Övningstillfälle 2: Teoretiska övningar · 1MA020

Vilhelm Agdur[1]

[1] vilhelm.agdur@math.uu.se

10 februari 2023

Detta dokument innehåller en samling övningar i kombinatorik som inte kräver någon programmering, utan är avsedda att lösas med papper och penna. Merparten av dessa problem är svårare än potentiella tentaproblem, eftersom de är avsedda att lösas i grupp över en längre tid, inte snabbt och individuellt i en tentasal.

Övning 1. Vi har en följd $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ som ges av rekursionen

$$f(1) = 1, \quad f(2n) = f(n), \quad f(2n+1) = f(n) + f(n+1).$$

Låt F vara den ordinära genererande funktionen för f, alltså

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n.$$

Visa att vi, om vi låter $G(x) = F(x)/x$, har att

$$G(x) = \left(1 + x + x^2\right) G(x^2),$$

och således har att

$$F(x) = \frac{1}{x} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^j} + x^{2^{j+1}}\right).$$

Övning 2. Låt X vara en slumpvariabel som tar värdena $0, 1, 2, \ldots$ med sannolikheterna $p_0, p_1, p_2 \ldots$ och så vidare.[2] Låt $P(x)$ vara genererande funktionen för följden $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$.

[2] Om du inte redan vet vad termerna i den här uppgiften betyder är detta ett bra tillfälle att fräscha upp ditt minne av grundläggande sannolikhetsteori – det kommer att dyka upp senare i kursen. Visserligen kommer vi ge definitioner då, men antagandet kommer ändock att vara att ni har sett det innan och bara behöver en påminnelse.

1. Finn uttryck för väntevärdet $\mathbb{E}[X]$ och standardavvikelsen $\sigma(X)$ enbart i termer av $P(x)$.

2. Antag att Y dras från samma fördelning som X, oberoende av X. Vad är sannolikheten $p_n^{(2)}$ att deras summa blir n? Låt $P_2(x)$ vara den genererande funktionen för följden $p_n^{(2)}$, och finn ett uttryck för den i termer av $P(x)$.

3. Mer generellt, antag att $X_1, X_2, \ldots, X_k$ alla dras oberoende från vår givna fördelning. Låt

   $$p_n^{(k)} = \mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_k = n\right),$$

   och låt $P_k(x)$ vara den genererande funktionen för följden $p_n^{(k)}$. Uttryck denna i termer av $P(x)$.

Räkna delmängder till $[n]$ utan konsekutiva medlemmar

Låt f_n vara antalet delmängder till $[n]$ som inte innehåller både i och $i+1$ för något i, och låt $f_{n,k}$ vara antalet delmängder av storlek k till $[n]$ som inte innehåller både i och $i+1$ för något i. Vi studerar nu dessa två talföljder i resten av våra övningar.

Övning 3. Finn en rekursion för f_n, och använd denna rekursion för att hitta ett enkelt uttryck för f_n.

Övning 4. Finn en rekursion för $f_{n,k}$.

Vi definierar den *bivariata genererande funktionen* för denna följd genom följande dubbelsumma

$$F(x,y) = \sum_{n=1,k=1}^{\infty} f_{n,k} x^n y^k.$$

Använd rekursionen ni fann för $f_{n,k}$ för att finna en sluten form för F.[3]

[3] Vi kan använda samma metod som vi först använde för att hitta genererande funktionen för Fibonacci-talen – och även i detta fall kommer svaret att bli en rationell funktion, men nu i x och y.

Övning 5. Studera uttrycket

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\bigg|_{(x,1)},$$

alltså partialderivatan av F med avseende på y, utvärderad i punkten $(x,1)$. Vad är koefficienten framför x^n i detta uttryck?

Räkna sedan faktiskt ut denna derivata, och känn igen uttrycket ni får som en genererande funktion. Använd detta för att ge en ny likhet som involverar $f_{n,k}$.

Övning 6. Finn en sluten form för $f_{n,k}$. Det finns två huvudsakliga sätt ni kan gå tillväga:

1. Studera funktionen $F(x,y)$ som ni redan hittat, och finn koefficienten för $x^n y^k$ i detta uttryck direkt.
2. Definiera istället den ordinära genererande funktionen $F_k(x)$ genom att
$$F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k} x^n$$
för varje k, och använd rekursionen ni funnit för att finna ett uttryck för denna för varje k. Finn sedan koefficienten för x^n i F_k för varje par av n och k.

Övning 7. Fyll i vad ni funnit i Övning 3 och Övning 6 i den uppenbara likheten

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} f_{n,k},$$

och observera att vi funnit en ny likhet för f_n.

Bonus: Formlerna som vi härlett här med genererande funktioner är ju lockande enkla. Kan vi finna ett kombinatoriskt bevis för någon av dem?[4]

[4] Förutom för Övning 3 har jag inte själv funderat på denna frågan – så det här är inte en del av övningarna. Men om någon hittar ett kombinatoriskt bevis av de senare formlerna vore det intressant att se.