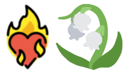
Tentamen i kombinatorik, 20 mars 2025 · 1MA020

Vilhelm Agdur[1]

20 mars 2025

[1] Jag kommer att besöka tentasalen ungefär klockan tre. Om ni behöver nå mig för frågor om tentan kan ni också nå mig på `072-373 32 90`.

Lycka till! 

Denna tenta innehåller åtta frågor, med fem poäng per fråga (alltså är maximal total poäng 40), och poänggränserna är de sedvanliga 18/25/32. Inga medhavda hjälpmedel tillåts, men det finns en formelsamling längst bak i dessa papper.

Fråga 1

Vi har redan sett grafer i kursen, men i denna fråga studerar vi i stället *hypergrafer*.[2] En hypergraf G består av en mängd V av noder, och en mängd $E \subseteq 2^V$ av delmängder till V som vi kallar för kanter. En hypergraf är alltså en graf där kanterna kan innehålla mer än två noder. Vi säger att en hypergraf är k-uniform om varje kant innehåller exakt k noder.

[2] De heter faktiskt så, detta är inte en term jag hittat på för att vara lustig.

Vi säger att en hypergraf är två-färgningsbar om det finns en färgning av dess noder i rött och blått sådan att ingen av dess kanter är monokromatisk, det vill säga, om det finns en mängd $R \subseteq V$ av noder sådan att $e \not\subseteq R$ och $e \not\subseteq V \setminus R$ för varje $e \in E$.

Teorem 1 (Erdős, 1963)**.** *Om G är en k-uniform hypergraf med färre än 2^{k-1} kanter så är G två-färgningsbar.*

Fråga 2

Bevisa följande sats:

Teorem 2 (Erdős, 1964)**.** *Det finns en k-uniform hypergraf G på n noder och m kanter som inte är två-färgningsbar närhelst*[3]

$$2^n \left(1 - m\frac{2\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right) < 1.$$

[3] Det var ett fel i uppgiften såsom den trycktes i tentan – specifikt saknades faktorn av m i formeln nedan. Se anslaget på Studium för hur detta påverkade rättningen och betygsättningen.

Ledtråd: Börja med att räkna ut sannolikheten att en slumpmässigt vald delmängd av storlek k kommer vara monokromatisk under en viss fix färgning, och finn en undre begränsning för denna.[4] Använd detta för att begränsa först sannolikheten att en slumpmässigt vald hypergraf inte har några monokromatiska kanter under en fix färgning, och använd sedan det för att begränsa sannolikheten att den är två-färgningsbar.

[4] Binomialkoefficient-funktionen är konvex, så

$$\frac{\binom{a}{k} + \binom{b}{k}}{\binom{a+b}{k}} \geq \frac{2\binom{(a+b)/2}{k}}{\binom{a+b}{k}}.$$

Fråga 3

Kom ihåg följande definition ur kursen:

Definition 3. Antag att $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ och $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ är två följder. Då ges deras *binomial-faltning* $a \circledast b$ av

$$(a \circledast b)_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i b_{k-i}.$$

Bevisa följande lemma:[5]

Lemma 4. *Antag att $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ och $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ är två följder, vars exponentiella genererande funktioner är $EG_a(x)$ och $EG_b(x)$. Då ges den genererande funktionen för binomial-faltningen $a \circledast b$ av*

$$EG_{a \circledast b}(x) = EG_a(x) EG_b(x).$$

[5] Du får lov att använda motsvarande resultat för ordinära genererande funktioner i detta bevis utan att bevisa det.

Fråga 4

Kom ihåg följande resultat ur kursen:

Teorem 5 (Inklusion-exklusion). *För varje samling av mängder $A_1, \ldots, A_n$ gäller det att*

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| &= \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right). \end{aligned}$$

Bevisa, med hjälp av detta, följande resultat:

Teorem 6. *Låt A och B vara ändliga icketomma mängder med $|A| = n$, $|B| = m$, och $n \geq m$. Antalet surjektioner från A till B ges av*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Fråga 5

Definiera Fibonaccitalen, och räkna ut vad deras ordinära genererande funktion är.[6]

[6] Här är vi alltså ute efter ett uttryck för denna i form av en rationell funktion. Du behöver alltså inte härleda en formel för varje enskild koefficient.

Fråga 6

Definiera Stirlings cykeltal $\left[{n \atop k}\right]$, och bevisa att det gäller för varje $n \geq 1$ att

$$\sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n!.$$

Fråga 7

Ge kombinatoriska bevis för följande likheter:

1.
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

2.
$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k}\binom{k}{2}.$$

3.
$$\left[{n+1 \atop k}\right] = \left[{n \atop k-1}\right] + n\left[{n \atop k}\right].$$

Fråga 8

Bevisa att om $S \subseteq [2n]$ har $n+1$ medlemmar så finns det $a, b \in S$, med $a < b$, sådana att b är delbart med a.

Formelsamling

Den tolvfaldiga vägen

	Generellt f	Injektivt f	Surjektivt f
Bägge särskiljbara	Ord ur X av längd n x^n	Permutation ur X av längd n $\frac{x!}{(x-n)!}$	Surjektion från N till X $x!\left\{ {n \atop x} \right\}$
Osärskiljbara objekt	Multi-delmängd av X av storlek n $\binom{n+x-1}{n}$	Delmängd av X av storlek n $\binom{x}{n}$	Kompositioner av n av längd x $\binom{n-1}{n-x}$
Osärskiljbara lådor	Mängdpartition av N i $\leq x$ delar $\sum_{k=1}^{x} \left\{ {n \atop k} \right\}$	Mängdpartition av N i $\leq x$ delar av storlek 1 1 om $n \leq x$, 0 annars	Mängdpartition av N i x delar $\left\{ {n \atop x} \right\}$
Bägge osärskiljbara	Heltalspartition av n i $\leq x$ delar $p_x(n+x)$	Sätt att skriva n som summan av $\leq x$ ettor 1 om $n \leq x$, 0 annars	Heltalspartitioner av n i x delar $p_x(n)$

Räkneregler för genererande funktioner

Lemma 7 (Räkneregler för genererande funktioner)**.** *Antag att vi har en följd $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, med genererande funktion F_a. Då gäller det att*

1. *För varje $j \geq 1$ är*

$$\sum_{k=j}^{\infty} a_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{k=j-1} a_k x^k \right) = F_a(x) - \sum_{k=0}^{k=j-1} a_k x^k$$

2. *För alla $m \geq 0$, $l \geq -m$ gäller det att*

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k x^{k+l} = x^l \left(\sum_{k=m}^{\infty} a_k x^k \right) = x^l \left(F_a(x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k \right)$$

3. *Det gäller att*[7]

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k = \frac{F_a'(x)}{x}.$$

[7] Denna räkneregel kan förstås generaliseras till att högre potenser av k motsvarar högre derivator – och om vi istället delar med någon potens av k får vi primitiva funktioner till den genererande funktionen.

Vanliga genererande funktioner

Följd	Genererande funktion
$(1, 0, 0, \ldots)$	1
$(1, 1, 1, \ldots)$	$\frac{1}{1-x}$
$a_k = 1$ om $k \leq n$, 0 annars	$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
Fixt n, $a_k = \binom{n}{k}$	$(1+x)^n$
Fixt n, $a_k = \binom{n+k-1}{k}$	$\frac{1}{(1-x)^n}$
Fibonaccitalen $f_0 = f_1 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ för $k \geq 1$	$\frac{1}{1-x-x^2}$
Indikatorfunktion för jämna talen $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$	$\frac{1}{1-x^2}$
Catalantalen	$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

Följd	Exponentiell genererande funktion
$(1, 0, 0, \ldots)$	1
$(1, 1, 1, \ldots)$	e^x
$(0!, 1!, 2!, 3!, \ldots)$	$\frac{1}{1-x}$
Fixt n, $a_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$(1+x)^n$

Sannolikhetsteori

Lemma 8. *Det gäller för alla händelser A och B att*

- *per definition är $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mu(\omega)$,*
- *så $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,*
- *och om A och B har tomt snitt, $A \cap B = \emptyset$, så är $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$,*

- *och om de inte nödvändigtvis har tomt snitt har vi att*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B)$,
- *och per definition är A och B oberoende precis när $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.*

Lemma 9. *Om (Ω, μ) är något sannolikhetsrum, $A \subseteq \Omega$ någon händelse, och $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ samt $Z : \Omega \to V$ är slumpvariabler som tar värden i $\mathbb{R}$ och i någon godtycklig mängd V, så gäller att:*

1. $$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mu(\omega).$$

2. *För alla $a, b \in \mathbb{R}$ så är*

   $$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

   Väntevärdet är alltså en linjär funktional.

3. $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A].$$

4. *Om $X(\omega) \leq C$ för varje ω, eller ekvivalent om $\mathbb{P}(X \leq C) = 1$, så är $\mathbb{E}[X] \leq C$.*

5. *Om $\mathbb{E}[X] = C$ så finns det åtminstone ett ω sådant att $X(\omega) \geq C$.*

6. *Om Z är likformigt fördelad på V så gäller det för varje delmängd $W \subseteq V$ att*

   $$\mathbb{P}(Z \in W) = \frac{|W|}{|V|}.$$