

UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE COLOMBIA

# Comparación entre dos pruebas de hipótesis para el vector de medias

Valentina García Velásquez  
Jean Paul Piedrahita García  
Freddy Hernández Barajas  
Universidad Nacional de Colombia

## 1. Resumen

Se muestran los resultados de un estudio de comparación mediante simulación Monte Carlo entre dos pruebas de hipótesis para el vector de medias, considerando el caso de dos poblaciones normales bivariadas; las pruebas estudiadas fueron el test de James (1954) y el test de krishnamoorthy y Jianqi Yu (2004). Estas pruebas implementan el problema multivariado de Behrens-Fisher, el cual asume matrices de varianzas y covarianzas desconocidas y diferentes. El desempeño de las pruebas se midió usando el porcentaje de rechazos para la hipótesis nula  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ , empleando diferentes tamaños de muestra, distancias entre los vectores de medias y valores de correlación. Se encontró que ambas pruebas presentan un comportamiento similar; para el caso de algunos valores de correlación altos y distancias mayores entre vectores de medias, las dos pruebas presentaron un porcentaje de rechazos con valores muy cercanos a uno cuando la hipótesis nula era falsa, y cercanos al nivel de confianza cuando la hipótesis nula era verdadera.

## 2. Introducción

En la literatura estadística, se han propuesto varios métodos para probar la igualdad de dos vectores de medias para el caso de dos poblaciones normales  $p$  variadas. Debido a las deficiencias presentadas por el test de Hotelling cuando las matrices de varianzas y covarianzas son desconocidas y diferentes, se crearon diversas propuestas con el fin de obtener una prueba de hipótesis con resultados más consistentes y eficientes; el caso mencionado anteriormente es también conocido en la literatura como "**Problema de Behrens-Fisher**".

Entre las propuestas más destacadas para comparar vectores de medias con matrices de varianzas y covarianzas diferentes, encontramos las pruebas de James (1954), Yao (1965), Johansen (1980), Nel y Van Der Merwe (1984), Kim (1992) y Krishnamoorthy y Jianqi Yu (2004).

Actualmente, el software R aún no cuenta con la implementación de todas las propuestas anteriormente mencionadas. El paquete **stests** de R cuenta con funciones para realizar pruebas de hipótesis multivariadas, además de que considera reunir y organizar todas estas propuestas para comparar dos vectores de medias.

## 3. Sección técnica

Para probar el porcentaje de rechazo de ambas pruebas de hipótesis se consideró el siguiente conjunto de hipótesis:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Ambas pruebas de hipótesis presentan el siguiente estadístico:

$$T^2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^T \tilde{S}^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$$

$$\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 = \frac{S_1}{n_1} + \frac{S_2}{n_2}$$

### Test de James (1954):

James realizó una generalización o extensión del método de Welch para la comparación entre dos medias, esta vez para el caso multivariado. La distribución del estadístico es la siguiente:

$$T^2 \sim \delta \left( \chi_p^2 \right) \quad \text{donde} \quad \delta = A + B(\chi_{1-\alpha, p}^2)$$

$$A = 1 + \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^2 \frac{\left[ tr \left( \tilde{S}^{-1} \tilde{S}_i \right) \right]^2}{n_i - 1}$$

$$B = \frac{1}{p(p+2)} \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{tr \left[ \left( \tilde{S}^{-1} \tilde{S}_i \right)^2 \right]}{n_i - 1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\left[ tr \left( \tilde{S}^{-1} \tilde{S}_i \right) \right]^2}{n_i - 1} \right\}$$

### Test de Krishnamoorthy y Jianqi Yu (2004):

Esta prueba es invariante y consiste en la modificación al test de Nel y Van Der Merwe en 1986. La distribución del estadístico es la siguiente:

$$T^2 \sim \left( \frac{v p}{v - p + 1} \right) F_{p, v-p+1}$$

$$v = \frac{p + p^2}{\frac{1}{n_1} \left\{ tr \left[ \left( \tilde{S}_1 \tilde{S}^{-1} \right)^2 \right] + \left[ tr \left( \tilde{S}_1 \tilde{S}^{-1} \right) \right]^2 \right\} + \frac{1}{n_2} \left\{ tr \left[ \left( \tilde{S}_2 \tilde{S}^{-1} \right)^2 \right] + \left[ tr \left( \tilde{S}_2 \tilde{S}^{-1} \right) \right]^2 \right\}}$$

## 4. Estudio de simulación

La comparación de la prueba de hipótesis de James (1954) con la de Krishnamoorthy y Jianqi Yu (2004) se llevó a cabo por medio de simulación Monte Carlo con 1000 repeticiones, en la cual se consideraron dos escenarios y teniendo en cuenta poblaciones normales bivariadas, valores de correlación y distancias euclídeanas entre los dos vectores de medias. Los tamaños muestrales utilizados fueron:  $n = 10, 20, 50, 100$ .

- **Escenario 1:** dos grupos normales bivariados (denotados por 1 y 2), matrices de covarianzas iguales con valores de correlación  $\rho$  de 0.1, 0.3, 0.5 y 0.8. Se consideraron seis situaciones de alejamiento gradual para los grupos; el grupo 1 siempre fue el de referencia y estuvo ubicado en el origen del plano cartesiano mientras que las ubicaciones del otro grupo cambió sobre los ejes. **A** representa la situación más cercana de vectores de medias y **F** la más lejana, lo cual se puede notar en la distancia euclídeana.

Situación	$\mu_1$	$\mu_2$	Distancia
A	$(0, 0)^T$	$(0, 0)^T$	0
B	$(0, 0)^T$	$(1, 0)^T$	1
C	$(0, 0)^T$	$(0, 1)^T$	1
D	$(0, 0)^T$	$(1, 1)^T$	1.4142
E	$(0, 0)^T$	$(2, 0)^T$	2
F	$(0, 0)^T$	$(2, 2)^T$	2.8284

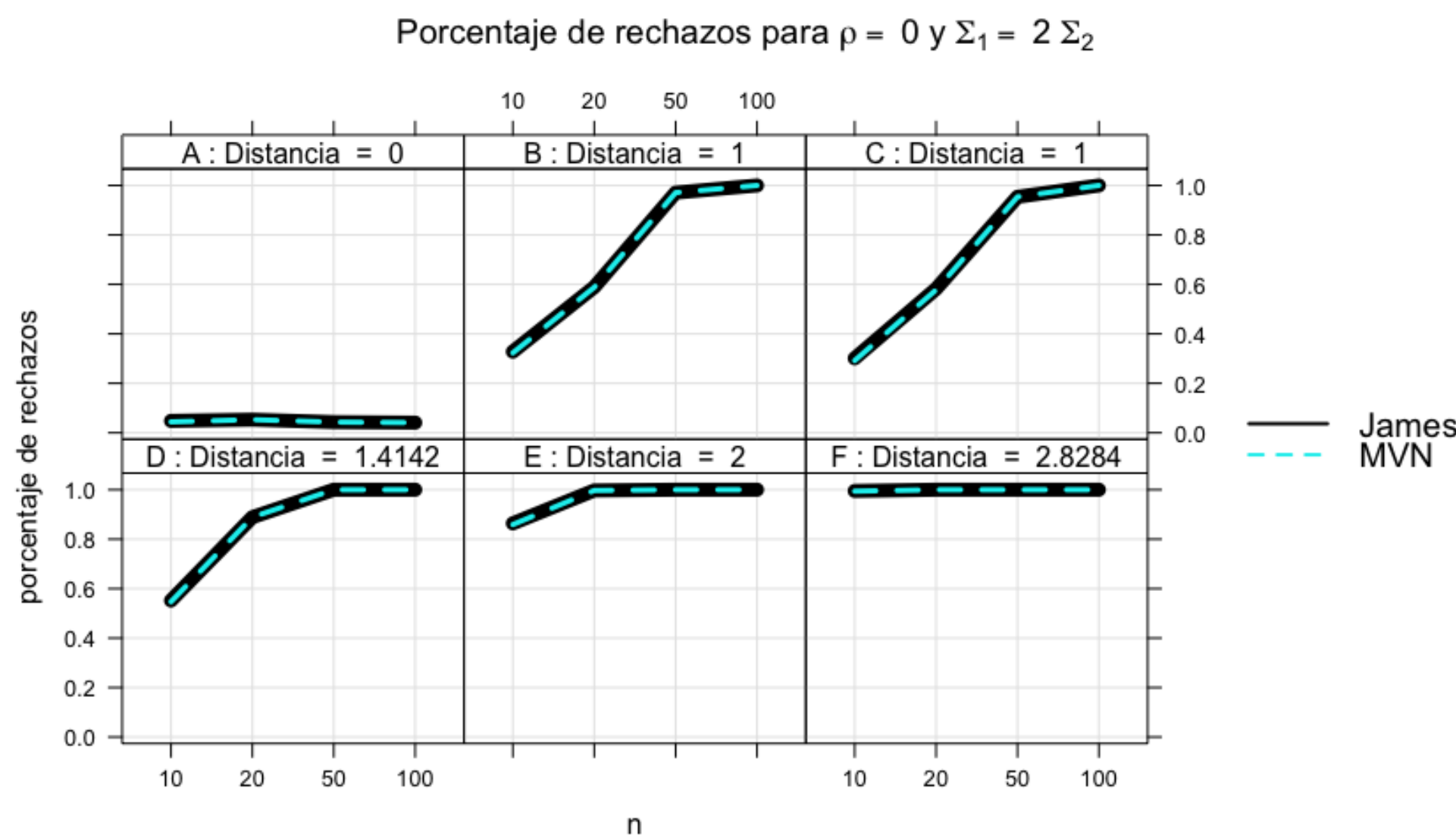
- **Escenario 2:** este escenario es similar al anterior con respecto a las situaciones de los vectores de media para cada grupo y tamaños muestrales; la diferencia está en que se consideraron matrices de varianzas y covarianzas diferentes para cada grupo de la siguiente manera:

- $\Sigma_1 = 2\Sigma_2$
- $\Sigma_1 = 3\Sigma_2$

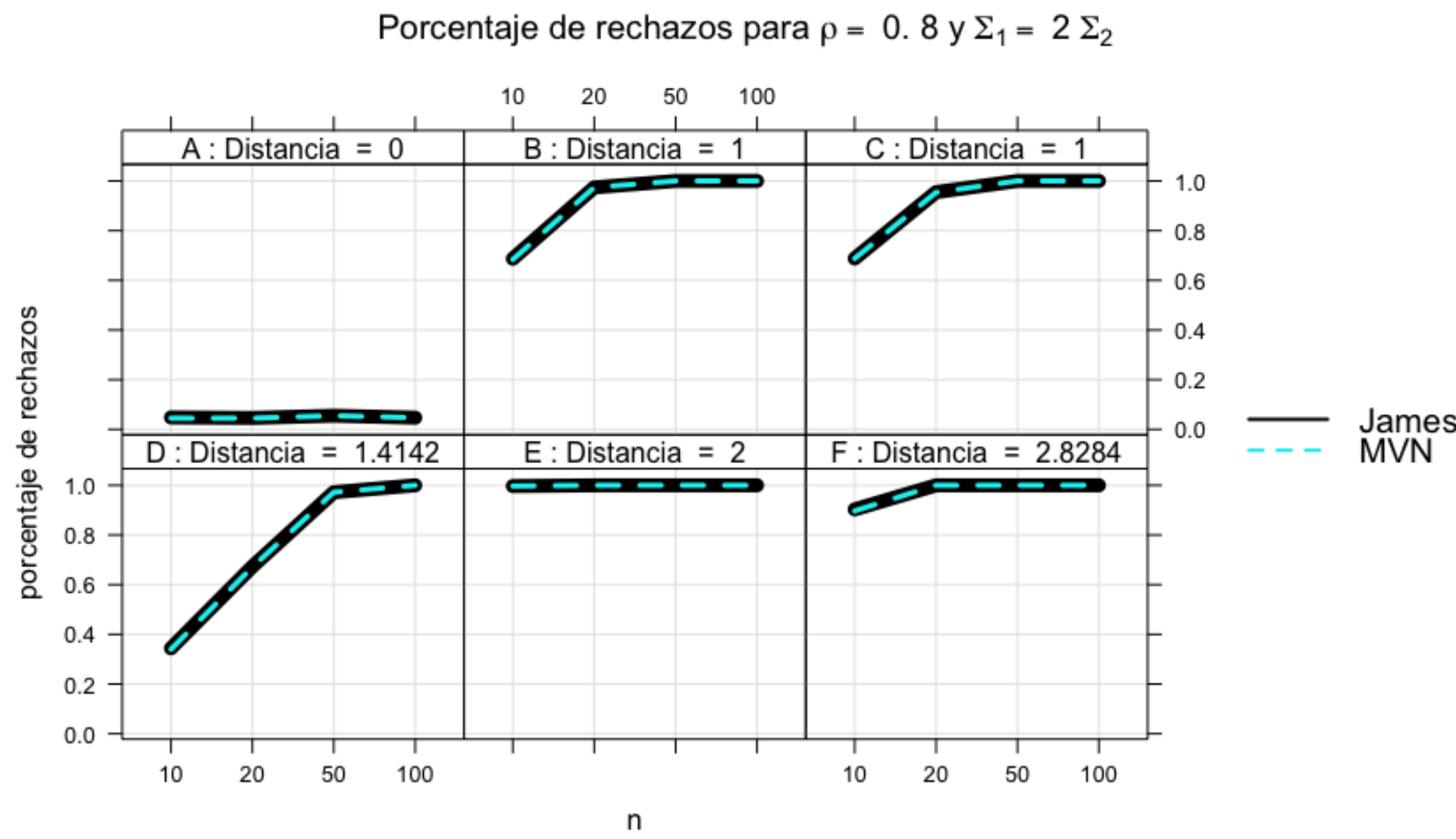
## 5. Resultados

El comportamiento de ambas pruebas fue similar en todos los casos considerados. Las siguientes gráficas muestran tres casos donde se puede observar la influencia de  $\rho$ ,  $n$  y  $k$  en el porcentaje de rechazos.

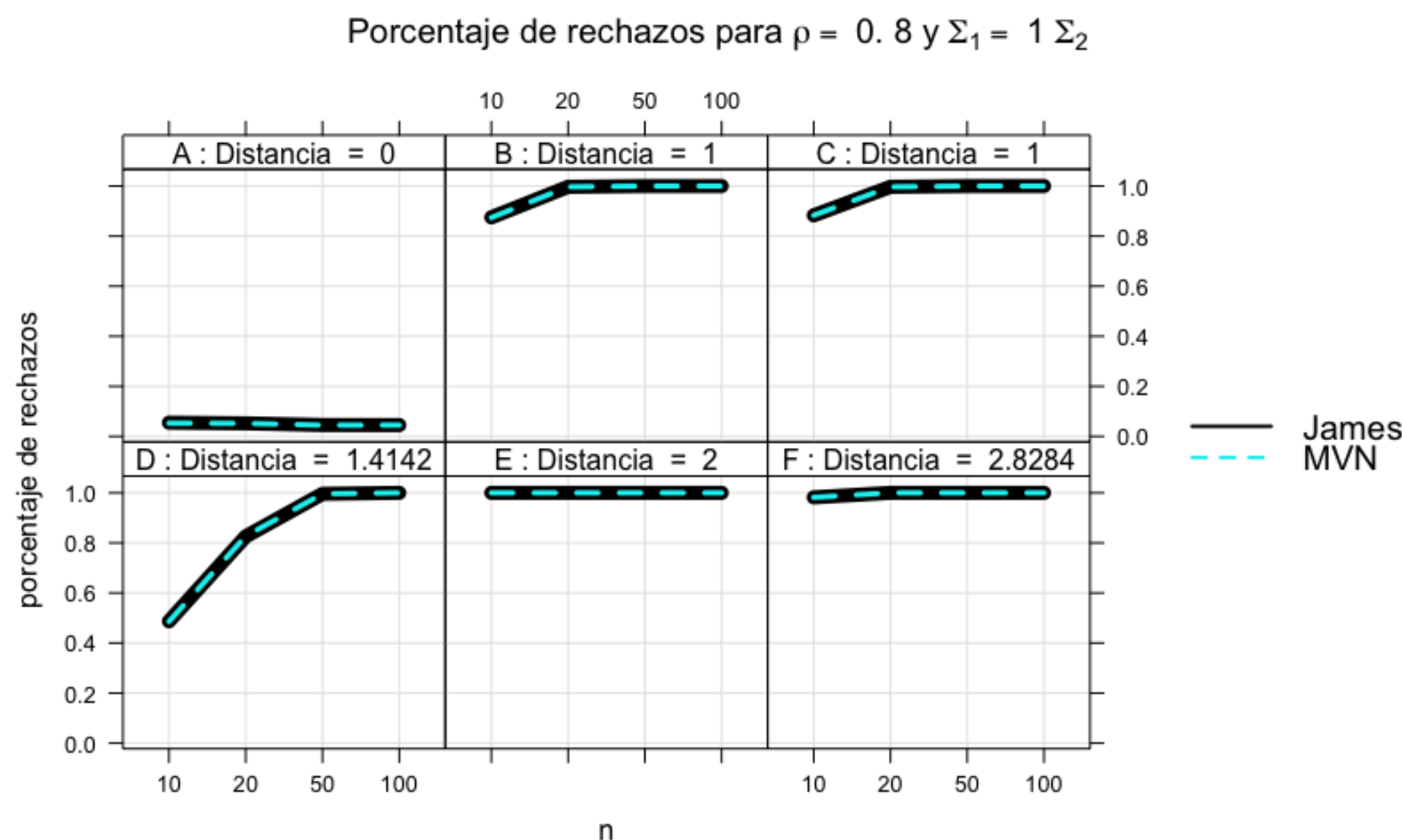
- $\rho = 0, \Sigma_1 = 2\Sigma_2$



- $\rho = 0.8, \Sigma_1 = 2\Sigma_2$



- $\rho = 0.8, \Sigma_1 = 1\Sigma_2$



## 6. Conclusiones

- El comportamiento de ambas pruebas fue muy similar, pues en ningún escenario o situación hubo alguna diferencia. Es decir, en cada gráfico se evidencia como se traslapan ambas pruebas.
- Ambas pruebas tuvieron un comportamiento en el cual la potencia de la prueba (probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando  $H_1$  es verdadera) iba aumentando conforme la distancia euclídeana entre los vectores aumentaba.
- La correlación fue un parámetro destacado debido a su influencia en el porcentaje de rechazos para ambas pruebas: a medida que aumentaba la correlación la potencia de la prueba también lo hacía.
- El tamaño de muestra fue también un factor determinante. Cuando el tamaño muestral era pequeño, se dificultó en algunas situaciones identificar la diferencia en los vectores de medias para las dos pruebas.

## Referencias

- James, G.S.** (1954). Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are unknown. *Biometrika*, **41**, 19–43.
- Krishnamoorthy, K. and Yu, J.** (2004). Modified Nel and Van der Merwe test for the multivariate Behrens-Fisher problem. *Statistics & Probability Letters*, **66**, 161–169.
- R Core Team.** (2019). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.