Extramaterial: Formler och räkneregler · 1MA020

Vilhelm Agdur[1]

[1] vilhelm.agdur@math.uu.se

4 mars 2025

I detta dokument ligger en samling av viktiga resultat och räkneregler, sammanfattade utan bevis.

Den tolvfaldiga vägen

	Generellt f	Injektivt f	Surjektivt f
Bägge särskiljbara	Ord ur X av längd n x^n	Permutation ur X av längd n $\frac{x!}{(x-n)!}$	Surjektion från N till X $x!\left\{ n \atop x \right\}$
Osärskiljbara objekt	Multi-delmängd av X av storlek n $\binom{n+x-1}{n}$	Delmängd av X av storlek n $\binom{x}{n}$	Kompositioner av n av längd x $\binom{n-1}{n-x}$
Osärskiljbara lådor	Mängdpartition av N i $\leq x$ delar $\sum_{k=1}^{x} \left\{ n \atop k \right\}$	Mängdpartition av N i $\leq x$ delar av storlek 1 1 om $n \leq x$, 0 annars	Mängdpartition av N i x delar $\left\{ n \atop x \right\}$
Bägge osärskiljbara	Heltalspartition av n i $\leq x$ delar $p_x(n+x)$	Sätt att skriva n som summan av $\leq x$ ettor 1 om $n \leq x$, 0 annars	Heltalspartitioner av n i x delar $p_x(n)$

Räkneregler för genererande funktioner

Lemma 1 (Räkneregler för genererande funktioner)**.** *Antag att vi har en följd $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, med genererande funktion F_a. Då gäller det att*

1. *För varje $j \geq 1$ är*

$$\sum_{k=j}^{\infty} a_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{k=j-1} a_k x^k \right) = F_a(x) - \sum_{k=0}^{k=j-1} a_k x^k$$

2. *För alla $m \geq 0$, $l \geq -m$ gäller det att*

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k x^{k+l} = x^l \left(\sum_{k=m}^{\infty} a_k x^k \right) = x^l \left(F_a(x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k \right)$$

3. *Det gäller att*[2]

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k = \frac{F_a'(x)}{x}.$$

[2] Denna räkneregel kan förstås generaliseras till att högre potenser av k motsvarar högre derivator – och om vi istället delar med någon potens av k får vi primitiva funktioner till den genererande funktionen.

Vanliga genererande funktioner

Följd	Genererande funktion
$(1,0,0,\ldots)$	1
$(1,1,1,\ldots)$	$\frac{1}{1-x}$
$a_k = 1$ om $k \leq n$, 0 annars	$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
Fixt n, $a_k = \binom{n}{k}$	$(1+x)^n$
Fixt n, $a_k = \binom{n+k-1}{k}$	$\frac{1}{(1-x)^n}$
Fibonaccitalen $f_0 = f_1 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ för $k \geq 1$	$\frac{1}{1-x-x^2}$
Indikatorfunktion för jämna talen $(1,0,1,0,1,0,\ldots)$	$\frac{1}{1-x^2}$
Catalantalen	$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

Följd	Exponentiell genererande funktion
$(1,0,0,\ldots)$	1
$(1,1,1,\ldots)$	e^x
$(0!,1!,2!,3!,\ldots)$	$\frac{1}{1-x}$
Fixt n, $a_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$(1+x)^n$

Sannolikhetsteori

Lemma 2. *Det gäller för alla händelser A och B att*

- *per definition är $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mu(\omega)$,*
- *så $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,*
- *och om A och B har tomt snitt, $A \cap B = \emptyset$, så är $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$,*

- *och om de inte nödvändigtvis har tomt snitt har vi att*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B)$,
- *och per definition är A och B oberoende precis när* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

Lemma 3. *Om (Ω, μ) är något sannolikhetsrum, $A \subseteq \Omega$ någon händelse, och $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ samt $Z : \Omega \to V$ är slumpvariabler som tar värden i $\mathbb{R}$ och i någon godtycklig mängd V, så gäller att:*

1. $$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mu(\omega).$$

2. *För alla $a, b \in \mathbb{R}$ så är*

   $$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

   Väntevärdet är alltså en linjär funktional.

3. $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A].$$

4. *Om $X(\omega) \leq C$ för varje ω, eller ekvivalent om $\mathbb{P}(X \leq C) = 1$, så är $\mathbb{E}[X] \leq C$.*

5. *Om $\mathbb{E}[X] = C$ så finns det åtminstone ett ω sådant att $X(\omega) \geq C$.*

6. *Om Z är likformigt fördelad på V så gäller det för varje delmängd $W \subseteq V$ att*

   $$\mathbb{P}(Z \in W) = \frac{|W|}{|V|}.$$