidas, por exemplo, B4,B5 e B6 possuem a mesma espessura.**

No relatório, apresente uma Xerox reduzida ($\sim 1/4$ do original) dos padrões observados.

5. BIBLIOGRAFIA

- 1 – G. R. Fowles, "*Introduction to Modern Optics*," Holt, Rinehart and Winston, 2nd edition, New York (1975).
- 2 – J. P. McKelvey and H. Grotch, "*Física 4*", Harbra - Harper & Row do Brasil, São Paulo, cap. 26 (1981).
- 3 – F. A. Jenkins and H. White, "*Fundamental of Optics*," MacGraw Hill, New York (1976).
- 4 – E. Hecht, "*Optics*," Adelphi University, Addison-Wesley Publishing Company (1990).
- 5 – Halliday, D., Resnick, R. & Walker, J. *Fundamentals of Physics*. Vol. 4.