

# Tentamen i kombinatorik, 11 Mars 2024 · 1MA020

Vilhelm Agdur<sup>1</sup>

11 Mars 2024

<sup>1</sup> Jag kommer att besöka tentasalen för frågor. Om ni behöver nå mig för frågor om tentan utanför den tiden kan ni nå mig på 072-373 32 90.



## Fråga 1

Erdős-Székeres sats säger följande:

**Teorem 1.** För alla  $r, s \geq 1$  gäller det att varje följd av  $(r-1)(s-1)+1$  distinkta reella tal antingen innehåller en ökande delföljd av längd  $r$  eller en minskande delföljd av längd  $s$ .

Bevisa detta påstående.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Ledtråd: Lådprincipen.

## Fråga 2

**Del a):** Ge ett kombinatoriskt bevis för att

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

**Del b):** Ge ett kombinatoriskt bevis för att

$$\binom{n}{2} \binom{n-2}{3} \binom{n-5}{k-5} = \binom{n}{k} \binom{k}{2} \binom{k-2}{3}.$$

## Fråga 3

**Del a):** Givet en följd  $a_0, a_1, \dots$ , definiera dess exponentiella genererande funktion.

**Del b):** Vad är Fibonaccitalen? Använd rekursionen för dem för att härleda en differentialekvation som löses av den exponentiella genererande funktionen för Fibonaccitalen.

## Fråga 4

**Del a):** Definiera vad som menas med en händelse, med en slumpvariabel, och med väntevärdet för en slumpvariabel. Bevisa att väntevärdet är linjärt, alltså att

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

för alla slumpvariabler  $X$  och  $Y$  och alla  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Del b):** Unionsbegränsningen är följande olikhet för en samling händelser  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Kräver denna olikhet att händelserna är oberoende?

Ge ett bevis för denna olikhet.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Vi har sett tre olika bevis i kursen, ett i föreläsningen och två till i övningarna till föreläsningarna. Vilket korrekt bevis som helst är så klart ett korrekt svar på denna fråga.

### Fråga 5

Vi sammanfattade merparten av våra räkneproblem i kursen i en stor tabell, som vi kallade den "tolvfaldiga vägen". Denna tabell finns med i formelsamlingen.

**Del a):**

Välj sju av cellerna i denna tabell, och motivera varför just det problemet hör hemma i den cellen.<sup>4</sup>

**Del b):**

Välj tre av cellerna<sup>5</sup> och bevisa att formeln vi ger stämmer. Du får lov att, i dina bevis, antaga att alla andra formler i tabellen redan är kända.

<sup>4</sup> Du behöver alltså inte, i denna del, förklara eller bevisa formeln – bara ge en tolkning av problemet som förklarar varför det passar in i den cellen.

<sup>5</sup> Förutom de på sista raden, och mellersta i näst sista raden – vi har ju ingen formel för heltalspartitioner, och de två "dumma cellerna" är inte intressanta.

### Fråga 6

En  $k$ -cykel i en graf  $G = (V, E)$  är en följd  $v_1, v_2, \dots, v_k$  av  $k$  stycken noder i grafen, sådan att  $v_{i-1}$  och  $v_i$  är grannar för varje  $i$ , och  $v_1$  och  $v_k$  är grannar.

**Del a):** Vad är en Erdős-Rényi-graf med parameterar  $n$  och  $p$ ? Ge en definition. Räkna sedan ut väntevärdet av antalet  $k$ -cykler i en  $G(n, p)$ -graf.

**Del b):** Bevisa att sannolikheten att det finns en  $k$ -cykel i en  $G(n, \frac{c}{n})$ -graf går mot noll med  $n$  för varje fixt  $c > 0$ .

### Fråga 7

Betrakta ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$$

där vi kräver att alla variablerna är icke-negativa heltal, och att

- $x_1$  är ett udda tal,
- $x_2$  är ett jämnt tal,
- $2 \leq x_3 \leq 9$ ,

- och  $x_4$  kan vara vilket tal som helst, men det kan vara målat grönt, lila, vitt, eller rött.

Beteckna antalet distinkta lösningar<sup>6</sup> som uppfyller våra krav med  $\ell_n$ .

Beräkna genererande funktionen för följderna  $\{\ell_n\}_{n=0}^\infty$ .

<sup>6</sup> Lösningar med olika färg på  $x_4$  betraktar vi alltså som olika.

### Fråga 8

Antag att  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \{-1, 1\}^n$ , det vill säga varje  $v_i$  är en följd av  $n$  stycken  $\pm 1$ or. Vi kan betrakta dessa som enhetsvektorer i  $\mathbb{R}^n$ , så att det blir väldefinierat att multiplicera dessa med reella tal och addera dem.

Bevisa<sup>7</sup> att det finns en följd  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ , med  $\eta_i = \pm 1$  för varje  $i$ , sådan att

$$\left\| \sum_{i=1}^n \eta_i v_i \right\| \leq \sqrt{n},$$

där vi menar den vanliga euklidiska normen av en vektor, det vill säga

$$\left\| \sum_{i=1}^n \eta_i v_i \right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \eta_i v_{i,j} \right)^2}.$$

<sup>7</sup> Ledtråd: Detta är en övning på probabilistiska metoden.

## Formelsamling

## Den tolvfaldiga vägen

	Generellt $f$	Injektivt $f$	Surjektivt $f$
Bägge särskiljbara	Ord ur $X$ av längd $n$ $x^n$	Permutation ur $X$ av längd $n$ $\frac{x!}{(x-n)!}$	Surjektion från $N$ till $X$ $x! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ x \end{smallmatrix} \right\}$
Osärskiljbara objekt	Multi-delmängd av $X$ av storlek $n$ $\binom{n+x-1}{n}$	Delmängd av $X$ av storlek $n$ $\binom{x}{n}$	Kompositioner av $n$ av längd $x$ $\binom{n-1}{n-x}$
Osärskiljbara lådor	Mängdpartition av $N$ $i \leq x$ delar $\sum_{k=1}^x \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$	Mängdpartition av $N$ $i \leq x$ delar av storlek 1 1 om $n \leq x$ , 0 annars	Mängdpartition av $N$ $i$ $x$ delar $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ x \end{smallmatrix} \right\}$
Bägge osärskiljbara	Heltalspartition av $n$ i $\leq x$ delar $p_x(n+x)$	Sätt att skriva $n$ som summan av $\leq x$ ettor 1 om $n \leq x$ , 0 annars	Heltalspartitioner av $n$ $i$ $x$ delar $p_x(n)$

## Räkneregler för genererande funktioner

**Lemma 2** (Räkneregler för genererande funktioner). Antag att vi har en följd  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ , med genererande funktion  $F_a$ . Då gäller det att

1. För varje  $j \geq 1$  är

$$\sum_{k=j}^{\infty} a_k x^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) - \left( \sum_{k=0}^{j-1} a_k x^k \right) = F_a(x) - \sum_{k=0}^{j-1} a_k x^k$$

2. För alla  $m \geq 0$ ,  $l \geq -m$  gäller det att

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k x^{k+l} = x^l \left( \sum_{k=m}^{\infty} a_k x^k \right) = x^l \left( F_a(x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k \right)$$

3. Det gäller att<sup>8</sup>

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k = x F'_a(x).$$

<sup>8</sup> Denna räkneregler kan förstås generaliseras till att högre potenser av  $k$  motsvarar högre derivator – och om vi istället delar med någon potens av  $k$  får vi primitiva funktioner till den genererande funktionen.

## Vanliga genererande funktioner

Följd	Genererande funktion
$(1, 0, 0, \dots)$	1
$(1, 1, 1, \dots)$	$\frac{1}{1-x}$
$a_k = 1$ om $k \leq n$ , 0 annars	$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
Fixt $n$ , $a_k = \binom{n}{k}$	$(1+x)^n$
Fixt $n$ , $a_k = \binom{n+k-1}{k}$	$\frac{1}{(1-x)^n}$
Fibonacci-talen	$\frac{1}{1-x-x^2}$
$f_0 = f_1 = 1$ , $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ för $k \geq 1$	
Indikatorfunktion för jämna talen	$\frac{1}{1-x^2}$
$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$	
Catalantalen	$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$
Följd	Exponentiell genererande funktion
$(1, 0, 0, \dots)$	1
$(1, 1, 1, \dots)$	$e^x$
$(0!, 1!, 2!, 3!, \dots)$	$\frac{1}{1-x}$
Fixt $n$ , $a_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$(1+x)^n$

## Sannolikhetsteori

**Lemma 3.** Det gäller för alla händelser  $A$  och  $B$  att

- per definition är  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mu(\omega)$ ,
- så  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ ,
- och om  $A$  och  $B$  har tomt snitt,  $A \cap B = \emptyset$ , så är  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ ,

- och om de inte nödvändigtvis har tomt snitt har vi att

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \mathbb{P}(B)$ ,
- och per definition är  $A$  och  $B$  oberoende precis när  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ .

**Lemma 4.** Om  $(\Omega, \mu)$  är något sannolikhetsrum,  $A \subseteq \Omega$  någon händelse, och  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  samt  $Z : \Omega \rightarrow V$  är slumpvariabler som tar värden i  $\mathbb{R}$  och i någon godtycklig mängd  $V$ , så gäller att:

1.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mu(\omega).$$

2. För alla  $a, b \in \mathbb{R}$  så är

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Väntevärdet är alltså en linjär funktional.

3.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A].$$

4. Om  $X(\omega) \leq C$  för varje  $\omega$ , eller ekvivalent om  $\mathbb{P}(X \leq C) = 1$ , så är  $\mathbb{E}[X] \leq C$ .

5. Om  $\mathbb{E}[X] = C$  så finns det åtminstone ett  $\omega$  sådant att  $X(\omega) \geq C$ .

6. Om  $Z$  är likformigt fördelad på  $V$  så gäller det för varje delmängd  $W \subseteq V$  att

$$\mathbb{P}(Z \in W) = \frac{|W|}{|V|}.$$