



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Ayudantías Segundo Semestre 2025

Teoría de Discos de Acreción, Fundamentos Teóricos, Simulaciones
Numéricas y Conexión Observacional (AST331)

Departamento de Física
Universidad Técnica Federico Santa María
Avenida Vicuña Mackenna 3939, San Joaquín, Santiago, Chile

Profesor: Matías Montesinos
Ayudante: Vicente Honorato

Índice

1. Mecánica de Fluidos: Conceptos Claves	4
1.1. Ayudantía 1: Ecuación de Continuidad	4
1.1.1. Derivación Ecuación de Continuidad	4
1.1.2. Problema I	6
1.1.3. Problema II	7
1.1.4. Problema Propuesto	7
1.2. Ayudantía 2: Acreción de Bondi y Derivada Convectiva (Material)	8
1.2.1. Acreción de Bondi	8
1.2.2. Derivada Material (o Convectiva)	9
1.2.3. Problema I	10
1.2.4. Problema II	10
1.2.5. Problema III	11
1.3. Ayudantía 3: Aplicación Derivada Material y Curvas Características (Ec. de Advección y Ec. de Burgers)	12
1.3.1. Problema I	12
1.3.2. Problema II	12
1.3.3. Problema III	12
2. Discos de Acreción	13
2.1. Ayudantía 4: Ecuación de Euler, Ecuación de Navier-Stokes y Tensor de Esfuerzos	13
2.1.1. Ecuación de Euler	13
2.1.2. Ecuación de Navier-Stokes	14
2.1.3. Tensor de Esfuerzos (<i>Stress Tensor</i>)	15
2.1.4. Problema I	15
2.1.5. Problema II	16
2.2. Ayudantía 5: Aproximación a Discos Autogravitantes y Recapitulación de Contenidos	17
2.2.1. Velocidad Azimutal en Discos Autogravitantes	17
2.2.2. Evaluación Interactiva	19
2.3. Ayudantía 6: Ecuación de Difusión en Discos de Acreción y Solución para $\nu = \text{cte.}$	20
2.3.1. Dinámica de un disco delgado	20
2.3.2. Ecuación de difusión general del disco	21
2.3.3. Ecuación de difusión en un disco Kepleriano	23
2.3.4. Solución para viscosidad constante ($\nu = \text{cte.}$)	23
2.3.5. Interpretación física de la solución	25
3. Conexión Observacional	26
3.1. Ayudantía 7: Expresiones Analíticas en Discos de Acreción para Contraste Observacional	26
3.1.1. Luminosidad	27
3.1.2. Tasa de acreción	29
3.1.3. Temperatura efectiva	31
3.1.4. Tiempo viscoso	32
3.2. Ayudantía 8: Límite de Eddington y Discos- α	35
3.2.1. Límite de Eddington	35

3.2.2.	Estructura de discos- α estacionarios	38
3.3.	Ayudantía 9: Cantidades Físicas Locales en Función de α	41
3.3.1.	Estructura local de discos delgados	41

Capítulo 1

Mecánica de Fluidos: Conceptos Claves

1.1. Ayudantía 1: Ecuación de Continuidad

1.1.1. Derivación Ecuación de Continuidad

Como bien sabemos, la dinámica de fluidos estudia el movimiento de los fluidos (líquidos y gases) y busca describirlo mediante ecuaciones. Dado que los fenómenos de interés son macroscópicos, el fluido se modela como un *medio continuo*. Esto significa que cualquier elemento diferencial de volumen es lo suficientemente grande como para contener un número muy elevado de moléculas. En adelante, cuando hablemos de elementos “infinitesimales”, entenderemos que son físicamente pequeños en comparación con el cuerpo bajo estudio, pero todavía grandes frente a las distancias intermoleculares.

De manera similar, las expresiones *partícula de fluido* y *punto en un fluido* deben interpretarse así: al referirnos al desplazamiento de una partícula de fluido, no aludimos al de una molécula individual, sino al de un elemento diferencial de volumen que incluye muchas moléculas.

Desde el punto de vista matemático, el estado de un fluido en movimiento se caracteriza por campos que describen la distribución de la velocidad y de las magnitudes termodinámicas. En particular, la velocidad se representa por el campo $\vec{v}(x, y, z, t)$ y, como ejemplos de cantidades termodinámicas, consideramos la presión $p(x, y, z, t)$ y la densidad $\rho(x, y, z, t)$. Así, para cada punto (x, y, z) del espacio y cada instante t , quedan especificados los valores de \vec{v} , p y ρ .

Para la derivación de la ecuación de continuidad consideremos, entonces, un volumen V_0 en el espacio. Entonces, la masa de este se escribe como,

$$dM = \rho dV \quad \int \quad (1.1)$$

$$M = \iiint_{V_0} \rho dV \quad (1.2)$$

Donde ρ corresponde a la densidad del fluido. Por otra parte, el diferencial de volumen puede expresarse como,

$$dV = \vec{v} dt d\vec{A} \quad (1.3)$$

$$= \vec{v} dt \hat{n} dA \quad (1.4)$$

$$= (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA dt \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

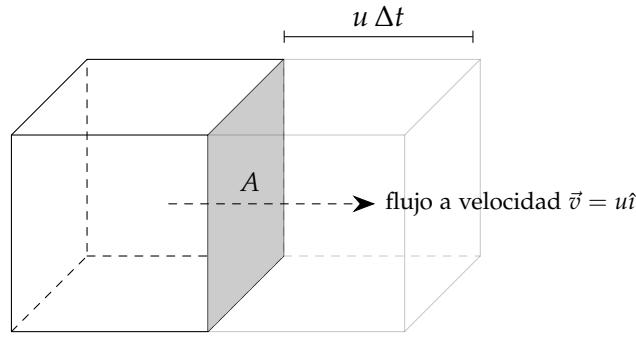


Figura 1.1: Flujo a velocidad u y desplazamiento $u \Delta t$, en un volumen de control.

Donde \hat{n} corresponde al vector normal de esta área, $\vec{v} \equiv u\hat{i}$ es la velocidad del fluido, dt al diferencial de tiempo durante el cual el fluido avanza esa distancia y dA al diferencial de área del cuerpo por donde sale el fluido. En Fig. 1.1 vemos que este vector $\hat{n} \equiv \hat{i}$. Por esta razón, tenemos,

$$dV = u dA dt \quad (1.7)$$

Sin embargo, para no perder formalidad utilizamos simplemente,

$$dV = \vec{v} d\vec{A} dt \quad (1.8)$$

Con esto, podemos decir explícitamente que la cantidad diferencial de masa que pasa por ese volumen puede expresarse como,

$$dM = \rho \vec{v} d\vec{A} dt \quad (1.9)$$

De manera que si consideramos que $dM \equiv \left(\frac{dM}{dt}\right) dt$, tenemos que la tasa de flujo de masa puede escribirse como,

$$\frac{dM}{dt} \equiv d\dot{M} = \rho \vec{v} d\vec{A} \quad (1.10)$$

Por lo que al integrar sobre la superficie tenemos la tasa de masa total que sale del sistema

$$\dot{M} = \oint_s \rho \vec{v} d\vec{A} \quad (1.11)$$

Ahora, si volvemos a mirar Ec. 1.2 podemos ver la disminución por unidad de tiempo de la masa de fluido en el volumen V_0 , de la siguiente manera,

$$\dot{M} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} \rho dV \quad (1.12)$$

Por lo que al igualar Ec. 1.12 con Ec. 1.11, tenemos,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} \rho dV = -\oint_s \rho \vec{v} d\vec{A} \quad (1.13)$$

Donde sabemos que la integral superficial podemos transformarla en una integral volumétrica con el Teorema de la Divergencia (Teorema de Gauss), de la siguiente manera,

$$\oint_s \vec{F} d\vec{A} \equiv \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV \quad (1.14)$$

En este caso nuestra " \vec{F} " sería $(\rho \vec{v})$, por lo que la igualdad de Ec. 1.13, quedaría de la siguiente forma,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} \rho dV = - \iiint_{V_0} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV \quad (1.15)$$

Esto nos permite reescribir esta ecuación convenientemente, de la siguiente manera,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} \rho dV + \iiint_{V_0} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0 \quad (1.16)$$

$$(1.17)$$

Donde sabemos que la derivada puede entrar a la integral debido a que en este caso son cantidades independientes una con la otra, resultando de esta manera en,

$$\iiint_{V_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \quad (1.18)$$

Dado que esta ecuación debe valer para cualquier volumen, lo que se integra debe anularse,

$$\boxed{\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \quad (1.19)$$

Esta ecuación la conocemos como la **Ecuación de Continuidad**, que expresa la conservación de la masa para un fluido. Se conoce $\vec{j} = \rho \vec{v}$ como la densidad de flujo de masa. Tomamos dos casos esenciales donde cambia esta ecuación.

■ **Caso $\rho = cte.$:**

Aquí vemos que la densidad no depende ni del tiempo ni del espacio. Por esta razón,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.20)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.21)$$

Aquí estamos en presencia de un **fluido incompresible homogéneo**, lo que implica que cada partícula conserva su volumen

■ **Caso $\rho = \rho(t, x, y, z)$:**

Aquí se expande la **ecuación de continuidad**, mostrada en Ec. 2.50, de la siguiente manera,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \rho) = 0. \quad (1.22)$$

1.1.2. Problema I

La divergencia del campo de velocidades en coordenadas esféricas puede escribirse como:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin(\theta)) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \quad (1.23)$$

Donde V_r , V_θ y V_ϕ son las componentes de la velocidad en las direcciones r , θ y ϕ , respectivamente. Determine si un flujo con el siguiente campo de velocidades es *incompresible*:

$$V_r = -U \cos(\theta) \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (1.24)$$

$$V_\theta = U \sin(\theta) \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \quad (1.25)$$

$$V_\phi = 0 \quad (1.26)$$

Donde R y U son constantes (nótese que R **no** es la constante universal de los gases en este problema).

1.1.3. Problema II

El perfil de velocidad del flujo en una tubería en la dirección z (V_z) está dado por:

$$V_z = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (1.27)$$

donde r es la coordenada radial (en coordenadas cilíndricas), R es el radio de la tubería, L es la longitud de la tubería, Δp es la diferencia de presión entre la entrada y la salida, y μ es la *viscosidad dinámica*. Obtenga una expresión para la **tasa de flujo de masa** a través de la tubería.

1.1.4. Problema Propuesto

Considere el sistema mostrado en la Fig. 1.2. Sea un volumen de control cúbico de aristas Δx , Δy , Δz centrado en (x, y, z) , con normal saliente \hat{n} . Sea $\vec{v} = (u, v, w)$ el campo de velocidades y $\rho = \rho(x, y, z)$ la densidad. **Obtenga el diferencial de la tasa de flujo de masa que sale del volumen $d\dot{M}_{\text{tot}}$** mediante una aproximación local (diferencias finitas), y muestre que en el límite $\Delta \ell \rightarrow d\ell$ se recupera el teorema de la divergencia en forma de integral volumétrica.

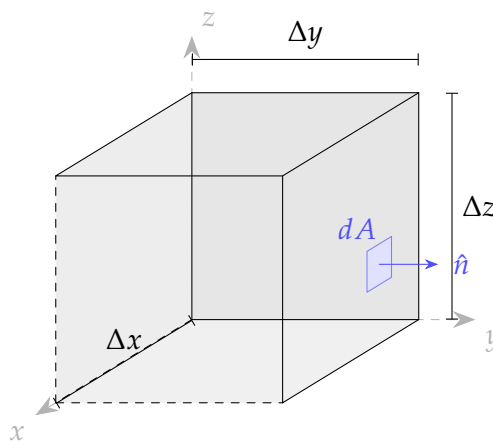


Figura 1.2: Volumen de control cúbico de aristas Δx , Δy y Δz en los ejes x , y y z , respectivamente. En la cara derecha se muestra un elemento de área dA (azul) con su normal saliente \hat{n} .

Hint: Considere que $d\dot{M}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n=6} \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA$, donde \hat{n} corresponde al vector normal de cada cara del cubo.

Lectura Sugerida

- Landau and Lifshitz (1987) — Capitulo 1, en §1 — Derivación *Ecuación de Continuidad*.
- Garvin (2023) — Problemas asociados.

1.2. Ayudantía 2: Acreción de Bondi y Derivada Convectiva (Material)

1.2.1. Acreción de Bondi

La acreción de Bondi describe el proceso mediante el cual un objeto compacto, inmerso en un medio gaseoso, atrae y acumula material debido a su campo gravitacional. Este modelo supone un sistema estacionario y con geometría esférica, en el cual el objeto se encuentra en reposo respecto al gas. Bajo estas condiciones, las variables hidrodinámicas no dependen del tiempo, lo que implica que $\partial\rho/\partial t = 0$. El objetivo fundamental al estudiar este problema es poder predecir la tasa de acreción estacionaria \dot{M} , conociendo las condiciones del medio a gran distancia (densidad ρ_∞ y temperatura T_∞), así como las condiciones en la superficie del objeto. Además, este marco permite determinar el tamaño característico de la región del gas influenciada por el objeto y comparar la velocidad de caída del gas con la velocidad local del sonido.

En términos hidrodinámicos, se parte de la ecuación de continuidad en su forma general,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.28)$$

que en el caso estacionario se simplifica a,

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.29)$$

Si se consideran coordenadas esféricas y sólo la componente radial, se obtiene,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v_r) = 0 \quad (1.30)$$

lo que implica,

$$r^2 \rho(r) v_r(r) = \text{cte.} \quad (1.31)$$

Este resultado refleja la simetría esférica del flujo y garantiza que la tasa de acreción sea la misma en cualquier radio. Por otro lado, la tasa de acreción \dot{M} se calcula integrando el flujo de masa a través de una superficie esférica de radio r ,

$$\dot{M} = \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 \rho(r) v_r(r) \quad (1.32)$$

Comparando esta expresión con la expresión constante obtenida de la ecuación de continuidad, se encuentra de forma inmediata la igualdad

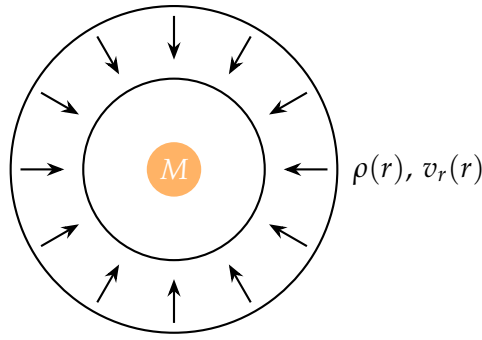
$$\boxed{\frac{\dot{M}}{4\pi} = r^2 \rho(r) v_r(r) = \text{cte.}} \quad (1.33)$$

que hace explícito que la tasa de acreción no depende del radio considerado siempre que se mantenga la condición de estacionariedad.

El radio característico que delimita la región donde la gravedad del objeto domina sobre la presión del gas se conoce como el *radio de Bondi*,

$$r_B = \frac{GM}{c_s^2} \quad (1.34)$$

donde c_s es la velocidad del sonido en el medio y M la masa del objeto. Este radio indica la escala a partir de la cual el gas empieza a ser fuertemente influenciado por la gravedad del objeto central, y por tanto juega un papel fundamental en la estimación de la tasa de acreción. Un esquema de la configuración geométrica y del flujo radial estacionario se muestra en la Fig. 1.3, donde las flechas apuntan hacia el centro representando la acreción.



Flujo radial estacionario

Figura 1.3: Esquema de la acreción de Bondi en geometría esférica. El gas fluye radialmente hacia el objeto central.

1.2.2. Derivada Material (o Convectiva)

En mecánica de fluidos, muchas magnitudes físicas (como la densidad, la presión, la temperatura o la velocidad) pueden variar tanto en el espacio como en el tiempo. Para describir cómo cambian estas magnitudes desde el punto de vista de una partícula que se desplaza con la corriente, se introduce la **derivada material** (o convectiva). Esta derivada representa la variación total de una magnitud a lo largo de la trayectoria de una partícula, y conecta las descripciones *Euleriana* y *Lagrangiana* del fluido:

$$\underbrace{\frac{D(\cdot)}{Dt}}_{\text{Término Lagrangiano}} = \underbrace{\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}}_{\text{Término Euleriano}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \nabla)(\cdot)}_{\text{Término Convectivo}} \quad (1.35)$$

Donde cada componente aporta información complementaria para poder describir el sistema bajo estudio. En específico:

- **Término Lagrangiano:** se refiere a la variación total experimentada por una partícula de fluido mientras se mueve en el campo. Es la idea de *seguir a la partícula* en su trayectoria.
- **Término Euleriano:** corresponde al cambio local en el tiempo en un punto fijo del espacio. Es la variación que mediría un observador estático, en un volumen de control.
- **Término Convectivo:** describe el cambio asociado al movimiento de la partícula a través de regiones del espacio donde la magnitud no es uniforme. Representa la contribución espacial debida al transporte por el flujo.

En conjunto, la derivada material proporciona la tasa de variación de la magnitud en la visión Lagrangiana, expresada en términos de cantidades medibles en el marco Euleriano. Por eso constituye un puente entre ambas formas de descripción del campo de flujo.

Conviene destacar además la diferencia entre los operadores ∇f y $\nabla \cdot \vec{f}$. El primero corresponde al *gradiente* de un campo escalar, que es un vector,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \longrightarrow \text{vector} \quad (1.36)$$

mientras que el segundo corresponde a la *divergencia* de un campo vectorial, que es un escalar,

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \longrightarrow \text{escalar.} \quad (1.37)$$

Con esto en mente, el término convectivo $(\vec{v} \cdot \nabla)$ debe interpretarse como el producto escalar entre el campo de velocidades y el operador gradiente: describe cómo el movimiento del fluido transporta las variaciones espaciales de la magnitud considerada.

Cuando se aplica la derivada material a un **campo escalar** (por ejemplo, densidad, temperatura o concentración), se obtiene,

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)f \quad (1.38)$$

que se conoce como **ecuación de advección**, pues describe el transporte de una cantidad escalar por el flujo. En cambio, si se aplica a un **campo vectorial**, en particular al propio campo de velocidades $\vec{v}(\vec{x}, t)$, resulta,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (1.39)$$

que constituye el **término convectivo** en las ecuaciones de Navier–Stokes. En una dimensión, este caso especial se reduce a la **ecuación de Burgers**, un modelo simplificado ampliamente utilizado para estudiar la no linealidad del transporte convectivo.

1.2.3. Problema I

Un agujero negro de masa $M_{B.H.} = 10 [M_{\odot}]$ está inmerso en una nube de gas con densidad uniforme $\rho_0 = 10^{-19} [\text{kg}/\text{m}^3]$ y $T = 10^4 [\text{K}]$. Estime la tasa de acreción sobre el agujero negro, asumiendo que esta es esférica (ver Fig. 1.4). Además, asuma que $\gamma = 1$.

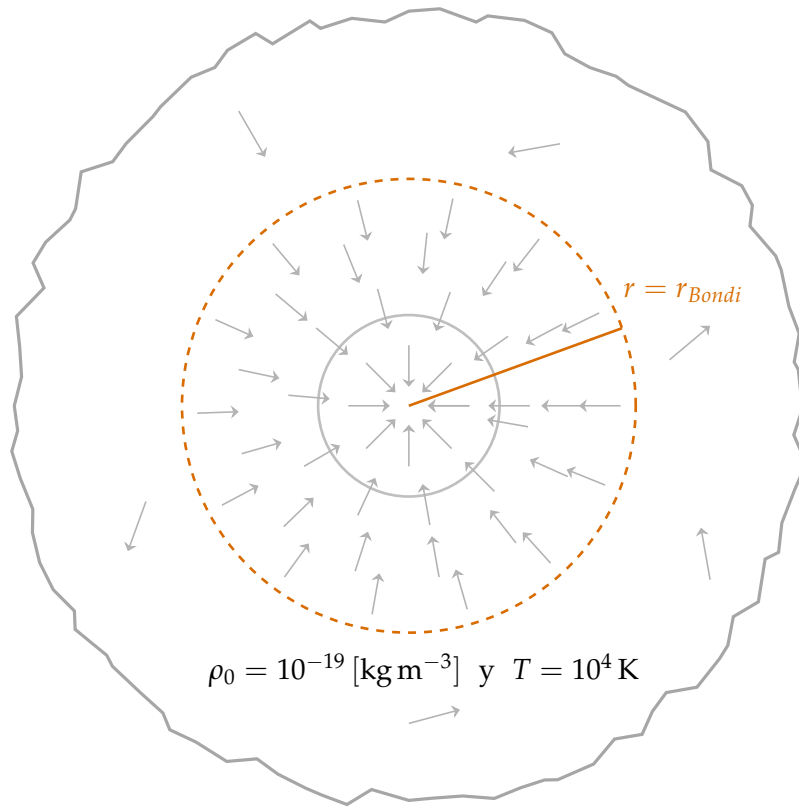


Figura 1.4: Nube de gas con agujero negro acretándolo.

1.2.4. Problema II

En el estudio de la dinámica de fluidos, resulta de interés determinar cómo varía la temperatura de una partícula a medida que se mueve en un campo de velocidades. Para ello, se utiliza la *derivada convectiva* de la temperatura. Considere que la temperatura del sistema está dada por la siguiente función dependiente del espacio y del tiempo,

$$T(x, y, t) = e^{-t} (\sin(2x) + \cos(y)), \quad (1.40)$$

y que el vector velocidad del flujo se expresa como,

$$\vec{V} = \hat{i} + 2\hat{j}. \quad (1.41)$$

Encuentre una expresión para la *derivada convectiva* de la temperatura.

1.2.5. Problema III

Otro aspecto importante en la mecánica de fluidos, es determinar la aceleración que experimenta una partícula dentro del campo de velocidades, ya que esta describe los efectos de la convección y de la variación temporal del flujo. Si se tiene un campo de velocidades definido por el vector,

$$\vec{V} = y(A\cos(2t) + B\sin(3t)) \hat{i} + 6txy \hat{j} \text{ [m/s]} \quad (1.42)$$

Determine la aceleración del fluido en el punto $x = 0.5 \text{ [m]}$ e $y = 0.5 \text{ [m]}$ en el instante $t = 1 \text{ [s]}$.

Lectura Sugerida

- [Bondi \(1952\)](#) — Artículo científico de Bondi.
- [Frank et al. \(2002\)](#) — Más sobre Acreción de Bondi.
- [Garvin \(2023\)](#) — Problemas asociados.
- [Di Matteo et al. \(2003\)](#) — Artículo sobre obtención de \dot{M}_{Bondi} para M87.

1.3. Ayudantía 3: Aplicación Derivada Material y Curvas Características (Ec. de Advección y Ec. de Burgers)

1.3.1. Problema I

El viento solar es un flujo continuo de partículas cargadas que emanan del sol, y se expande radialmente hacia el medio interestelar. Supongamos que la velocidad de expansión de las partículas en el viento solar es constante, $\vec{v}(x, t) = u_0 \hat{i}$. La densidad inicial de las partículas en el viento solar se describe por:

$$\rho(x, 0) = \rho_0 e^{-x^2} \quad (1.43)$$

- Plantea la ecuación de advección que describe este flujo de partículas.
- Resuelve la ecuación para encontrar la densidad $\rho(x, t)$ en función del tiempo.
- Discute cómo la densidad de las partículas cambia con el tiempo y en el espacio.

1.3.2. Problema II

Un disco protoplanetario al rededor de una estrella joven se encuentra en rotación con la velocidad angular del gas, variando linealmente con la distancia radial r , es decir:

$$\vec{v}(r) = \alpha r \hat{r} \quad (1.44)$$

donde α es una constante. Por otra parte, la densidad del gas inicial en el disco se describe por:

$$\rho(r, 0) = \rho_0 e^{-r^2} \quad (1.45)$$

- Escriba la ecuación de advección para este sistema.
- Resuelva la ecuación para encontrar $\rho(r, t)$.
- Analiza cómo cambia la distribución de densidad con el tiempo.

1.3.3. Problema III

Considere la ecuación de Burgers *inviscida* en 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.46)$$

con el siguiente perfil inicial de velocidades:

$$u(x, 0) = F(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < 0, \\ 2 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (1.47)$$

Obtenga y grafique las curvas características asociadas al problema, determine el tiempo en que ocurre la formación de un shock y explique la razón de su aparición.

Lectura Sugerida

- https://old.iist.ac.in/sites/default/files/people/Burgers_equation_inviscid.pdf — Ejercicios y explicaciones.
- Whitham (1999) — Complementar Teoría.

Capítulo 2

Discos de Acreción

2.1. Ayudantía 4: Ecuación de Euler, Ecuación de Navier-Stokes y Tensor de Esfuerzos

2.1.1. Ecuación de Euler

Consideremos un elemento de fluido. La fuerza total que actúa sobre este volumen se puede expresar como,

$$\vec{F} = - \oint_s P d\vec{A} \quad (2.1)$$

donde P es la presión y la integral se realiza sobre la superficie s del volumen considerado. Aplicando el teorema de la divergencia, podemos reescribir esta integral de superficie como una integral de volumen,

$$\vec{F} = - \iiint \nabla P dV. \quad (2.2)$$

Por otro lado, sabemos que la segunda ley de Newton nos da,

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.3)$$

En el caso de un fluido, en lugar de trabajar con masas puntuales, se utiliza la densidad de masa ρ . Así, la ecuación por unidad de volumen queda,

$$\vec{f} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.4)$$

Si aplicamos este razonamiento a la Ec. 2.2, obtenemos,

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P. \quad (2.5)$$

Dado que $\frac{d\vec{v}}{dt}$ corresponde a la derivada material, podemos escribir,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P. \quad (2.6)$$

Aquí, el término $-\nabla P$ representa la densidad de fuerza debida a gradientes de presión en el fluido. Si ahora incluimos la fuerza gravitatoria como una densidad de fuerza externa, la ecuación se modifica a,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g}, \quad (2.7)$$

la cual corresponde a la **Ecuación de Euler** (1755), que describe el movimiento de un fluido bajo la acción de gradientes de presión y fuerzas externas.

2.1.2. Ecuación de Navier-Stokes

La **Ecuación de Navier-Stokes** representa el pilar fundamental de la mecánica de fluidos, describiendo la conservación del momento lineal en un volumen de fluido. Esta ecuación se puede obtener a partir de la *Ecuación de Euler* (válida para fluidos no viscosos o *ideales*) mediante la adición de los términos de fuerzas internas o *esfuerzos viscosos*. Esta transformación captura la fricción interna y los efectos disipativos del fluido, permitiendo modelar fenómenos complejos.

Para modelar fluidos reales, se introduce el concepto de $\nabla \cdot \tau$, la divergencia del *tensor de esfuerzos viscosos* (τ), que representa la fuerza viscosa por unidad de volumen. El tensor de esfuerzos total (\overleftrightarrow{T}) en el fluido se compone de la presión (parte isotrópica) y los esfuerzos viscosos (parte desviadora): $\overleftrightarrow{T} = -p \overleftrightarrow{I} + \tau$.

La ecuación de conservación del momento con fuerzas viscosas es,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \nabla \cdot \tau \quad (2.8)$$

Para un **fluido newtoniano**, se asume una relación lineal entre el esfuerzo viscoso (τ) y la tasa de deformación. El tensor de esfuerzos viscosos se define en su forma más general (fluido compresible) como:

$$\tau = \lambda (\nabla \cdot \vec{v}) \overleftrightarrow{I} + \mu (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) \quad (2.9)$$

- μ : es la **viscosidad dinámica** o viscosidad de cizalle (*shear viscosity*).
- λ : es el **segundo coeficiente de viscosidad** o viscosidad volumétrica, asociado a la compresión o expansión del fluido.
- \overleftrightarrow{I} : es el tensor identidad.
- $(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T)$: es el **tensor de tasa de deformación**, que incluye las tasas de cizalle (cortante) y las tasas de elongación normal.

Al sustituir el tensor τ en la ecuación de momento, se obtiene la forma general (para fluidos compresibles) de la Ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} - \nabla \left[\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{v}) \right] + \nabla \cdot \left[\mu (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) \right] \quad (2.10)$$

El término $\nabla \left[\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$ representa la contribución viscosa de la compresión del fluido.

George Gabriel Stokes, en 1850, propuso simplificar esta ecuación asumiendo que el fluido no tiene viscosidad volumétrica, lo que se conoce como la *Hipótesis de Stokes*:

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad \implies \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

Esta hipótesis se verifica experimentalmente con buena precisión para la mayoría de los fluidos monoatómicos y diluidos, como el aire y el agua, y permite eliminar el término de viscosidad volumétrica de la ecuación anterior.

2.1.3. Tensor de Esfuerzos (*Stress Tensor*)

El **tensor de esfuerzos total** (\overleftrightarrow{T}) en coordenadas cartesianas se visualiza como una matriz de 3×3 , que se descompone en los esfuerzos normales (diagonal) y los esfuerzos cortantes o de cizalle (fuera de la diagonal).

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p + \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Asumiendo que el campo de velocidad es $\vec{v} = (u, v, w)$, las componentes del tensor τ para un fluido newtoniano general son:

- **Componentes Normales (Diagonal)** Las componentes normales τ_{ii} están asociadas a la tasa de deformación volumétrica ($\nabla \cdot \mathbf{v}$) y la elongación en esa dirección,

$$\tau_{ii} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (2.12)$$

Nota: Para la componente x , $v_i = u$ y $x_i = x$.

- **Componentes Cortantes (Fuera de la Diagonal)** Las componentes cortantes τ_{ij} (donde $i \neq j$) son las que se deben al **cizalle** y a la fricción entre capas de fluido que se mueven a diferentes velocidades,

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx} \quad (2.13)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \tau_{zx} \quad (2.14)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy} \quad (2.15)$$

La simetría del tensor ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) es crucial, lo que significa que no hay momento neto de rotación por unidad de volumen debido a los esfuerzos viscosos.

2.1.4. Problema I

Considere el sistema astrofísico mostrado en Fig. 2.1, donde un gas ionizado y caliente fluye en régimen laminar confinado entre dos capas de gas más frío y denso, aproximadamente planas, paralelas y estacionarias, separadas por una distancia $h \ll L$, siendo L la extensión en dirección x del sistema. El gradiente de presión efectivo $\Delta \mathcal{P}$ entre los extremos impulsa el flujo en la dirección longitudinal. Suponga que el gas ionizado se comporta como un fluido newtoniano con viscosidad constante, incompresible, bidimensional en el plano xy , con flujo unidireccional, estacionario y plenamente desarrollado, imponiendo además la condición de que la velocidad se anule en las interfases con el gas frío. Determine la distribución de velocidades $u(y)$ bajo estas condiciones.

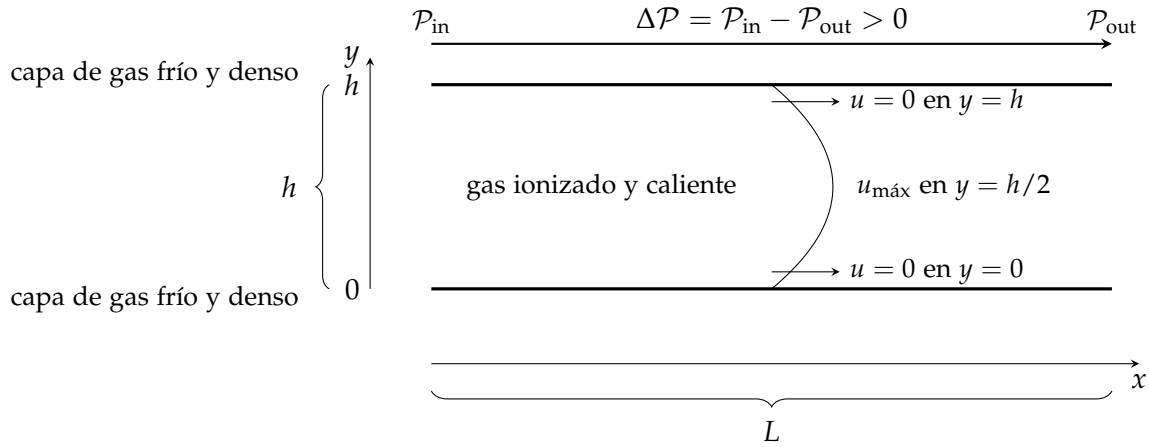


Figura 2.1: Esquema del flujo laminar de gas ionizado caliente confinado entre dos capas paralelas de gas más frío y denso (líneas gruesas). El gradiente de presión efectiva impulsa el flujo a lo largo de x ; la condición de no deslizamiento impone $u = 0$ en $y = 0$ e $y = h$.

2.1.5. Problema II

Considere un disco de acreción delgado alrededor de una masa puntual M , en coordenadas cilíndricas (R, φ, z) . En el plano medio $z = 0$ suponga flujo estacionario y puramente azimutal ($v_R = 0$, $v_\varphi = v_\varphi(R)$).

Partiendo de la componente radial de la ecuación de Euler,

$$\rho \left(\frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{v_\varphi^2}{R} \right) = -\frac{\partial P}{\partial R} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \quad (2.16)$$

con potencial $\Phi(R) = -GM/R$, realice la derivación de la relación

$$v_\varphi^2(R) = v_K^2(R) + \frac{R}{\rho} \frac{dP}{dR}, \quad v_K(R) \equiv \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (2.17)$$

Finalmente:

1. Muestre que $dP/dR < 0 \Rightarrow v_\varphi < v_K$ y explique físicamente por qué.
2. Aplique esa expresión al caso de un gas isotérmico $P = c_s^2 \rho$ con $\rho \propto R^{-p}$ y derive una forma en términos de H/R y p .

Lectura Sugerida

- [Landau and Lifshitz \(1987\)](#) — Capítulo 1, en §1 — Derivación *Ecuación de Euler*.
- [Armitage \(2017\)](#) — Física en discos protoplanetarios (muy recomendado).
- [Weidenschilling \(1977\)](#) — Velocidades sub-keplerianas (contexto histórico).
- [White \(2016\)](#) — Deducción física de Navier-Stokes
- [Batchelor \(2000\)](#) — Tensor de esfuerzos

2.2. Ayudantía 5: Aproximación a Discos Autogravitantes y Recapitulación de Contenidos

2.2.1. Velocidad Azimutal en Discos Autogravitantes

Consideramos un **disco delgado**, por lo que trabajamos en coordenadas cilíndricas (r, φ, z) y evaluamos cantidades en el plano medio $z = 0$. Supondremos estado **estacionario** y **axisimétrico**:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi} = 0,$$

y flujo medio puramente circular, lo que implica:

$$v_r = v_z = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{v} = (0, v_\varphi(r), 0).$$

Si nuestro objetivo es describir el comportamiento de este sistema con el fin de obtener una expresión para la velocidad azimutal, debemos partir de la ecuación de Euler (para un fluido *inviscid*), la cual se escribe como

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g}. \quad (2.18)$$

En (r, φ, z) , las tres componentes se escriben como:

$$\text{(radial)} \quad \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r, \quad (2.19)$$

$$\text{(azimutal)} \quad \rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \rho g_\varphi, \quad (2.20)$$

$$\text{(vertical)} \quad \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z. \quad (2.21)$$

Con los supuestos anteriores, la componente azimutal se anula y la vertical establece el equilibrio hidrostático (no necesario aquí). Sin embargo, la **componente radial** se reduce a:

$$-\rho \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{dP}{dr} + \rho g_r \quad (2.22)$$

De aquí ya podemos obtener una expresión para la velocidad azimutal (o “circular”), de manera que resulta en:

$$v_\varphi^2(r) = -r g_r + \frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr} \quad (2.23)$$

Donde sabemos que la contribución de una masa central, nos dice que g_r^* corresponde a:

$$g_r^*(r) = -\frac{d\Phi_\star}{dr} = -\frac{GM_\star}{r^2}, \quad (2.24)$$

donde M_\star corresponde a la masa central efectiva.

Sin embargo, si deseamos considerar un sistema en el que la gravedad propia del disco (es decir, su *autogravedad*) no pueda despreciarse, es necesario tener en cuenta que el potencial total puede descomponerse en dos contribuciones:

$$\Phi(r) = \Phi_{\star}(r) + \Phi_{\text{disk}}(r), \quad (2.25)$$

El cálculo exacto de Φ_{disk} en un disco delgado es costoso analíticamente, ya que involucra integrales elípticas. Para obtener una expresión manejable de la aceleración radial y, por ende, de la curva de rotación, se adopta una aproximación conocida como **esferización**. Esta consiste en reemplazar el campo radial del disco por el de una distribución esférica de masa equivalente $M(r)$, de modo que:

$$g_r^{(\text{disk})}(r) \simeq -\frac{G M(r)}{r^2} \quad (2.26)$$

donde $M(r)$ es la distribución de masa encerrada asociada a la densidad superficial $\Sigma(r)$ del disco. Si en este sistema consideramos el siguiente perfil de densidad superficial:

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-p} \quad (2.27)$$

Tendríamos que $M(< r)$ equivale a:

$$M(< r) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \Sigma(r') r' dr' d\varphi = 2\pi \Sigma_0 r_0^p \int_0^r r'^{1-p} dr' \quad (2.28)$$

$$= \frac{2\pi \Sigma_0 r_0^p}{2-p} r^{2-p}; p \neq 2, \quad (2.29)$$

Si este valor lo reemplazamos en $g_r^{(\text{disk})}$, se tiene que:

$$g_r^{(\text{disk})}(r) = -\frac{2\pi}{2-p} \Sigma_0 r_0^p r^{-p} \quad (2.30)$$

De esta manera podríamos escribir:

$$g_r^{(\text{total})}(r) = g_r^{\star}(r) + g_r^{(\text{disk})}(r) \quad (2.31)$$

$$= -\frac{GM_{\star}}{r^2} - \frac{2\pi}{2-p} \Sigma_0 r_0^p r^{-p}. \quad (2.32)$$

Si esto lo reemplazamos en Ec. 2.23, llegamos a que:

$$\boxed{\therefore v_{\varphi}^2(r) \simeq \underbrace{\frac{GM_{\star}}{r}}_{\text{Kepler}} + \underbrace{\frac{2\pi}{2-p} G \Sigma_0 r_0^p r^{1-p}}_{\text{Autogravedad del disco}} + \underbrace{\frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr}}_{\text{Presión}}; p \neq 2} \quad (2.33)$$

Con el fin de comprender la influencia de la distribución superficial de masa del disco, realizamos un análisis del exponente p asociado a la ley de potencia del perfil de densidad. Consideramos distintos valores de p y estudiamos cómo cada uno modifica la contribución autogravitante a la velocidad azimutal. Partimos de la expresión general:

$$v_{\varphi}^2(r) \simeq \frac{GM_{\star}}{r} + A r^{1-p} + \frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr}, \quad A \equiv \frac{2\pi G \Sigma_0 r_0^p}{2-p}. \quad (2.34)$$

- **Caso $p < 1$:** Como $1 - p > 0$, el término autogravitante crece con el radio:

$$\Delta v_{\text{disk}}^2(r) = A r^{1-p} \quad (\uparrow \text{ aumenta con } r). \quad (2.35)$$

Ejemplo, para $p = \frac{1}{2}$:

$$v_{\varphi}^2(r) \simeq \frac{GM_{\star}}{r} + A r^{1/2} + \frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr}. \quad (2.36)$$

Comentario: el aporte de disco aumenta a grandes radios, pudiendo aplanar la curva de rotación.

- **Caso $p = 1$:** Aquí $1 - p = 0$, de modo que el término autogravitante es constante:

$$v_{\varphi}^2(r) \simeq \frac{GM_{\star}}{r} + 2\pi G \Sigma_0 r_0 + \frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr}. \quad (2.37)$$

Comentario: este es el conocido **disco de Mestel** ([Mestel, 1963](#)), cuyo perfil de densidad superficial $\Sigma(r) \propto 1/r$ conduce a curvas de rotación planas al contrarrestar la caída kepleriana.

- **Caso $1 < p < 2$:** En este rango $1 - p < 0$, por lo que el aporte autogravitante decrece con el radio:

$$\Delta v_{\text{disk}}^2(r) = A r^{1-p} \quad (\downarrow \text{ decrece con } r). \quad (2.38)$$

Ejemplo, para $p = \frac{3}{2}$:

$$v_{\varphi}^2(r) \simeq \frac{GM_{\star}}{r} + A r^{-1/2} + \frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr}. \quad (2.39)$$

Comentario: la autogravedad aún contribuye, pero cada vez menos. El perfil vuelve a acercarse al kepleriano.

- **Caso $p = 2$:** Debe tratarse aparte, pues surge una corrección logarítmica:

$$v_{\varphi}^2(r) \simeq \frac{GM_{\star}}{r} + \frac{2\pi G \Sigma_0 r_0^2}{r} \ln\left(\frac{r}{r_{\text{in}}}\right) + \frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr}. \quad (2.40)$$

Comentario: se mantiene cercano a kepleriano, con corrección logarítmica.

- **Caso $p > 2$:** El término autogravitante decae muy rápido:

$$\Delta v_{\text{disk}}^2(r) = A r^{1-p} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.41)$$

Comentario: el factor A se vuelve negativo dentro de la aproximación esferizada, lo que lleva a un aporte no físico de la autogravedad. Este comportamiento no refleja la dinámica real de un disco delgado, sino que es simplemente una limitación de la aproximación (compárese con [Binney and Tremaine 2008](#)).

2.2.2. Evaluación Interactiva

La evaluación interactiva se llevará a cabo en la plataforma indicada en la ayudantía, con el fin de evaluar el progreso alcanzado en el curso.

Lectura Sugerida

- [Binney and Tremaine \(2008\)](#) — Ver secciones sobre potenciales esferizados y aproximaciones de discos.
- [Armitage \(2017\)](#) — Física en discos protoplanetarios (muy recomendado).

2.3. Ayudantía 6: Ecuación de Difusión en Discos de Acreción y Solución para $\nu = \text{cte}$.

2.3.1. Dinámica de un disco delgado

Trabajaremos en coordenadas cilíndricas (R, φ, z) , en el plano del disco ($z \simeq 0$). Supondremos un disco delgado de gas que orbita en torno a una estrella central que acreta materia.

La materia se mueve en órbitas casi circulares, con una velocidad angular $\Omega_k(R)$, de modo que:

$$v_\varphi(R) = R \Omega_k(R) = \left(\frac{GM}{R} \right)^{1/2}. \quad (2.42)$$

Además, el gas posee una pequeña velocidad radial $v_R(R, t)$ (hacia la estrella), de signo negativo en la región interna del disco.

Definimos la **densidad superficial** del disco como

$$\Sigma(R, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(R, z, t) dz, \quad (2.43)$$

que corresponde a la masa por unidad de área proyectada sobre el plano del disco.

Sabiendo esto, veamos las conservaciones existentes en el sistema. Consideremos ahora un anillo entre R y $R + \Delta R$, como una capa del disco (como se ilustra en Fig. 2.2):

- **Área del anillo:**

$$A_{\text{anillo}} = \pi[(R + \Delta R)^2 - R^2] = \pi[R^2 + 2R\Delta R + \Delta R^2 - R^2] \simeq 2\pi R \Delta R. \quad (2.44)$$

- **Masa del anillo:**

$$\Delta m = 2\pi R \Sigma(R, t) \Delta R. \quad (2.45)$$

- **Momento angular específico:**

$$\ell(R) = R v_\varphi(R) = R^2 \Omega(R). \quad (2.46)$$

- **Momento angular total del anillo:**

$$\Delta L = \Delta m \ell(R) = 2\pi R \Delta R \Sigma(R, t) R^2 \Omega(R). \quad (2.47)$$

La evolución temporal de la masa y del momento angular del anillo estará determinada por el flujo de gas que entra y sale a través de sus bordes, así como por los torques viscosos entre anillos vecinos.

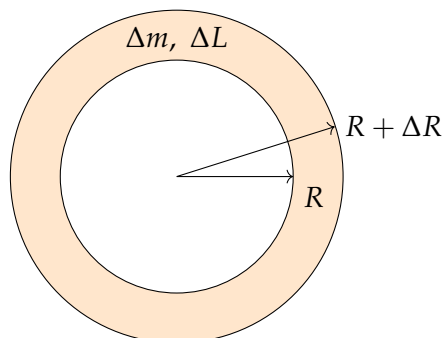


Figura 2.2: Anillo de radio R y ancho ΔR en un disco delgado que rodea a una estrella central.

Ecuación de continuidad

El flujo de masa a través de un radio R está dado por

$$\dot{M}(R, t) = -2\pi R \Sigma(R, t) v_R(R, t), \quad (2.48)$$

donde $v_R < 0$ indica flujo de gas hacia el centro.

La conservación de masa aplicada al anillo entre R y $R + \Delta R$ se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial t} (2\pi R \Sigma \Delta R) = \dot{M}(R, t) - \dot{M}(R + \Delta R, t). \quad (2.49)$$

Dividiendo por $2\pi \Delta R$ y tomando el límite $\Delta R \rightarrow 0$, obtenemos la ecuación de continuidad:

$$\boxed{\therefore \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) = 0} \quad (2.50)$$

Conservación de momento angular

Para el momento angular del anillo tenemos

$$\Delta L = 2\pi R \Delta R \Sigma(R, t) R^2 \Omega(R). \quad (2.51)$$

La tasa de cambio de ΔL es resultado de:

1. El transporte de momento angular por el *flujo de masa* (gas que entra y sale).
2. El transporte de momento angular por *torques viscosos* entre anillos de distinto radio.

El torque viscoso $G(R, t)$ asociado a un anillo de radio R viene dado por

$$G(R, t) = 2\pi R \nu \Sigma(R, t) R^2 \Omega(R), \quad (2.52)$$

donde ν es la viscosidad turbulenta efectiva del gas.

La conservación de momento angular se puede escribir como

$$\boxed{\therefore \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial G}{\partial R}} \quad (2.53)$$

La idea física detrás del sistema es que las capas internas del disco, que giran más rápido, ejercen un torque sobre las capas externas, por lo que este *torque viscoso* transporta momento angular hacia afuera (capas más externas). Como consecuencia, el gas interno pierde momento angular, se frena en la dirección tangencial y migra radialmente hacia adentro, produciendo acreción sobre la estrella.

2.3.2. Ecuación de difusión general del disco

Si usamos la ecuación de conservación de momento angular (2.53) y tomamos que el potencial sólo depende de R y no de t , entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} (R^2 \Omega) = 0. \quad (2.54)$$

Por lo tanto,

$$R^2 \Omega \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial G}{\partial R}. \quad (2.55)$$

Si ahora usamos la expresión para $\partial_t \Sigma$ proveniente de la ecuación de continuidad (2.50),

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R), \quad (2.56)$$

entonces obtenemos

$$R^2 \Omega \left[-\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) \right] + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial G}{\partial R}. \quad (2.57)$$

Expandiendo el segundo término:

$$-R \Omega \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) + R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial G}{\partial R}. \quad (2.58)$$

Agrupamos los términos de $R \Sigma v_R$:

$$R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R}. \quad (2.59)$$

Aquí, el término de la izquierda describe el **transporte de momento angular por el flujo de gas**. Mientras que el término de la derecha describe el **transporte de momento angular por viscosidad**.

Si ahora usamos Eq. 2.59, podemos despejar $R \Sigma v_R$:

$$R \Sigma v_R = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega)} \frac{\partial G}{\partial R}, \quad (2.60)$$

y reemplazar en la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) \quad (2.61)$$

Finalmente, obtenemos la **ecuación de difusión general** para distintos $\Omega(R)$:

$$\boxed{\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega)} \frac{\partial G}{\partial R} \right]} \quad (2.62)$$

Este término final corresponde físicamente al **gradiente de torques viscosos**, responsable de redistribuir masa y momento angular en el disco. En particular, esta ecuación incorpora simultáneamente el transporte de masa (y, por tanto, de momento angular) debido al flujo radial del gas, así como el transporte de momento angular producido por los torques viscosos entre anillos vecinos del disco, representados por el término que contiene G (no confundir con G de gravedad).

2.3.3. Ecuación de difusión en un disco Kepleriano

Consideremos ahora un disco Kepleriano, es decir, dominado por el potencial de la estrella central de masa M :

$$\Omega(R) \equiv \Omega_k(R) = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}. \quad (2.63)$$

Para este caso,

$$R^2\Omega = \sqrt{GM} R^{1/2} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial R}(R^2\Omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{GM}{R} \right)^{1/2}$$

El torque viscoso tomará la forma (usando $G = 2\pi R \cdot R^3 \nu \Sigma \frac{d\Omega}{dR}$ y $\frac{d\Omega}{dR} = -\frac{3}{2}\Omega/R$ para $\Omega \propto R^{-3/2}$):

$$G(R, t) = -3\pi \nu \Sigma R^2 \sqrt{GM/R}.$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación general de difusión (2.62), se obtiene la forma estándar:

$$\boxed{\therefore \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^{1/2}) \right]} \quad (2.64)$$

Esta es la **ecuación de difusión de la densidad superficial en un disco Kepleriano**. En donde el término entre corchetes involucra el gradiente de los torques viscosos. Si el gradiente es grande, la difusión (transporte de momento angular y redistribución de masa) es más eficiente.

2.3.4. Solución para viscosidad constante ($\nu = \text{cte.}$)

Buscamos ahora una expresión para el perfil de densidad superficial del disco en función del radio y del tiempo, con densidad turbulenta constante:

$$\nu(R) = \nu_0 R^0 = \nu_0 = \text{cte.} \quad (2.65)$$

A partir de la ecuación de difusión para un disco kepleriano (Eq. 2.64), si consideramos $\nu(R) = \nu_0$ se tiene que:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3\nu_0}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\Sigma R^{1/2}) \right]. \quad (2.66)$$

Definimos la combinación

$$U(R, t) \equiv R^{1/2} \Sigma(R, t),$$

con lo cual (2.66) se simplifica a:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{12\nu_0}{\beta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2},$$

donde hemos introducido el cambio de variable:

$$\beta = 2R^{1/2} \quad \implies \quad R = \frac{\beta^2}{4}, \quad \frac{\partial}{\partial R} = \frac{2}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Para obtener una expresión analítica y poder resolver la E.D.P. se propone el método de separación de variables. Por lo que se propone una solución del tipo

$$U(\beta, t) = T(t) S(\beta). \quad (2.67)$$

Al sustituir en la ecuación obtenemos:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{12\nu_0}{\beta^2} \frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\beta^2}. \quad (2.68)$$

Cada lado depende de variables distintas, por lo que ambos deben ser iguales a una constante negativa:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\lambda^2, \quad \frac{d^2 S}{d\beta^2} + k^2 \beta^2 S = 0, \quad k^2 = \frac{\lambda^2}{12\nu_0}. \quad (2.69)$$

La E.D.O. temporal se resuelve inmediatamente:

$$T(t) = e^{-\lambda^2 t}. \quad (2.70)$$

Sin embargo, para la solución de la ecuación radial se vuelve más complejo. Reescribiendo puede dejarse como una ecuación de Bessel modificada. Para resolverla, realizamos los cambios de variables presentados en las notas y se llega a la ecuación de Bessel modificada de orden $1/4$:

$$z^2 Y''(z) + z Y'(z) - \left(z^2 + \frac{1}{4}\right) Y(z) = 0. \quad (2.71)$$

donde $S(\beta) = \phi(z)$ y $\phi(z) = z^{1/4} Y(z)$

La solución regular en $z = 0$ exige descartar $K_{1/4}(z)$, por tanto sólo nos quedamos con $I_{1/4}(z)$, por esto,

$$S(\beta) = C z^{1/4} I_{1/4}(z) = C \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{1/4} I_{1/4}\left(\frac{\beta}{\lambda}\right). \quad (2.72)$$

Volviendo a las variables originales:

$$U(\beta, t) = T(t) S(\beta) = C \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{1/4} I_{1/4}\left(\frac{\beta}{\lambda}\right) e^{-\lambda^2 t}. \quad (2.73)$$

Recordando que $U = R^{1/2} \Sigma$ y $\beta = 2R^{1/2}$ llegamos a:

$$\Sigma(R, t) = C R^{-1/4} I_{1/4}\left(\frac{2R^{1/2}}{\lambda}\right) e^{-\lambda^2 t}. \quad (2.74)$$

Hacemos uso de la Función de Green para encontrar la solución general. Por esta razón se plantea una forma final de la solución para un anillo inicial infinitamente delgado en R_0 :

$$\Sigma(R, 0) = \frac{M}{2\pi R_0} \delta(R - R_0), \quad (2.75)$$

la solución general se construye mediante:

$$\Sigma(R, t) = \int_0^\infty G(R, R_0, t) \Sigma(R_0, 0) 2\pi R_0 dR_0, \quad (2.76)$$

por lo que

$$G(R, R_0, 0) = \frac{1}{2\pi R_0} \delta(R - R_0). \quad (2.77)$$

Aplicando las propiedades de los modos y reemplazando λ por las variables adimensionales

$$x = \frac{R}{R_0}, \quad \tau = \frac{12\nu_0 t}{R_0^2},$$

obtenemos finalmente:

$$\therefore \Sigma(x, \tau) = \frac{M}{\pi R_0^2} \tau^{-1} x^{-1/4} \exp\left[-\frac{(1+x^2)}{\tau}\right] I_{1/4}\left(\frac{2x}{\tau}\right) \quad (2.78)$$

que corresponde al perfil de densidad superficial de un anillo que se difunde por acción de la viscosidad turbulenta en un disco Kepleriano.

2.3.5. Interpretación física de la solución

Si miramos la ecuación (2.78) y buscamos la interpretación física de cada término vamos a ver que:

- $I_{1/4}(2\sqrt{x}/\tau)$: actúa como un *propagador radial modificado* para la difusión en coordenadas cilíndricas. Valores grandes del argumento describen masa que se ha difundido hacia radios más externos.
- τ : controla la rapidez de la difusión viscosa. Para τ muy pequeño, el perfil $\Sigma(x, \tau)$ está fuertemente concentrado cerca de $x = 1$ ($R \simeq R_0$). A medida que τ crece, el perfil se hace más ancho y la densidad superficial en la región interna disminuye.
- $x^{-1/4}$: suaviza la caída del perfil hacia radios menores, de modo que la densidad no se anula bruscamente cerca del centro.
- El factor exponencial $\exp[-(1+x)/\tau]$ describe cómo la amplitud global del perfil decae con el tiempo, y favorece la difusión hacia radios mayores.
- El parámetro M aparece sólo como un *factor de normalización*, garantizando que la masa total se conserve al integrar $\Sigma(x, \tau)$ sobre todo el disco.

En la práctica, para distintos valores de τ se obtienen perfiles de densidad superficial como los esquematizados en Fig. 2.3. En donde para tiempos muy tempranos la densidad está más concentrada alrededor de R_0 , mientras que para tiempos posteriores se extiende a radios más grandes y su amplitud máxima decrece.

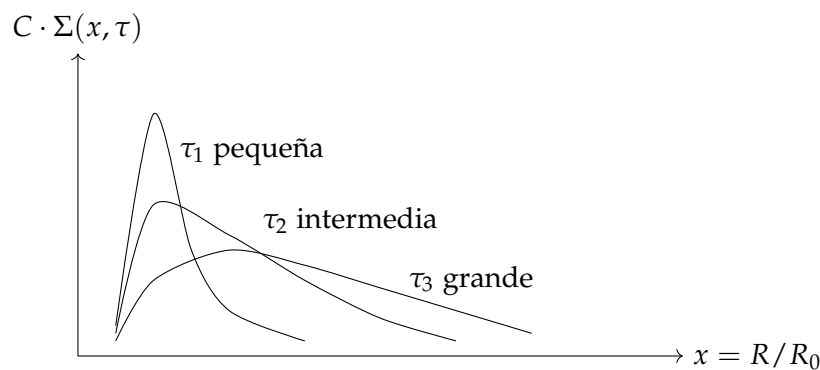


Figura 2.3: Evolución esquemática de la densidad superficial $\Sigma(x, \tau)$ (multiplicada por un constante) para distintos tiempos adimensionales τ . A tiempos tempranos el perfil es más concentrado; a tiempos tardíos la masa se ha difundido hacia radios mayores.

Lectura Sugerida

- [Frank et al. \(2002\)](#) — Ver capítulo 5.2: Radial disc structure
- [Armitage \(2017\)](#) — Información complementaria en Cap. 2

Capítulo 3

Conexión Observacional

3.1. Ayudantía 7: Expresiones Analíticas en Discos de Acreción para Contraste Observacional

En esta sección revisaremos algunas expresiones analíticas fundamentales para el estudio de discos de acreción. Nos centraremos en el caso de un **disco delgado y estacionario**, es decir, un disco cuya estructura no cambia con el tiempo. Cabe mencionar que existen discos con fuerte variabilidad temporal, pero aquí asumimos un régimen estable.

Un resultado clave que utilizaremos es:

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right], \quad (3.1)$$

el cual será de gran importancia más adelante. Esta expresión proviene de la conservación de momento angular y permite obtener información tanto de Σ como de ν , para un disco estacionario.

Veremos ahora cuatro cantidades físicas indispensables en el estudio de discos de acreción:

1. **Luminosidad** (L_{disc} y L_{acc}).
2. **Tasa de acreción** (\dot{M}).
3. **Temperatura efectiva** (T_{eff}).
4. **Tiempo viscoso** (t_{visc}).

Para entender mejor el sistema que estamos estudiando, resulta útil visualizar el disco de acreción de manera esquemática. La materia orbita en un disco delgado alrededor de la estrella central, y el transporte de momento angular entre capas del disco (descrito por el torque G) disipa energía en el plano medio. Esta energía se libera localmente como un término de calentamiento Q^+ , que luego se transporta verticalmente y es irradiada hacia el exterior como un flujo de enfriamiento Q^- .

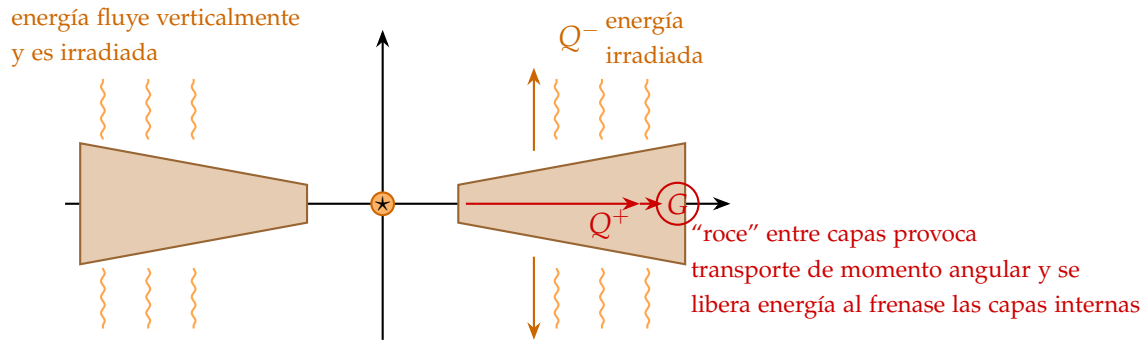


Figura 3.1: Esquema cualitativo del disco de acreción alrededor de una estrella central. El transporte de momento angular entre capas del disco genera un calentamiento local Q^+ asociado al torque viscoso G . Esta energía se transporta verticalmente y se irradia desde la superficie del disco como un flujo de enfriamiento Q^- .

3.1.1. Luminosidad

Para estudiar la luminosidad emitida por un disco de acreción, partimos de la ecuación de conservación de la energía interna. En un fluido, la energía interna por unidad de volumen está dada por $u = \rho e$, donde e es la energía interna específica. En un régimen estacionario y delgado, esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\mathbf{v}) = q^+ - q^-, \quad (3.2)$$

donde:

- q^+ es la tasa local de *calentamiento* por unidad de volumen (principalmente debido al esfuerzo de corte viscoso),
- q^- es la tasa de *enfriamiento* radiativo por unidad de volumen.

Integrando verticalmente sobre el espesor del disco obtenemos las tasas por unidad de área:

$$Q^+ = \int q^+ dz, \quad (3.3)$$

$$Q^- = \int q^- dz. \quad (3.4)$$

En un disco general, las pérdidas y ganancias de energía incluyen un término adicional asociado a la advección de energía interna por el flujo radial del gas. Denotemos este término como Q_{ADV} . Entonces,

$$Q^+ = Q^- + Q_{\text{ADV}}. \quad (3.5)$$

Sin embargo, en un **disco delgado y estacionario** el término advectivo es despreciable:

$$Q_{\text{ADV}} \approx 0, \quad (3.6)$$

por lo que simplemente se cumple

$$Q^+ = Q^-. \quad (3.7)$$

Aquí:

- Q^+ = tasa de *calor disipado* viscosamente, proyectado en el plano,
- Q^- = tasa de *calor irradiado* verticalmente.

El término de calentamiento viscoso

El calentamiento local por viscosidad está controlado por el esfuerzo de corte $T_{R\varphi}$ entre capas del disco, de modo que

$$Q^+ = T_{R\varphi} R \frac{d\Omega}{dR}. \quad (3.8)$$

Para un fluido viscoso delgado, el esfuerzo de corte es

$$T_{R\varphi} = \nu \Sigma R \frac{d\Omega}{dR}, \quad (3.9)$$

por lo que el calentamiento integrado sobre z es

$$Q^+ = \nu \Sigma \left(R \frac{d\Omega}{dR} \right)^2. \quad (3.10)$$

En un disco Kepleriano, $\Omega_K(R)$ satisface

$$\Omega_K(R) = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2}, \quad (3.11)$$

de donde

$$\frac{d\Omega_K}{dR} = -\frac{3}{2} \frac{\Omega_K}{R}. \quad (3.12)$$

Reemplazando esto en la expresión de Q^+ obtenemos

$$Q^+ = \nu \Sigma \left[R \left(-\frac{3}{2} \frac{\Omega_K}{R} \right) \right]^2 \quad (3.13)$$

$$= \frac{9}{4} \nu \Sigma \Omega_K^2. \quad (3.14)$$

Dado que en régimen estacionario $Q^+ = Q^-$, tenemos finalmente

$$Q = \frac{9}{4} \nu \Sigma \Omega_K^2, \quad (3.15)$$

lo cual muestra de manera explícita que podemos reemplazar $\nu \Sigma$ usando la relación estacionaria

$$\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.16)$$

Luminosidad del disco

La luminosidad total del disco es la integral de Q^+ sobre toda el área:

$$L_{\text{disc}} = \int Q^+ dA, \quad (3.17)$$

donde $dA = R dR d\varphi$.

Sustituyendo la expresión estacionaria:

$$L_{\text{disc}} = \int \frac{3}{4\pi} \left(\frac{GM}{R^3} \right) \dot{M} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] R dR d\varphi. \quad (3.18)$$

Realizando la integración azimutal:

$$L_{\text{disc}} = \frac{3}{2} G M \dot{M} \int_{R_*}^{\infty} \left[R^{-2} - R_*^{1/2} R^{-5/2} \right] dR. \quad (3.19)$$

Integrando término a término:

$$\int R^{-2} dR = -\frac{1}{R}, \quad (3.20)$$

$$\int R^{-5/2} dR = -\frac{2}{3} R^{-3/2}. \quad (3.21)$$

De modo que

$$L_{\text{disc}} = \frac{3}{2} G M \dot{M} \left[\frac{1}{3R_*} \right]. \quad (3.22)$$

Esto es,

$$\boxed{\therefore L_{\text{disc}} = \frac{1}{2} L_{\text{acc}}}, \quad (3.23)$$

donde

$$L_{\text{acc}} = \frac{G M \dot{M}}{R_*} \quad (3.24)$$

es la luminosidad total disponible por acreción gravitacional.

Es decir: *la mitad* de la energía liberada en la acreción se irradia en el disco, y la otra mitad se libera en la superficie de la estrella a través de la capa límite (boundary layer):

$$L_{\text{BL}} = \frac{1}{2} \frac{G M \dot{M}}{R_*}. \quad (3.25)$$

Órdenes de magnitud

AGN. Si el radio interno coincide con el radio del ISCO,

$$R_* = R_{\text{in}} = R_{\text{ISCO}} = \frac{6GM}{c^2}, \quad (3.26)$$

entonces

$$L_{\text{disc}} \approx \frac{1}{12} \dot{M} c^2. \quad (3.27)$$

Para tasas típicas $\dot{M} \sim 10^{-6} - 10^1 [M_{\odot}/\text{yr}]$, el rango típico de luminosidades es

$$L_{\text{disc}} \sim 10^{40} - 10^{47} \text{ erg/s}. \quad (3.28)$$

Discos protoplanetarios (PPD). Si tomamos $R_* \approx 2R_{\odot}$ y $M \approx 1M_{\odot}$, con tasas típicas

$$\dot{M} \sim 10^{-9} - 10^{-4} [M_{\odot}/\text{yr}], \quad (3.29)$$

entonces

$$L_{\text{disc}} \sim 10^{33} - 10^{38} \text{ erg/s}. \quad (3.30)$$

3.1.2. Tasa de acreción

La tasa de acreción \dot{M} puede estimarse a partir de la luminosidad bolométrica observada del sistema. Recordemos que la luminosidad liberada por acreción gravitacional está dada por

$$L_{\text{acc}} = \eta \dot{M} c^2, \quad (3.31)$$

donde η es la eficiencia radiativa. Para un objeto compacto no rotante,

$$\eta = \frac{GM}{2R_*c^2}, \quad (3.32)$$

de modo que

$$\dot{M} = \frac{L_{\text{acc}}}{\eta c^2}. \quad (3.33)$$

Cuando se observa una luminosidad en una determinada banda espectral L_{band} , normalmente se debe convertir a la luminosidad bolométrica total L_{bol} . Asumiendo que esa conversión ya está hecha, podemos escribir

$$\boxed{\therefore \dot{M} = \frac{2R_*}{GM} L_{\text{bol}}} \quad (3.34)$$

Esta expresión nos permite obtener estimaciones razonables de la tasa de acreción a partir de luminosidades observadas.

Órdenes de magnitud

AGN. Para agujeros negros supermasivos, donde el radio interno del disco coincide con el radio del ISCO,

$$R_* = R_{\text{in}} = R_{\text{ISCO}} = \frac{6GM}{c^2}, \quad (3.35)$$

tenemos

$$\dot{M} = \frac{12}{c^2} L_{\text{bol}} = \frac{L_{\text{bol}}}{\left(\frac{1}{12}\right) c^2}. \quad (3.36)$$

Para luminosidades típicas de AGN,

$$L_{\text{bol}} \sim 10^{40} - 10^{47} \text{ erg s}^{-1}, \quad (3.37)$$

se obtiene un rango de tasas de acreción del orden de

$$\dot{M} \sim 10^{-6} - 10^1 \left[M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \right]. \quad (3.38)$$

La eficiencia η puede variar considerablemente si el agujero negro rota, e incluso llegar a valores mayores que 1/12. Esto puede modificar la relación entre \dot{M} y L_{bol} . Aun así, estudios como [Davis and Laor \(2011\)](#) encuentran correlaciones fuertes entre la eficiencia radiativa y la masa del agujero negro.

Discos protoplanetarios (PPD). Para un sistema estelar joven, con

$$R_* \approx 2R_{\odot}, \quad M \approx 1M_{\odot}, \quad (3.39)$$

la tasa de acreción se obtiene de

$$\dot{M} = \frac{2R_*}{GM} L_{\text{bol}}. \quad (3.40)$$

Si consideramos luminosidades típicas

$$L_{\text{bol}} \sim 10^{33} - 10^{38} \text{ erg s}^{-1}, \quad (3.41)$$

entonces

$$\dot{M} \sim 10^{-9} - 10^{-4} \left[M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \right]. \quad (3.42)$$

En este caso, es importante ser cuidadoso con la elección de R_* y M dependiendo del tipo de objeto estelar analizado, especialmente cuando se estudian discos masivos o auto-gravitantes.

3.1.3. Temperatura efectiva

Como se mencionó, en los discos de acreción delgados y en equilibrio térmico local (LTE), la disipación viscosa genera un flujo de energía que se irradia verticalmente desde la superficie del disco. Este balance energético se resume en

$$Q^+ = Q^-, \quad (3.43)$$

Relación entre Q , $\Phi(T)$ e intensidad de emisión

El flujo irradiado puede escribirse como

$$Q^- = 2 \Phi(T), \quad (3.44)$$

donde el factor 2 corresponde a las dos caras del disco. El flujo hemiesférico es

$$\Phi(T) = \pi \int_0^\infty I_\nu(T) d\nu. \quad (3.45)$$

Bajo LTE, la intensidad espectral es aproximadamente la función de Planck:

$$I_\nu(T) \approx B_\nu(T). \quad (3.46)$$

Por lo tanto,

$$\Phi(T) = \sigma T^4, \quad (3.47)$$

y el balance de energía queda:

$$Q^- = 2\sigma T_{\text{eff}}^4. \quad (3.48)$$

Pero sabemos que

$$Q^+ = \frac{9}{4} \nu \Sigma \Omega_K^2, \quad (3.49)$$

por lo que obtenemos directamente

$$T_{\text{eff}}^4 = \frac{9}{8} \frac{\nu \Sigma \Omega_K^2}{\sigma}. \quad (3.50)$$

Finalmente,

$$T_{\text{eff}} = \left(\frac{9\nu\Sigma\Omega_K^2}{8\sigma} \right)^{1/4}. \quad (3.51)$$

Usando la relación estacionaria $\nu\Sigma$

Recordemos que en un disco estacionario,

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_{\text{in}}}{R} \right)^{1/2} \right], \quad (3.52)$$

lo cual permite reescribir la temperatura efectiva como

$$\therefore T_{\text{eff}}(R) = \left[\frac{3}{8\pi} \frac{GM\dot{M}}{R^3\sigma} \left(1 - \left(\frac{R_{\text{in}}}{R} \right)^{1/2} \right) \right]^{1/4} \quad (3.53)$$

Esta expresión es fundamental y aparece en cualquier modelo estándar de disco delgado.

Interpretación: Cada anillo del disco puede aproximarse como un cuerpo negro (BB). El *espectro total* del disco es entonces la **suma de los peaks de cuerpo negro** emitidos por todos los anillos. Esta es la base del espectro “multicolor blackbody” típico de los discos de acreción.

Órdenes de magnitud

AGN. Tomemos un agujero negro supermasivo con:

- $R_{\text{in}} = R_{\text{ISCO}} = 6GM/c^2$,
- $M_{\text{BH}} = 10^8 M_{\odot}$,
- $\dot{M} = 0.1 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.

Los valores típicos de T_{eff} en función de R son:

R	$T_{\text{eff}} [\text{K}]$	$\lambda_{\text{max}} [\text{m}]$
$1.5R_{\text{in}}$	$\sim 6 \times 10^4$	$\sim 4.8 \times 10^{-8}$
$3R_{\text{in}}$	$\sim 4 \times 10^4$	$\sim 7.25 \times 10^{-8}$
$10R_{\text{in}}$	$\sim 2 \times 10^4$	$\sim 1.45 \times 10^{-7}$
$100R_{\text{in}}$	$\sim 7 \times 10^3$	$\sim 4.14 \times 10^{-7}$
$300R_{\text{in}}$	$\sim 1.7 \times 10^3$	$\sim 1.7 \times 10^{-6}$

Para obtener el máximo de longitud de onda se utilizó la ley de Wien, donde:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.9 \times 10^{-3} [\text{mK}]}{T[\text{K}]} \quad (3.54)$$

Discos protoplanetarios (PPD). Usamos:

- $R_{\text{in}} \sim 2R_{\odot}$,
- $M_* \approx 1M_{\odot}$,
- $\dot{M} \sim 10^{-8} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.

Los valores representativos son:

R	$T_{\text{eff}} [\text{K}]$	$\lambda_{\text{max}} [\text{m}]$
$1.5R_{\text{in}}$	$\sim 1.4 \times 10^3$	$\sim 2 \times 10^{-6}$
$3R_{\text{in}}$	$\sim 1.0 \times 10^3$	$\sim 3 \times 10^{-6}$
$10R_{\text{in}}$	~ 460	$\sim 6.3 \times 10^{-6}$
$100R_{\text{in}}$	~ 87	$\sim 3.3 \times 10^{-5}$
$300R_{\text{in}}$	~ 38	$\sim 7.6 \times 10^{-5}$

Nota: estos valores corresponden estrictamente al modelo de disco delgado de Shakura–Sunyaev, sin incluir radiación difusa, sombras, ni efectos de óptica gruesa que pueden ser importantes en PPD reales.

3.1.4. Tiempo viscoso

El *tiempo viscoso* t_{visc} es la escala temporal característica en la que el material del disco logra “derramarse” hacia el centro debido al transporte de momento angular generado por la viscosidad.

Aunque la gravedad empuja al gas hacia la estrella o agujero negro central, el gas no cae directamente: está en órbita, y su *momento angular* lo sostiene. Para que el gas pueda acercarse al centro, debe transferir parte de ese momento angular a capas más externas del disco. Este proceso ocurre a través de la viscosidad turbulenta. Cuando el gas pierde momento angular, puede moverse hacia adentro. El tiempo viscoso describe cuán rápido ocurre este proceso.

Escala de tiempo viscosa

De forma general,

$$t_{\text{visc}} \sim \frac{R^2}{\nu}, \quad (3.55)$$

donde ν es la viscosidad efectiva del disco. En el modelo α -viscoso de Shakura–Sunyaev, esta se parametriza como

$$\nu = \alpha c_s H, \quad (3.56)$$

y usando $c_s \approx H\Omega_K$ obtenemos

$$\nu \approx \alpha H^2 \Omega_K. \quad (3.57)$$

Por lo tanto,

$$t_{\text{visc}} \sim \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R}{H} \right)^2 \frac{1}{\Omega_K}. \quad (3.58)$$

Esta expresión muestra varias dependencias importantes:

- Si el disco es **muy delgado** (H/R pequeño), entonces $(R/H)^2$ es grande y

$$t_{\text{visc}} \text{ aumenta} \Rightarrow \text{acreción más lenta.}$$

- Si α es menor, disminuye la viscosidad y

$$t_{\text{visc}} \text{ aumenta} \Rightarrow \text{acreción más lenta.}$$

- A mayor radio R , la escala de tiempo aumenta:

$$t_{\text{visc}}(R) \text{ crece hacia el exterior.}$$

- Un objeto central más masivo implica una mayor frecuencia Kepleriana Ω_K y por lo tanto:

$$t_{\text{visc}} \text{ disminuye} \Rightarrow \text{acreción más rápida.}$$

Órdenes de magnitud

AGN. Consideremos un agujero negro supermasivo con:

- $M_{\text{BH}} = 10^8 M_{\odot}$,
- $\alpha \approx 10^{-2} - 10^{-1}$,
- $H/R \approx 0.05$.

Usando

$$t_{\text{visc}} \sim \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R}{H} \right)^2 \frac{1}{\Omega_K}, \quad (3.59)$$

se obtienen valores típicos:

- Para $R \sim 0.1 \text{ AU}$:

$$t_{\text{visc}} \sim 10^1 - 10^3 \text{ yr.}$$

- Para $R \sim 1 \text{ AU}$:

$$t_{\text{visc}} \sim 10^3 - 10^4 \text{ yr.}$$

Estos tiempos son relativamente cortos debido a la enorme masa del agujero negro, que hace que Ω_K sea muy grande.

PPD. Para un disco protoplanetario con:

- $M_* = 1M_\odot$,
- $H/R \approx 0.05$,
- $\alpha \sim 10^{-3} - 10^{-2}$,

los tiempos viscosos son considerablemente mayores:

- Para 1 AU:

$$t_{\text{visc}} \sim 10^3 - 10^4 \text{ yr.}$$

- Para 10 AU:

$$t_{\text{visc}} \sim 10^5 - 10^6 \text{ yr.}$$

- Para 100 AU:

$$t_{\text{visc}} \gtrsim 10^7 \text{ yr.}$$

En discos protoplanetarios, esto es coherente con las escalas observacionales, donde la acreción hacia el centro es muy lenta en las regiones externas, y los tiempos típicos de disipación del disco (del orden de Myr) coinciden con estas estimaciones.

Resumen de valores típicos para AGN y discos protoplanetarios

A continuación se presentan los rangos típicos de luminosidad, tasa de acreción, temperatura efectiva y tiempo viscoso tanto para discos de acreción en AGN como para discos protoplanetarios. Estos valores combinan resultados analíticos obtenidos a partir del modelo estándar de discos delgados, junto con rangos observacionales.

Cuadro 3.1: Resumen de valores típicos para AGN y discos protoplanetarios.

Cantidad	AGN	Discos Protoplanetarios
L [erg/s]	$\sim 10^{40} - 10^{47}$	$\sim 10^{33} - 10^{38}$
\dot{M} [M_\odot/yr]	$\sim 10^{-6} - 10^1$	$\sim 10^{-9} - 10^{-4}$
T_{eff} [K]	$\sim 10^5 - 10^3$ (centro \rightarrow borde) $M_{\text{BH}} \sim 10^8 M_\odot$, $R_{\text{in}} = R_{\text{ISCO}}$, $\dot{M} \sim 10^{-1} M \text{ yr}^{-1}$	$\sim 10^4 - 10^1$ (centro \rightarrow borde) $M_* \sim 1M_\odot$, $R_{\text{in}} \sim 2R_\odot$, $\dot{M} \sim 10^{-8} M \text{ yr}^{-1}$
t_{visc} [s]	$\sim 10^1 - 10^4 \text{ yr}$; $R \sim 0.1\text{--}1 \text{ AU}$	$\sim 10^3 - 10^7 \text{ yr}$; $R \sim 1\text{--}100 \text{ AU}$

Comentarios

- En observaciones, suele medirse la luminosidad sólo en una banda (L_{band}). Posteriormente se aplica una **corrección bolométrica** para obtener L_{bol} .
- Usando L_{bol} y una eficiencia radiativa η se estima la tasa de acreción:

$$L_{\text{acc}} = \eta \dot{M} c^2.$$

- Una vez conocida \dot{M} se pueden predecir T_{eff} , espectros de cuerpo negro multitemperatura y tiempos viscosos.
- En simulaciones, es habitual fijar \dot{M} como parámetro de entrada, y obtener luminosidades como salida del modelo.

Lectura Sugerida

- [Frank et al. \(2002\)](#) — Revisar capítulo 5.3
- Clases 2025 Discos con valores típicos

3.2. Ayudantía 8: Límite de Eddington y Discos- α

3.2.1. Límite de Eddington

Balance entre gravedad y presión de radiación

En equilibrio hidrostático (disco estacionario), considerando fuerzas por unidad de masa (aceleraciones), se considera el punto en el que la *fuerza de radiación* hacia afuera equilibra exactamente la *fuerza de gravedad* hacia adentro. Más allá de este límite, el gas deja de estar sostenido por la gravedad y la radiación tendería a expulsarlo, de modo que la acreción estacionaria deja de ser posible

$$\mathbf{f}_{\text{rad}} + \mathbf{f}_{\text{grav}} = 0, \quad (3.60)$$

donde

- \mathbf{f}_{rad} es la aceleración debida a la fuerza de radiación,
- \mathbf{f}_{grav} es la aceleración gravitacional,
- y además, $\mathbf{f}_{\text{grav}} = -\nabla\phi$ y ϕ es el potencial gravitatorio.

En la aproximación esférica,

$$\phi(R) = -\frac{GM}{R} \quad \Rightarrow \quad |\nabla\phi| = \frac{GM}{R^2}. \quad (3.61)$$

La fuerza de radiación por unidad de masa puede escribirse como

$$f_{\text{rad}} = \frac{\kappa F}{c}, \quad (3.62)$$

donde F es el flujo radiativo y κ la opacidad (por unidad de masa). Suponiendo simetría esférica,

$$F = \frac{L}{4\pi R^2}, \quad (3.63)$$

con L la luminosidad total.

La condición de equilibrio (sistema estacionario) entre gravedad y radiación es entonces

$$\frac{\kappa L}{4\pi R^2 c} = \frac{GM}{R^2}. \quad (3.64)$$

Al simplificar R^2 obtenemos

$$L = \frac{4\pi c GM}{\kappa}. \quad (3.65)$$

Si imponemos geometría esférica (buena primera aproximación para el centro de un sistema compacto), esta luminosidad marca el *límite máximo para la luz* que puede emitir el sistema sin expulsar el gas que intenta acrecionar, para una opacidad κ dada.

Opacidad de Thomson y luminosidad de Eddington

El límite de Eddington se entiende con mayor claridad si especificamos la opacidad. Para el caso clásico, se toma

$$\kappa = \kappa_T \equiv \frac{\sigma_T}{m_p}, \quad (3.66)$$

donde:

- σ_T es la **sección eficaz de Thomson** (del electrón),
- m_p es la masa del protón.

Esta elección es apropiada porque el límite de Eddington se derivó originalmente para:

- gas **totalmente ionizado**, de forma que los fotones empujan principalmente a los electrones;
- temperaturas altas, $T \gtrsim 10^6 - 10^7$ K, típicas de acreción sobre objetos compactos masivos;

- interacción dominada por **dispersión Thomson** sobre electrones libres (los protones son arrastrados por el acoplamiento coulombiano).

Reemplazando κ_T en la expresión de L obtenemos la **luminosidad de Eddington**:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi c G M m_p}{\sigma_T} \simeq 1.28 \times 10^{38} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ erg s}^{-1}. \quad (3.67)$$

Esta es la *luminosidad máxima de un objeto compacto, esférico y estacionario* para que la radiación no expulse el gas que intenta acretar.

Relación con la luminosidad de acreción

Por otra parte, recordemos que para acreción esférica y estacionaria, la luminosidad de acreción puede escribirse como

$$L_{\text{acc}} \simeq \frac{G M \dot{M}}{R_*}, \quad (3.68)$$

donde R_* es el radio característico en el que se libera la mayor parte de la energía gravitacional (por ejemplo, la superficie de una estrella de neutrones o $\sim R_{\text{Sch}}$ para un agujero negro).

Es frecuente parametrizar esta luminosidad en términos de una **eficiencia radiativa** η :

$$L_{\text{acc}} = \eta \dot{M} c^2. \quad (3.69)$$

Comparando con la expresión anterior,

$$\eta \sim \frac{GM}{R_* c^2}, \quad (3.70)$$

que típicamente es del orden $\eta \sim 0.1$ para objetos compactos (estrellas de neutrones y agujeros negros).

Tasa de acreción de Eddington

Si imponemos que la luminosidad de acreción no supere el límite de Eddington,

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{Edd}}, \quad (3.71)$$

entonces la **tasa de acreción de Eddington** se obtiene de

$$\eta \dot{M}_{\text{Edd}} c^2 = L_{\text{Edd}} \quad \Rightarrow \quad \dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{L_{\text{Edd}}}{\eta c^2}. \quad (3.72)$$

En términos de parámetros típicos,

$$\dot{M}_{\text{Edd}} \simeq 1.5 \times 10^{18} \left(\frac{R_*}{3 \text{ km}} \right) \left(\frac{\eta}{0.1} \right)^{-1} \text{ g s}^{-1}. \quad (3.73)$$

Esta es la **tasa de acreción máxima** para que pueda existir acreción *esférica y estacionaria* sin exceder el límite de Eddington.

Ejemplos numéricos para agujeros negros

Podemos estimar analíticamente L_{acc} y compararla con L_{Edd} en dos casos típicos:

Agujero negro con $M_{\text{BH}} = 10^6 M_{\odot}$. Tomemos:

$$M_{\text{BH}} = 10^6 M_{\odot}, \quad (3.74)$$

$$\dot{M} = 10^{-3} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}, \quad (3.75)$$

$$R_* \simeq R_{\text{Sch}} \approx 3 \times 10^6 \text{ km}. \quad (3.76)$$

Entonces,

$$L_{\text{acc}} \simeq 2.84 \times 10^{43} \text{ erg s}^{-1}, \quad (3.77)$$

$$L_{\text{Edd}} \simeq 1.28 \times 10^{44} \text{ erg s}^{-1}, \quad (3.78)$$

de modo que

$$\frac{L_{\text{acc}}}{L_{\text{Edd}}} \sim 22 \%, \quad (3.79)$$

es decir, un caso **sub-Eddington**: la radiación no es suficiente para detener la acreción.

Agujero negro con $M_{\text{BH}} = 10^8 M_{\odot}$. Ahora consideremos:

$$M_{\text{BH}} = 10^8 M_{\odot}, \quad (3.80)$$

$$\dot{M} = 1 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}, \quad (3.81)$$

$$R_* \simeq R_{\text{Sch}} \approx 3 \times 10^8 \text{ km}. \quad (3.82)$$

Obtenemos

$$L_{\text{acc}} \simeq 2.84 \times 10^{46} \text{ erg s}^{-1}, \quad (3.83)$$

$$L_{\text{Edd}} \simeq 1.28 \times 10^{46} \text{ erg s}^{-1}, \quad (3.84)$$

y por lo tanto

$$\frac{L_{\text{acc}}}{L_{\text{Edd}}} \sim 222 \%. \quad (3.85)$$

Se trata de un caso **super-Eddington**: en este régimen, el sistema no puede mantenerse en equilibrio esférico y estacionario. La radiación tiende a expulsar material, el flujo se vuelve más complejo (posibles vientos, geometría no esférica, etc.), y el sistema “busca” una configuración que restablezca el equilibrio.

Comentarios

- En discos protoplanetarios (PPD) la situación es muy distinta de la acreción sobre objetos compactos. Los PPD son estructuras **frías** ($T \sim 10\text{--}10^3 \text{ K}$), muy lejos del régimen de temperaturas ($T \gtrsim 10^6\text{--}10^7 \text{ K}$) para el cual la dispersión de Thomson domina la interacción radiación-materia. Por lo tanto, la opacidad relevante en PPD **no es** la opacidad de Thomson: el gas no está ionizado, la interacción con la radiación está dominada por **polvo, moléculas y líneas atómicas**, y la emisión térmica es muy débil comparada con la de un objeto compacto. Esto implica que el límite de Eddington, tal como se define usando κ_{T} , **no tiene sentido físico directo** en el contexto de PPD. Además, la geometría no es esférica, sino la de un **disco delgado**, donde el transporte de momento angular y la disipación se describen mediante los modelos de discos- α más que mediante acreción esférica. En este caso, la luminosidad relevante es la del propio disco,

$$L_{\text{disc}} \simeq \frac{1}{2} \frac{GM}{R_{\text{in}}} \dot{M}, \quad (3.86)$$

y no la derivada del límite de Eddington esférico.

- Para $\dot{M} \lesssim \dot{M}_{\text{Edd}}$ se puede seguir usando la idea de eficiencia η (del orden ~ 0.1 para NS y BHs), junto con un radio efectivo R_* que en muchos casos se toma del orden del radio de Schwarzschild. El límite de Eddington da una guía muy útil para saber si un flujo es sub- o super-Eddington.

3.2.2. Estructura de discos- α estacionarios

En esta sección revisamos la estructura de un disco de acreción estacionario utilizando la parametrización α para la viscosidad turbulenta. Esta aproximación, introducida por [Shakura and Sunyaev \(1973\)](#), permite describir el transporte de momento angular, producido por esfuerzos viscosos turbulentos, sin necesidad de resolver explícitamente la física microscópica de dichos procesos.

La idea central es que la viscosidad turbulenta ν puede escribirse como una fracción del producto entre la velocidad del sonido y la escala vertical del disco. De este modo:

$$\nu = \alpha c_s H, \quad (3.87)$$

donde $0 < \alpha < 1$ es un parámetro adimensional que cuantifica la eficiencia del transporte de momento angular.

Derivación

Consideremos la componente (r, φ) del tensor de esfuerzos viscosos. El esfuerzo viscoso asociado al corte diferencial de velocidades puede expresarse como

$$T_{r\varphi} = \rho \nu r \frac{d\Omega}{dr}. \quad (3.88)$$

Por otra parte, en el modelo α se postula que

$$T_{r\varphi} \simeq -\alpha P, \quad (3.89)$$

donde P es la presión total (gas + radiación, pero aquí nos enfocamos en gas ideal), y la constante α es el parámetro que escala la magnitud del esfuerzo turbulento.

Recordemos que para un gas isotérmico en z se tiene

$$P = \rho c_s^2. \quad (3.90)$$

Igualando ambas expresiones,

$$\rho \nu r \frac{d\Omega}{dr} = -\alpha \rho c_s^2. \quad (3.91)$$

Para un disco Kepleriano,

$$\Omega = \Omega_K = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2} \Rightarrow r \frac{d\Omega}{dr} = -\frac{3}{2} \Omega_K. \quad (3.92)$$

Reemplazando,

$$\nu = \frac{2}{3} \alpha \frac{c_s^2}{\Omega_K}. \quad (3.93)$$

Pero la altura de escala del disco es

$$H = \frac{c_s}{\Omega_K}, \quad (3.94)$$

de modo que finalmente obtenemos

$$\nu = \alpha c_s H. \quad (3.95)$$

Perfil estacionario de densidad superficial

En un disco estacionario, la tasa de acreción \dot{M} es constante con el radio. Utilizando la ecuación clásica para discos delgados,

$$\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_{\text{in}}}{R} \right)^{1/2} \right], \quad (3.96)$$

y reemplazando $\nu = \alpha c_s H$, obtenemos

$$\alpha c_s H \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_{\text{in}}}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.97)$$

Recordemos que $H = c_s / \Omega_K$, por lo que

$$\Sigma(R) = \frac{\dot{M}}{3\pi \alpha c_s^2 / \Omega_K} \left[1 - \left(\frac{R_{\text{in}}}{R} \right)^{1/2} \right], \quad (3.98)$$

o equivalentemente,

$$\Sigma(R) = \frac{\dot{M} \Omega_K}{3\pi \alpha c_s^2} \left[1 - \left(\frac{R_{\text{in}}}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.99)$$

Este resultado determina el *perfil estacionario de densidad superficial* del disco. Sin embargo, c_s depende de la temperatura vertical, y por ende H también. El perfil $\Sigma(R)$ está acoplado a la estructura térmica del disco.

Interpretación física

La ecuación de superficie estacionaria nos muestra que:

- Una mayor viscosidad (α grande) implica que es más eficiente el transporte de momento angular, por lo que para una misma \dot{M} se requiere una menor densidad superficial Σ .
- Un disco más frío (menor c_s , menor H) requiere mayor Σ para sostener la misma tasa de acreción.
- El término $(1 - \sqrt{R_{\text{in}}/R})$ refleja la condición de frontera interior: la densidad superficial tiende a cero al aproximarse al radio interno R_{in} .

Conexión observacional: cómo usar el modelo α con datos reales

Una de las grandes fortalezas del modelo α es que permite conectar la teoría con observaciones. En particular, si contamos con observaciones con resolución suficiente en distintos radios del disco (por ejemplo, discos estables observados en ALMA), podemos proceder del siguiente modo:

1. A partir de las observaciones, se puede estimar el perfil de densidad superficial $\Sigma(R)$ de manera directa o indirecta.
2. Suponiendo un disco estacionario, podemos comparar la forma observada de $\Sigma(R)$ con la expresión analítica obtenida anteriormente.
3. Esto permite realizar un **ajuste** y extraer un valor plausible del parámetro α que reproduce el perfil observado.
4. Una vez obtenido un valor de α , puede utilizarse como *input* para simulaciones hidrodinámicas o magnetohidrodinámicas, incorporando además otros parámetros observables como \dot{M} , M_* o perfiles térmicos.
5. Con estas simulaciones se pueden refinar parámetros adicionales, como la temperatura vertical, la estructura del disco o incluso validar la consistencia del perfil de densidad superficial.
6. El objetivo final es **reproducir lo observado** mediante un modelo físico coherente, usando α como un parámetro que sintetiza la intensidad del transporte de momento angular turbulento presente en el disco.

De esta manera, el modelo de discos- α estacionarios no sólo permite obtener perfiles analíticos de densidad superficial, sino que además proporciona una vía directa para inferir propiedades físicas del transporte turbulento en discos de acreción a partir de datos observacionales.

Lectura Sugerida

- [Frank et al. \(2002\)](#) — Luminosidad de Eddington en Capítulo 5.6
- [Shakura and Sunyaev \(1973\)](#) — Famoso artículo donde proponen el α -model

3.3. Ayudantía 9: Cantidades Físicas Locales en Función de α

3.3.1. Estructura local de discos delgados

Para describir la estructura local de un disco delgado (modelo estándar), utilizamos un **conjunto de ecuaciones acopladas** que relacionan densidad, presión, temperatura, altura de escala, viscosidad turbulenta y tasa de acreción. Estas ecuaciones se resuelven simultáneamente tomando como entradas los valores de \dot{M} , M y el radio R .

Set de ecuaciones para la estructura local

$$1. \quad \rho = \frac{\Sigma}{H}; \quad (3.100)$$

$$2. \quad H = \frac{c_s}{\Omega_K} = c_s \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}; \quad (3.101)$$

$$3. \quad c_s^2 = \frac{P}{\rho}; \quad (3.102)$$

$$4. \quad P = \frac{\rho k_B T_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4; \quad (3.103)$$

$$5. \quad \frac{4\sigma T_c^4}{3\tau} = \frac{3}{8\pi} \Omega_K^2 \dot{M} \left[1 - \left(\frac{R_{\text{in}}}{R} \right)^{1/2} \right], \quad T_{\text{eff}}^4 = \frac{4T_c^4}{3\tau}; \quad (3.104)$$

$$6. \quad \tau = \tau(\Sigma, \rho, T_c) = \Sigma \kappa(\rho, T_c); \quad (3.105)$$

$$7. \quad \nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_{\text{in}}}{R} \right)^{1/2} \right]; \quad (3.106)$$

$$8. \quad \nu = \nu(\rho, T_c, \Sigma, \alpha, \dots). \quad (3.107)$$

Caso dominio gas-presión y opacidad de Kramers

Ahora queremos expresar la estructura local del disco en función del parámetro de viscosidad turbulenta α . Nos centraremos en uno de los regímenes clásicos de [Shakura and Sunyaev \(1973\)](#): un **disco frío y ópticamente grueso**, con

$$T_c \sim 10^4 - 10^5 \text{ K}. \quad (3.108)$$

En este régimen:

- Domina la **presión de gas** sobre la presión de radiación, por lo que la ecuación (4) se aproxima como

$$P \simeq \frac{\rho k_B T_c}{\mu m_p}. \quad (3.109)$$

- La opacidad está bien descrita por la **ley de Kramers** ([Kramers, 1923](#)), válida cuando dominan procesos *free-bound*, *bound-free* y *free-free* en un gas parcialmente ionizado:

$$\kappa_R = \kappa_0 \rho T_c^{-7/2} \quad (3.110)$$

En particular, para discos fríos la opacidad depende fuertemente de la temperatura y la densidad. Con esta forma de la opacidad, la ecuación (6) se convierte en

$$\tau = \Sigma \kappa_R \simeq \Sigma \kappa_0 \rho T_c^{-7/2}. \quad (3.111)$$

De la ecuación (3) ($c_s^2 = P/\rho$) usando que domina la presión de gas,

$$c_s^2 = \frac{P}{\rho} \simeq \frac{k_B T_c}{\mu m_p} \Rightarrow c_s \propto T_c^{1/2}. \quad (3.112)$$

A partir de la ecuación (2),

$$H = \frac{c_s}{\Omega_K} \propto T_c^{1/2} \Omega_K^{-1}. \quad (3.113)$$

Como

$$\Omega_K = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2} \propto M^{1/2} R^{-3/2}, \quad (3.114)$$

obtenemos

$$H \propto T_c^{1/2} R^{3/2} M^{-1/2}. \quad (3.115)$$

Usando la ecuación (1),

$$\rho = \frac{\Sigma}{H} \propto \Sigma T_c^{-1/2} R^{-3/2} M^{1/2}. \quad (3.116)$$

Volviendo ahora a la ecuación (6) con la opacidad de Kramers,

$$\tau = \Sigma \kappa_0 \rho T_c^{-7/2} \propto \Sigma \left(\Sigma T_c^{-1/2} R^{-3/2} M^{1/2} \right) T_c^{-7/2}, \quad (3.117)$$

es decir,

$$\tau \propto \Sigma^2 T_c^{-4} R^{-3/2} M^{1/2}. \quad (3.118)$$

Ahora la ecuación (5), de equilibrio entre disipación viscosa y radiación emergente, es

$$\frac{4\sigma T_c^4}{3\tau} = \frac{3}{8\pi} \Omega_K^2 \dot{M} \left[1 - \left(\frac{R_{\text{in}}}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.119)$$

Por conveniencia, definimos

$$f^4(R) \equiv 1 - \left(\frac{R_{\text{in}}}{R} \right)^{1/2}, \quad (3.120)$$

$$D(R) \equiv \frac{3}{8\pi} \Omega_K^2 \dot{M} f^4(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} f^4(R), \quad (3.121)$$

de forma que

$$\frac{4\sigma T_c^4}{3\tau} = D(R). \quad (3.122)$$

Usando la expresión anterior para τ ,

$$\frac{T_c^4}{\tau} \propto \frac{T_c^4}{\Sigma^2 T_c^{-4} R^{-3/2} M^{1/2}} = T_c^8 \Sigma^{-2} R^{3/2} M^{-1/2}. \quad (3.123)$$

Por lo tanto,

$$T_c^8 \Sigma^{-2} R^{3/2} M^{-1/2} \propto D(R), \quad (3.124)$$

y de aquí

$$T_c^8 \propto \Sigma^2 R^{-3/2} M^{1/2} D(R). \quad (3.125)$$

Tomando la potencia 1/8,

$$T_c \propto \Sigma^{1/4} R^{-3/16} M^{1/16} D(R)^{1/8}. \quad (3.126)$$

Recordando que

$$D(R) \propto M \dot{M} R^{-3} f^4, \quad (3.127)$$

tenemos

$$T_c \propto \Sigma^{1/4} R^{-3/16} M^{1/16} \left(M \dot{M} R^{-3} f^4 \right)^{1/8} \quad (3.128)$$

$$\propto \Sigma^{1/4} \dot{M}^{1/8} M^{3/16} R^{-9/16} f^{1/2}. \quad (3.129)$$

De aquí se obtiene también

$$T_c^{-1} \propto \Sigma^{-1/4} \dot{M}^{-1/8} M^{-3/16} R^{9/16} f^{-1/2}. \quad (3.130)$$

Recordando que la viscosidad turbulenta, según el modelo α , es

$$\nu = \alpha c_s H. \quad (3.131)$$

Como $c_s \propto T_c^{1/2}$ y $H \propto T_c^{1/2} R^{3/2} M^{-1/2}$, resulta

$$\nu \propto \alpha T_c R^{3/2} M^{-1/2}. \quad (3.132)$$

La ecuación (7) del disco estacionario dice

$$\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_{\text{in}}}{R} \right)^{1/2} \right] = \frac{\dot{M}}{3\pi} f^4. \quad (3.133)$$

Por lo tanto,

$$\Sigma = \frac{\dot{M} f^4}{3\pi \nu} \propto \frac{\dot{M} f^4}{\alpha T_c R^{3/2} M^{-1/2}}. \quad (3.134)$$

En forma de proporcionalidad,

$$\Sigma \propto \dot{M} \alpha^{-1} T_c^{-1} R^{-3/2} M^{1/2} f^4. \quad (3.135)$$

Ahora, eliminamos T_c en función de α , \dot{M} , M , R y f , substituyendo la expresión de T_c^{-1} (3.130) en (3.135):

$$\Sigma \propto \dot{M} \alpha^{-1} \left(\Sigma^{-1/4} \dot{M}^{-1/8} M^{-3/16} R^{9/16} f^{-1/2} \right) R^{-3/2} M^{1/2} f^4 \quad (3.136)$$

$$\propto \Sigma^{-1/4} \dot{M}^{1-1/8} \alpha^{-1} M^{-3/16+1/2} R^{9/16-3/2} f^{4-1/2}. \quad (3.137)$$

Es decir,

$$\Sigma^{5/4} \propto \dot{M}^{7/8} \alpha^{-1} M^{5/16} R^{-15/16} f^{7/2}. \quad (3.138)$$

Elevando ambos lados a la potencia $4/5$, obtenemos finalmente

$$\Sigma \propto \dot{M}^{(7/8) \cdot (4/5)} \alpha^{-(4/5)} M^{(5/16) \cdot (4/5)} R^{(-15/16) \cdot (4/5)} f^{(7/2) \cdot (4/5)} \quad (3.139)$$

$$\propto \dot{M}^{7/10} \alpha^{-4/5} M^{1/4} R^{-3/4} f^{14/5}. \quad (3.140)$$

Por lo tanto, en este régimen (disco frío, presión de gas dominante y opacidad de Kramers) la densidad superficial satisface el **escalamiento**:

$$\boxed{\Sigma \propto \dot{M}^{7/10} \alpha^{-4/5} M^{1/4} R^{-3/4} f^{14/5}} \quad (3.141)$$

(despreciando factores numéricos y constantes físicas).

Forma dimensional: escalando con R_{10} , m_1 y \dot{M}_{16}

Lo último que hacemos es escribir las soluciones en términos de cantidades adimensionales adaptadas a tamaños típicos de discos de acreción. Definimos

$$R_{10} = \frac{R}{10^{10} \text{ cm}}, \quad (3.142)$$

$$m_1 = \frac{M}{M_{\odot}}, \quad (3.143)$$

$$\dot{M}_{16} = \frac{\dot{M}}{10^{16} \text{ g s}^{-1}}, \quad (3.144)$$

$$\mu = 0.615, \quad (3.145)$$

donde $\mu = 0.615$ corresponde a un gas completamente ionizado de composición aproximadamente cósmica.

Usando estas definiciones, e insertando todas las constantes físicas (incluyendo el valor de κ_0 de Kramers), las expresiones obtenidas en la sección anterior se pueden escribir, para el régimen de disco frío dominado por presión de gas y opacidad de Kramers, como:

$$1. \quad \Sigma = 5.2 \alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{7/10} m_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{14/5} \text{ g cm}^{-2}, \quad (3.146)$$

$$2. \quad H = 1.7 \times 10^8 \alpha^{-1/10} \dot{M}_{16}^{3/20} m_1^{-3/8} R_{10}^{9/8} f^{3/5} \text{ cm}, \quad (3.147)$$

$$3. \quad \rho = 3.1 \times 10^{-8} \alpha^{-7/10} \dot{M}_{16}^{11/20} m_1^{5/8} R_{10}^{-15/8} f^{11/5} \text{ g cm}^{-3}, \quad (3.148)$$

$$4. \quad T_c = 1.4 \times 10^4 \alpha^{-1/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{6/5} \text{ K}, \quad (3.149)$$

$$5. \quad \tau = 190 \alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{1/5} f^{4/5}, \quad (3.150)$$

$$6. \quad \nu = 1.8 \times 10^{14} \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{-1/4} R_{10}^{3/4} f^{6/5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}. \quad (3.151)$$

A partir de las expresiones finales para discos fríos ópticamente gruesos (Shakura and Sunyaev, 1973), podemos interpretar cómo dependen las cantidades mencionadas al variar \dot{M} , M , R y α .

- **Densidad superficial: Σ**

- Aumenta fuertemente si aumenta la tasa de acreción: $\Sigma \propto \dot{M}^{7/10}$.
- Disminuye al aumentar la viscosidad turbulenta: $\Sigma \propto \alpha^{-4/5}$.
- Aumenta débilmente con la masa central: $\Sigma \propto M^{1/4}$.
- Disminuye fuertemente con el radio: $\Sigma \propto R^{-3/4}$.

- **Altura del disco: H**

- Aumenta hacia el exterior del disco: $H \propto R^{9/8}$.
- Depende muy débilmente de la viscosidad: $H \propto \alpha^{-1/10}$.
- Aumenta levemente con \dot{M} : $H \propto \dot{M}^{3/20}$.
- Disminuye con la masa central: $H \propto M^{-3/8}$.

- **Densidad volumétrica: ρ**

- Cae fuertemente con el radio: $\rho \propto R^{-15/8}$.
- Disminuye cuando aumenta la viscosidad turbulenta: $\rho \propto \alpha^{-7/10}$.
- Aumenta con la tasa de acreción: $\rho \propto \dot{M}^{11/20}$.
- Aumenta con la masa central: $\rho \propto M^{5/8}$.

- **Temperatura central: T_c**

- Aumenta con la tasa de acreción: $T_c \propto \dot{M}^{3/10}$.
- Disminuye con la viscosidad turbulenta: $T_c \propto \alpha^{-1/5}$.
- Aumenta con la masa central: $T_c \propto M^{1/4}$.
- Disminuye hacia el exterior del disco: $T_c \propto R^{-3/4}$.

- **Profundidad óptica: τ**

- Muy sensible a la viscosidad turbulenta: $\tau \propto \alpha^{-4/5}$.

- Aumenta débilmente con la tasa de acreción: $\tau \propto \dot{M}^{1/5}$.
- En este régimen no depende explícitamente de M ni de R , pues esa dependencia ya está incorporada en Σ y κ .
- **Viscosidad cinemática:** ν
 - Aumenta fuertemente con la viscosidad turbulenta: $\nu \propto \alpha^{4/5}$.
 - Aumenta con la tasa de acreción: $\nu \propto \dot{M}^{3/10}$.
 - Disminuye con la masa central: $\nu \propto M^{-1/4}$.
 - Aumenta hacia el exterior: $\nu \propto R^{3/4}$.

Información complementaria para estimar α observacionalmente

En discos de acreción de enanas blancas (donde se estudia estabilidad térmica, $Q^+ = Q^-$), se estudian las *S-curves* en el plano Σ vs. T_{eff} (Meyer and Meyer-Hofmeister, 1981).

Se encuentran tres regímenes:

- **Rama fría** (estable)
- **Rama intermedia** (inestable)
- **Rama caliente** (estable)

Estas ramas están asociadas a los cambios de ionización del hidrógeno (alrededor de 4000–5000 K), donde aparece el comportamiento tipo S en las curvas de equilibrio térmico. En estos regímenes, el parámetro de viscosidad α toma valores típicos del orden 0.01–1.

Smak (1984) genera curvas de luz utilizando distintos modelos y luego superpone sus modelos con curvas de luz observadas, ajustando el valor de α mediante un *match* observacional.

Lectura Sugerida

- Shakura and Sunyaev (1973) — Régimen de disco más frío y presión del gas dominante del artículo
- Kramers (1923) — Artículo de la ley de Kramers para la opacidad
- Meyer and Meyer-Hofmeister (1981) — Revisar artículo sobre las *S-curves*
- Smak (1984) — Revisar para entender conexión observacional para la obtención de α

Bibliografía

- P. J. Armitage. Physical processes in protoplanetary disks, 2017. URL <https://arxiv.org/abs/1509.06382>.
- G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 2nd edition, 2008.
- H. Bondi. On spherically symmetrical accretion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 112: 195–204, 1952. doi: 10.1093/mnras/112.2.195.
- S. W. Davis and A. Laor. The Radiative Efficiency of Accretion Flows in Individual Active Galactic Nuclei. , 728(2):98, Feb. 2011. doi: 10.1088/0004-637X/728/2/98.
- T. Di Matteo, S. W. Allen, A. C. Fabian, A. S. Wilson, and A. J. Young. Accretion onto the supermassive black hole in m87. *The Astrophysical Journal*, 582:133–140, 2003. doi: 10.1086/344573.
- J. Frank, A. King, and D. Raine. *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 3rd edition, 2002. ISBN 9780521620530.
- J. W. Garvin. *A Student's Guide to the Navier–Stokes Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2023. ISBN 9781009236157.
- H. A. Kramers. Xciii. on the theory of x-ray absorption and of the continuous x-ray spectrum. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 46(275):836–871, 1923. doi: 10.1080/14786442308565244. URL <https://doi.org/10.1080/14786442308565244>.
- L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*, volume 6 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 2 edition, 1987. 2nd English ed., revised; translated by J. B. Sykes and W. H. Reid.
- L. Mestel. On the galactic law of rotation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 126:553–575, 1963. doi: 10.1093/mnras/126.6.553.
- F. Meyer and E. Meyer-Hofmeister. On the structure and stability of accretion disks. *Astronomy and Astrophysics*, 104:L10–L12, 1981.
- N. I. Shakura and R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. observational appearance. *Astronomy & Astrophysics*, 24:337–355, 1973.
- J. Smak. Accretion in cataclysmic binaries. iii. the viscosity parameter. *Acta Astronomica*, 34:161–191, 1984.
- S. J. Weidenschilling. Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula. , 180:57–70, July 1977. doi: 10.1093/mnras/180.2.57.
- F. M. White. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill Education, Nueva York, eighth edition, 2016.
- G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, New York, 1999. Wiley Classics Library reprint of the 1974 edition.