

# Extramaterial: Formler och räkneregler · 1MA020

Vilhelm Agdur<sup>1</sup>

<sup>1</sup> vilhelm.agdur@math.uu.se

28 mars 2025

I detta dokument ligger en samling av viktiga resultat och räkneregler, sammanfattade utan bevis.

## Den tolvfaldiga vägen

|                      | Generellt $f$  | Injektivt $f$   | Surjektivt $f$  |
|----------------------|--|---|---|
| Bägge särskiljbara   | Ord ur $X$ av längd $n$<br>$x^n$                                   | Permutation ur $X$ av längd $n$<br>$\frac{x!}{(x-n)!}$                            | Surjektion från $N$ till $X$<br>$x!\{x\}^n$             |
| Osärskiljbara objekt | Multi-delmängd av $X$ av storlek $n$<br>$\binom{n+x-1}{n}$         | Delmängd av $X$ av storlek $n$<br>$\binom{x}{n}$                                  | Kompositioner av $n$ av längd $x$<br>$\binom{n-1}{n-x}$ |
| Osärskiljbara lådor  | Mängdpartition av $N$ i $\leq x$ delar<br>$\sum_{k=1}^x \{x\}_k^n$ | Mängdpartition av $N$ i $\leq x$ delar av storlek 1<br>1 om $n \leq x$ , 0 annars | Mängdpartition av $N$ i $x$ delar<br>$\{x\}_x^n$        |
| Bägge osärskiljbara  | Heltalspartition av $n$ i $\leq x$ delar<br>$p_x(n+x)$             | Sätt att skriva $n$ som summan av $\leq x$ ettor<br>1 om $n \leq x$ , 0 annars    | Heltalspartitioner av $n$ i $x$ delar<br>$p_x(n)$       |

## Räkneregler för genererande funktioner

**Lemma 1** (Räkneregler för genererande funktioner). Antag att vi har en följd  $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ , med genererande funktion  $F_a$ . Då gäller det att

1. För varje  $j \geq 1$  är

$$\sum_{k=j}^\infty a_k x^k = \left( \sum_{k=0}^\infty a_k x^k \right) - \left( \sum_{k=0}^{j-1} a_k x^k \right) = F_a(x) - \sum_{k=0}^{j-1} a_k x^k$$

2. För alla  $m \geq 0$ ,  $l \geq -m$  gäller det att

$$\sum_{k=m}^\infty a_k x^{k+l} = x^l \left( \sum_{k=m}^\infty a_k x^k \right) = x^l \left( F_a(x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k \right)$$

3. Det gäller att<sup>2</sup>

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k = \frac{F'_a(x)}{x}.$$

<sup>2</sup> Denna räkneregeln kan förstås generaliseras till att högre potenser av  $k$  motsvarar högre derivator – och om vi istället delar med någon potens av  $k$  får vi primitiva funktioner till den genererande funktionen.

### Vanliga genererande funktioner

| Följd   | Genererande funktion              |
|---|-----------------------------------|
| $(1, 0, 0, \dots)$  | 1                                 |
| $(1, 1, 1, \dots)$  | $\frac{1}{1-x}$                   |
| $a_k = 1$ om $k \leq n$ , 0 annars  | $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$           |
| Fixt $n$ , $a_k = \binom{n}{k}$   | $(1+x)^n$                         |
| Fixt $n$ , $a_k = \binom{n+k-1}{k}$   | $\frac{1}{(1-x)^n}$               |
| Fibonacci-talen<br>$f_0 = f_1 = 1$ , $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ för $k \geq 1$ | $\frac{1}{1-x-x^2}$               |
| Indikatorfunktion för jämna talen<br>$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$              | $\frac{1}{1-x^2}$                 |
| Catalantalen  | $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$        |
| Följd   | Exponentiell genererande funktion |
| $(1, 0, 0, \dots)$  | 1                                 |
| $(1, 1, 1, \dots)$  | $e^x$                             |
| $(0!, 1!, 2!, 3!, \dots)$   | $\frac{1}{1-x}$                   |
| Fixt $n$ , $a_k = \frac{n!}{(n-k)!}$  | $(1+x)^n$                         |

### Sannolikhetsteori

**Lemma 2.** Det gäller för alla händelser  $A$  och  $B$  att

- per definition är  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mu(\omega)$ ,
- så  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ ,
- och om  $A$  och  $B$  har tomt snitt,  $A \cap B = \emptyset$ , så är  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ ,

- och om de inte nödvändigtvis har tomt snitt har vi att

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B)$ ,
- och per definition är  $A$  och  $B$  oberoende precis när  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ .

**Lemma 3.** Om  $(\Omega, \mu)$  är något sannolikhetsrum,  $A \subseteq \Omega$  någon händelse, och  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  samt  $Z : \Omega \rightarrow V$  är slumpvariabler som tar värden i  $\mathbb{R}$  och i någon godtycklig mängd  $V$ , så gäller att:

1.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mu(\omega).$$

2. För alla  $a, b \in \mathbb{R}$  så är

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Väntevärdet är alltså en linjär funktional.

3.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A].$$

4. Om  $X(\omega) \leq C$  för varje  $\omega$ , eller ekvivalent om  $\mathbb{P}(X \leq C) = 1$ , så är  $\mathbb{E}[X] \leq C$ .

5. Om  $\mathbb{E}[X] = C$  så finns det åtminstone ett  $\omega$  sådant att  $X(\omega) \geq C$ .

6. Om  $Z$  är likformigt fördelad på  $V$  så gäller det för varje delmängd  $W \subseteq V$  att

$$\mathbb{P}(Z \in W) = \frac{|W|}{|V|}.$$