Astronomy & Astrophysics manuscript no. output
April 29, 2024

Predicción de eclipses xd

Martín Gutiérrez Donoso,[1] Vicente Honorato Rodríguez[1] and Constanza Soto Suárez[1]

Departamento de Física, Universidad Técnica Federico Santa María, Av. Vicuña Mackenna 3939, Santiago, Chile. [1]

Received April 09, 2024

ABSTRACT

En este trabajo se investiga la relación entre la velocidad circular y el radio de una galaxia, considerando distintos modelos de distribución de masa y la contribución de la materia oscura. Dentro de los modelos usados están el perfil Hernquist, la distribución Miyamoto-Nagai y la distribución de halo NFW (Navarro-Frenk-White). Se usarán datos observacionales de la Vía Láctea para corroborar si los modelos usados se ajustan correctamente. Para realizar esta investigación se utiliza el lenguaje Python con la finalidad de poder graficar los modelos y los datos observacionales. Finalmente se corrobora la eficacia de los modelos respecto a los datos reales de nuestra galaxia y se comprueba entonces la importancia de considerar la materia oscura dentro de la dinámica de las galaxias.

Key words. Kepler – Primera Ley de Kepler – Órbitas planetarias – Excentricidad

1. Introducción

El científico Johannes Kepler es una de las figuras más relevantes en la historia de la astronomía, puesto que logró matemáticamente demostrar varios aspectos de la dinámica planetaria, algo sin precedente para su época (Siglo XVI). Su trabajo más relevante es sin duda la propuesta de sus tres leyes. De manera resumida, la primera ley explica que los planetas orbitan al rededor de su estrella de manera elíptica, teniendo a la estrella en uno de los focos de la elipse. La segunda ley explica que el área que barren los planetas al orbitar es proporcional al tiempo que se demoran en barrer dicha área. Por último, la tercera ley explica que existe una relación entre el periodo de la orbita de los planetas y la distancia de éstos a su estrella, donde el cuadrado del periodo es proporcional al cubo de la distancia.

El enfoque de este trabajo se centra en la primera de estas leyes, puesto que se puede obtener a partir de ecuaciones de dinámica, utilizando la Ley de gravitación universal de Newton. Los primeros pasos matemáticos para obtener este resultado ya fueron resueltos en clases del ramo AST210 con el profesor Matías Montesinos Armijo (`matias.montesinoa@usm.cl`) por lo que se empezará de la última ecuación propuesta, mostrada en Eq 1. A partir de esta ecuación se obtendrá el valor de $r(\theta)$, que permitirá demostrar esta ley de manera matemática. Además, usará un código realizado en Python para poder graficar las trayectorias dependiendo de la excentricidad.

2. Desarrollo Matemático

La ecuación diferencial que describe el movimiento de un sistema de dos cuerpos está dada por la Eq 1, donde r es la distancia entre ambos cuerpos, M y m son las masas de los cuerpos, G es la constante de gravitación universal y h es equivalente a $r^2\dot{\theta}$.

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{G(M+m)}{r^2} \tag{1}$$

Para resolver la Eq. 1, realizamos un cambio de variable, definiendo $u = r^{-1}$. Determinamos la primera derivada temporal para r en función de u, obteniendo lo mostrado en la Eq.2. Recordar que $h = r^2\dot{\theta}$.

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{h}{\dot{\theta}}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} \tag{2}$$

Ahora, volvemos a derivar esta expresión por el tiempo, obtenido lo mostrado en la Eq. 3.

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(-h\frac{du}{d\theta}) = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{3}$$

Reemplazamos los valores encontrados para r y $\ddot{r}$ en Eq. 1, y simplificando términos, finalmente obtenemos la ecuación diferencial mostrada en Eq. 4, cuya solución conocida es la mostrada en Eq. 5. Para satisfacer los valores de condiciones iniciales (especificar mejor por qué), definimos que B tiene valor igual a cero.

$$\frac{du}{d\theta} + u = \frac{G(m+M)}{h^2} \tag{4}$$

$$u(\theta) = Acos(\theta) + Bsin(\theta) + \frac{G(M+m)}{h^2} \tag{5}$$

Finalizando, reemplazamos r(θ) y así obtener la ecuación de movimiento dependiente del ángulo de rotación, la cual es mostrada en Eq. 6.

$$r = \frac{h^2}{G(m+M)}\frac{1}{(1+\frac{h^2Acos\theta}{G(m+M)})} \tag{6}$$

Si definimos ciertas variables de la forma mostrada en Eq. 7 como la excenrticidad ε, obtenemos la ecuación correspondiente a la Primera Ley de Kepler, mostrada en Eq. 8, la cual utilizamos para realizar un análisis a la excentricidad de la orbita entre dos cuerpos.

$$\frac{h^2}{G(m+M)}A = \varepsilon \tag{7}$$

$$r = \frac{h^2}{G(m+M)}\frac{1}{(1+ecos\theta)} \tag{8}$$

3. Análisis de Órbitas

Utilizando la Eq. 8, demostrada en la sección 2, se obtienen una serie de gráficas para órbitas con distintas excentricidades. En general, podemos hablar de un sistema compuesto por un cuerpo masivo que es orbitado por uno de menor masa, por ejemplo el sol con el planeta tierra. En Fig. 1 es importante notar que hablamos de una excentricidad cero ($\varepsilon = 0$), lo que implica una órbita circular, en donde la distancia a cualquier ángulo es la misma. A su vez, la rapidez tangencial que experimenta un cuerpo menos masivo sería siempre la misma.

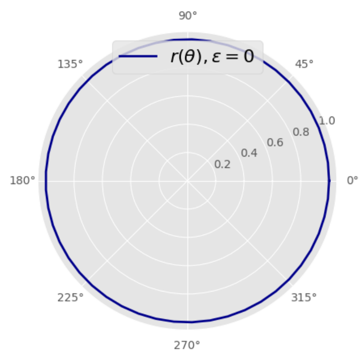

Fig. 1. Gráfica polar de la función radial tras resolver ecuación de movimiento de un sistema de dos cuerpos, trayectoria cicunferencial.

Para una órbita con excentricidad ente $0 < \varepsilon < 1$, tenemos una trayectoria elíptica, como se muestra en Fig. 2. Si el cuerpo de mayor masa se encuentra en un foco, diríamos que el otro, de menor masa, describe la elipse graficada, por lo que cambiará su rapidez tangencial según el ángulo. Desde otra perspectiva, a medida que este último cuerpo esté más cerca del masivo, esta rapidez será mayor, al punto de que en el perihelio (menor distancia entre los cuerpos) sea máxima. Por contra parte, la rapidez será mínima cuando esté en el afelio (mayor distancia entre los cuerpos).

Cuando la excentricidad toma el valor de uno ($\varepsilon = 1$), hablamos de una trayectoria parabólica, tal como se muestra en Fig. 3. Este peculiar caso es el punto de inflexión entre una órbita cerrada y una abierta, ya que es una trayectoria de escape de energía mínima. Lo que implica que no hay una periodicidad en el recorrido del cuerpo que incide al sistema.

Con un valor de la excentricidad mayor a uno ($\varepsilon > 1$), se habla de trayectorias hiperbólicas, las cuáles también se conocen como órbitas abiertas. En Fig. 4 es posible ver cómo la trayectoria de un cuerpo menos masivo entra al sistema y sale eyectado, ya que viene con una velocidad tal que su energía cinética es superior a la potencial gravitatoria que pueda mantenerlo orbitando periódicamente.

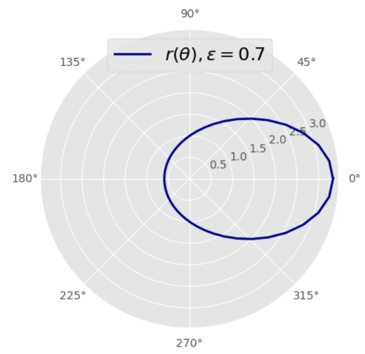

Fig. 2. Gráfica polar de la función radial tras resolver ecuación de movimiento de un sistema de dos cuerpos, trayectoria elíptica.

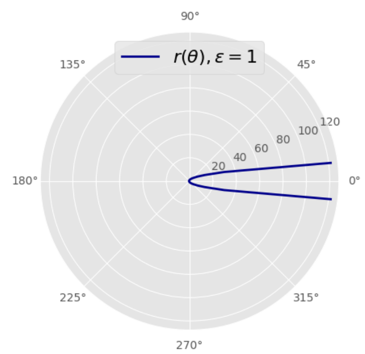

Fig. 3. Gráfica polar de la función radial tras resolver ecuación de movimiento de un sistema de dos cuerpos, trayectoria parabólica.

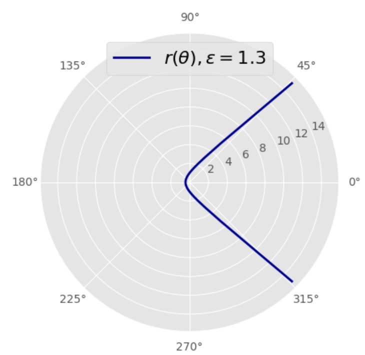

Fig. 4. Gráfica polar de la función radial tras resolver ecuación de movimiento de un sistema de dos cuerpos, trayectoria hiperbólica.

Cabe mencionar que estas trayectorias permiten el estudio del comportamiento entre dos cuerpos utilizando mecánica clásica, lo cual es bastante útil para el estudio de las órbitas planetarias.

4. Conclusión

Con el trabajo matemático expuesto se obtuvo que la geometría de las órbitas corresponde a una sección cónica que depende de una excentricidad, por lo que podemos decir que la órbita terrestre supone una elípse, como fue propuesto por Kepler hace siglos.

El hecho de que este análisis pueda hacerse desde la mecánica clásica es muy útil, ya que permite un mejor entendimiento de los procesos físicos y matemáticos que envuelven este problema. Este análisis puede extenderse, tanto a grandes escalas (dinámica planetaria) como a pequeñas, por ejemplo a niveles atómicos, ya que aún cuando por efectos cuánticos existan correcciones, sirven como acercamiento para aproximar valores.

Por otra parte, si queremos hablar de un sistema de tres cuerpos este análisis ya no es válido, debido a que la ecuación diferencial no tiene solución analítica. Esto es un gran problema actualmente para la predicción de modelos más complejos, por lo que se debe tener en consideración para una correcta interpretación.

Agradecimientos

Se agradece a Overleaf y Google Colab por facilitar el trabajo colaborativo.

References

Bradley W Carroll. 1996, An Introduction to Modern Stellar Astrophysics.