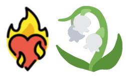
Tentamen i kombinatorik, 11 Mars 2024 · 1MA020

Vilhelm Agdur[1]

11 Mars 2024

Lycka till! 

Fråga 1

Erdős-Székeres sats säger följande:

Teorem 1. *För alla* $r, s \geq 1$ *gäller det att varje följd av* $(r-1)(s-1)+1$ *distinkta reella tal antingen innehåller en ökande delföljd av längd* r *eller en minskande delföljd av längd* s*.*

Bevisa detta påstående.[2]

Fråga 2

Del a): Ge ett kombinatoriskt bevis för att

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Del b): Ge ett kombinatoriskt bevis för att

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}\binom{n-5}{k-5} = \binom{n}{k}\binom{k}{2}\binom{k-2}{3}.$$

Fråga 3

Del a): Givet en följd $a_0, a_1, \ldots$, definiera dess exponentiella genererande funktion.
Del b): Vad är Fibonaccitalen? Använd rekursionen för dem för att härleda en differentialekvation som löses av den exponentiella genererande funktionen för Fibonaccitalen.

Fråga 4

Del a): Definiera vad som menas med en händelse, med en slumpvariabel, och med väntevärdet för en slumpvariabel. Bevisa att väntevärdet är linjärt, alltså att

$$\mathbb{E}[aX+bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

för alla slumpvariabler X och Y och alla $a, b \in \mathbb{R}$.

[1] Jag kommer att besöka tentasalen för frågor. Om ni behöver nå mig för frågor om tentan utanför den tiden kan ni nå mig på `072-373 32 90`.

[2] Ledtråd: Lådprincipen.

Del b): Unionsbegränsningen är följande olikhet för en samling händelser $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right).$$

Kräver denna olikhet att händelserna är oberoende?

Ge ett bevis för denna olikhet.[3]

[3] Vi har sett tre olika bevis i kursen, ett i föreläsningen och två till i övningarna till föreläsningarna. Vilket korrekt bevis som helst är så klart ett korrekt svar på denna fråga.

Fråga 5

Vi sammanfattade merparten av våra räkneproblem i kursen i en stor tabell, som vi kallade den "tolvfaldiga vägen". Denna tabell finns med i formelsamlingen.

Del a):

Välj sju av cellerna i denna tabell, och motivera varför just det problemet hör hemma i den cellen.[4]

Del b):

Välj tre av cellerna[5] och bevisa att formeln vi ger stämmer. Du får lov att, i dina bevis, antaga att alla andra formler i tabellen redan är kända.

[4] Du behöver alltså inte, i denna del, förklara eller bevisa formeln – bara ge en tolkning av problemet som förklarar varför det passar in i den cellen.

[5] Förutom de på sista raden, och mellersta i näst sista raden – vi har ju ingen formel för heltalspartitioner, och de två "dumma cellerna" är inte intressanta.

Fråga 6

En k-cykel i en graf $G = (V, E)$ är en följd $v_1, v_2, \ldots, v_k$ av k stycken noder i grafen, sådan att v_{i-1} och v_i är grannar för varje i, och v_1 och v_k är grannar.

Del a): Vad är en Erdős-Rényi-graf med parameterar n och p? Ge en definition. Räkna sedan ut väntevärdet av antalet k-cykler i en $G(n, p)$-graf.

Del b): Bevisa att sannolikheten att det finns en k-cykel i en $G\left(n, \frac{c}{n}\right)$-graf går mot noll med n för varje fixt $c > 0$.

Fråga 7

Betrakta ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$$

där vi kräver att alla variablerna är ickenegativa heltal, och att

- x_1 är ett udda tal,
- x_2 är ett jämnt tal,
- $2 \leq x_3 \leq 9$,

- och x_4 kan vara vilket tal som helst, men det kan vara målat grönt, lila, vitt, eller rött.

Beteckna antalet distinkta lösningar[6] som uppfyller våra krav med ℓ_n.

Beräkna genererande funktionen för följden $\{\ell_n\}_{n=0}^{\infty}$.

[6] Lösningar med olika färg på x_4 betraktar vi alltså som olika.

Fråga 8

Antag att $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \{-1, 1\}^n$, det vill säga varje v_i är en följd av n stycken ± 1or. Vi kan betrakta dessa som enhetsvektorer i $\mathbb{R}^n$, så att det blir väldefinierat att multiplicera dessa med reella tal och addera dem.

Bevisa[7] att det finns en följd $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, med $\eta_i = \pm 1$ för varje i, sådan att

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i \right\| \leq \sqrt{n},$$

där vi menar den vanliga euklidiska normen av en vektor, det vill säga

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i \right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i v_{i,j} \right)^2}.$$

[7] Ledtråd: Detta är en övning på probabilistiska metoden.

Formelsamling

Den tolvfaldiga vägen

	Generellt f	Injektivt f	Surjektivt f
Bägge särskiljbara	Ord ur X av längd n x^n	Permutation ur X av längd n $\frac{x!}{(x-n)!}$	Surjektion från N till X $x!\left\{ {n \atop x} \right\}$
Osärskiljbara objekt	Multi-delmängd av X av storlek n $\binom{n+x-1}{n}$	Delmängd av X av storlek n $\binom{x}{n}$	Kompositioner av n av längd x $\binom{n-1}{n-x}$
Osärskiljbara lådor	Mängdpartition av N i $\leq x$ delar $\sum_{k=1}^{x} \left\{ {n \atop k} \right\}$	Mängdpartition av N i $\leq x$ delar av storlek 1 1 om $n \leq x$, 0 annars	Mängdpartition av N i x delar $\left\{ {n \atop x} \right\}$
Bägge osärskiljbara	Heltalspartition av n i $\leq x$ delar $p_x(n+x)$	Sätt att skriva n som summan av $\leq x$ ettor 1 om $n \leq x$, 0 annars	Heltalspartitioner av n i x delar $p_x(n)$

Räkneregler för genererande funktioner

Lemma 2 (Räkneregler för genererande funktioner)**.** *Antag att vi har en följd $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, med genererande funktion F_a. Då gäller det att*

1. *För varje $j \geq 1$ är*

$$\sum_{k=j}^{\infty} a_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{k=j-1} a_k x^k\right) = F_a(x) - \sum_{k=0}^{k=j-1} a_k x^k$$

2. *För alla $m \geq 0$, $l \geq -m$ gäller det att*

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k x^{k+l} = x^l \left(\sum_{k=m}^{\infty} a_k x^k\right) = x^l \left(F_a(x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k\right)$$

3. *Det gäller att*[8]

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k = x F_a'(x).$$

[8] Denna räkneregel kan förstås generaliseras till att högre potenser av k motsvarar högre derivator – och om vi istället delar med någon potens av k får vi primitiva funktioner till den genererande funktionen.

Vanliga genererande funktioner

Följd	Genererande funktion
$(1, 0, 0, \ldots)$	1
$(1, 1, 1, \ldots)$	$\frac{1}{1-x}$
$a_k = 1$ om $k \leq n$, 0 annars	$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
Fixt n, $a_k = \binom{n}{k}$	$(1+x)^n$
Fixt n, $a_k = \binom{n+k-1}{k}$	$\frac{1}{(1-x)^n}$
Fibonaccitalen $f_0 = f_1 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ för $k \geq 1$	$\frac{1}{1-x-x^2}$
Indikatorfunktion för jämna talen $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$	$\frac{1}{1-x^2}$
Catalantalen	$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

Följd	Exponentiell genererande funktion
$(1, 0, 0, \ldots)$	1
$(1, 1, 1, \ldots)$	e^x
$(0!, 1!, 2!, 3!, \ldots)$	$\frac{1}{1-x}$
Fixt n, $a_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$(1+x)^n$

Sannolikhetsteori

Lemma 3. *Det gäller för alla händelser A och B att*

- *per definition är $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mu(\omega)$,*
- *så $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,*
- *och om A och B har tomt snitt, $A \cap B = \emptyset$, så är $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$,*

- *och om de inte nödvändigtvis har tomt snitt har vi att*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B)$,
- *och per definition är A och B oberoende precis när $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.*

Lemma 4. *Om (Ω, μ) är något sannolikhetsrum, $A \subseteq \Omega$ någon händelse, och $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ samt $Z : \Omega \to V$ är slumpvariabler som tar värden i $\mathbb{R}$ och i någon godtycklig mängd V, så gäller att:*

1. $$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mu(\omega).$$

2. *För alla $a, b \in \mathbb{R}$ så är*

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Väntevärdet är alltså en linjär funktional.

3. $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A].$$

4. *Om $X(\omega) \leq C$ för varje ω, eller ekvivalent om $\mathbb{P}(X \leq C) = 1$, så är $\mathbb{E}[X] \leq C$.*

5. *Om $\mathbb{E}[X] = C$ så finns det åtminstone ett ω sådant att $X(\omega) \geq C$.*

6. *Om Z är likformigt fördelad på V så gäller det för varje delmängd $W \subseteq V$ att*

$$\mathbb{P}(Z \in W) = \frac{|W|}{|V|}.$$