Lsningsfrslag - Frelsning 4

Kristoffer Kulju

March 6, 2025

vning 1

Ge ett bevis fr fljande rekursion fr Stirlings cykeltal:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

Antag att vi har $n+1$ personer som ska delas ut mellan k osrskiljbara runda bord. ena sidan vet vi, per definition, att de rknas av vnstra ledet av vr ekvation.

Antag nu att en av vra personer r Gauss. Endera sitter Gauss ensam vid ett bord, och i s fall finns det $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$ stt att dela ut de resterande n gsterna runt de resterande $k-1$ borden. Ifall Gauss inte sitter ensam finns det en person som sitter direkt hgerom honom. Efter att vi gjort detta val kan Gauss och denna bordsgranne betraktas som en och samma person, och d finns det $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ olika stt att placera ut vra n personer (egentligen $n-1$ personer och paret bestendes av Gauss och hans bordsgranne till hger) runt vra k bord.

Eftersom valet av Gauss bordsgranne kan gras p n olika stt finns det $n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ olika stt att att placera ut vra personer ifall vi vet att Gauss har en bordsgranne. Eftersom Gauss endera har tminstne en bordsgranne *eller* inte har en enda bordgranne fljer det att antalet placeringar r

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

vilket avslutar beviset.

vning 2

I slutet av frra frelsningen talade vi om derangemang allts permutationer σ sdana att $\sigma(i) \neq i$ fr alla i. Om vi istllet tnker p permutationer som stt att placera personer runt runda bord, hur kan vi se p vr bordsplacering om vr permutation r ett derangemang?

Om vi tnker oss permutationer som stt att dela ut personer runt osrskiljbara runda bord kommer antalet bord motsvara antalet cykler, och placeringen runt ett givet bord kommer motsvara ngon viss cykel. Att en permutation r ett derangemang r samma sak som att vi inte har ngon cykel av lngd ett, det vill sga att ingen sitter ensam vid sitt bord.

vning 3

Bevisa att

$$\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop k} \right\}$$

Frn definitionen av Stirlingtal av andra sorten fljer det att vnstra ledet beskriver antalet stt vi kan dela ut $n+1$ srskiljbara bollar i $k+1$ osrskiljbara ldor, om ingen lda fr lmnas tom. Antag att $n \geq k$ (annars r bda sidorna lika med noll).

Alternativt kan vi tnka att alla bollarna redan ligger i en lda, och att vi fr ver bollarna frn den ldan till k stycken andra ldor, s att ingen lda lmnas tom. Om vi tar j stycken bollar frn ldan som innehller alla bollar kan detta gras p $\binom{n}{j}$ olika stt. Sedan kan vi dela ut dessa bland vra k ldor p $\left\{ {j \atop k} \right\}$ olika stt, allts finns det enligt multiplikationsprincipen $\binom{n}{j}\left\{ {j \atop k} \right\}$ olika stt att vlja j bollar och dela ut dem bland k ldor.

j r som minst k, eftersom vi mste placera ut minst en boll i varje av vra k tomma ldor. j r som hgst n, eftersom vi har $n+1$ ldor och vi fr inte tmma ldan som innehll alla bollarna i brjan helt och hllet. Eftersom $j = k$ *eller* $j = k+1$ ... *eller* $j = n-1$ *eller* $j = n$ fljer det frn additionsprincipen att det finns

$$\binom{n}{k}\left\{ {k \atop k} \right\} + \binom{n}{k+1}\left\{ {k+1 \atop k} \right\} + ... + \binom{n}{n-1}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \binom{n}{n}\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\left\{ {j \atop k} \right\}$$

olika stt att placera ut $n+1$ srskiljbara bollar i $k+1$ osrskiljbara ldor, vilket avslutar beviset.

vning 4

Skriv fljande permutation av [10] i cykelform

$$8, 9, 4, 10, 5, 7, 3, 2, 6, 1$$

Vi bestmmer frst $\sigma(1)$, sedan bestmmer vi $\sigma(\sigma(1))$, och fortstter komponera σ med sig sjlv tills vi fr tillbaka 1, varefter vi hittat en cykel. Om det finns ngot element k som inte var med i cykeln s bestmmer vi $\sigma(k)$, $\sigma(\sigma(k))$ o.s.v., tills vi fr tillbaka k, och vi har hittat en annan cykel. Vi gr dessa tills vi hittat cykler som innehller alla vra 10 element.

$\sigma(1) = 8$, $\sigma(8) = 2$, $\sigma(2) = 9$, $\sigma(9) = 6$, $\sigma(6) = 7$, $\sigma(7) = 3$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 10$, och $\sigma(10) = 1$. Allts har vi hittat fljande cyklen $(1, 8, 2, 9, 6, 7, 3, 4, 10)$. Det enda elementet som inte ingr i cykeln r 5, s $\sigma(5) = 5$ och vr andra cykel r (5). Allts kan permutationen skrivas i cykelform exempelvis som

$$(1, 8, 2, 9, 6, 7, 3, 4, 10)(5).$$