Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

1 Дифференциальное исчисление. Функции нескольких переменных 4

1.1 Метрические пространства . . . 4
1.2 Пространство $\mathbb{R}^n$ . . . 5
1.3 Последовательности в пространстве $\mathbb{R}^n$ . . . 6
1.4 Функции нескольких переменных. . . . 7
1.5 Непрерывные функции . . . 9
1.6 Дифференцируемость функций нескольких переменных . . . 10
1.7 Производные сложных функций . . . 13
1.8 Производные по направлениям . . . 14
1.9 Производные и дифференциалы старшего порядка . . . 16
1.10 Экстремумы функций нескольких переменных . . . 19
1.11 Численные методы поиска безусловного экстремума . . . 23
1.12 Теорема о неявной функции . . . 24
1.13 Системы функций . . . 26
1.14 Теорема о системе неявных функций . . . 28
1.15 Условный экстремум . . . 31
1.16 Геометрические приложения производных в пространстве $\mathbb{R}^3$ . . . 35
    1.16.1 Касательные и нормали к кривой в $\mathbb{R}^3$ . . . 35
    1.16.2 Уравнение касательной и нормали к поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$. 36

2 Интегральное исчисление функции нескольких переменных 39

2.1 Двойной интеграл . . . 39
    2.1.1 Свойства двойного интеграла. . . . 40
    2.1.2 Условие существования двойного интеграла . . . 41
    2.1.3 Геометрический смысл двойного интеграла . . . 41
    2.1.4 Правила вычисления двойного интеграла . . . 42
2.2 Криволинейные интегралы первого рода . . . 44
    2.2.1 Правила вычисления криволинейного интеграла первого рода . . . 44
2.3 Криволинейный интеграл второго рода . . . 46
    2.3.1 Правила вычисления интеграла второго рода . . . 46
    2.3.2 Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода . 48
2.4 Интегралы по замкнутому контуру . . . 48
2.5 Замена переменных в многомерном интеграле . . . 53
2.6 Площадь криволинейной поверхности . . . 56
2.7 Поверхностные интегралы первого рода . . . 58
    2.7.1 Правила вычисления поверхностного интеграла первого рода . . . 59
2.8 Поверхностные интегралы второго рода . . . 60
    2.8.1 Правило вычисления поверхностного интеграла второго рода . . . 61
2.9 Формула Стокса . . . 62
2.10 Тройной интеграл . . . 64
    2.10.1 Правила вычисления тройного интеграла . . . 64
    2.10.2 Замена переменных в тройном интеграле . . . 65
2.11 Формула Остроградского-Гаусса . . . 66
2.12 Элементы теории поля . . . 68
    2.12.1 Некоторое определения, связанные с векторными полями . . . 69
    2.12.2 Физический смысл формул . . . 69

3 Интегралы, зависящие от параметра 72

3.1 Равномерная сходимость функции нескольких переменных 72
3.2 Собственные интегралы, зависящие от параметра 73
3.3 Несобственные интегралы, зависящие от параметра 76
3.4 Эйлеровы интегралы 79
3.5 Интеграл Фурье 79
3.6 Комплексная форма интеграла Фурье 82

1 Дифференциальное исчисление. Функции нескольких переменных

1.1 Метрические пространства

Пусть имеется пространство неких элементов X.

Определение 1.1. Пространство X называется метрическим, если $\forall x, y \in X$, $\exists$ вещественное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее аксиомам:
1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$
$\forall x, y, z \in X$.

Тогда величину $\rho(x, y)$ можно назвать метрикой или расстоянием между элементами.

Пример 1.1. $X = \mathbb{R}$. Здесь $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пример 1.2. $X = C[a, b]$ — непрерывные функции, заданные на отрезке $[a, b]$.
$\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$, где $x \in [a, b]$.
$\rho_2(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$.
и так далее.

Если $\rho_1(f(x), g(x))$ мало, то $\rho_2(f(x), g(x))$ — мало. Обратное вообще говоря неверно.

Определение 1.2. $V_\varepsilon(x) = \{y \in X : \ \rho(x, y) < \varepsilon\}$ — эпсилон-окрестность x; шар с центром в x и радиусом ε.

Пример 1.3. $X = \mathbb{R}$ $\rho(x, y) = |x - y|$. $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Пример 1.4. $X = C([a, b])$, $\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$. Отступаем ε от каждого $f(x)$ вверх и вниз. Любая функция, лежащая в получившемся участке пространства, принадлежит эпсилон-окрестности функции.

Определение 1.3. Далее элементы пространства будем называть точками.

Определение 1.4. $x \in X$ — внутренняя точка X, если $\exists \varepsilon > 0 : \ V_\varepsilon(x) \subset X$.

Определение 1.5. Множество X открыто, если все его точки внутренние. (Привет, топология. Я скучал).

Пример 1.5. $x^2 + y^2 < 1$.

Определение 1.6. x — предельная точка X, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in X \ (y \neq x) : \ y \in V_\varepsilon(x)$.

Замечание 1.1. Предельная точка может как входить во множество, так и не входить.

Определение 1.7. X замкнуто, если оно содержит все свои предельные точки.

Пример 1.6. $x^2 + y^2 < 1$ не замкнуто. А вот $x^2 + y^2 \leq 1$ замкнуто.

Определение 1.8. Замыкание множества — процедура присоединения к множеству всех его предельных точек.

Пример 1.7. $\mathbb{Q}$ не открыто и не замкнуто.

Определение 1.9. $\overline{\mathbb{Q}}$ — замыкание.

Пример 1.8. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Определение 1.10. $x \in X$ — изолированная точка X, если $\exists \varepsilon > 0 : \nexists y \in X : \ y \neq x, \ y \in V_\varepsilon(x)$.

Определение 1.11. $x \in X$ — граничная точка X, если $\forall \varepsilon > 0, \ \exists y_1 \in X, \ \exists y_2 \notin X : y_1, y_2 \in V_\varepsilon(x)$. При этом граничная точка может как принадлежать множеству, так и не принадлежать.

1.2 Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение 1.12. Под пространством $\mathbb{R}^n$ будем понимать множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел. (Пространство n-мерных векторов).

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ метрику:
1) Сферическая (евклидова) метрика:
Если $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, то

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Докажем неравенство треугольника (неотрицательность и симметричность очевидны):

Доказательство. Очевидно, что $\forall a_i, b_i, \ i = 1, ..., n. \ \forall t \ \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 \geq 0$. Раскроем скобки:

$$\underbrace{t^2 \sum a_i^2}_{A} + \underbrace{2t \sum a_i b_i}_{B} + \underbrace{\sum b_i^2}_{C} \geq 0$$

. Чтобы это неравенство выполнялось, должно выполняться $B^2 - AC \leq 0$. Отсюда $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$. Извлечем корень: $\left|\sum a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$. Умножим на 2 и прибавим $\sum a_i^2 + \sum b_i^2 : \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sum a_i b_i \leq \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$. Вынесем полные квадраты: $\sum (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\right)^2$. Извлекаем корень, получаем $\sqrt{\sum (a_i + b_i)^2} \leq \left(\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\right)$ (*).

В неравенстве (*) $a_i = x_i - z_i$, $b_i = z_i - y_i$, $i = \overline{1, n}$, где $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Отсюда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2}$$

□

Пример 1.9. $V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2\}$ — эпсилон-окрестность, шар.

2) Параллелепипедальная метрика:
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\rho(x,y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$.
Аксиомы очевидны.

Пример 1.10. $V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n: \ \rho(x,y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n: \ |x_i - y_i| < \varepsilon, \ i = \overline{1,n}\}$.

Лемма 1.1. $\forall x \in \mathbb{R}^n$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varepsilon_1 > 0$:
1) $V^{(1)}_{\varepsilon_1}(x) < V^{(2)}_{\varepsilon}(x)$
2) $V^{(2)}_{\varepsilon_1}(x) < V^{(1)}_{\varepsilon}(x)$
где $V^{(1)}$ — сферическая окрестность, а $V^{(2)}$ — параллелепипедальная.

Доказательство. Очевидно. ☐

Из леммы вытекает, что сферическая и параллелепипедальная метрики эквивалентны в плане близости.

Поэтому далее можно использовать любую из этих метрик и теоремы, доказанные в одной метрике, верны и для другой.

Далее, если не оговорено противное, под расстоянием в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем понимать сферическую метрику.

В различных задачах могут быть использованы и другие метрики пространства $\mathbb{R}^n$.

1.3 Последовательности в пространстве $\mathbb{R}^n$

Пусть $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ ... \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ — последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.13. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$. Точка a называется пределом последовательности $\{x^{(k)}\}$ при $k \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0, \ \forall k > N \Rightarrow \rho(x^{(k)}, a) < \varepsilon$. Запись: $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$.

Теорема 1.1. $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$, $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ ... \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$. *Тогда* $a = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} \Leftrightarrow a_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}$, *где* $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a \Leftrightarrow \rho(x^{(k)}, a) \to_{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow \max_{i=\overline{1,n}} \left| x_i^{(k)} - a_i \right| \to_{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i$ (по лемме из прошлого параграфа). ☐

Замечание 1.2. Последовательность $\{x_i^{(k)}\}$ — одномерные числовые последовательности. В результате по теореме исследование многомерного предела сводится к исследованию одномерных пределов и теоремы, доказанные для одномерного случая в той или иной степени переносятся на многомерный случай.

Теорема 1.2. *(Коши)*
$\exists$ *конечный* $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \forall k \geq N \ \forall p > 0 \Rightarrow \rho(x^{(k+p)}, x^{(k)}) < \varepsilon$.

Определение 1.14. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathbb{R}^n$, если $\exists M > 0: \ \rho(x^{(k)}, \phi) \leq M \ \forall k = 1, 2, ...$, где ϕ обычно является началом координат.

Теорема 1.3. *(Больцано-Вейерштрасса для многомерного случая) Если последовательность ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x^{(k)}\}$ ограничена в $\mathbb{R}^n$. Распишем: $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ ... \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$. Если ограничены вектора, то следует, что последовательность первых координат $\{x_1^{(k)}\}$ ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса для одномерного случая из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\exists \{x_1^{(m_k)}\}$. Теперь возьмем эту последовательность для всех векторов (рассматриваем многомерную подпоследовательность): $x^{(m_k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(m_k)} \\ ... \\ x_n^{(m_k)} \end{pmatrix}$. Рассмотрим последовательность вторых координат $\{x_2^{(m_k)}\}$. Она ограничена, а значит, существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_2^{(p_{m_k})}\}$. Теперь рассматриваем $x^{(p_{m_k})} = \begin{pmatrix} x_1^{(p_{m_k})} \\ ... \\ x_n^{(p_{m_k})} \end{pmatrix}$. Полученная последовательность векторов сходится по первым двум координатам. По индукции распространяем правило на оставшиеся координаты. ☐

1.4 Функции нескольких переменных.

Определение 1.15. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. И пусть $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in E\ \exists$ некоторое вещественное число, которое будем обозначать $f(x)$ или $f(x_1, ..., x_n)$. Тогда говорят, что на множестве E задана функция от нескольких переменных.

Обозначения: Если будем доказывать теоремы для n-мерного случая, то будем обозначать несколько переменных как $f(x_1, ...x_n)$. В трехмерном/двухмерном будем писать $f(x, y, z)/f(x, y)$.

Определение 1.16. E — область определения функции.

Определение 1.17. Диаметр области $diamE = \sup_{x^{(1)}, x^{(2)} \in E} \rho(x^{(1)}, x^{(2)})$. Если $diamE$ конечен, то область E ограничена.

Определение 1.18. Область E — связная, если любые две точки из этой области можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этой области.

Пример 1.11. $f(x, y) = \ln xy$. Область определения $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy > 0\}$. E — неограничена, несвязна.

Замечание 1.3. Функция от двух переменных задает поверхность в трехмерном пространстве.

В общем случае получаем n-мерную поверхность в $n + 1$-мерном пространстве.

Определение 1.19. (предел функции по Гейне)

Пусть $f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{R}^n$, a — предельная точка E. Если $\forall \{x^{(k)}\} \in E$ верно, что $\rho(x^{(k)}, a) \to_{k\to\infty} 0 \Rightarrow |f(x^{(k)}) - g| \to_{k\to\infty} 0$, то $g = \lim_{x\to a} f(x)$.

Предложение 1.1. $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$. *Зафиксируем все координаты кроме* x_1. *Предположим* $\exists \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, ..., x_n) = f^{(1)}(x_2, ..., x_n)$. *Проведем эту операцию для оставшихся координат. В результате приходим к так называемому повторному пределу:*

$$\lim_{x_n \to a_n} ... \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, ..., x_n)$$

Если перебирать аргументы $x_1, ..., x_n$ *в другом порядке, то получим другой повторный предел. Всего получится* $n!$ *повторных пределов. Если существуют оба предела (повторный и Гейне), то они равны. Может оказаться, что какой-то повторный предел существует, а многомерного предела нет. И наоборот.*

Пример 1.12. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$. $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Здесь $\lim_{x \to 0, y \to 0} f(x, y) = 0$. То есть многомерный предел существует и равен нулю, так как $0 \leq |f(x, y)| \leq |x| + |y|$. Вычислим повторный предел: $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y)$. Внутреннего предела не существует. Если поменять пределы местами, то тоже ничего хорошего не получится.

Пример 1.13. Все то же самое, только $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y$. Опять-таки многомерный предел есть. Повторный предел $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} y = 0$. А вот наоборот не выйдет по той же причине, по которой мы не смогли вывести в предыдущем примере.

Пример 1.14. Опять-таки все то же самое, но $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Повторные пределы существуют и $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0$; $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0$. Покажем, что многомерного предела не существует. Будем стремиться к нулю по лучам. То есть $y = px$, $p = const$. Вычисляем: $\lim_{x \to 0} f(x, px) = \lim_{x \to 0} \frac{px^2}{x^2 + p^2 x^2} = \frac{p}{1 + p^2}$. То есть для каждого луча значение предела свое. Тогда по Гейне получается, что предела нет.

Пример 1.15. Все то же самое, но $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Попытаемся идти вдоль лучей. $\lim_{x \to 0} f(x, px) = \lim_{x \to 0} \frac{px^3}{x^4 + p^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{px}{x^2 + p^2} = 0 \ \forall p$. То есть вдоль любого луча получаем ноль. Но не факт, что предел существует, так как мы не обязаны идти по лучам. Пойдем по параболам: $y = px^2$. Тогда $\lim_{x \to 0} f(x, px^2) = \frac{p}{1 + p^2}$. Опять зависимость от p. Значит, этот предел не существует.

Замечание 1.4. Таким образом определение предела по Гейне отлично подходит для того, чтобы доказать, что предела нет.

Определение 1.20. (предел по Коши)

$f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{R}^n$. g — предел $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \forall x \in E : \rho(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$.

Замечание 1.5. Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.

Теорема 1.4. *(Критерий сходимости Коши)*

Чтобы $\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$, *такое, что* $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E : \ x^{(1)}, x^{(2)} \in U_\delta(a) \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| < \varepsilon$. *Доказательство аналогично одномерному случаю.*

Теорема 1.5. *(арифметические свойства)*

Пусть $\exists \lim_{x \to a} f(x) = g$ *и* $\exists \lim_{x \to a} h(x) = l$. *Тогда* $\exists \lim_{x \to a}(f(x) + h(x)) = g + l$, *аналогично с произведением и частным.*

Определение 1.21. Пусть $y = f(x) :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. А $z = g(y) :\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Здесь $y_k = f_k(x_1, ..., x_n)$, где $k = \overline{1, m}$; $z = g(y_1, ..., y_m)$ Тогда $z = g(f(x)) :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — суперпозиция функций f, g.

Теорема 1.6. *Пусть* $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b$ *и при этом* $\exists \lim_{y\to b} = l$. *Тогда* $\exists \lim_{y\to b} g(f(x)) = l$.

1.5 Непрерывные функции

Определение 1.22. $f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in E$. $f(x)$ непрерывна в точке a, если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Теорема 1.7. *(арифметические свойства)*

f, g — непрерывны в a. Тогда непрерывны сумма, произведение и отношение (если $g(a)$ не равно нулю).

Теорема 1.8. $y = f(x) :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *и она непрерывна в a. Пусть* $z = g(y) :\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *и она тоже непрерывна в $f(a)$. Тогда их суперпозиция будет непрерывна в точке a.*

Определение 1.23. Если функция непрерывна в каждой точке $E \subset \mathbb{R}^n$, то она называется непрерывной на множестве E.

Теорема 1.9. *(Больцано-Коши о нуле функции)*

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$ и множество E связно. И пусть $\exists a, b \in E :\ f(a)f(b) < 0$. *Тогда $\exists c \in E$, такая, что $f(c) = 0$.*

Доказательство. По условию E — связное, следовательно, $\exists$ непрерывная кривая L, которая:

1) L соединяет точки a, b;

2) $$L : \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ ... \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$$

$t \in [\alpha, \beta],\ x_1(t), ..., x_n(t)$ определены на $[a, b]$, при этом $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$.

Введем функцию $F(t) = f(x_1(t), ..., x_n(t))$. По теореме о непрерывности суперпозиции $F(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, причем $F(\alpha) = f(a),\ F(\beta) = f(b)$. По одномерной теореме Коши-Больцано $\exists j \in [\alpha, \beta] :\ F(j) = 0;\ c = \lambda(j) \subset E\ f(c) = F(j) = 0.$ ☐

Теорема 1.10. *(Коши-Больцано о промежуточном значении)*

$f(x)$ определена и непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$, E связно. $\exists a, b \in E :\ f(a) = A,\ f(b) = B$ *и* $A < B$. *Тогда* $\forall C :\ A < C < B :\ \exists c \in E :\ f(c) = C$.

Доказательство. Введем функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция по-прежнему непрерывна. Тогда $\varphi(a) = f(a) - C < 0$, и $\varphi(b) = f(b) - C > 0$. Сведено к предыдущей теореме. Тогда $\exists c \in E :\ \varphi(c) = 0$. $\varphi(c) = f(c) - C$, теорема доказана. ☐

Теорема 1.11. *(первая Вейерштрасса)*

Пусть $f(x)$ непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$ и E замкнута и ограничена. Тогда $f(x)$ будет ограничена в области E и достигает там своего максимума и минимума.

Доказательство.

1) Покажем, что функция является ограниченной:

От противного. Пусть это не так:$f(x)$ не ограничена E. Возьмем последовательность $\{x^{(k)}\} \in E$. E ограничена $\Rightarrow \{x^{(k)}\}$ — ограничена. А раз она ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists$ сходящаяся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\} \Rightarrow \exists x^* : \ x^{(m_k)} \to x^*$. Тогда из определения непрерывности по Гейне следует, что $f(x^{(m_k)}) \to_{k\to\infty} f(x^*)$. С другой стороны, из предположения следует, что $f(x^{(m_k)})$ уходит на бесконечность. Противоречие.

2) Покажем, что $f(x)$ достигает максимума (для минимума доказательство аналогично).

Обозначим $M = \sup_E f(x)$. Функция ограничена, значит, супремум конечен. От противного. Предположим, что $f(x)$ не достигает максимума, то есть $f(x) < M, \ \forall x \in E$. Рассмотрим $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Знаменатель не обращается в ноль, значит, она непрерывна на E. По уже доказанной первой части $g(x)$ ограничена на E. То есть $g(x) \leq L$. Подставим значение $g(x) : \ \frac{1}{M-f(x)} \leq L \ \forall x \in E \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{L}$. Получаем противоречие с определением супремума. ☐

Определение 1.24. (равномерная непрерывность)

$f(x)$ равномерно непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E$, таких, что $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) < \delta \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| < \varepsilon$.

Теорема 1.12. *(Кантора)*

$f(x)$ непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$. E замкнуто и ограничено. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна.

Доказательство. От противного. Положим, функция непрерывна, но не равномерно непрерывна на замкнутом и ограниченном E. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \ \ \forall \delta > 0 : \ \ \exists x^{(1)}, x^{(2)} \in E : \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) < \delta \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| \geq \varepsilon$. Возьмем $\delta_k = \frac{1}{k}, \ k = 1, 2, ... \Rightarrow \exists x^{(1k)}, x^{(2k)} \in E : \ \rho(x^{(1k)}, x^{(2k)}) < \frac{1}{k}, \ |f(x^{(1k)}) - f(x^{(2k)})| \geq \varepsilon$. $\{x^{(1k)}\} \in E$ — ограничена, следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists$ сходящаяся подпоследовательность $\{x^{(1m_k)}\} \to_{k\to\infty} x^*$. E замкнуто, следовательно, $x^* \in E$.

Рассмотрим те же номера для второй последовательности: $\{x^{(2m_k)}\}$. $0 \leq \rho(x^{(2m_k)}, x^*) \leq \underbrace{\rho(x^{(2m_k)}, x^{(1m_k)})}_{<\frac{1}{m_k}\to 0} + \underbrace{\rho(x^{(1m_k)}, x^*)}_{\to 0} \to 0$.

$f(x)$ непрерывна в точке x^*, тогда, по Гейне, $f(x^{(1m_k)}) \to f(x^*)$ и $f(x^{(2m_k)}) \to f(x^*)$. Следовательно, $|f(x^{(1m_k)}) - f(x^{(2mk)})| \to 0$. Противоречие с предположением. ☐

1.6 Дифференцируемость функций нескольких переменных

$E \subset \mathbb{R}^3$. $f(x,y,z)$ определена на E. $\forall M = (x,y,z) \in E$.

Будем считать y, z фиксированными, а x зададим приращение Δx. То есть мы сдвинемся вдоль оси x. Посмотрим, как изменятся значения функции:

$\Delta_x f = f(x + \Delta x, y, z) - f(x,y,z)$ — частичное приращение f по x.

Определение 1.25. Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

то он называется частной производной. Аналогично можно ввести определения частной производной для остальных координат:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z f}{\Delta z}$$

При вычислении частной производной все переменные, кроме одной, фиксируются, то есть нахождение частных производных сводится к одномерному дифференцированию.

Пример 1.16. $f(x, y, z) = xe^{yz^2}$.

$f'_x = e^{yz^2}$, $f'_y = x^{yz^2} \cdot z^2$, $f'_z = xe^{yz^2} \cdot 2yz$.

Определение 1.26. Зададим приращение сразу всем трем переменным.

$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)$. Такая величина называется полным приращением функции точки M.

Определение 1.27. $f(x, y, z)$ называется дифференцируемой в точке M, если ее полное приращение может быть представлено в виде $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$, где A, B, C — константы, а $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Теорема 1.13. *(необходимое условие дифференцируемости)*

Для того, чтобы $f(x, y, z)$ была дифференцireумой в точке, необходимо, чтобы в этой точке существовали ее частные производные. (условие не является достаточным!)

Доказательство. $f(x, y, z)$ — дифференцируема, отсюда существует $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$. Пусть $\Delta x \neq 0,\ \Delta y = \Delta z = 0$. То есть полное приращение равно частному по x. Отсюда $\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$. При $\Delta x \to 0\ \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A$. Аналогично доказываются остальные координаты. □

Замечание 1.6. Из доказанной теоремы следует, что если функция дифференцируема, то ее производная представима в виде $\Delta f = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + f'_z \Delta z$.

Теорема 1.14. *(достаточное условие дифференцируемости)*

Для того, чтобы функция была дифференцируема в точке, достаточно, чтобы существовали непрерывные частные производные ($\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$).

Доказательство. Пусть существуют непрерывные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. Рассматриваем полное приращение функции в точке:

$$\begin{gathered}
\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z) = \\
[f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)] + \\
+ [f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z)] + [f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)] = \\
= (\text{по одномерной теореме Лагранжа } \exists \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \in (0, 1)) = \\
= \frac{\partial f}{\partial x}(x+\Theta_1\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\Theta_2\Delta y, z+\Delta z)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z+\Theta_3\Delta z)\Delta z = \\
= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \beta\right)\Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) + \gamma\right)\Delta z
\end{gathered}$$

где: $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\Theta_1\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$, $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\Theta_2\Delta y, z+\Delta z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$, $\gamma = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z+\Theta_3\Delta z) - \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$.

В силу непрерывности частных производных $\alpha, \beta, \gamma \longrightarrow_{\Delta x, \Delta y \Delta z \to 0} 0$, откуда

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\Delta z + (\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z)$$

Мы представили приращение в виде $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$, что по определению дает дифференцируемость функции. □

Замечание 1.7. Непрерывность частных производных — достаточное условие дифференцируемости, но не необходимое.

Теорема 1.15. *Если $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке (x, y, z), то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Если f дифференцируема, то ее приращение имеет вид $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho)$. Если приращения аргументов стремятся к нулю, то и приращение функции будет стремиться к нулю. Следовательно, f непрерывна. ☐

Определение 1.28. Линейная часть полного приращения функции называется первым дифференциалом.

$$\Delta f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z}_{=df} + o(\rho)$$

Отсюда формула первого дифференциала

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Замечание 1.8. Аналогичное определение можно ввести для функции от n переменных: $f(x_1, ..., x_n)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

Определение 1.29. f называется дифференцируемой, если ее полное приращение представимо в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + o(\rho)$$

где $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}$.

Свойства дифференциала:
1) $d(f + g) = df + dg$;
2) $d(fg) = gdf + fdg$;
3) $d(\frac{f}{g}) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$;
Понятие дифференциала может быть использовано для численных расчетов.

Пример 1.17. Пусть требуется приближенно вычислить $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$. Для этого введем функцию вида $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$. Введем точки: $x_0 = 1, y_0 = 2$. Напомним, $x = 1,02,\ y = 1,97$. Тогда $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = -0.03$. Считаем:

$$\Delta f = f(1,02; 1,97) - f(1,2) \approx df(1,2)$$

$$df(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\Delta y = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot 0,02 + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot (-0,03) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,03) = -0,05$$

Отсюда $\sqrt{1,02^3 + 1,97^2} \approx 3 + (-0,05) = 2,95$. Если полученная точность не устраивает, нужно выписывать слагаемые более высокого порядка малости (см. далее формулу Тейлора).

1.7 Производные сложных функций

Пусть, для определенности, дана функция от трех переменных, и при этом каждая из этих переменных является функцией от двух переменных:

$$f(x,y,z), \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$$

Введем функцию: $F(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$.

Предположим, что существуют непрерывные частные производные $f'_x,\ f'_y,\ f'_z$ и существуют $\varphi'_u, \varphi'_v, \psi'_u, \psi'_v, \chi'_u, \chi'_v$.

Зададим приращение аргумента Δu, и зафиксируем v.

$\Delta x = \varphi(u+\Delta u, v) - \varphi(u,v)$

$\Delta y = \psi(u+\Delta u, v) - \psi(u,v)$

$\Delta z = \chi(u+\Delta u, v) - \chi(u,v)$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u F}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + f'_z \Delta z + o(\rho)}{\Delta u} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \left(f'_x \frac{\Delta x}{\Delta u} + f'_y \frac{\Delta y}{\Delta u} + f'_z \frac{\Delta z}{\Delta u} + \underbrace{\frac{o(\rho)}{\rho}}_{\to 0} \cdot \frac{\rho}{\Delta u} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial u}$$

Замечание 1.9. $z = z(x_1, ..., x_n)$ и

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, ..., y_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_n(y_1, ..., y_m) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + ... + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i}$$

где $i = \overline{1,m}$.

Пример 1.18. $z = x^2 + y^3$

$$\begin{cases} x = \sqrt{u} - \ln v \\ y = u^2 \cdot v \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2x\frac{1}{2\sqrt{u}} + 3y^2 \cdot 2uv = \frac{\sqrt{u} - \ln v}{\sqrt{u}} + 6u^5v^3$$

Для $\frac{\partial z}{\partial v}$ аналогично.

Пример 1.19. $z = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \ln t \end{cases}$$

Используем дифференциалы, так как если подставить в исходную формулу, функция z будет зависеть от одной переменной.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x \cdot 2t + 2y\frac{1}{t} = 4t^3 + \frac{2\ln t}{t}$$

Теорема 1.16. *(Лагранжа для многомерных)*

Обозначим $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ *— приращения.* $M = (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$.

Пусть $\exists$ *непрерывные частные производные* f'_x, f'_y, f'_z *в окрестности* M_0*. Тогда найдется такое* $\Theta \in (0,1)$*, что*

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(\widetilde{M})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\widetilde{M})\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(\widetilde{M})\Delta z$$

— формула конечных приращений, где $\widetilde{M} = (x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y, z_0 + \Theta\Delta z)$.

Доказательство. $F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)$ — уравнение движения вдоль отрезка. Если $t \in [0,1]$, то

$$\Delta f \equiv f(M)-f(M_0) = F(1)-F(0) = (\exists\Theta \in (0,1)) = F'(\Theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\widetilde{M})\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(\widetilde{M})\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}(\widetilde{M})\Delta z$$

(по одномерной теореме Лагранжа). □

Замечание 1.10. (для многомерного случая)

$f(x_1, ..., x_n)$, $M_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, $M = (x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n^{(0)})$. $\exists$ непрерывные $f'_{x_1}, ..., f'_{x_n} \Rightarrow \exists\Theta \in (0,1)$, такая, что $\Delta f = f(M) - f(M_0) = \sum_{i=0}^{n} f'_{x_i}(\widetilde{M})\Delta x_i$, где $\widetilde{M} = (x_1^{(0)} + \Theta\Delta x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)} + \Theta\Delta x_n^{(0)})$.

Предположение 1.1. $f(x,y,z)$ $\exists f'_x, f'_y, f'_z$.

а) x, y, z *— независимые переменные, тогда* $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (*)$

б) x, y, z *зависят от* u, v*:*

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad \text{и } \exists x'_u, x'_v \text{ и так далее.} \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Выпишем дифференциал функции

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (**)$$

Формулы $(*)$ *и* $(**)$ *имеют одинаковый вид, то есть при вычислении первого дифференциала не важно, имеем мы дело с зависимыми или независимыми переменными. Это называется инвариантностью первого дифференциала.*

1.8 Производные по направлениям

Пусть $f(x,y,z)$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. И пусть $\exists f'_x, f'_y, f'_z$ в окрестности точки M_0. И зададим направление в M_0 с помощью направляющих косинусов: $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (Сие есть косинусы углов, которые образует задаваемый вектор с осями координат). l — луч, выходящий из M_0 в направлении $\vec{e}$. Запишем его уравнение:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases}$$

где $t \geq 0$.

$M = (x, y, z)$, ρ — расстояние между M_0 и M. Тогда:

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = t\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = t$$

Определение 1.30. Если существует

$$\lim_{\rho\to 0+} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial l}|_{M_0}$$

то он называется производной f в направлении l в точке M_0.

Введем функцию $F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$. (Функция вдоль луча превращается в функцию от одной переменной).

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{M_0} = \lim_{\rho\to 0+} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \lim_{t\to 0+} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'_+(0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}|_{M_0} \cdot \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}|_{M_0} \cdot \cos\gamma \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial l}|_{M_0} = (\vec{\nabla} f_{(M_0)}, \vec{l})$$

(здесь скалярное произведение)

Определение 1.31. Вектор вида $\vec{\nabla} f = \vec{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$ — градиент функции.

Замечание 1.11. $\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$, аналогично для единиц на других местах.

Производная по направлению l характеризует скорость изменения функции в направлении l.

Поставим следующую задачу: найти такое направление, вдоль которого поверхность возрастает наискорейшим образом.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\vec{\nabla} f(M_0), \vec{l}) = \underbrace{\left|\vec{\nabla} f(M_0)\right|}_{\text{не зависит от l}} \cdot \underbrace{\left|\vec{l}\right|}_{1} \cos\Theta$$

$\frac{\partial f}{\partial l} \to \max \Leftrightarrow \Theta = 0 \Rightarrow \vec{l} \uparrow\uparrow \vec{\nabla} f(M_0)$.

Таким образом, градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции.

Определение 1.32. $-\vec{\nabla} f(M_0)$ — антиградиент, указывает направление наискорейшего убывания функции.

Замечание 1.12. В $\mathbb{R}^n$: $M_0 \in \mathbb{R}^n$, $\vec{l} = (\cos\alpha_1, ..., \cos\alpha_n)$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial l} = (\vec{l},\ \vec{\nabla} f(M_0))$.

Пример 1.20. $f = x^2 + y^2$ (парабалоид). Возьмем $M_0 = (1, 2)$ на плоскости xy. С осью x угол 30°, с осью y — 60°.

$\vec{l} = (\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2})$ Тогда градиент: $\vec{\nabla} f(M_0) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}|_{M_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. И: $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 + \sqrt{3}$.

1.9 Производные и дифференциалы старшего порядка

Определение 1.33. Пусть задана $f(x_1, ..., x_n)$, определена в $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$ в области E. Если существует $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, то она называется второй смешанной производной по $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{ij}$. Аналогично можно ввести понятие старших производных (третьего порядка и выше), и если у нас функция от n переменных, то у нее может существовать n^k производных k-ого порядка.

Пример 1.21. $f(x, y) = x^2 y^3$.

Первого порядка: $f'_x = 2xy^3$, $f'_y = 3y^2x^2$.

Второго порядка: $f''_{x^2} = 2y^3$, $f''_{xy} = 6xy^2$, $f''_{yx} = 6xy^2$, $f''_{y^2} = 6x^2y$.

Теорема 1.17. *(о равенстве смешанных производных)*

Пусть $f(x, y)$ определена в точке $M_0 = (x_0, y_0)$ и в окрестности этой точки существуют непрерывные f''_{xy} и f''_{yx}. В таком случае они равны.

Доказательство. Зададим некоторые приращения аргументов $h, k = \text{const} \neq 0$. Зададим функцию

$$W = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}$$

Несложно заметить, что

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

По теореме Лагранжа (одномерной) $\exists c_1 \in (x_0, x_0 + h)$ (или $(x_0 + h, x_0)$, в дальнейшем этот вариант опущен):

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(c_1) = \frac{f'_x(c_1, y_0 + k) - f'_x(c_1, y_0)}{k}$$

Теперь вновь по теореме Лагранжа $\exists c_2 \in (y_0, y_0 + k)$:

$$\frac{f'_x(c_1, y_0 + k) - f'_x(c_1, y_0)}{k} = f''_{xy}(c_1, c_2)$$

Теперь сделаем это в другом порядке:

$$\psi(y) = \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h}$$

Откуда

$$W = \frac{\psi(y_0+k)-\psi(y_0)}{k}$$

По той же самой теореме Лагранжа:

$$W = \frac{\psi(y_0+k)-\psi(y_0)}{k} = \psi'(c_3) = \frac{f'(x_0+h,c_3)-f(x_0,c_3)}{h} = f''_{yx}(c_4,c_3)$$

Заметим, что W — число. Поэтому $f''_{xy}(c_1,c_2) = W = f''(c_4,c_3)$. При этом $c_1, c_2 \in (x_0, x_0+h)$, $c_3, c_4 \in (y_0, y_0+k)$. Так как $h, k \to 0$, то эти точки стремятся друг к другу. Тогда, с учетом непрерывности этих производных, $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$. □

Замечание 1.13. Пусть задана $f(x_1, ..., x_n)$. Пусть у нее существуют непрерывные частные производные до k-ого порядка включительно. Тогда при вычислении этих производных важно, сколько раз мы дифференцируем по каждой из переменных, но не важно, в каком порядке.

Пример 1.22. $f(x,y,z) = x^2e^{yz^3}$

$f'_x = 2xe^{yz^3}$

$f''_{xy} = 2xz^3e^{yz^3}$

$f''_{xyx} = 2z^3e^{yz^3} = f''_{x^2y} = f''_{yx^2}$.

Введем понятие дифференциала старшего порядка:

Определение 1.34. Зададим $f(x,y)$, $\exists$ непрерывные частные производные по $x, y \Rightarrow \exists df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Предположим, что dx, dy фиксированы. Тогда df зависит только от x, y. Тогда, если $\exists d(df) = d^2f$, то он называется вторым дифференциалом. Аналогично задается $d(d^kf) = d^{k+1}f$.

Предложение 1.2. *Пусть $f(x,y)$ — функция и существуют дифференциалы до второго порядка. Тогда:*

$$d^2f(x,y) = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

(dx, dy — константы).

Предположим, что существуют непрерывные частные производные до 3 порядка и вычислим формулу дифференциала третьего порядка:

$$d^3f(x,y) = d(d^2f) = d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}(...)dx + \frac{\partial}{\partial y}(...)dy =$$
$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

По идукции:

$$d^k f(x,y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}} dx^i dy^{k-i} = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f$$

Аналогично можно доказать, что если у $f(x_1,...,x_n)$ существуют непрерывные (для приведения подобных слагаемых) частные производные до k порядка, то

$$d^k f = d(d^{k-1} f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f$$

Замечание 1.14. Если $M_0 \in \mathbb{R}^n$, то $d^k f(M_0)$ — однородная форма относительно $dx_1, ..., dx_n$.

Замечание 1.15. Можно доказать, что дифференциалы старшего порядка свойством инвариантности формы не обладают.

Предложение 1.3. *(формула Тейлора для многомерного случая)*

Пусть дана $f(x,y)$, $M_0 = (x_0, y_0)$ и в некоторой окрестности M_0 существуют непрерывные частные производные до k-ого порядка. Пусть $M = (x,y)$ — некоторая точка из этой окрестности. Выпишем уравнение отрезка L соединяющего точки M и M_0. Уравнение отрезка будет иметь вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\Delta x \\ y = y_0 + t\Delta y \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

Обозначим за $F(t) = f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$. Разложим F по известной формуле Тейлора в $t = 0$ и подставим ее значения:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} t + \frac{F''(0)}{2!} t^2 + ... + \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} t^{k-1} + R_k$$

где $R_k = \frac{F^{(k)}(\Theta)}{k!} t^k$, $\Theta \in (0,1)$.

Подставим вместо нуля другой конец отрезка ($t = 1$, сразу подставили):

$$F(1) = F(0) + ... + \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \frac{F^{(k)}(\Theta)}{k!}$$

Теперь распишем: $F(1) = f(M)$, $F(0) = f(M_0)$.

Вычислим: $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cdot \Delta y = df(M_0)$.

Нетрудно показать, что $F^i(0) = d^i f(M_0)$.

Распишем

$$R_k = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(\widetilde{M})$$

где $\widetilde{M} = (x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)$.

Теперь запишем полученную формулу Тейлора:

$$t = 1 \Rightarrow f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!} df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + ... + \frac{1}{(k-1)!} d^{k-1} f(M_0) + R_k$$

Замечание 1.16. Аналогичный вид формула Тейлора будет иметь и в n-мерном случае:

$M = (x_1, ..., x_n),\ M_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$. Формула Тейлора та же:

$$t = 1 \Rightarrow f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(M_0) + ... + \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1}f(M_0) + R_k$$

Где

$$R_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^k f(\widetilde{M})$$

где $\widetilde{M} = (x_1^{(0)} + \Theta\Delta x_1, ..., x_n + \Theta\Delta x_n)$.

Пример 1.23. $f(x, y) = \sin(x - y)$. $M_0(0, 0)$.

$f(M_0) = 0$.

$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\Delta y = (*)$

$\Delta x = x - 0 = x,\ \Delta y = y - 0 = y$.

$f'_x = \cos(x - y),\ f'_y = -\cos(x - y)$.

$(*) = x - y$.

Для второго дифференциала:

$f''_{x^2} = -\sin(x - y)$

$f''_{xy} = \sin(x - y)$

$f''_{y^2} = -\sin(x - y)$

$d^2f(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_0)\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\Delta y^2 = 0$

Третий:

$f'''_{x^3} = -\cos(x - y)$

$f'''_{x^2y} = \cos(x - y)$

$f'''_{xy^2} = -\cos(x - y)$

$f'''_{y^3} = \cos(x - y)$

$d^3f(M_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(M_0)\Delta x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(M_0)\Delta x^2\Delta y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(M_0)\Delta x\Delta y = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(M_0)\Delta y^3 = -x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 = -(x - y)^3$

Тогда формула примет вид:

$$f(x, y) = \sin(x - y) = (x - y) - \frac{1}{3!}(x - y)^3 + \frac{1}{5!}(x - y)^5 - ...$$

Похоже на $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$

То есть можно было заменить $z = x - y$, НО ДЕЛАТЬ ЭТО МОЖНО ЛИШЬ В СЛУЧАЕ, КОГДА x, y, z В РАЙОНЕ НУЛЯ.

1.10 Экстремумы функций нескольких переменных

Пусть задана функция $f(x)$ в $E \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.35. Точка $a \in E$ — точка локального минимума, если $\exists\delta > 0 :\ \forall x \in U_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \geq f(a)$. Если знак неравенства выполняется в другую сторону, то это точка локального максимума. Эти точки называются локальными экстремумами. Если неравенство строгое, то это собственный экстремум.

Наибольшее и наименьшее значение f в области E, если таковые существуют, называются глобальными экстремумами.

Глобальные экстремумы могут достигаться либо в точках локального экстремума внутри области, либо на границе этой области.

Сформулируем сначала необходимое и достаточное условия локального экстремума:

Теорема 1.18. *(необходимое условие локального экстремума)*

Пусть a — внутренняя точка E и она — точка локального экстремума. И в некоторой окрестности этой точки существуют первые частные производные $f'_{x_1}, ..., f'_{x_n}$. Тогда $f'_{x_i}(a) = 0, \ i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Рассмотрим $F(x_1) = f(x_1, a_2, ..., a_n)$ (то есть зафиксированы все переменные, кроме первой). Если a — точка локального экстремума f, то a_1 — точка локального экстремума функции F. Тогда по теореме Ферма $F'(a_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0$. Аналогично доказывается, что и остальные частные производные в точке a равны нулю. ☐

Замечание 1.17. Если все частные производные в a равны нулю, то a называется стационарной точкой функции f. Это условие эквивалентно тому, что $df(a) = 0$ или $\vec{\nabla} f(a) = 0$. Данное условие представляет собой только необходимое условие экстремума, но не достаточное. Допустим, $f = x_1^3 + x_2^3$ точка $(0,0)$ является точкой перегиба, но не экстремума. Необходимое условие экстремума помогает найти точки, подозрительные на экстремум, а чтобы убедиться, что это так, нужны достаточные условия.

Предложение 1.4. *(достаточное условие локального экстремума)*

Пусть $f(x)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть $a \in E$, внутренняя и станционарная. Разложим функцию $f(x)$ по Тейлору до слагаемых первого порядка малости:

$$f(x) = f(a) + \underbrace{df(a)}_{=0} + R_2$$

где R_2 — остаточный член. Равенство нулю по необходимому условию экстремума.

$\Delta f = f(x) - f(a) = R_2$. Для того, чтобы точка a была точкой локального минимума, достаточно, чтобы $\exists \delta > 0 : \ \forall x \in U_\delta(a) \Rightarrow R_2 \geq 0$. Аналогично для точки максимума: $R_2 \leq 0$. Задача свелась к определению знака R_2. Оценим:

$$R_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 f(M) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)dx_i dx_j$$

где $dx_i = x_i - a_i, \ i = \overline{1,n}$. $M \in (a,x)$. Здесь получили нечто похожее на квадратичную форму, прочтите замечание ниже.

(читаем замечание)

Вернемся к нашим баранам. Запишем

$$R_2 = \frac{1}{2!}dx^T S(M) dx$$

где $S = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1, \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$, $dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ ... \\ dx_n \end{pmatrix}$

По теореме о о равенстве симметричных производных S симметрична.

Замечание 1.18. (о квадратичных формах)

Функция вида

$$f(z_1, ..., z_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j = z^T A z$$

где $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — симметричная матрица.

Квадратичная форма называется положительно определенной, если $\forall z \neq 0 \Rightarrow f(z) > 0$. Аналогично отрицательно определенной, если $\forall z \neq 0 \Rightarrow f(x) < 0$.

$f(z)$ — знакопостоянная неотрицательная форма, если: $\forall z \Rightarrow f(z) \geq 0$.

Аналогично знакопостоянная неположительная форма, если: $\forall z \Rightarrow f(z) \leq 0$.

Квадратичная форма называется знакопеременной, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения: $\exists z_1, z_2 :\ f(z_1) < 0,\ f(z_2) > 0$.

Теорема: (Критерий Сильвестра) (это всё еще замечание)

1) Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все левые верхние угловые миноры матрицы A были положительны.

2) Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все левые верхние угловые миноры матрицы A чередовали знак, начиная с минуса.

Теорема 1.19. *(достаточное условие локального экстремума)*

Пусть a — внутренняя точка E и она стационарная. И пусть $\exists$ непрерывные частные производные до 2 порядка включительно в окрестности точки a.

Тогда:

1) Если $S(a)$ положительно определена, то a — точка локального минимума.

2) Если $S(a)$ отрицательно определена, то a — точка локального максимума.

3) Если $S(a)$ является знакопеременной, то a — не точка локального экстремума.

4) Если $S(a)$ — знакопостоянная, но не знакоопределенная, то информации недостаточно.

Доказательство.

1) Предположим, $S(a)$ положительно определена. Из непрерывности вторых частных производных следует, что $\exists \delta > 0 :\ \forall M \in U_\delta(a) \Rightarrow S(M)$ — положительно определена. Тогда $R_2 > 0$, откуда a — точка локального минимума

2) Для отрицательной определенности все аналогично.

3) Если $S(a)$ знакопеременная, то $\forall \delta > 0\ \exists M_1, M_2 \in U_\delta(a)$, такие, что $R_2(M_1) > 0,\ R_2(M_2) < 0$.

4) Приведем пример, являющийся контрпримером к обратному утверждению: $f_1(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$. $f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$. $(0, 0)$ — стационарная точка обеих функций.

$$S(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— знакопостоянная. $(0, 0)$ — точка локального минимума f, но не является точкой локального экстремума. ☐

Замечание 1.19. Если $S(a)$ знакопостоянная, но не знакоопределенная, то тогда для исследования точки a нужно задействовать производные и дифференциалы старшего порядка.

По Тейлору:

$$\Delta f(x) = f(x) - f(a) = \underbrace{df(a)}_{=0} + \frac{1}{2}d^2 f(a) + \frac{1}{3!}d^3 f(a) + ...$$

Исследовать знак старшего дифференциала нужно лишь там, где обнуляются дифференциалы младшего порядка.

Если теперь требуется найти глобальный экстремум, то кроме поиска локальных экстремумов внутри области E, нужно исследовать поведение этой функции и на ее границе.

Обозначим $\widehat{E}$ границу E. Задача поиска экстремума на границе называется задачей поиска условного экстремума. Заметим, что размерность $\widehat{E}$ равна размерности $E - 1$.

Пример 1.24. Пусть $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$. Требуется найти экстремум в области $E: \; x^2 + y^2 \leq 9$.

Найдем точки локального экстремума в области E.

Необходимость:

$f'_x = 2(x-1) = 0, \; f'_y = 2(y-2) = 0 \Rightarrow (1, 2)$ — стационарная точка ($(1, 2) \in E$), подозрительная на экстремум точка. Вычислим вторые производные, чтобы проверить, является ли точка экстремумом и каким:

$f''_{x^2} = 2, \; f''_{xy} = 0, \; f''_{y^2} = 2$. Тогда матрица вторых производных примет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

S положительно определена (миноры очевидно положительны). Следовательно, точка $(1, 2)$ является точкой локального минимума.

Теперь проверим, что у нас на границе. А на границе тучи ходят хмуро и описывают окружность: $\widehat{E}: \; x^2 + y^2 = 9$. Ищем условный экстремум $\hat{E}$. Выразим одну переменную через другую (первый метод поиска):

$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Уравнение эллипса теперь является функцией одной переменной. Введем $F(x) = f(x, \pm\sqrt{9 - x^2})$. Поиск экстремума сводится к поиску экстремума для функции одной переменной на отрезке $x \in [-3, 3]$.

Пример 1.25. $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$. $E: \; \{(x, y) | \; x > 0, y > 0\}$.

Начнем с локальных экстремумов:

Необходимое условие: $f'_x = y - \frac{50}{x^2} = 0 \; f'_y = x - \frac{20}{y^2} = 0$. Точки, подозрительные на экстремум:

$x - \frac{20}{\frac{50^2}{x^4}} = 0 \Leftrightarrow x(1 - \frac{x^3}{125}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{не интересует} \\ x = 5 \end{cases}$. $y = 2$.

Точка, подозрительная на экстремум: $(5, 2)$.

Найдем вторые производные:

$f''_{x^2} = \frac{100}{x^3}, \; f''_{y^2} = \frac{40}{y^3}, \; f''_{xy} = 1$.

$$S(5, 2) = \begin{pmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Минимальное значение функции достигается в $f(5, 2) = 30$.

$\sup_E f(x) = +\infty$.

1.11 Численные методы поиска безусловного экстремума

Задача. Рассмотрим идею градиентного метода поиска экстремума.

(Градиент указывает в сторону наискорейшего возрастания функции). Пусть требуется найти экстремум функции в области E. Выберем произвольную начальную точку: $\forall x^{(0)} \in E$. Зададим некоторое положительное число h.

$$X = \begin{cases} x^{(0)} + h\vec{\nabla} f(x^{(0)}) & \max \\ x^{(0)} - h\vec{\nabla} f(x^{(0)}) & \min \end{cases}$$

и так далее. В результате получаем последовательность точек $\{x^{(k)}\}$, на которой функция приближается к максимуму либо к минимуму.

Отметим типовые проблемы, которые возникают при применении этого метода:

1) Выбор шага h. Если выбрать очень маленкий шаг, то идти до экстремума можно долго (экстремум далеко). А если выбрать очень большим - мы рискуем «перепрыгнуть» через экстремум. Поддерживается динамическое изменение шага: обычно сначала делают большие шаги, а по мере приближения к экстремуму (начались «метания» и «перепрыжки») шаг постепенно уменьшают.

2) Проблема многоэкстремальности.У функции может быть большое количество локальных экстремумов и двигаясь из точки $x^{(0)}$ мы найдем один из этих экстремумов, не факт, что глобальный. Решение: идем из нескольких точек либо изучаем физику функции (применяем некоторую теорию для доказательства количества экстремумов либо их расположения). Все это повышает вероятность обнаружения глобального экстремума.

3) $\vec{\nabla} f(x)$. Вычисление градиента не всегда возможно. Функция может быть сложной, не заданной явно, вообще не дифференцируемой. Мы можем воспользоваться формулой:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

Если и это не помогает, то мы можем использовать метод случайного спуска:

Задача. На каждом шаге выбираем произвольное направление и в этом направлении делаем некоторый шаг. Если в этом направлении функция изменилась нужным нам образом, то тогда это направление удачное, по нему и движемся. В противном случае выбираем другое направление.

4) Проблема границ. Градиентные методы хороши для поиска экстремума внутри области. Если он расположен на границе, то у нас возникают большие проблемы. В этом случае применяем методы математического программирования (методы поиска экстремума в некоторой области). Это целая теория, нам его будут читать, бла-бла-бла.

Пример 1.26. Пусть $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, требуется найти минимум этой функции. Очевидно, что $(0, 0)$ — точка глобального минимума, но по легенде мы тупые и этого не видим. Возьмем произвольную начальную точку $(1, 2)$. Посчитаем антиградиент: $-\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} -2x \\ -4y \end{pmatrix}$. Тогда $-\vec{\nabla} f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$. По нему идти до конца не надо, нужно сделать какой-то шаг. Выберем большой шаг, затем, если заметим шатания, снизить его. Оказались в точке $(-1, -6)$. Пересчитываем антиградиент: $-\vec{\nabla} f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 24 \end{pmatrix}$. Заметно, что мы начали прыгать, снижаем шаг.

Пример 1.27. $f(x,y) = x + y$. Пусть требуется найти максимум в $E: \ x^2 + y^2 \leq 1$. Воспользуемся теоремой Ферма:

$f'_x = 1$, $f'_y = 1$, то есть локальных экстремумов у нас нет, глобальный экстремум располагается где-то на границе. Посчитаем: $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Двигаясь по нему, получим максимум в $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Но это мы шли их хорошей точки. А вот если с плохой, то мы можем до него и не дойти.

Воспользуемся методом математического программирования: Приравняем функцию к константе, получим прямую. Двигаем эту прямую по области определения, пока мы не получим максимальную константу.

1.12 Теорема о неявной функции

Пусть задано уравнение $F(x,y) = 0 \quad (1)$, где x, y — скаляры. Будем говорить, что уравнение задает функцию $y = y(x) \quad (2)$ неявно, если при подстановке (2) в уравнение (1) получим тождество.

Пример 1.28. $x^2 + y^2 = 1$, $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.
(картинка)

Предположим, существуют F'_x, F'_y, не равные нулю и $F(x, y(x)) \equiv 0 \quad (3)$. Зададим $\Phi(x) = F(x, y(x)) \equiv 0$ и продифференцируем (Если функция тождественно равна нулю, то все ее производные очевидно тождественны нулю):

$$0 \equiv \Phi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'(x) \Rightarrow y'(x) = -\frac{{}^{\partial F}/_{\partial x}}{{}^{\partial F}/_{\partial y}}$$

Если существуют вторые производные, то можем найти вторую производную неявной функции:

$$0 \equiv \Phi''(x) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y'(x)\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'(x)\right) y'(x) + \frac{\partial F}{\partial y} y''(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y''(x) = ...$$

Пример 1.29. $x^2 + y^2 = 1$. Дифференцируем: $2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$. Найдем вторую производную. Продифференцируем второй раз: $1 + y'^2 + y \cdot y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1+y'^2}{y} = -\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y}$.

Теорема 1.20. *(о неявной функции). Будем работать с конкретной точкой.*

Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ удовлетворяет уравнению $F(x_0, y_0) = 0$. Пусть в окрестности M_0 существует непрерывная $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}|_{M_0} \neq 0$. Тогда $\exists \delta > 0$, $\exists y(x)$, определенная и непрерывная на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, такая, что:

1) $y(x_0) = y_0$

2) $F(x, y(x)) \equiv 0$ на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и будет определяться однозначно.

Если, кроме того, в окрестности M_0 $\exists$ непрерывная $\frac{\partial F}{\partial x}$, то тогда:

1) $y(x)$ — дифференцируема и

2) $y'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}$.

Доказательство.

1) Покажем, что $\exists!$ функция $y(x)$. $\frac{\partial F}{\partial y}|_{M_0} \neq 0$ по условию теоремы. Пусть, для определенности, производная принимает положительные значения (для отрицательных доказательства аналогичны). $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в окрестности M_0. Найдется такое $\hat{\delta} > 0 :\ \frac{\partial F}{\partial y} > 0,\ \forall (x, y) : \begin{cases} |x - x_0| < \hat{\delta} \\ |y - y_0| < \hat{\delta} \end{cases}$

$\frac{\partial F}{\partial y} > 0 \Rightarrow F \nearrow$ по y. Следовательно, $\begin{cases} F(x_0, y_0 + \hat{\delta}) > 0 \\ F(x_0, y_0 - \hat{\delta}) < 0 \end{cases}$. Вспомним, что по условию теоремы F непрерывна, следовательно, $\exists \tilde{\delta} > 0 : \begin{cases} F(x, y_0 + \hat{\delta}) > 0 \\ F(x, y_0 - \hat{\delta}) < 0 \end{cases} \quad \forall x \in [x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta}]$.

Пусть $\delta = \min\{\hat{\delta}, \tilde{\delta}\} > 0$. Тогда по теореме Больцано-Коши о нуле функции $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\exists y \in [y_0 - \hat{\delta}, y_0 + \hat{\delta}] :\ F(x, y) = 0$, причем F непрерывна, следовательно, $y(x)$ непрерывна, а так как $F \nearrow$ по $y \Rightarrow y(x)$ — единственная.

2) Покажем дифференцируемость и найдем производную. Выберем произвольную $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $y = y(x)$. Рассмотрим $x + \Delta x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $y + \Delta y = y(x + \Delta x)$. $\Delta F = \underbrace{F(x + \Delta x, y + \Delta y)}_{=0} - \underbrace{F(x, y)}_{0} = 0$. Но $\exists$ непрерывные $F'_x, F'_y \Rightarrow F$ дифференцируема, следовательно, $0 = \Delta F = \underbrace{F(x + \Delta x, y + \Delta y)}_{=0} - \underbrace{F(x, y)}_{0} = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + o(\rho) \Rightarrow 0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{o(\rho)}{\Delta x} \to 0$. ☐

Замечание 1.20. Теорему о неявной функции можно распространить на многомерный случай.

Определение 1.36. Пусть задана $F(x_1, ..., x_n, y) = 0 \quad (3)$. Будем говорить, что функция $y = y(x_1, ..., x_n)$ задается уравнением (3) неявно, если при подстановке в уравнение (3) получим тождество.

Теорема 1.21. *(о неявной функции нескольких переменных)*

Обозначим $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ ... \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$, $y^{(0)}$, $M_0 = (x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Пусть $F(M_0) = 0$. *В окрестности точки* M_0 *функция непрерывна и существует непрерывный* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial F}{\partial y}|_{M_0} \neq 0$. *Тогда в окрестности точки* x_0 $\exists!$ *непрерывная функция* $y = y(x_1, ..., x_n)$, *такая, что:*

1) $F(x_1, ..., x_n, y(x_1, ..., x_n)) \equiv 0$

2) $y(x^{(0)}) = y_0$.

При этом если в окрестности M_0 $\exists$ *непрерывная* $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, *то*

$$\exists \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} / \frac{\partial F}{\partial y}$$

Доказательство. Доказательство аналогично одномерному случаю. ☐

Пример 1.30. $x_1^2 + x_2 + ye^{yx_1 + x_2} = 0$. Найдем $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}$:

1) $2x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot e^{yx_1 + x_2} + ye^{yx_1 + x_2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}x_1 + y\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x_1} = ...$

2) $1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}e^{yx_1 + x_2} + y \cdot e^{yx_1 + x_2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}x_1 + 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x_2} = ...$

1.13 Системы функций

Определение 1.37. Пусть задано несколько функций:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ y_m = y_m(x_1, ..., x_n) \end{cases} \quad (1)$$

Тогда говорят, что задана система из m функций от n переменных.

Определение 1.38. Пусть $\exists\ \frac{\partial y_i}{\partial x_j},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$

Тогда

$$\frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби.

Отметим несколько свойств, связанных с этой матрицей:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, ..., t_l) \\ .... \\ x_n = x_n(t_1, ..., t_l) \end{cases} \quad (2)$$

Тогда (1) и (2) — система сложных функций.

Найдем матрицу Якоби для сложной функции: $\frac{\partial y_i}{\partial t_k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + ... + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}\ i = \overline{1, m},\ k = \overline{1, l}$. Несложно заметить, что это можно записать в матричном виде:

$$\frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(t_1, ..., t_l)} = \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}\frac{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}{\mathscr{D}(t_1, ..., t_l)} \qquad (3)$$

Рассмотрим частный случай, когда $m = n$. Тогда $\det \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)} = \frac{D(y_1, ..., y_n)}{D(x_1, ..., x_n)}$ — якобиан. Если якобиан в окрестности точки не равен нулю, то тогда система называется не особой (не вырожденной).

Предположим, что иксы удалось выразить через игреки:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, ..., y_n) \\ .... \\ x_n = x_n(y_1, ..., y_n) \end{cases} \quad (4)$$

Тогда система 4 обратна к системе 1. Вопрос существования обратной системы будет рассмотрен в следующем параграфе (см. теорему о системе неявных функций).

Замечание 1.21. Здесь $\mathscr{D}$ — матрица Якоби, а D — якобиан (то есть определитель данной матрицы).

Теорема 1.22. *(Лапласа)*

Пусть $m = n$ *в* (1) *и система* (1) *не особая. Тогда*

$$\frac{D(y_1, ..., y_n)}{D(x_1, ..., x_n)} \cdot \frac{D(x_1, ..., x_n)}{D(y_1, ..., y_n)} = 1$$

Как следствие — обратная система тоже не особая.

Доказательство. По формуле (3)

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)}{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)} = \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)} \frac{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)}$$

откуда

$$\frac{D(y_1, ..., y_n)}{D(x_1, ..., x_n)} \cdot \frac{D(x_1, ..., x_n)}{D(y_1, ..., y_n)} = 1$$

(определитель произведения равен произведению определителей). □

Пример 1.31.

$$\begin{cases} y_1 = x_1^3 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{y_1} \\ x_2 = y_2 - \sqrt[3]{y_1} \end{cases}$$

Найдем матрицы Якоби:

$$\frac{\mathscr{D}(y_1, y_2)}{\mathscr{D}(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathscr{D}(x_1, x_2)}{\mathscr{D}(y_1, y_2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} y_1^{-2/3} & 0 \\ -\frac{1}{3} y_1^{-2/3} & 1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = 3x_1^2$$

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} = \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} = x_1^2 y_1^{-2/3} = 1$$

$x_1 \neq 0 (\Leftrightarrow y_1 \neq 0) \Rightarrow$система не особая.

Далее в системе (1) рассматриваем произвольные значения m, n.

Определение 1.39. Система функций (1) называется независимой или функционально независимой, если $\nexists F \not\equiv 0 : \ F(y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0 \quad (5)$ (то есть система независима, если ни одна функция в системе (1) не является комбинацией оставшихся).

Сформулируем далее условие зависимости и независимости функций. Продифференцируем тождество (5) по каждому из x_i:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial F}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} \equiv 0 \quad (6)$$

Это тождество можно переписать в виде

$$\left(\frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)} \right)^T \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_m} \end{pmatrix} \equiv 0$$

Обозначим $A(x) = \left(\frac{\mathscr{D}(y_1,...,y_m)}{\mathscr{D}(x_1,...,x_n)}\right)^T$, $h = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_m} \end{pmatrix}$. Запишем однородную систему уравнений:

$$A(x)h = 0 \quad (8)$$

Система (1) будет независимой, если линейная однородная алгебраическая система (8) имеет только нулевое решение или только если $h \equiv 0$.

Определение 1.40. Рангом функциональной матрицы $A(x)$ называется максимальный порядок минора, не равного тождественно нулю.

Теорема 1.23. *Для того, чтобы система* (1) *являлась независимой в области* $E \subset \mathbb{R}^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang} \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)} = m$$

в области E

Вывод 1.1.
1) $m > n \Rightarrow$ (1) *зависимая.*
2) $m = n :$ (1) *независимая* $\Leftrightarrow$ (1) *не особая.*
3) $\operatorname{rang} A(x) = s < m \Rightarrow$ *В* (1) $\exists s$ *независимых функций.*

Пример 1.32.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 + x_3 \\ y_y = x_1^3(x_2^2 + x_3) \end{cases}$$

$y_3 = y_1^3 y_2 \Rightarrow$ система очевидно зависима. Проверим. Считаем матрицу Якоби:

$$\frac{\mathscr{D}(y_1, y_2, y_3)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, x_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 1 \\ 3x_1^2(x_2^2 + x_3) & 2x_1^3 x_2 & x_1^3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \equiv 0$$

Ранг матрицы равен 2, то есть любые 2 функции в этой системе независимы, а третья выражается через них.

1.14 Теорема о системе неявных функций

Определение 1.41.

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n y_1, .., y_m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, ..., x_n y_1, .., y_m) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Будем говорить, что система (1) задает функции

$$\begin{cases} y_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ y_m(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

неявно, если при подстановке их в (1) получаем тождество.

Теорема 1.24. *(о системе неявных функций)*

Обозначим $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ ... \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$, $y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ ... \\ y_m^{(0)} \end{pmatrix}$, $M_0 = (x^{(0)}, y^{(0)})$.

Пусть $F_i(M_0) = 0$ $i = \overline{1,m}$ *и в окрестности* M_0 F_i *непрерывны и имеют непрерывные* $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $i, j = \overline{1,m}$. *Если якобиан*

$$\frac{D(F_1, ..., F_m)}{D(y_1, ..., y_m)}|_{M_0} \neq 0$$

то в окрестности точки $x^{(0)}$ *существует единственный набор непрерывных функций*

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ y_m = y_m(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

такой, что:

1) $F_i(x_1, ..., x_n y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0 \qquad (1)$*;*

2) $y^{(0)} = y(x^{(0)})$.

Доказательство. (индукция)

База: $m = 1 \Rightarrow$ одномерная теорема о неявной функции.

ИП: Пусть теорема верна для $m - 1$. Докажем, что теорема верна для m.

Расписываем якобиан нашей системы

$$0 \neq \frac{D(F_1, ..., F_m)}{D(y_1, ..., y_m)}|_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0}$$

Значит, у матрицы Якоби нет нулевых строк, а значит, в последней строке матрицы есть хотя бы один ненулевой элемент. Пусть, для определенности, $\frac{\partial F_m}{\partial y_m}|_{M_0} \neq 0$, иначе переобозначим (или воспользуемся перестановкой). Тогда по одномерной теореме о неявной функции из последнего уравнения в системе (1) можно выразить y_m. Тогда пусть $y_m = f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})$. Подставим теперь эту функцию в систему (1).

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}) = F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}, f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})) = 0 \\ .... \\ \Phi_{m-1}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}) = F_{m-1}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}, f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})) = 0 \\ \Phi_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}) = F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}, f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})) \equiv 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Теперь докажем, что

$$\Delta = \frac{D(\Phi_1, ..., \Phi_{m-1})}{D(y_1, ..., y_{m-1})}|_{M_0} \neq 0$$

Распишем частную производную

$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_k} = \frac{\partial F_1}{\partial y_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_k}$

....

....

$\frac{\partial\Phi_m}{\partial y_k} = \frac{\partial F_m}{\partial y_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_k} \equiv 0$

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0} = \frac{\partial F_m}{\partial y_m}|_{M_0}\cdot\Delta \Rightarrow \Delta \neq 0$$

Умножим последний столбец на $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ и прибавляем к k-ому столбцу.

Тогда по индуктивному предположению из системы (2) можно выразить

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, ..., x_n) \\ ..... \\ y_{m-1} = y_{m-1}(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

и $y_m = f(x_1, ..., x_n, y_1(x_1, ...x_n), ..., y_{m-1}(x_1, ..., x_n))$ ☐

Замечание 1.22. Если в доказанной теореме предположить, что в окрестности M_0 существуют непрерывные $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$, $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$. Тогда $\exists\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ в окрестности точки $x^{(0)}$ (не факт, что $x^{(0)}$, я чего-то не понял).

Выразим функции $y_1, ..., y_m$ и подставим все это в систему (1). В результате получим тождество:

$F_i(x_1, ..., x_n, y_1(x_1, ...x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0 \qquad (3)$

Продифференцируем тождество по x_k:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + ... + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k} = 0 \\ .... \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + ... + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k} = 0 \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} + \frac{\mathscr{D}(F_1, ..., F_m)}{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} = -\left(\frac{\mathscr{D}(F_1, ..., F_m)}{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

(обратная матрица существует, так как якобиан не равен нулю).

Пример 1.33.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1 \\ x_1 x_2 y_1 + y_2 \ln y_1 = 0 \end{cases}$$

Найдем производные по x_1. По x_2 ищутся аналогично:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2y_1\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + 2y_2\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0 \\ x_2 y_1 + x_1 x_2\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\ln y_1 + y_2\cdot\frac{1}{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

Получим матрицу Якоби:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2y_1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ x_1x_2 + \frac{y_2}{y_1} & \ln y_1 \end{pmatrix}}_{=\frac{D(F_1F_2)}{D(y_1y_2)}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} = 0$$

Рассматриваем точки, где матрица не особая, ищем обратную и выражаем:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ x_1x_2 + \frac{y_2}{y_1} & \ln y_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2y_1 \end{pmatrix}$$

1.15 Условный экстремум

Задача. Рассмотрим задачу следующего вида. Пусть дана функция $F(x_1, ..., x_{n+m})$, требуется найти экстремум и она связана условием

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, ..., x_{n+m}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, ..., x_{n+m}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

на E, где $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Пусть G – область удовлетворяющая условиям $\varphi_1 \dots \varphi_m$ т.е. все условия $\varphi_1 \dots \varphi_m$ выполняются для любой точки $X = (x_1 ... x_{n+m})$, $X \in G$

Определение 1.42. Точка $x^{(0)}$ называется точкой условного минимума в задаче, если $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \in (G \cap E) \Rightarrow F(x) \geq F(x^{(0)})$. (и наоборот для точки условного максимума).

Без потери общности будем считать, что в окрестности точки $x^{(0)}$ уравнения (2) независимы. Тогда по теореме о независимости rang $\frac{\mathscr{D}(\varphi_1,...,\varphi_m)}{\mathscr{D}(x_1,...,x_{n+m})} = m$. То есть какие-то m столбцов этой матрицы образуют ненулевой минор. Без потери общности будем считать, что такой ненулевой минор образуется последними m столбцами, который является якобианом следующего вида:

$$\frac{D(\varphi_1, ..., \varphi_m)}{D(x_{n+1}, ..., x_{n+m})}|_{x^{(0)}} \neq 0$$

Тогда по теореме о системе неявных функций в окрестности точки $x^{(0)}$ из уравнений (2) можно выразить:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+m} = f_m(x_1, ..., x_n) \end{cases} \quad (3)$$

А теперь функции (3) подставим в (1):

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

В результате задача поиска условного экстремума (1,2) свелась к задаче поиска безусловного экстремума функции (Φ). Такой подход называется методом исключения переменных.

Пример 1.34. $F(x, y) = x^2 + y^2$ и $E: \ x + y = 1$.

Методом исключений: выразим $y = 1 - x$. Тогда $\Phi(x) = F(x_1, 1 - x) = x^2 + (1 - x^2)$. Теперь нас интересует безусловный экстремум. Далее применим теорему Ферма: $\Phi'(x) = 2x - 2(1 - x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ — точка минимума. Откуда $y = \frac{1}{2}$. Точка экстремума: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Метод исключений удается применить, если уравнения (2) несложные, то есть функции (3) удалось записать в явном виде. В противном случае воспользуемся методом множителей Лагранжа.

Построим функцию. Для краткости: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$, $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \\ \lambda_m \end{pmatrix}$. Функция Лагранжа: $L(x, \lambda) = F(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + ... + \lambda_m\varphi_m(x)$, где $\lambda_1, ..., \lambda_m$ — константы.

Теорема 1.25. *(Необходимое условие условного экстремума).*

Пусть $x^{(0)}$ — точка условного экстремума в задаче (1,2). Пусть

$$\frac{D(\varphi_1, ..., \varphi_m)}{D(x_{n+1}, ..., x_{n+m})}|_{x^{(0)}} \neq 0$$

Тогда найдутся такие константы $\lambda_1, ..., \lambda_m = \mathrm{const}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}|_{x^{(0)}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_{x^{(0)}} = 0 \qquad (4)$$

$i = \overline{1, n+m}$.

Теорема утверждает, что необходимые условия условного экстремума в задаче (1,2) совпадают с необходимыми условиями безусловного экстремума функции Лагранжа.

Замечание 1.23. Уравнения (4) состоит из $m + n$ уравнений. Присоединяем к ним условие связи 2. Получаем $n + 2m$ уравнений с таким же количеством неизвестных. Решаем эту систему и находим точки, подозрительные на условный экстремум.

Доказательство. Подставим уравнения (3) в (1). Получим:

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

$x^{(0)}$ будет и точкой безусловного экстремума функции Φ. Отсюда:

$$d\Phi(x^{(0)}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m}\right)|_{x^{(0)}} = 0 \qquad (5)$$

. Согласно свойству инвариантности формы первого дифференциала можно не обращать внимания на то, что последние m переменных — функции от первых n переменных.

Подставим (3) в (2):

$$\varphi(x_1, ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0$$

Продифференцируем данные тождества и опять воспользуемся свойством инвариантности формы первого дифференциала: в точке $x^{(0)}$:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0 \qquad (6)$$

k-ое уравнение в системе (6) умножим на $\lambda_k (k = \overline{1, n})$ и складываем это с уравнением (5). В точке $x^{(0)}$ будет выполняться условие:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\lambda_1 + ... + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}\lambda_m\right) dx_1 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+m}} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+m}}\lambda_1 + ... + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n+m}}\lambda_m\right) dx_{n+m} = 0$$

Получаем, что в $x^{(0)}$ должно выполняться:

$$\sum_{i=1}^{n+m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\lambda_k\right) dx_i = 0$$

Выберем константы $\lambda_1, ..., \lambda_m$ исходя из условий: $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\lambda_i\right)|_{x^{(0)}} = 0, \; i = \overline{n+1, n+m} \qquad (8)$

Система (8) относительно λ_i является системой линейнчх уравнений, матрица коэффициентов по условию теоремы не особая, то есть из этой системы все λ_i найдутся однозначно $(i = \overline{1, m})$. Найденные константы λ_i подставим в уравнение (7). Тогда из (7) останутся только последние n слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\lambda_k\right) dx_i = 0 \qquad (9)$$

$x_1, ..., x_n$ — независимые переменные. Тогда (9) есть линейная форма относительно $dx_1, ..., dx_n$ и она будет равна нулю при любых $dx_1, ..., dx_n$. Тогда получается, что коэффициенты $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\lambda_k\right)$ должны будут равняться нулю. ☐

Теорема 1.26. *(достаточное условие условного экстремума)*

Пусть в точке $x^{(0)}$ выполнены условия предыдущей теоремы. И пусть $F, \varphi_1, ..., \varphi_m$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки $x^{(0)}$. Тогда если при условиях (6) второй дифференциал $d^2L(x^{(0)})$ является положительно определенной квадратичной формой, то $x^{(0)}$ является точкой условного минимума, и наоборот, если квадратичная форма определена отрицательно, то $x^{(0)}$ — точка условного максимума (здесь $L(x^{(0)})$ — функция Лагранжа).

Замечание 1.24. Достаточные условия условного экстремума в задаче $(1, 2)$ совпали с достаточными условиями безусловного экстремума функции Лагранжа. Для доказательства достаточно показать, что $d^2L(x^{(0)}) = d^2\Phi(x^{(0)})$.

При исследовании знака второго дифференциала соотношение (6) нужно учитывать, так как второй дифференциал свойством инвариантности формы не обладает-с.

Пример 1.35. $F(x, y) = x^2 + y^2$ (экстремум на $E: \; x + y = 1$).

$L = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Решив систему, получим $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ \lambda = -1$. Найдена точка, подозрительная на экстремум. Проверим, действительно ли это так. Найдем вторую производную функции Лагранжа:

$x + y = 1 \Rightarrow dx + dy = 0$ (условие (6)).

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$

Теперь $d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 = 2dx^2 + 2dy^2 \underbrace{=}_{(6)} 2dx^2 + 2(dx^2) = 4dx^2$ — определена положительно, следовательно $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — точка условного минимума.

Пример 1.36. $F(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$

Условие: $E:\ x^2 + y^2 = 9$.

Сначала ищем безусловные экстремумы внутри области:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-1) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-2) = 0$

Следовательно, $(1, 2)$ — подозрительная на экстремум точка.

$dF(1,2) = 2dx^2 + 2dy^2$ — положительно определена, значит, $(1, 2)$ — точка условного минимума.

Дальше исследуем функцию на границе:

$F(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$, ищем экстремум на $\overline{E}:\ x^2 + y^2 = 9$.

$L = (x-1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 9)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 2(y-2) + 2\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Откуда $x(1+\lambda) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+\lambda}$, $y(1+\lambda) = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{1+\lambda}$

$\lambda = -1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{6}{\sqrt{5}} \end{cases}$ и $\lambda = -1 - \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{6}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Найдем дифференциалы второго порядка:

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 + 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$ $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2 + 2\lambda$

1) $\lambda = -1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow d^2L(M_1) = \frac{2\sqrt{5}}{3}dx^2 + \frac{2\sqrt{5}}{3}dy^2$.

Вообще говоря, следует использовать условие $2xdx + 2ydy = 0$, но в данном случае в этом нет необходимости (форма очевидно положительно определена).

1) $\lambda = -1 - \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow d^2L(M_2) = -\frac{2\sqrt{5}}{3}dx^2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}dy^2$. M_2 — точка глобального максимума. Итого:

$(1, 2)$ — точка глобального минимума;

(M_2) — точка глобального максимума.

Пример 1.37. $u = xy + yz$

Экстремум на $E: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$

$n = 2$ (количество зависимых переменных), $m = 1$ (количество независимых).

$L = xy + yz + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(y + z - 2)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda_1 x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = y + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Ответ: $M : x = y = z = 1,\ \lambda_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_2 = -1$.

Считаем вторые дифференциалы:

$d^2L = 2\lambda_1 dx^2 + 2\lambda_1 dy^2 + 2dxdy + 2dydz = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz$ — эта форма не является знакоопределенной.

Применим условия (6):

Дифференцируем уравнения связи: $\begin{cases} 2xdx + 2ydy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$, откуда, подставив точку M: $\begin{cases} dx + dy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$

Выразим: $\begin{cases} dx = -dy \\ dz = -dy \end{cases}$.

Подставим полученные условия:

$d^2L = -(-dy)^2 - dy^2 + 2(-dy)dy + 2dy(-dy) = -6dy^2$ — очевидно отрицательно определена, значит, достаточное условие выполнено.

1.16 Геометрические приложения производных в пространстве $\mathbb{R}^3$

1.16.1 Касательные и нормали к кривой в $\mathbb{R}^3$

Касательная к кривой по-прежнему прямая, а вот нормаль станет плоскостью.

L — кривая в $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

и $t \in [\alpha, \beta]$.

И пусть φ, ψ, χ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$.

$t_0 \in [\alpha, \beta]$,

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(t_0) \\ y_0 = \psi(t_0) \\ z_0 = \chi(t_0) \end{cases}$$

$M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in L$.

Зададим приращение Δt:

$$\begin{cases} \overline{x} = \varphi(t_0 + \Delta t) \\ \overline{y} = \psi(t_0 + \Delta t) \\ \overline{z} = \chi(t_0 + \Delta t) \end{cases}$$

Проведем секущую через точки M_0 и $\overline{M}$.

$\overline{M}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$
$\overline{M_0\overline{M}}$:

$$\frac{x-x_0}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}=\frac{z-z_0}{\chi(t_0+\Delta t)-\chi(t_0)}$$

Домножим всё на Δt:

$$\frac{\frac{x-x_0}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}}{\Delta t}=\frac{\frac{y-y_0}{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}}{\Delta t}=\frac{\frac{z-z_0}{\chi(t_0+\Delta t)-\chi(t_0)}}{\Delta t}$$

Устремим $\Delta t\to 0\Rightarrow \overline{M}\to M_0\Rightarrow$
Уравнение касательной в M_0:

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\chi(t_0)}$$

$\vec{n}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\chi'(t_0))$ — направляющий вектор касательной.
Нормалью к кривой в точке M_0 называется плоскость, перпендикулярная касательной.
Тогда уравнение нормали в точке M_0 будет иметь вид:

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\chi'(t_0)(z-z_0)$$

1.16.2 Уравнение касательной и нормали к поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$

Касательная — плоскость, нормаль — прямая.

Поверхность в трехмерном пространстве может задаваться следующими стандартными способами:

1) Явное задание: $z=f(x,y),\ (x,y)\in E\subset\mathbb{R}^2$.

2) Неявное задание: $F(x,y,z)=0$.

3) Параметрическое задание:

$$\begin{cases}x=\varphi(u,v)\\y=\psi(u,v)\\z=\chi(u,v)\end{cases}$$

где $(u,v)\in\Delta$.

Эти три способа можно свести один к другому. Действительно, пусть поверхность задана в явном виде. Тогда свести к неявному виду просто - достаточно перенести z. Сведение к параметрическому из явного:

$$\begin{cases}x=u\\y=v\\z=f(u,v)\end{cases}$$

Докажем, что возможно из неявного в явный:

Пусть для определенности $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции можно выразить $z=f(x,y)$.

Аналогично, пусть функция задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases}x=\varphi(u,v)\\y=\psi(u,v)\\z=\chi(u,v)\end{cases}$$

Предположим, что функции имеют непрерывные частные производные и

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix} = 2$$

Если ранг меньше 2, то поверхность выродится либо в кривую, либо в точку.

Если ранг равен двум, то матрица имеет ненулевой минор. Пусть, для определенности, его образуют два первые столбца:

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда, по теореме о системе неявных функций из первых двух уравнений параметрического задания можно выразить:

$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \Rightarrow z = \chi(u(x, y), v(x, y))$ — получен явный вид.

Выведем уравнение касательной нормали для всех трех способов задания:

Начнем с параметрического задания:

$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$

где $(u, v) \in \Delta$.

Пусть L — поверхность, задаваемая этими уравнениями.

$\begin{cases} x_0 = \varphi(u_0, v_0) \\ y_0 = \psi(u_0, v_0) \\ z_0 = \chi(u_0, v_0) \end{cases}$

$M_0(x_0, y_0 z_0) \in L$.

Зададим структуру

$$K_v = \begin{cases} x = \varphi(u_0, v) \\ y = \psi(u_0, v) \\ z = \chi(u_0, v) \end{cases}$$

— кривая, лежащая на поверхности и проходящая через точку M_0.

Аналогично

$$K_u = \begin{cases} x = \varphi(u, v_0) \\ y = \psi(u, v_0) \\ z = \chi(u, v_0) \end{cases}$$

— другая подобная кривая.

$\vec{n_u}$ — направляющий вектор к K_u в M_0 и $\vec{n_v}$ — направляющий вектор к K_v в M_0. (Как строить подобное — смотри предыдущий подпараграф).

Теперь:

$\vec{n_u} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\chi}{\partial u}\right)|_{M_0}$, $\vec{n_v} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\chi}{\partial v}\right)|_{M_0}$.

Обозначим $\vec{n} = \pm\vec{n_u} \times \vec{n_v} =$

$$= \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix}_{M_0} = \pm\vec{i}\underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix}_{M_0}}_{A} + \vec{j}\underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix}_{M_0}}_{B} + \vec{k}\underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}_{M_0}}_{C}$$

$n = \pm(A, B, C)$

Знак + или − зависит от выбора стороны поверхности.

Замечание 1.25. Поверхность будем называть двусторонней, если она обладает следующим свойством:

Выберем некоторую точку на поверхности. В этой точке построим нормаль в каком-то направлении. И рассмотрим произвольный замкнутый контур, лежащий на поверхности и имеющий начало и конец в этой точке. Сдвигаем нормаль по контуру. Нормаль должна вернуться в исходную точку в том же направлении.

Ежали этого не произошло, то поверхность односторонняя.

Далее под поверхностями будем понимать двустороннюю поверхность.

Под стороной поверхности будем понимать ту сторону, в которую смотрит нормаль.

Выпишем единичную нормаль. $\vec{n_e} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$, где $\lambda = \angle(\vec{n_e}, Ox),\ \mu = \angle(\vec{n_e}, Oy),\ \nu = \angle(\vec{n_e}, Oz)$.

$$\cos\lambda = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\lambda = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\lambda = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Уравнение касательной плоскости (A, B, C те же самые):

$$A(x - x_0) + B(x - x_0) + C(z - z_0) = 0$$

Пусть теперь поверхность задана в явном виде:

$z = f(x, y),\ (x, y) \in E,\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in L,\ (x_0, y_0) \in E$ и $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Сведем к уравнению в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \qquad \begin{aligned} u_0 &= x_0 \\ v_0 &= y_0 \end{aligned}$$

Вычисляем по формулам, выведенным для параметрического вида:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}_{M_0} = -\frac{\partial f}{\partial u}|_{M_0} = -\frac{\partial f}{\partial x}|_{M_0}$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}_{M_0} = -\frac{\partial f}{\partial v}|_{M_0} = -\frac{\partial f}{\partial y}|_{M_0}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{M_0} = 1$$

Неявное задание. Сведем к явному:

$$F(x, y, z) = 0 \Rightarrow z = f(x, y)$$

По теореме о неявной функции:

$$A = -\frac{\partial f}{\partial x}|_{M_0} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}|_{M_0}$$

$$B = -\frac{\partial f}{\partial y}|_{M_0} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}|_{M_0}$$

$$C = 1$$

Касательная плоскость:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}|_{M_0}(x-x_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}|_{M_0}(y-y_0) - (z-z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}|M_0(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}|M_0(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial z}|_{M_0}(z-z_0) = 0 \quad ?$$

Пример 1.38. $x^2+y^2+z^2=R^2$

Попробуем в явном виде: $z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Нам не нравится.

Запишем в параметрическом (сферические координаты):

$u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ v \in [0, 2\pi]$

Параметризуем:

$$\begin{cases} x = R\cos v \cos u \\ y = R \sin v \cos u \\ z = R \sin u \end{cases}$$

Возьмем $u_0 = \frac{\pi}{6},\ v_0 = \frac{\pi}{3}$.

$M_0 = \left(\frac{R\sqrt{3}}{4}, \frac{3R}{4}, \frac{R}{2}\right)$.

Выпишем уравнение через неявный вид: $(F = x^2+y^2+z^2-R^2 = 0)$

$$2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) + 2z(z-z_0) = 0$$

Что вытекает в:

$$\sqrt{3}\left(x - \frac{R\sqrt{3}}{4}\right) + 3\left(y - \frac{3R}{4}\right) + 2\left(x - \frac{R}{2}\right) = 0$$

2 Интегральное исчисление функции нескольких переменных

2.1 Двойной интеграл

Определение 2.1. Пусть задана область $E \subset \mathbb{R}^2$. E — простая (E ограничена простым (т.е. не самопересекающимся) контуром) и связная область. И пусть E ограничена. В этой области задана $f(x,y)$, она еще и ограничена ($\exists M = \text{const} : \ |f(x,y)| \leq M \ \forall (x,y) \in E$) в этой области. Разбиваем область E на n произвольных непересекающихся кусочков: $E = \cup_{i=1}^{m} E_i$. За d_i обозначим диаметр (супремум максимальной хорды) i-ого кусочка. $\lambda = \max_{i=\overline{i,n}} d_i$ — ранг дробления. За ΔS_i обозначим площадь этого кусочка. Тогда:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$$

(сумма Римана)

Если существует конечный предел $\lim \sigma$ и этот предел не зависит от способа дробления и выбора $\xi_i,\ \eta_i$, то он называется двойным римановым интегралом по области E:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \iint_E f(x,y)dS$$

Замечание 2.1. Предположим, что $\exists \iint_E f(x,y)dS$. Тогда предел суммы Римана не зависит от способа дробления области E. Порежем область E на кусочки с помощью прямых, параллельных осям координат. Тогда, за исключением погрешности на границе (которая стремится к нулю при ранге дробления, стремящемся к нулю), область E разобьется на прямоугольники. Считаем, что E_i — прямоугольник со сторонами $\Delta x_i,\ \Delta y_i$. Тогда $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Если устремить ранг дробления к нулю, то $dS = dxdy$. Поэтому далее будем обозначать двойной интеграл как $\iint_E f(x,y)dxdy$.

2.1.1 Свойства двойного интеграла.

1) Пусть $\exists \iint_E f(x,y)dxdy = I$. Пусть L — кривая в области E. И пусть $f^*(x,y)$ строится по правилу: $f^*(x,y) = f(x,y)\ \forall (x,y)\in E\backslash L$. Тогда $\exists \iint_E f^*(x,y)dxdy = I$.

2) Если $f(x,y)\equiv 0$ в E, то $\iint_E f(x,y)dxdy = 0$.

3) Если $f(x,y)\equiv 1$ в E, то $\iint_E f(x,y)dxdy = S(E)$ (площади области).

4) Если $f(x,y)\geq 0$ в E, то $\iint_E f(x,y)dxdy \geq 0$.

5) Если $S(E)=0$, то $\iint_E f(x,y)dxdy = 0$ $(\forall f)$.

6) $\iint_E (c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y))\, dxdy = c_1 \iint_E f_1(x,y)dxdy + c_2 \iint_E f_2(x,y)dxdy$, где c_1, c_2 — константы.

7) Если $E = E_1 \cup E_2$ и $E_{1,}E_2$удовлетворяют условиям двойного интеграла и $S(E_1\cap E_2) = 0$, то $\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{E_1} f(x,y)dxdy + \iint_{E_2} f(x,y)dxdy$.

8) Если $f(x,y)\leq g(x,y)$, то $\iint_E f(x,y)dxdy \leq \iint_E g(x,y)dxdy$.

9) $m\leq f(x,y)\leq M\ \forall (x,y)\in E \Rightarrow mS(E)\leq \iint_E f(x,y)dxdy \leq MS(E)$.

10) $\left|\iint_E f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_E |f(x,y)|\, dxdy$.

Теорема 2.1. *(о среднем)*

$f(x,y)$ — непрерывна в области E. Тогда $\exists (a,b)\in E:\ \iint_E f(x,y)dxdy = f(a,b)\cdot S(E)$.

Доказательство. По первому свойству без потери общности считаем, что область E замкнута. Тогда по теореме Вейерштрасса у этой функции $\exists m = \min_E f(x,y)$, $\exists M = \max_E f(x,y)$. Тогда по свойству 9 получаем $mS(E)\leq \iint_E f(x,y)dxdy \leq MS(E)$. Если $S(E)=0$, то теорема очевидна. Поэтому предположим, что $S(E)>0$. Площадь положительна, поделим неравенство на нее:

$$m\leq \frac{1}{S(E)}\iint_E f(x,y)dxdy \leq M$$

По теореме Больцано-Коши $\exists (a,b)\in E:\ f(a,b) = \frac{1}{S(E)}\iint_E f(x,y)dxdy$. □

Пример 2.1. (физического приложения двойного интеграла (ненавижу физику))

Пусть имеется плоская пластина E, плотность которой меняется непрерывно. И пусть в некоторой системе координат задана плотность пластины: $\rho(x,y)$ в точке (x,y). Порежем нашу пластину на множество непересекающихся кусочков: $E=\cup_{i=1}^n E_i$. Пусть m_i — масса E_i. Тогда $m_1 \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$. Тогда

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$$

(Где M — масса пластины). Устремим ранг дробления к нулю и получим

$$M = \iint_E \rho(x,y)dxdy$$

2.1.2 Условие существования двойного интеграла

$E = \cup_{i=1}^{n} E_i$, E_i — простые, связные, непересекающиеся. ΔS_i — площать E_i, λ — ранг дробления.

$m_i = \inf_{E_i} f(x, y),\ M_i = \sup_{E_i} f(x, y)$.

$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i$ — нижняя сумма Дарбу.

$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i$ — верхняя сумма Дарбу.

Свойства:

1) $s \leq \sigma \leq S$ на любом дроблении.

2) Пусть есть два дробления τ_1, τ_2 и пусть дробление τ_2 получено путем дальнейшего дробления дробления τ_1 (Больше дроблений богу дроблений!) Тогда дробление τ_2 мельче дробления τ_1. Тогда если s_1, S_2 — суммы Дарбу для τ_1, а s_2, S_2 — суммы Дарбу для τ_2, то $\begin{cases} s_2 \geq s_1 \\ S_2 \leq S_2 \end{cases}$. То есть при ранге дробления, стремящемся к нулю, нижняя сумма возрастает, а верхняя — убывает.

3) $\forall s \leq \forall S$.

Теорема 2.2. *(критерий интегрируемости)*

Для существования двойного интеграла $\iint_E f(x, y) dx dy$ *необходимо и достаточно* $\exists \lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$.

Доказательство. Аналогично одномерному случаю. □

Теорема 2.3. *(достаточное условие интегрируемости)*

Если функция $f(x, y)$ *— непрерывна в области* E, *то* $\exists \iint_E f(x, y) dx dy$.

Доказательство. По 1) свойству без потери общности считаем, что E замкнута. По теореме Кантора $f(x, y)$ равномерно непрерывна, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \lambda < \delta \Rightarrow \omega_i = M_i - m_i \leq \varepsilon\ \forall i = \overline{1, n}$. Тогда рассмотрим разность сумм Дарбу:

$$0 \leq S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta S_i \leq \varepsilon S(E)$$

$\Rightarrow \exists \lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$. □

Теорема 2.4. *Если функция* $f(x, y)$ *— кусочно непрерывна в области* E, *то* $\exists \iint_E f(x, y) dx dy$.

2.1.3 Геометрический смысл двойного интеграла

Предположим, что функция неотрицательна в E. Тогда $z = f(x, y)$ выше Oxy. За T обозначим трехмерное тело, удовлетворяющее следующему условию: $\begin{cases} 0 \leq z \leq f(x, y) \\ (x, y) \in E \end{cases}$. Властью, данной нам матаном нарекаем это тело криволинейным брусом. Разобьем область: $E = \cup_{i=1}^{n} E_i$, E_i — простые, связные, непересекающиеся. ΔS_i — площать E_i, λ — ранг дробления. Такому дроблению области E соответствует дробление криволинейного бруса: $T = \cup_{i=1}^{n} T_i$. Обозначим за ΔV_i объем T_i, а объем всего бруса — V. Очевидно, что $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$. Обозначим $m_i = \inf_{E_i} f(x, y),\ M_i = \sup_{E_i} f(x, y)$.

Тогда $m_i \Delta S_i \leq \Delta V_i \leq M_i \Delta S_i$. Просуммировав неравенство, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_1 \Delta S_i \leq V \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i$$

По теореме о двух милиционерах при устремлении ранга дробления к нулю $V = \iint_E f(x,y)dxdy$.

Замечание 2.2. Если $f(x,y) \leq 0$ в E, то $V = -\iint_E f(x,y)dxdy$. Если тело ограничено областями $z = f_2(x,y)$ и $z = f_1(x,y)$ сверху и снизу соответственно, то $V(T) = \iint_E \left(f_2(x,y) - f_1(x,y)\right) dxdy$.

Пример 2.2. $\iint_E (1-x-y)dxdy$. (картинка, 2 шт)
$\iint_E (1-x-y)dxdy = V(T) = \frac{1}{3} \cdot S(E) \cdot 1 = \frac{1}{6}$.

Замечание 2.3. В данном параграфе при определении интеграла предполагалось, что E ограничена и $f(x,y)$ ограничена в E. Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то тогда интеграл называется несобственным.

$\forall E' \subset E : \begin{cases} E' & \text{огр.} \\ f(x,y) & \text{огр в } E \end{cases}$. Тогда $\iint_E f(x,y)dxdy = \lim_{E' \to E} \iint_{E'} f(x,y)dxdy$. Если этот предел существует, конечен и не зависит от выбора E', то несобственный интеграл называется сходящимся.

2.1.4 Правила вычисления двойного интеграла

$E : \begin{cases} y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$
(рисунок)
$\iint_E f(x,y)dxdy = ?$.

Предположим, что $f(x,y) \geq 0$ в E. Геометрический смысл двойного интеграла — объем криволинейного бруса.

Делаем следующее. Выберем $\forall x \in [a,b]$. Разрежем наш брус плоскостью $x = \text{const}$. Обозначим за $S(x)$ площадь полученного сечения. Воспользуемся прошлогодней формулой:

$$V(T) = \int_a^b S(x)dx$$

(рисунок)
При этом по той же формуле

$$S(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy$$

Таким образом, двойной интеграл свелся к повторному:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (*)$$

Покажем, что формула $(*)$ будет верна и без предположения о неотрицательности функции f.

$\forall f(x,y)$ — ограничена, следовательно, $\exists m = \text{const} > 0 : \ m + f(x,y) \geq 0$ в E.

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_E \left[(f(x,y)+m)-m\right]dxdy = \iint_E (f(x,y)+m)\,dxdy - \underbrace{\iint_E mdxdy}_{=m\overline{S}(E)} =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (f(x,y)+m)\,dy - m\overline{S}(E) = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} mdy \right) dx - m\overline{S}(E) =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dxdy + \underbrace{\int_a^b m(y_2(x)-y_1(x))dx}_{=m\overline{S}(e)} - mS(E) = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Поменяем переменные x, y местами.

$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

Тогда получим аналогичную формулу, но в другом порядке:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_i(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Пример 2.3. $\iint_E f(1-x-y)dxdy$ на множестве ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$ и $y=1-x$.

$$\iint_E f(1-x-y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = \int_0^1 (y - xy - \frac{y^2}{2})|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left((1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = 1/6$$

Второй способ:

$$\iint_E (1-x-y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1-x-y)dx = 1/6$$

Пример 2.4. $\iint_E f(x,y)dxdy$ по области (рисунок)

1 способ:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{E_1} f(x,y)dxdy + \iint_{E_2} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$$

2 способ:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x,y)dx$$

Пример 2.5. $\iint_E f(x,y)dxdy$ по области $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ (рисунок и разбивка)

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{E_1} + ... + \iint_{E_4}$$

2.2 Криволинейные интегралы первого рода

Пусть имеется плоскость xy и в этой плоскости задана кривая $l \in \mathbb{R}^2$, A — ее начало, B — конец. Пусть L — длина l, и $L < \infty$. Пусть на l определена и ограничена на $f(x, y)$.

Разобьем кривую на несколько дуг:

$$A = M_0\breve{}M_1\breve{}...\breve{}M_n = B$$

Обозначим за ΔS_i — длина дуги $M_i\breve{M}_{i+1}$. $\lambda = \max_{i=\overline{0,n-1}} \Delta D_i$ — ранг дробления. $\forall(\xi_i\eta_i) \in M_i\breve{M}_{i+1}$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$$

Определение 2.2. Если существует конечный предел $\lim_{\lambda\to 0}\sigma$ и этот предел не зависит от способа дробления кривой l и выбора точек ξ_i, η_i, то он называется криволинейным интегралом первого рода.

Для него верны все свойства интеграла, в частности, $\int_{(l)} dS = L$.

Криволинейные интегралы первого рода не зависят от ориентации кривой, то есть неважно, считать ли A началом кривой, а B концом или наоборот.

Пример 2.6. (физическое приложение)

Пусть дана плоская изогнутая железяка и $\rho(x, y)$ — плостность сего прута. Для простоты считаем, что плотность меняется равномерно. Задача: найти массу этого прутка.

$$M = \int_{(l)} \rho(x, y)dS$$

2.2.1 Правила вычисления криволинейного интеграла первого рода

Пример 2.7. Пусть кривая l задана в явном виде: $y = y(x),\ x \in [a, b]$. Будем считать, что l гладкая (непрерывно дифференцируема на $[a, b]$).

Разобьем отрезок $a = x_0, ..., x_n = b$ и каждую точку дробления назовем $M_0, ..., M_n$. Пусть $M_i = (x_i, y(x_i)) \in l$, $i = \overline{0, n}$. $\forall\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. $\eta_i = y(\xi_i)$. ΔS_i — длина $M_i\breve{M}_{i+1}$. $\Delta S_i = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2}$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, аналогично с игрек. Тогда:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i\eta_i)\Delta S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, y(\xi_i))\sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2} =$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i y(\xi_i))\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i y(\xi_i))\sqrt{1 + y'(\bar{\xi}_i)^2} \cdot \Delta x_i$$

(по обычной теореме Лагранжа).

Нетрудно заметить, что при $\lambda \to 0$

$$\int_{(l)} f(x, y)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = (R)\int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

где (R) — это Риман (то есть риманов интеграл).

Пример 2.8. Пусть кривая l задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

$x(t), y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$.

$\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$.

$M_i = (x(t_i), y(t_i)) \in l,\ i = \overline{0, n}$.

$\forall \tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\begin{cases} \xi_i = x(\tau_i) \\ \eta_i = y(\tau_i) \end{cases} \Rightarrow (\xi_i, \eta_i) \in M_i \breve{M}_{i+1},\ i = \overline{0, n-1}$$

$\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i)$, аналогично с игрек. ΔS_i — длина $M_i \breve{M}_{i+1}$, $\Delta S_i \approx \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i \eta_i) \Delta S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\tau_i), y(\tau_i)) \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\tau_i), y(\tau_i)) \sqrt{x'\left(\overline{\tau}_i\right)^2 + y'\left(\overline{\tau_i}\right)^2} \Delta t$$

Нетрудно доказать, что при $\lambda \to 0 \Rightarrow$

$$\int_{(l)} f(x, y) dS = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = (R) \int_\alpha^\beta f(x + t, y + t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Пример 2.9. $\int_{(l)} (x^2 + y^2) dS$, где $l : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

1 способ:

$l :\ y = \sqrt{1 - x^2}$, откуда

$$\int_{(l)} (x^2 + y^2) dS = (R) \int_{-1}^1 (x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2) + \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\right)^2} dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

2 способ:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases},\ t \in [0, \pi]$$

отсюда

$$\int_{(l)} (x^2 + y^2) dS = (R) \int_0^\pi \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

Замечание 2.4. Аналогично криволинейный интеграл первого рода можно ввести в трехмерно пространстве. Теперь та же кривая будет находиться в трехмерном пространстве. Если кривая задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\ t \in [\alpha, \beta]$$

то по трехмерной теореме Пифагора

$\int_{(l)} f(x, y, z) dS = (R) \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$

2.3 Криволинейный интеграл второго рода

Пусть имеется плоскость xy и в этой плоскости задана кривая $l \in \mathbb{R}^2$, A — ее начало, B — конец. Пусть L — длина l, и $L < \infty$. Пусть на l определена и ограничена на $f(x, y)$.

$\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ — определена на l.

$P(x, y), Q(x, y)$ — ограничены на l.

Разобьем кривую на несколько дуг:

$$A = M_0\breve{}M_1\breve{}...\breve{}M_n = B$$

ΔS_i — длина дуги $M_i\breve{M}_{i+1}$. $M_i = (x_i, y_i)$. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, аналогично для y. $\lambda = \max_{i=\overline{0,n-1}} \Delta S_i$ — ранг дробления. $\forall(\xi_i\eta_i) \in M_i\breve{M}_{i+1}$.

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i)$$

Определение 2.3. Если существует конечный предел $\lim_{\lambda\to 0} = \int_{(l)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ (под интегралом вся сумма)

Для криволинейного интеграла второго рода выполняются все те стандартные свойства интеграла.

Замечание 2.5. Криволинейный интеграл второго рода зависит от ориентации кривой. Т.е. от направления движения по кривой зависит знак. $\int_{(AB)} Pdx + Qdy = -\int_{(BA)} Pdx + Qdy$.

Замечание 2.6. Пусть $l :\ y = \text{const},\ x \in [a, b]$. Тогда $\int_{(l)} Pdx + Qdy = (R)\int_a^b P(x, y)dx$.

Пример 2.10. (физического приложения интеграла второго рода)

Пусть под действием силы F тело перемещается по кривой l от A к B. Требуется найти работу, совершенную силой, Пусть $\vec{F}(P(x, y), Q(x, y))$. Розобьем кривую на n кусочков.

Пусть W_i — работа, совершенная силой на $M_i\breve{M}_{i+1}$. W — работа на l, следовательно, $W = \sum_{i=0}^{n-1} W_i$. Заменим на малом участке дугу на вектор $\vec{\Delta} s = (\Delta x_i, \Delta y_i)$. (рисунок). Тогда

$$W_i \approx |F_i(\xi_i, \eta_i)| \cdot \left|\vec{\Delta} s_i\right| \cdot \cos\angle(F(\vec{\xi_i}, \eta_i), \vec{\Delta} s_i) = \left(F(\xi_i, \eta_i), \vec{\Delta} s_i\right) = P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$$

То есть смысл криволинейного интеграла второго рода — работа, совершаемая силой, на перемещение тела по кривой l.

2.3.1 Правила вычисления интеграла второго рода

Пусть функция задана в явном виде: $l :\ y = y(x),\ x \in [a, b]$. Пусть l гладкая.

Разбиваем $a = x_0 < ... < x_n = b$. То есть мы «порезали» и область прибытия. Пусть $M_i = (x_i, y(x_i))$. Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Выберем $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \eta_i = y(\xi_i)$. Запишем сумму:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\xi_i, \eta_i) + Q(\xi_i, \eta_i)\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)\Delta x_i = (*)$$

По теореме Лагранжа найдется $\overline{\xi_i} \in [x_i, x_{i+1}]$, такая, что

$$(*) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\xi_i, y(\xi_i)) + Q(\xi_i, y(\xi_i)y'(\overline{\xi_i}))\right) \Delta x_i$$

Тогда криволинейный интеграл второго рода сведется к риманову:

$$\int_{(l)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (R)\int_a^b \left(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right) dx.$$

Пусть теперь функция задана параметрически:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$

Предположим, что l гладкая кривая.

Отрезок разбиваем на множество точек: $\alpha = t_0 < ... < t_n = \beta$

$M_i = (x_i, y_i)$. $\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i)$ и $\Delta y_i = y(t_{i+1}) - y(t_i)$. Выберем промежуточную точку $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}] \Rightarrow \begin{cases} \xi_i = x(\tau_i) \\ \eta_i = y(\tau_i) \end{cases}$

Составляем сумму:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(x(\tau_i), y(\tau_i))\Delta x_i + Q(x(\tau_i), y(\tau_i))\Delta y_i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(x(\tau_i), y(\tau_i))\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} + Q(x(\tau_i), y(\tau_i))\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right) \Delta t_i = (*)$$

По теореме Лагранжа $\exists \overline{\tau_i}, \hat{\tau}_i \in [t_i, t_{i+1}]$, такие, что

$$(*) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(x(\tau_i), y(\tau_i))x'(\overline{\tau_i}) + Q(x(\tau_i), y(\tau_i))y'(\hat{\tau}_i)\right) \Delta t_i$$

Если теперь ранг дробления устремить к нулю, то мы получаем следующую формулу:

$$\int_{(l)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (R)\int_\alpha^\beta \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right) dt$$

Пример 2.11. $\int_{(l)} (1+x)dx + ydy = (*)$

$l: \ y = \sqrt{1-x^2}$

$$(*) = \int_{-1}^{1} \left(1 + x + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

Вторым способом:

$l: \ \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$

$$(*) = \int_0^\pi \left((1+\cos t)(-\sin t) + \sin t \cdot \cos t\right) dt = -\int_0^\pi \sin t dt = \cos|_0^\pi = -1 - 1 = -2$$

Знак получился разный, так как в этих двух способах движение по кривой происходило в разные стороны.

2.3.2 Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Пусть уравнение l задано в параметрическом виде и в качестве параметризации выбрана естественная. Обозначим s — пройденный путь.

$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$

$A = (x(0), y(0)),\ B = (x(L), y(L))$, где L — длина l.

(картинка)

$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = x'(s),\ \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = y'(s)$.

Рассмотрим первую компоненту. Сведем интеграл второго рода к риманову, а затем риманов к интегралу первого рода:

$$\int_{(l)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (R)\int_0^L \left(P(x(s), y(s)) \underbrace{x'(s)}_{=\cos\alpha} + Q(x(s), y(s)) \underbrace{y'(s)}_{\sin\alpha} \right) ds = \int_{(l)} \left(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha \right) ds$$

Замечание 2.7. Аналогично понятие криволинейного интеграла второго рода можно ввести в трехмерном пространстве.

$$\int_{(l)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Если кривая l задана в параметрическом виде:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t) \end{cases}$

$x(t), y(t), z(t)$ — непрерывно дифференцирумы на $[\alpha, \beta]$

$$\int_{(l)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ = (R)\int_\alpha^\beta \left(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t)z(t))z'(t) \right) dt$$

2.4 Интегралы по замкнутому контуру

Пусть l — замкнутая кривая. Без потери общности будем считать, что l — простая (без самопересечения) кривая. Если контур не простой, то его можно разбить на простые.

Интеграл по замкнутому контуру будем обозначать $\oint Pdx + Qdy$. Поскольку криволинейный интеграл второго рода зависит от направления движения по прямой, введем понятие стандартного направления.

Пусть l ограничивает область E. Движение по контуру l будем считать стандартным, если область E находится слева от направления движения. Далее, если не оговорено противное, будем считать, что направление движения стандартное.

Теорема 2.5. *(Грина)*

Пусть E — область, ограниченная простым контуром l. И пусть в E определены и непрерывны функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. И пусть в E существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда справедлива следующая формула:

$$\oint_{(l)} Pdx + Qdy = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Эта формула называется формулой Грина.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что E имеет вид:

$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$

(картинка)

Рассмотрим $\iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$:

$$\iint_E \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\right) dx =$$
$$= \int_b^a P(x, y_2(x))dx - \int_a^b P(x, y_1(x))dx = -\oint_{(l)} P(x,y)dx$$

(на 4 шаге мы меняем направление движения на противоположное, чтобы направление движения соответствовало стандартному движению)

Аналогично доказывается, что $\iint_E \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{(l)} Q(x,y)dy$. Вычитаем из второй формулы первую и получаем формулу Грина. Теорема доказана. ☐

Замечание 2.8. Пусть в формуле Грина $Q = x,\ P \equiv 0$. Тогда $\oint_{(l)} xdy = \iint_E dxdy = S(E)$.

или:

$P = -y,\ Q \equiv 0 \Rightarrow \oint_{(l)} (-y)dx = \iint_E dxdy = S(E)$.

Пример 2.12. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой: $x^3 + y^3 = 3axy$.

Параметризуем: $y = tx$

$x^3 + t^3x^3 = 3atx^2 \Leftrightarrow x(1+t^3) = 3at \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

(рисунок петли).

$$S(E) = \oint_{(l)} xdy = \int_0^{+\infty} \frac{3at}{1+t^3} \left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)' dt = ...$$

(Если ответ получится отрицательным, то направление движения не стандартное, и минус нужно убрать).

Определение 2.4. $E \subset \mathbb{R}^2$, а L — замкнутый контур в этой области. И E_1 — область, ограниченная L. Область E — односвязное, если $\forall L \subset E \Rightarrow E_1 \subset E$.

(картинка)

Или, не математически, односвязная область — область без дырок.

Теорема 2.6. *$E \subset \mathbb{R}^2$ и в области E определены непрерывные $P(x,y), Q(x,y)$ имеющие непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ в E. Тогда для того, чтобы для любого замкнутого контура L в E выполнялось условие $\oint_{(L)} Pdx + Qdy = 0$ необходимо, а если область E односвязная, то и достаточно, чтобы в области E выполнялось условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.*

Доказательство. Достаточность:

Пусть $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. $\forall L$ — замнкнутый контур из E, E_1 — область, ограниченная L, E односвязная $\Rightarrow E_1 \subset E$.

$$\oint_{(L)} Pdx + Qdy = (\text{Грин}) = \iint_{E_1} \left(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{=0} \right) dxdy = 0$$

Необходимость:

Пусть $\exists (\overline{x}, \overline{y})$ в которой $\frac{\partial Q}{\partial x}|_{(\overline{x},\overline{y})} \neq \frac{\partial P}{\partial y}|_{(\overline{x},\overline{y})}$. Без потери общности будем считать, что эта точка внутренняя. Пусть для определенности $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)|_{(\overline{x},\overline{y})} > 0$. (Если знак иной, аналогично). Поскольку производные непрерывны, и $(\overline{x}, \overline{y})$ внутренняя, то $\exists \delta > 0:$

1) $V_\delta(\overline{x}, \overline{y}) \subset E$

2) $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) > 0, \ \forall (x,y) \in V_\delta(\overline{x}, \overline{y})$.

То есть если L — граница $V_\delta(\overline{x}, \overline{y})$, где $V_\delta(\overline{x}, \overline{y})$ — сферическая окрестность, то по формуле Грина

$$\oint_{(L)} Pdx + Qdy = \iint_{V_\delta(\overline{x},\overline{y})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = (\text{теорема о среднем}) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)|_{(\hat{x},\hat{y})}}_{>0} \underbrace{\pi\delta^2}_{>0} > 0$$

Значит, нашелся такой контур, по которому интеграл не равен нулю. Теорема доказана. □

(рисунок)

$A, B \in E$, l_1, l_2 — кривые, соединяющие A и B, при этом $(l_1, l_2 \subset E)$.

В $E: \ P(x,y), Q(x,y)$ — непрерывные, и существуют непрерывные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда

$$0 = \int_{(Al_1Bl_2A)} Pdx + Qdy = \int_{(Al_1B)} Pdx + Qdy + \int_{(Bl_2A)} Pdx + Qdy =$$

$$\int_{(Al_1B)} Pdx + Qdy - \int_{(Al_2B)} Pdx + Qdy$$

Значит,

$$\int_{(Al_1B)} Pdx + Qdy = \int_{(Bl_2A)} Pdx + Qdy$$

То есть если выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то криволинейный интеграл не зависит от пути, соединающего A и B.

В результате получается следующая

Теорема 2.7. *Пусть в $E:\ P(x,y), Q(x,y)$ — непрерывные, и существуют непрерывные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы $\forall A, B \in E$ интеграл, соединяющий эти точки не зависел от кривой, соединяющей A, B, необходимо, а если область E односвязна, то и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Доказательство. непосредственно вытекает из той теоремы, что выше. ☐

Теорема 2.8. *Пусть в $E:\ P(x,y), Q(x,y)$ — непрерывные, и существуют непрерывные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда, для того, чтобы выполнялось $\exists \Phi(x,y):\ d\Phi = Pdx + Qdy$ необходимо, а если E односвязна, то и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Доказательство. Необходимость:

Пусть $\exists \Phi(x,y)$, такая, что $d\Phi = Pdx + Qdy$. Если вспомнить формулу первого дифференциала, то $P = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial Q}{\partial y}$. Найдем вторую производную: $\frac{\partial^2 Q}{dxdy} = \frac{\partial P}{\partial y}$, и $\frac{\partial^2 Q}{dydx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. По теореме о равенстве смешанных производных, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Достаточность:

Пусть уже $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в E, E односвязна. Выберем в качестве $\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (интеграл криволинейный по кривой, вид который не требуется по предыдущей теореме). (x_0,y_0) — (что-то там, дописать). Покажем, что $\Phi(x,y)$ является искомой.

Найдем производную

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x, y) - \Phi(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right) = (*)$$

(рисунок).

$$(*) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} ... + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} ... - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} ... \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x, \underbrace{y}_{\text{const}})dx + Q(x,y) \underbrace{dy}_{=0} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx = (\text{теорема о среднем} \exists \xi \text{между } x \text{и} (x+\Delta x)) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} P(\xi, y)\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} P(\xi, y) = P(x,y)$$

Аналогично, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y)$.

Откуда $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy$. ☐

Замечание 2.9. Доказательство теоремы содержит способ нахождения функции $\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Ее можно переписать в более простом виде. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то от кривой ничего не зависит. Тогда возьмем в качестве кривой кривую следующего вида: (рисунок). (угол: сначала движемся параллельно Oy, затем параллельно Ox).

Тогда

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

(x_0,y_0) — $\forall$ точки из E. И в этом случае, если требуется найти

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = (if\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}) = \int_{(AB)} d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A)$$

Пример 2.13. $\int_{(AB)} ydx + xdy$.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Для определенности $A = (0, 0),\ B = (1, 1)$. От вида кривой ничего не зависит, значит, возьмем конкретную кривую:

1 способ: $y = x$. Кривая задана в явном виде:

$\int_0^1 xdx + xdy = 2xdx = x^2|_0^1 = 1$.

2 способ: Пройдем по параболе:

$\int_0^1 (x^2 + 2x^2)dx = \int_0^1 3x^2dx = x^3|_0^1 = 1$.

3 способ: $\forall (x_0, y_0) = (5, 10)$ — любая точка.

$\Phi(x, y) = \int_5^x ydx + \int_{10}^y \underbrace{x_0}_{5} dy = yx|_5^x + 5y|_{10}^y = (yx - 5y) + (5y - 50) = yx - 50$.

$\int_{(AB)} d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A) = (yx - 50)|_{(1,1)} - (yx - 50)|_{(0,0)} = (1 - 50) - (0 - 50) = 1$.

Замечание 2.10. Пусть задано дифференциальное уравнение следующего вида: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. (или, что тоже самое, $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$). Если выполняются условия, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ то такое уравнение называется уравнением полных дифференциалов. Тогда $\exists \Phi :\ d\Phi = Pdx + Qdy = 0$, следовательно, решение уравнения $\Phi(x, y) = C$.

Замечание 2.11. (физический смысл доказанных теорем)

$\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ то тогда такая сила называется потенциальной. В этом случае работа, совершенная силой, $W = \int_{(AB)} Pdx + Qdy = \Phi(B) - \Phi(A)$. Тогда функция Φ называется потенциалом, а работа не зависит от траектории, по которой тело перемещалось. Примеры таких сил: сила притяжения, сила кулона. Не потенциальные силы — силы сопротивления.

Пример 2.14. Пусть с горки высоты H под действием силы тяжести скатывается Шарик массой m. Какая скорость будет у Шарика у конца горки? Трением, сопротивлением воздуха и мнением Матроскина пренебречь.

От формы горки ничего не зависит.

Пусть P — потенциальная энергия, K — кинетическая. $\underbrace{P_A}_{mgH} + \underbrace{K_A}_{0} = \underbrace{P_B}_{0} + \underbrace{K_B}_{\frac{mv^2}{2}} \Rightarrow$

$gH = \frac{v^2}{2}$.

Замечание 2.12. Предположим, что E не односвязная. Пусть для определенности $\exists$ одна точка $M \in E :\ \frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$ или вообще не существуют. Возьмем L — произвольный замкнутый контур из E и рассмотрим интеграл: $\oint_{(L)} Pdx + Qdy$. Если контур не обегает точку M, то мы «отрезаем» остальное и тогда $\oint_{(L)} Pdx + Qdy = 0$. Если же M лежит внутри контура, то тогда интеграл $\oint_{(L)} Pdx + Qdy = \sigma$ ($\sigma = \text{const}$, не обязательно нуль).Но при этом σ не зависит от вида L. Если L не простой и делает n витков вокруг M, то $\oint_{(L)} Pdx + Qdy = n\sigma$. Подробнее см. ТФКП (Теория функций комплексной переменной?).

Пример 2.15. Рассмотрим интеграл $\oint_{(L)} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, и $L :\ \ x^2 + y^2 = 1$. Пусть движение происходит по часовой стрелке.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) - 2y(-y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Все хорошо? Нет, у нас есть точка $(0,0)$ в которой эти производные не существуют. Поэтому утверждать, что в данном случае интеграл по контуру не обязательно будет равен нулю. Поэтому вычислим по определению:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_{(L)} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{2\pi} (-\sin t)^2 dt + (\cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Замечание 2.13. Пусть $E \subset \mathbb{R}^3$, E — односвязная (без дырок, которые теперь пузыри). Пусть в этой области существуют непрерывные функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, у которых существуют непрерывные частные производные в E. Тогда следующие условия эквивалентны друг другу:

1) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$.

2) $\oint_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = 0$ $\forall$ замкнутого L из E.

3) $\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от кривой, соединяющей $A, B \in E$.

4) $\exists \Phi(x,y,z):\ d\Phi = Pdx + Qdy + Rdz$.

Доказательство этого неочевидного факта следует из формулы Стокса (см. далее).

Если эти условия выполняются, то

$$\Phi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz$$

где (x_0, y_0, z_0) — любая точка из E.

Следовательно, мы можем вычислить

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(AB)} d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A)$$

2.5 Замена переменных в многомерном интеграле

Пусть на плоскости xy задана область E, ограниченная контуром l, который является кусочно-гладким (конечное число изломов). Теперь рассмотрим координаты $\eta\xi$, в которых задана область Δ, ограниченная контуром Λ. И пусть между ними существует биекция и граничные точки переходят в граничные. И пусть эта биекция задается зависимостью

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases} \text{ и обратно } \begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

Пусть $x(\xi,\eta)$ $y(\xi,\eta)$ задавали биекцию, необходимо, чтобы $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} \neq 0$ или, что то же самое, $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$ в Δ (см. теорему о системе неявных функций и теорему Лапласа).

Пусть в Δ задана некоторая кривая α

$$\begin{cases} \xi = \xi(t) \\ \eta = \eta(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2].$$

$\alpha \subset \Delta$.

Рассмотрим теперь кривую $\beta \subset E$, которая получается по следующему правилу:

$\begin{cases} x = x(t) = x(\xi(t),\eta(t)) \\ y = y(t) = y(\xi(t),\eta(t)) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то есть $\alpha \leftrightarrow \beta$. Очевидно, что α — замкнута $\Leftrightarrow \beta$ — замкнута.

Если по α движение было стандартным, то движение по β может быть как стандартным, так и не очень.

Зафиксируем в формуле один из параметров:

$K_\xi \begin{cases} x = x(\xi, \eta_0) \\ y = y(\xi, \eta_0) \end{cases}$ и $K_\eta \begin{cases} x = x(\xi_0, \eta) \\ y = y(\xi_0, \eta) \end{cases}$ — кривые, проходящие через точку (x_0, y_0) $\begin{cases} x_0 = x(\xi_0, \eta_0) \\ y_0 = y(\xi_0, \eta_0) \end{cases}$ и лежащие в E. K_ξ, K_η — координатные линии,

Через каждую точку области пройдет ровно одна координатная линия K_ξ, K_η.

(рисунок).

Пример 2.16. Полярные координаты:

$\begin{cases} x = \xi \cos \eta \\ y = \xi \sin \eta \end{cases}$

ξ — полярный радиус, η — полярный угол.

(рисунок 2 штуки)

(текст тоже какой-то)

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \cos \eta & \sin \eta \\ -\xi \sin \eta & \xi \cos \eta \end{vmatrix} = \xi$$

Если ξ равно нулю, то однозначность теряется.

Если мы возьмем область Δ : $\begin{cases} 0 \le \xi \le \xi_2 \\ 0 \le \eta \le 2\pi \end{cases}$

Эта область не очень хорошая, так как точка $(0, 0)$ не дает односвязности.

Тогда мы преобразуем нашу область к виду:

$\Delta_P : \begin{cases} 0 < \xi_1 \le \xi \le \xi_2 \\ 0 \le \eta \le \eta_2 < 2\pi \end{cases}$

Если перейти к пределу: $\begin{cases} \xi_1 \to 0 \\ \eta_2 \to 2\pi \end{cases}$, $\begin{cases} \Delta_1 \to \Delta \\ E_1 \to E \end{cases}$

При этом $\Delta_1 \leftrightarrow E_1$, но $\Delta \not\leftrightarrow E$.

Поэтому, теоремы сформулированные далее для биекций, можно применять и для не биекций, к примеру, в полярных координатах.

Вспомним, что Λ — контур Δ, l — контур E.

$$\Lambda : \begin{cases} \xi = \xi(t) \\ \eta = \eta(t) \end{cases} , \ t \in [t_1, t_2]$$

$$l : \begin{cases} x = x(t) = x(\xi(t), \eta(t)) \\ y = y(t) = y(\xi(x), \eta(t)) \end{cases} , t \in [t_1, t_2]$$

Пусть в Δ у функций x, y существуют непрерывные частные производные второго порядка.

Найдем $S(E)$ — площадь E и $S(\Delta)$, понятно, что это.

$$S(E) = \iint_E dxdy = \oint_{(l)} xdy = (R)\int_{t_1}^{t_2} x(t)dy(t) =$$

$$= (R)\int_{t_1}^{t_2} x(\xi(t),\eta(t))\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial\eta}\eta'(t)\right)dt = \int_{(\Lambda)} x(\xi,\eta)\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta\right) = (1)$$

$$= \pm\iint_{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(x\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(x\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]d\xi d\eta = \pm\iint_{\Delta}\left[\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}+x\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}-x\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}\right]d\xi d\eta =$$

$$= \pm\iint_{\Delta}\begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix} = (2) = \pm\iint_{\Delta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi d\eta$$

(1) выбор знака ± зависит от того, сохранится ли по контуру Λ стандартное направление движения или нет. В следующем выражении мы применяем формулу Грина.

(2) поскольку мы вычисляем площадь и якобиан не обращается в ноль, то формулу нужно взять с плюсом, если он положительный, и с минусом, если он отрицательный.

Вывод: $S(E) = \iint_{\Delta}|I(\xi,\eta)|\,d\xi d\eta = \underbrace{|I(\overline{\xi},\overline{\eta})|}_{\aleph} S(\Delta)$ (по теореме о среднем)

где $I(\xi,\eta)$ — якобиан, $\aleph$ — коэффициент сжатия (обозначение не алгебраическое, дал от балды, чтобы не растягивать текстом формулу).

Теорема 2.9. *Замена переменных в двойном интеграле*

Пусть $f(x,y)$ определена и интегрируема по Риману в $E \subset \mathbb{R}^2$. Пусть задано отображение $\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$ где $\xi,\eta \in \Delta$, $\Delta \leftrightarrow E$. И пусть $x(\xi,\eta)$, $y(\xi.\eta)$ имеют непрерывные частные производные в Δ. Тогда будет справедлива следующая формула:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{\Delta} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta \qquad (*)$$

Доказательство. Функция интегрируема, значит, интегралы существуют по условиям теоремы. Запишем сумму Римана для левого интеграла: $E = \cup E_i$, E_i простые, связные, не пересекающиеся. ΔS_i — площадь E_i, $\lambda = \max E_i$ — ранг дробления. $\forall (x_i,y_i) \in E_i$:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i$$

Теперь сделаем то же самое для второго интеграла:

$\Delta = \cup\Delta_i$, $S(\Delta_i)$ — площадь Δ_i, $\forall(\xi_i,\eta_i) \in \Delta_i$:

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right||_{(\xi_i,\eta_i)}\cdot S(\Delta_i)$$

По условию теоремы интегралы существуют, а значит, точки дробления мы можем выбирать так, как нам удобно.

Согласовываем дробления областей друг с другом:

$E \leftrightarrow \Delta \Leftrightarrow E_i \leftrightarrow \Delta_i,\ i = \overline{1,n}$

По доказанной ранее теореме,

$$\Delta E_i = \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right||_{(\overline{\xi_i},\overline{\eta_i})}S(\Delta_i)$$

Положим $\xi_i = \overline{\xi_i}$, $\eta_i = \overline{\eta_i}$, и зададим $x_i = x(\overline{\xi_i},\overline{\eta_i})$, $y_i = y(\overline{\xi_i},\overline{\eta_i}) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$ при $\lambda \to 0$. □

Пример 2.17. Пусть требуется найти площадь фигуры, ограниченной линией: $(x^2+y^2)^3 = 4xy(x^2-y^2)$

Сделаем замену переменных (введем полярные координаты):

$\begin{cases} x = \xi\cos\eta \\ y = \xi\sin\eta \end{cases}$

$\xi^6 = \xi^4\sin 4\eta \Leftrightarrow \xi^2 = \sin 4\eta \Leftrightarrow \xi = \sqrt{\sin 4\eta}$.

Нарисуем график:

(картинка)

Лист Декарта (жаль, я думал, будет конопля).

Обозначим первый лепесток E и найдем его площадь: $S = 4S(E)$ (площадь всей фигуры равна 4-м площадям лепестка). Для этого возьмем двойной интеграл от 1:

$$S = 4S(E) = 4\iint_E dxdy$$

Делаем замену переменных $(x,y)\in E \Leftrightarrow (\xi,\eta)\in\Delta$. $\Delta : \begin{cases} 0\le\eta\le\frac{\pi}{4} \\ 0\le\xi\le\sqrt{\sin 4\eta} \end{cases}$

$$4\iint_E dxdy = 4\iint_\Delta \xi d\xi d\eta = (*) = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\eta\int_0^{\sqrt{\sin 4\eta}}\xi d\xi =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4\eta}{2}d\eta = \frac{(-\cos 4\eta)}{2}|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

*где $\xi = \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|$.

2.6 Площадь криволинейной поверхности

S — поверхность в $\mathbb{R}^3$. Требуется вывести формулу для нахождения площади этой поверхности.

Рассмотрим два стандартных способа задания поверхности: явное и параметрическое.

1) Пусть поверхность задана в явном виде: $S:\ z = f(x,y),\ (x,y)\in D$. $\exists$ непрерывные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ в D.

Разобьем область D на n произвольных, простых, связных, непересекающихся кусочков D_i. Данному дроблению D соответствует дробление поверхности $S = \cup S_i$. Заменим наши S_i на касательные плоскости к ним.

$\forall(\xi_i\eta_i)\in D_i\ \theta_i = f(\xi_i,\eta_i)$.

За $M_i = (\xi_i,\eta_i,\theta_i)\in S_i$ — некоторая точка.

$\vec{n} = (\cos\lambda,\cos\mu,\cos\nu)$ — нормаль к S.

Проведем касательную плоскость к поверхности S_i в точке M_i

T_i — часть касательной плоскости в криволинейном брусе с основанием D_i.

ΔD_i — площадь D_i

ΔS_i — площадь S_i

ΔT_i — площадь T_i

Если ранг дробления мал, то $\Delta S_i \approx \Delta T_i$. Несложно доказать, что $\Delta S_i \approx \Delta T_i = \frac{\Delta D_i}{|\cos\nu||_{M_i}}$, где ν — угол между нормалью и осью z.

Модуль взят, поскольку у поверхности две нормали, а площадь должна оказаться положительной.

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\cos\nu||_{M_i}} \Delta D_i}_{\text{сумма Римана}}$$

Если ранг дробления устремить к нулю, то сумма Римана превращается в интеграл и погрешность исчезнет:

$$\Delta S = \iint_D \frac{1}{|\cos\nu|} dxdy$$

Пока этой формулой пользоваться неудобно, так как непонятно, что такое ν. Однако ранее доказано, что

$\cos\lambda = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$\cos\mu = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$\cos\nu = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

где $A = -\frac{\partial f}{\partial x},\ B = \frac{\partial f}{\partial y},\ C = 1.$

Теперь получили хорошую формулу:

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

2) Пусть поверхность S задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases} \quad \text{и } \varphi, \psi, \chi \text{ имеют непрерывные частные производные в } \Delta.$$

По сути, нам нужно от интеграла, полученного в предыдущей части, перейти к другим координатам:

$$\Delta S = \iint_D \frac{1}{|\cos\nu|} dxdy = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{array} \right] = \iint_\Delta \frac{1}{|\cos v|} \cdot \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv = (*)$$

Ранее было показано, что $A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$. Подставим:

$$(*) = \iint_\Delta \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|} |C| dudv = \iint_\Delta \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$$

В результате получили формулу:

$$S = \iint_\Delta \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$$

Замечание 2.14. $E = \varphi_u'^2 + \psi_u'^2 + \chi_u'^2$, $G = \varphi_v'^2 + \psi_v'^2 + \chi_v'^2$, $F = \varphi_u' \varphi_v' + \psi_u' \psi_v' + \chi_u' \chi_v'$ — гауссовы коэффициенты.

$$\Delta S = \iint_\Delta \sqrt{EG - F^2} dvdu$$

Пример 2.18. $S:\ x^2+y^2+z^2=R^2$.

1 способ:

$S^+:\ z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ — верх полусферы.

$$\Delta S=2\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}dxdy=$$
$$2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=\left[\begin{array}{c}x=\alpha\cos\beta\\ y=\alpha\sin\beta\end{array}\right]=$$
$$=2\int_0^R d\alpha\int_0^{2\pi}\frac{R\alpha}{\sqrt{R^2-\alpha^2}}d\beta=4\pi R\int_0^R\frac{\alpha}{\sqrt{R^2-\alpha^2}}d\alpha=\frac{4\pi R}{2}\int_0^R\frac{d(R^2-\alpha^2)}{\sqrt{R^2-\alpha^2}}=$$
$$=4\pi R\sqrt{R^2-\alpha^2}|_0^R=4\pi R^2$$

2 способ:

$$\begin{cases}x=R\cos u\cos v\\ y=R\cos u\sin v\\ z=R\sin u\end{cases}$$

Посчитаем гауссовы коэффициенты. $u\in[^{-\pi}/_2,{}^{\pi}/_2],\ v\in[0,2\pi]$.

$E=(-R\sin u\cos v)^2+(-R\sin u\sin v)^2+(R\cos u)^2=R^2$

$G=(-R\cos u\sin v)^2+(R\cos u\cos v)^2+0=R^2\cos^2 u$

$F=(-R\sin u\cos v)(-R\cos u\sin v)+(-R\sin u\sin v)(R\cos u\cos v)+(R\cos u)\cdot 0=0$

$$\Delta S=\iint\sqrt{EG-F^2}dudv=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}du\int_0^{2\pi}\sqrt{R^4\cos^2 u}dv=2\pi R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos udu=$$
$$=2\pi R^2\sin u|_{-\pi/2}^{\pi/2}=4\pi R^2$$

2.7 Поверхностные интегралы первого рода

Пусть S — поверхность в $\mathbb{R}^3$. Будем считать, что в каждой точке этой поверхности задана функция $f(x,y,z)$, определенная на S.

ΔS — площадь S, $\Delta S<+\infty$, $f(x,y,z)$ ограничена на S. Разобьем $S=\cup_{i=1}^n S_i$, S_i — простые, связные , $S_i\cap S_j=\varnothing$. ΔS_i — площадь S_i. $\lambda=\max\Delta S_i$ — ранг дробления. $\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$

$$\sigma=\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

Определение 2.5. Если существует конечный предел $\lim_{\lambda\to 0}\sigma$ и этот предел не зависит от способа дробления и выбора точек, то он называется поверхностным интегралом первого рода от функции f по поверхности S. Обозначение: $\iint_{(S)}f(x,y,z)dS$.

Справедливы стандартные свойства интеграла. В частности, $\iint_{(S)}dS=\Delta S$.

Замечание 2.15. Поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора стороны поверхности.

Пример 2.19. Пусть в 3-мерном пространстве имеется пластина (поверхность S) по которой «размазан» заряд. Требуется определить, какую силу будет испытывать, какую силу будет испытывать заряд q находящийся в точке трехмерного пространства. Можно было бы записать закон Кулона, но проблема в том, что один из зарядов у нас не точечный. Разобьем пластину на мелкие кусочки и если дробление будет достаточно мелким, то каждый из кусочков можно приближенно считать точечным зарядом. Для каждой пары точечных зарядов расписываем закон Кулона, суммируем все по всем кусочкам, ранг дробления устремляем к нулю, приходим к поверхностному интегралу.

2.7.1 Правила вычисления поверхностного интеграла первого рода

1) Явное задание поверхности

$S:\ z = z(x,y)$, где $(x,y) \in D$. Пусть $\exists$ непрерывные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в D. $D = \cup_{i=1}^{n} D_i$, D_i — простые, связные, непересекающиеся. Этому дроблению области D соответствует дробление поверхности $S = \cup_{i=1}^{n} S_i$, иначе говоря D_i есть проекция S_i на плоскость Oxy.

$\Delta S_i, \Delta D_i$ — площади соответствующих кусочков. Задаем произвольные $\xi_i, \eta_i \in D_i,\ \zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$.

$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S$.

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta(\xi_i, \eta_i)) \iint_{D_i} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy =$$

$$= (\text{теорема о среднем}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(\overline{\xi_i}, \overline{\eta_i})\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(\overline{\xi_i}, \overline{\eta_i})\right)^2} \Delta D_i$$

Устремляя ранг дробления к нулю, получаем следующую формулу:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dS = (R) \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

2) Поверхность в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \quad u,v \in \Delta \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$$

Существуют непрерывные частные производные φ, ψ, χ в Δ. Аналогично можно показать, что

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dS = (R) \iint_{\Delta} f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))\sqrt{EG - F^2}dudv$$

Смотри предыдущий параграф.

Пример 2.20. Пусть требуется вычислить $\iint_{(S)} (yx + 1)dS = (*)$, где поверхность S — парабалоид $z = x^2 + y^2,\ z \in [0,4]$.

1 способ:

$$(*) = \iint_D \big(4(x^2+y^2)+1\big)\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy = (\text{замена переменных}) =$$

$$= \left[\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \ r \in [0,2], \varphi \in [0, 2\pi]\right] = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} (4r^2+1)\sqrt{1+4r^2}\underbrace{r}_{|J|}d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{8}\int_0^2 (1+4r^2)^{3/2}d(1+4r^2) = \frac{\pi}{4}\frac{(1+4r^2)^{5/2}\cdot 2}{5}\big|_0^2 = \frac{\pi}{10}\left(17^{5/2}-1\right)$$

(где $D: \ x^2+y^2 \le 4$ — круг, проекция поверхности на Oxy).

2 способ:

Запишем уравнение парабалоида в параметрическом виде:

$$\Delta: \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = (x^2+y^2) = u^2 \end{cases}, v \in [0, 2\pi], \ u \in [0,2]$$

Считаем Гауссовы коэффициенты:

$E = (\cos v)^2 + (\sin v)^2 + (2u)^2 = 1 + 4u^2.$

$G = (-u\sin v)^2 + (u\cos v)^2 + 0 = u^2$

$F = (\cos v)(-u\sin v) + (\sin v)(u\cos v) + 2u\cdot 0 = 0$

$$(*) = \iint_\Delta (4u^2+1)\sqrt{1+4u^2}ududv = \frac{\pi}{10}(17^{5/2}-1)$$

2.8 Поверхностные интегралы второго рода

S — поверхность в $\mathbb{R}^3$. $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ — определена на S. Будем считать, что в каждой точке поверхности задан вектор. Обозначим за D_x, D_y, D_z проекции поверхности S на координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy соответственно.

$S = \cup_{i=1}^n S_i$, S_i —простые, связные, не пересекающиеся. $D_{x_i}, D_{y_i}, D_{z_i}$ — проекции S_i на Oyz, Oxz, Oxy. Пусть ΔS_i — площадь S_i, а $\Delta D_{x_i}, \Delta D_{y_i}, \Delta D_{z_i}$ — площади $D_{x_i}, D_{y_i}, D_{z_i}$. $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta S_i$ — ранг дробления. Возьмем произвольную $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S_i$.

$$\sigma = \pm\sum_{i=1}^n \left(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{x_i} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{y_i} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{z_i}\right)$$

Знак $+/-$ зависит от выбора стороны поверхности.

Определение 2.6. Если существует конечный предел $\lim_{\lambda\to 0}\sigma$, то он называется поверхностным интегралом второго рода функции f по поверхности S.

$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \iint_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$

Замечание 2.16. Из определения следует, что интеграл второго рода зависит от выбора стороны поверхности

Замечание 2.17. Пусть $z = \text{const}$ и $(x,y) \in D$. Тогда интеграл $\iint_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = R\iint_D R(x,y,z)dxdy$. То есть поверхностный интеграл второго рода — обобщение двойного риманова интеграла.

2.8.1 Правило вычисления поверхностного интеграла второго рода

1) Явное задание:
$S:\ z=z(x,y)$, где $(x,y)\in D_z$. Тогда $\iint_{(S)} R(x,y,z)dxdy = (R)\iint_{D_z} R(x,y,z(x,y))dxdy$
Аналогично для:
$S:\ y=y(x,z)$, где $(x,z)\in D_y$. Тогда $\iint_{(S)} Q(x,y,z)dxdz = (R)\iint_{D_y} Q(x,y(x,z),z)dxdz$
И для:
$S:\ x=x(y,z)$, где $(y,z)\in D_x$. Тогда $\iint_{(S)} P(x,y,z)dydz = (R)\iint_{D_x} P(x(y,z),y,z)dydz$.
Складываем эти три формулы и получаем сведение поверхностного интеграла второго рода к риманову:

$$\iint_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint_{D_x} P(x(y,z),y,z)dydz + \iint_{D_y} Q(x,y(x,z),z)dxdz + \iint_{D_z} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

Данный способ вычисления интеграла плохой, так как в этом случае нужно записать в явном виде уравнение поверхности относительно и x, и y, и z.

Рассмотрим второй способ, заключающийся в том, что мы поверхностный интеграл второго рода сведем к поверхностному интегралу первого рода, который мы умеем вычислять.

Введем $\vec{n}=(\cos\lambda,\cos\mu,\cos\nu)$ — единичная нормаль.
$\cos\lambda=\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\mu=\frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\nu=\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
Вспомним, как это вычислять:
Пусть поверхность S задана в виде:
$\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \quad (u,v)\in\Delta \\ z=\chi(u,v) \end{cases}$
$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$.
$\Delta S_i\approx\frac{\Delta D_{z_i}}{\cos\nu}\approx\frac{\Delta D_{x_i}}{\cos\lambda}\approx\frac{\Delta D_{y_i}}{\cos\mu}$ (смотри ранее)
Тогда $\underbrace{\iint_{(S)} P(x,y,z)dydz}_{\text{второго рода}} = \underbrace{\iint_{(S)} P(x,y,z)\cos\lambda dS}_{\text{первого рода}}$
Аналогично для двух других компонент:
$\iint_{(S)} Q(x,y,z)dxdz = \iint_{(S)} Q(x,y,z)\cos\mu dS$
$\iint_{(S)} R(x,y,z)dxdy = \iint_{(S)} R(x,y,z)\cos\nu dS$, сложив, получим

$$\iint_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint_{(S)} R(x,y,z)\cos\nu dS + \iint_{(S)} Q(x,y,z)\cos\mu dS + \iint_{(S)} P(x,y,z)\cos\lambda dS = (*)$$

Сводим это к интегралу первого рода:

$$(*) = (R)\iint_\Delta (P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+$$

$$+Q(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+$$

$$+R(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}})\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv=$$

$$=\pm(R)\iint_\Delta (PA+QB+RC)dudv$$

Пример 2.21. $\iint_{(S)} xdydz + ydxdz + zdxdy = (*)$

$S:\ x^2+y^2+z^2=R^2$ — внешняя сторона.

$$\begin{cases} x = R\cos u\cos v \\ y = R\cos u\sin v \qquad \underbrace{u\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ v\in[0,2\pi]}_{\Delta} \\ z = R\sin u \end{cases}$$

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} -R\sin u\sin v & R\cos u \\ R\cos u\cos v & 0 \end{vmatrix} = -R^2\cos^2 u\cos v$$

$$B=\frac{D(x,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} R\cos u & -R\sin u\cos v \\ 0 & -R\cos u\cos v \end{vmatrix} = -R^2\cos^2 u\sin v$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} -R\sin u\cos v & -R\sin u\sin v \\ -R\cos u\sin v & R\cos u\cos v \end{vmatrix} = -R^2\sin u\cos u\cos^2 v - R^2\sin u\cos u\sin^2 v = -R^2\sin u\cos u$$

Посчитанные A, B, C говоря о внутренном направлении нормали.

Для внешней нормали:

$$\begin{cases} A = R^2\cos^2 u\cos v \\ B = R^2\cos^2 u\sin v \\ C = R^2\sin u\cos u \end{cases}$$

$$(*) = \iint_\Delta (R\cos u\cos v\cdot R^2\cos^2 u\cos v + R\cos u\sin v\cdot R^2\cos^2 u\sin v+$$

$$+R\sin u\cdot R^2\sin u\cos u)dudv = R^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du\int_0^{2\pi}\cos u dv = 2\pi R^3\sin u|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi R^3$$

2.9 Формула Стокса

Пусть $S\subset\mathbb{R}^3$ — поверхность, l — граница S. И пусть $\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ определена на S, при этом P,Q,R непрерывны на S и имеют непрерывные частные производные.

Зададим $S: \begin{cases} \varphi(u,v) = x \\ \psi(u,v) = y \quad (u,v)\in\Delta,\ \lambda \text{ — граница } \Delta. \\ \chi(u,v) = z \end{cases}$

$\Delta\leftrightarrow S,\ \lambda\leftrightarrow l,\ \varphi,\psi,\chi$ непрерывны на Δ и имеют непрерывные частные производные до второго порядка в Δ.

$$\lambda: \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2] \Rightarrow l: \begin{cases} x = x(t) = \varphi(u(t), v(t)) \\ y = y(t) = \psi(u(t), v(t)) \\ z = z(t) = \chi(u(t), v(t)) \end{cases}, \ t \in [t_1, t_2]$$

$$\oint_{(l)} P(x,y,z)dx = (R)\int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt =$$

$$= (R)\int_{t_!}^{t_2} P(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t))) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{u'(t)} + \frac{\partial x}{\partial v} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{v'(t)} \right) dt =$$

$$= \oint_{(\lambda)} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) = \oint_{(\lambda)} \left(P\frac{\partial x}{\partial u} du + P\frac{\partial x}{\partial v} dv \right) =$$

$$= \text{(формула Грина)} = \iint_{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] dudv =$$

$$= \iint_{\Delta} \left[\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right] dudv = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv =$$

$$= \iint_{\Delta} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \right] dudv =$$

$$= \iint_{\Delta} \left[\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right) \right] dudv =$$

$$= \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \underbrace{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}}_{=B} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}_{=C} \right) dudv = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dxdz - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

В результате получили, что

$$\oint_{(l)} P(x,y,z)dx = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dxdz - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Аналогично

$$\oint_{(l)} Q(x,y,z)dx = \iint_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz$$

$$\oint_{(l)} R(x,y,z)dx = \iint_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dxdz$$

Отсюда следует формула Стокса:

$$\oint_{(l)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydz$$

Вы все еще любите матан? Формула Стокса отобьет желание не только заниматься матаном, но и вообще существовать.

Можно записать через поверхностный интеграл первого рода:
$\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ — единичная нормаль.

$$\oint_{(l)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)} [\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\lambda + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\mu + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\nu] dS = \iint_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

Замечание 2.18. Если $S: \ z = \text{const}$ — плоскость, а $R \equiv 0$ получается формула Грина. То есть формула Стокса — обобщение для формулы Грина на $\mathbb{R}^3$.

Замечание 2.19. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow \vec{F}(P, Q, R)$ — потенциальная сила и будет выполнен ряд свойств (смотри ранее).

2.10 Тройной интеграл

Пусть $f(x, y, z)$ — определена и ограничена в $E \subset \mathbb{R}^3$, при этом E ограничено, просто и связно. $E = \cup E_i$; ΔV_i — объем E_i. $\lambda = \max \Delta V_i$ — ранг дробления.

$\forall (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in E_i$ существует

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$$

— сумма Римана.

Определение 2.7. Если $\exists$ конечный предел

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma = \iiint_E f(x, y, z) dV$$

то он называется тройным интегралом от f по E и не зависит от выбора точек и способа дробления.

Замечание 2.20. $\exists$ тройной интеграл $\Rightarrow \lim_{\lambda\to 0}\sigma$ не зависит от дробления. Тогда разрежем E плоскостями, параллельными координатным плоскостям. При $\lambda \to 0$ можно считать, что E_i — прямоугольный параллелепипед, следовательно, $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$. При $\lambda \to 0$ $dV = dxdydz \Rightarrow$ можно писать интеграл следующим образом: $\iiint_E f(x, y, z) dxdydz$.

Для тройного интеграла справедливы стандартные свойства интегралов. Аналогично вводятся суммы Дарбу и формируется условие существования.

2.10.1 Правила вычисления тройного интеграла

$E: \begin{cases} z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y) \\ (x, y) \in D \end{cases}$, где D — проекция тела на Oxy, а z_1, z_2 —функции, ограничивающие тело.

Нетрудно показать, что

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dxdy = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Для $D:$ $\begin{cases} a \le x < b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Можно фиксировать x, y, z в другом порядке. Всего 6 вариантов.

Пример 2.22. $\iiint_E xyzdxdydz = (*)$
$E: \ x^2 + y^2 \le z \le 4$
D — проекция E на Oxy: $x^2 + y^2 \le 4$.

$$(*) = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^4 xyzdz = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 xyzdz = ...$$

2.10.2 Замена переменных в тройном интеграле

Пусть $f(x,y,z)$ определена, непрерывна и интегрируема по Риману в $E \subset \mathbb{R}^3$. Пусть
$\begin{cases} x = (u,v,w) \\ y = (u,v,w) \quad (u,v,w) \in \Delta \\ z = (u,v,w) \end{cases}$

Будем считать, что $E \leftrightarrow \Delta$ (установлена биекция). И пусть x, y, z имеют непрерывные частные производные в области Δ. Тогда замена переменных будет осуществляться следующим образом:

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Рассмотрим сферические координаты как частный случай:
$\begin{cases} x = w\cos u \cos v \\ y = w \sin u \cos v \\ z = w \sin v \end{cases}$
(рисунок)

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| = w^2 \cos v$$

Цилиндрические координаты:
$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = w \end{cases}$

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| = \left|\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v & 0 \\ \sin v & u\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = u$$

Пример 2.23. Вычислим объем шара радиусом R: $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

$$V = \iiint_E dxdydz = \text{(сферические координаты)} =$$
$$= \int_0^R dw \int_0^{2\pi} du \int_{--\pi/2}^{\pi/2} w^2 \cos v dv = 2\pi \int_0^R \left(w^2 \sin v|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) dw =$$
$$= 4\pi \int_0^R w^2 dw = 4\pi \frac{w^3}{3}|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Замечание 2.21. Аналогично можно ввести понятие n-кратного интеграла:

$$\underset{E}{\overbrace{\int \ldots \int}^{n}} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

2.11 Формула Остроградского-Гаусса

Пусть в трехмерном пространстве задано некоторое тело E и S — поверхность, ограничивающая E (то есть S — поверхность E). Если поверхность замкнута (то есть ограничивает некоторое тело, то под ее стандартной стороной понимается внешняя сторона).

Пусть в E задана $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ — определена в E. И у P, Q, R есть непрерывные частные производные в E. Обозначим за D проекцию тела E на плоскость Oxy. $E : \begin{cases} (x,y) \in D \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$. Обозначим $S_1 : \ z = z_1(x,y)$ — нижняя граница E и $S_2 : \ z = z_2(x,y)$ — верхняя граница E. Тогда $S = S_1 \cup S_2$. Теперь вычислим тройной интеграл:

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_D \left(R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)) \right) dxdy =$$
$$= \iint_D R(x,y,z_2(x,y)) dxdy - \iint_D R(x,y,z_1(x,y)) dxdy = \text{(сводим к поверхностным)} =$$
$$= \iint_{(S_2)} R(x,y,z) dxdy + \iint_{(S_1)} R(x,y,z) dxdy (^*) = \oiint_{(S)} R(x,y,z) dxdy$$

*поясним, откуда минус переехал в плюс. Просто при работе с нижней стороной нормаль смотрела вверх (по определению стандартной стороны). А перейдя к поверхностному интегралу мы взяли внешнюю нормаль (для нормальной работы) и получили минус.

Абсолютно аналогично можно доказать, что $\iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint_{(S)} Q(x,y,z) dxdz$ и $\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint_{(S)} P(x,y,z) dydz$.

Складываем все эти формулы и получаем

$$\iiint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

Если поверхностный интеграл второго рода свести к поверхностному интегралу первого рода, то формула Остроградского-Гаусса примет вид:

$$\iiint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_{(S)} \left(P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu\right) dS$$

где $\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ — единичная нормаль.

Замечание 2.22. Рассмотрим частный случай, когда $\begin{cases} P = x \\ Q = R = 0 \end{cases}$. Тогда

$$\iiint_E dxdydz = V(E) = \oiint_{(S)} xdydz$$

— объем тела E.

Аналогично для $\begin{cases} P = R = 0 \\ Q = y \end{cases}$:

$$\iiint_E dxdydz = V(E) = \oiint_{(S)} ydxdz$$

И аналогично для $\begin{cases} P = Q = 0 \\ R = z \end{cases}$:

$$\iiint_E dxdydz = V(E) = \oiint_{(S)} zdxdy$$

Пример 2.24. Пусть тело объема V погружено в жидкость плотностью ρ. Найти результирующую силу давления жидкости, действующую на тело.

Выберем за Oxy поверхность жидкости, а Oz — глубина погружения. E полностью погружено в жидкость и ограничено поверхностью S.

Пусть dS — маленький кусочек поверхности S. Если дробление достаточно малое, то кривизной можно пренебречь. То есть этот кусочек поверхности плоский. На этот кусочек давит столбик жидкости высоткой S. На кусочек будет действовать силка $d\vec{F} = (dF_x, dF_y, dF_z)$ — силка давленьица на dS.

$\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ — внешняя единичная нормалька к dS. Тогда: $\begin{matrix} dF_x = -z\rho g\cos\lambda dS \\ dF_y = -z\rho g\cos\mu dS \\ dF_z = -z\rho g\cos\nu dS \end{matrix}$.

Минусик поставлен, потому что нормалька взята внешняя, а силка действует вовнутрь.

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ — ... сила давления.

$F_x = \oiint_{(S)} \left(-z\rho g\cos\lambda\right) dS = 0$

$F_y = \oiint_{(S)} \left(-z\rho g\cos\mu\right) dS = 0$

$F_z = \oiint_{(S)} \left(-z\rho g\cos\nu\right) dS = -\iiint_E \rho g dxdydz = -\rho g V$

(все уже догадались, что это по формуле Остроградского-Гаусса?)

Получили закон Архимеда.

Замечание 2.23. Пусть в области $E \subset \mathbb{R}^3$ действует $\vec{F} = (P, Q, R)$, удовлетворяющая условию:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

то тогда такая сила называется соленоидальной и имеет ряд свойств (смотри следующий параграф).

Замечание 2.24. (философское)

В формулах Грина, Стокса и Остроградского-Гаусса интеграл по области связывается с интегралом по границе этой области и все это есть многомерные аналоги формулы Ньютона-Лейбница.

2.12 Элементы теории поля

Поле — это не фамилия (Платонов).

Здесь будет много физики. Бабаджанянц уже радуется.

Определение 2.8. Пусть $E \subset \mathbb{R}^3$ и пусть в каждой точке $(x, y, z) \in E$ определена скалярная функция $v(x, y, z)$. Тогда говорят, что в области E задано скалярное поле v.

К примеру, поле температур, давлений, высот, плотностей, etc.

Поверхность $v(x, y, z) = C = \text{const}$ — поверхность уровня (эквипотенциальная поверхность).

Определение 2.9. $v(x, y, z) = \text{const}$. Если эти поверхности уровня представляют собой плоскости, параллельные друг другу, то v называется плоским полем.

Как вам привести пример плоского поля? Ну, если предположить, что Земля плоская... то можно построить поле высот, где плоскости — это определенная высота. Тогда множество точек, лежащих на одной высоте, будут плоскостью.

Пусть задано некоторое направление $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\begin{array}{l} \alpha = \angle(\vec{l}, Ox) \\ \beta = \angle(\vec{l}, Oy) \\ \gamma = \angle(\vec{l}, Oz) \end{array}$. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma$$

— производная функции v по направлению $\vec{l}$.

Определение 2.10. $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ — оператор Гамильтона.

$\vec{\nabla} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)$ — градиент, направление возрастания поля.

Пример 2.25. Пусть есть трехмерная система координат и в ее начале установлен источник тепла. Сферы вокруг него будут предствлять собой потенциальные поверхности (поверхности (80-го) уровня). $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $r = ||\vec{r}||$. Тогда функция уровня тепла $v(\vec{r}) = \varphi(r)$.

Посчитаем градиент: $\vec{\nabla} v = \frac{\varphi'(r)}{r}\vec{r}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(r) + \frac{x}{r}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \varphi'(r) + \frac{y}{r}$, $\frac{\partial v}{\partial z} = \varphi'(r) + \frac{z}{r}$.

Свойства градиента:
1) $\vec{\nabla}(v+c)=\vec{\nabla}v$
2) $\vec{\nabla}(vc)=c\vec{\nabla}v$
3) $\vec{\nabla}(v\pm u)=\vec{\nabla}v\pm\vec{\nabla}u$
4) $\vec{\nabla}(vu)=\vec{\nabla}v\cdot u+\vec{\nabla}u\cdot v$
5) $\vec{\nabla}\frac{v}{u}=\frac{u\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}u}{u^2}$
6) $\vec{\nabla}F(v)=F'(v)\vec{\nabla}v$.

2.12.1 Некоторое определения, связанные с векторными полями

Определение 2.11. $E\subset\mathbb{R}^3$ задан вектор $\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$. Тогда говорят, что задано векторное поле.

Определение 2.12. Линия, в каждой точке которой касательная направлена вдоль вектора $\vec{F}$ называется векторной или силовой линией.

Определение 2.13. L — замкнутый контур. Проведем через каждую точку этого контура силовую линию. Получаем некоторую поверхность, образованную этими силовыми линиями. Эта поверхность будет называться векторной трубкой.

Определение 2.14. Векторное поле $\vec{F}$ называется плоским, если все вектора распологаются в плоскостях, параллельных друг другу и в каждой из таких плоскостей поле одно и то же.

2.12.2 Физический смысл формул

S — поверхность
$\vec{F}$ — векторное поле.
$\vec{n}=(\cos\lambda,\cos\mu,\cos\nu)$ — единичная нормаль к S
F_n — длина проекции $\vec{F}$ на нормаль.

Определение 2.15. Поверхностный интеграл вида $\iint_{(S)}F_n dS$ называется потоком векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S в направлении $\vec{n}$. Также его можно переписать в виде $\iint_{(S)}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)dS=\iint_{(S)}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$.

Предположим теперь, что S — замкнутая поверхность, ограничивающая область $E\subset\mathbb{R}^3$. В этом случае получаем $\oiint_{(S)}F_n dS=\iiint_E\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$.

Определение 2.16. Дивергенция векторного поля: $\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=(\vec{\nabla},\vec{F})$, где $\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$.

Физически дивергенция характеризует наличие источников или поглотителей поля в заданной области.

Можно доказать, что дивергенция не зависит от выбора системы координат, это скалярная характеристика поля.

Определение 2.17. Криволинейный интеграл второго рода $\int_{(l)} Pdx+Qdy+Rdz = \int_{(l)} \left(\vec{F}, \vec{dr}\right)$ — линейный интеграл $\vec{F}$ вдоль l ($\vec{dr} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$).

Если $\vec{F}$ — силовое поле, то этот интеграл характеризует работу, совершенную этой силой.

Определение 2.18. Пусть l — замкнутый контур, S — поверхность, ограниченная l. Тогда

$$\oint_{(l)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\lambda + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\mu + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\nu \right] dS =$$

$$= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

— формула Стокса.

Определение 2.19. $\oint Pdx + Qdy + Rdz$ — циркуляция $\vec{F}$ вдоль l.

Определение 2.20. Ротор или вихрь $\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$. Ротор характеризует степень завихрения поля, то есть наличия у поля вращательной компоненты, турбулентность. Можно показать, что ротор — векторная характеристика поля, не зависящая от выбора системы координат.

Формула Стокса отсюда:

$$\oint_{(l)} (\vec{F}, \vec{dr}) = \iint_{(S)} (\operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_{(S)} \operatorname{rot}_n \vec{F} dS$$

Отметим несколько свойств ротора и дивергенции:
1) $\operatorname{rot}(\vec{\nabla} U) = 0$, где U — любое скалярное поле.
2) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$.

Определение 2.21. Векторное поле $\vec{F}$ называется потенциальным, если $\exists$ скалярное поле $\Phi(x, y, z): \ \vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$.

Теорема 2.10. *Пусть в односвязной области $E \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле*

$$F = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

, P, Q, R — непрерывны и существуют их непрерывные частные производные. Тогда следующие условия являются эквивалентными друг другу:
1) $\vec{F}$ — потенциальное ($\exists \Phi$ — потенциал: $\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$)
2) $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ ($\vec{F}$ — безвихревое).
3) $\forall M_1, M_2 \in E \ \int (\vec{F}, \vec{dr}) = \Phi(M_2) - \Phi(M_1)$ — не зависит от вида кривой.
4) $\oint_{(l)} (\vec{F}, \vec{dr}) = 0$.

Доказательство. следует из формулы Стокса. ☐

Пример 2.26. Пусть в начале координат находится масса m. Требуется найти напряженность гравитационного поля в точке с координатами (x, y, z), порождаемого массой m. Напряженность поля — сила, действующая на точку единичной массы на данных координатах поля.

r — расстояние между m и точкой. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Тогда

$$\vec{F} = -G\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{Gm}{r^3}\vec{r} = \nabla \left(\frac{\vec{G}m}{r} \right)$$

где G — гравитационная постоянная.

Определение 2.22. Векторное поле $\vec{F}$ называется соленоидальным, если $\exists$ векторное поле $\vec{B}: \ \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{B}$, где $\vec{B}$ — векторный потенциал поля $\vec{F}$.

Теорема 2.11. *Пусть в односвязной области $E \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R$ P, Q, R — непрерывны и существуют их непрерывные частные производные. Тогда следующие условия являются эквивалентными друг другу:*

1) $\vec{F}$ — соленоидальное ($\exists \vec{B}$: $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{B}$)

2) $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ (в E нет источников поля).

3) Пусть l — произвольный замкнутый контур, а S_1, S_2 — сечения векторной трубки, проходящей через l. Тогда $\iint_{(S_1)} F_n dS = \iint_{(S_2)} F_n dS$.

4) $\forall$ замкнутой поверхности S выполняется $\oiint_{(l)} F_n dS = 0$.

Доказательство. следует из формулы Остроградского-Гаусса. $\square$

Теорема 2.12. *(о каноническом разложении силовых полей)*

Пусть $\vec{F} = (P, Q, R)$ задан в односвязной $E \subset \mathbb{R}^3$, P, Q, R непрерывны и имеют непрерывные частные производные. Тогда $\exists \vec{F_1}$ — потенциальный и $\exists \vec{F_2}$ — соленоидальный, такие, что $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

Доказательство. Хорошая теорема. Доказывать мы ее, конечно, не будем, так как не умеем решать диффуры. Но наметим доказательство:

$\vec{F_1} = \vec{\nabla}\Phi$, где Φ — скалярное поле.

$\vec{F_2} = \vec{F} - \vec{F_1} = \vec{F} - \vec{\nabla}\Phi$.

$0 = \operatorname{div} \vec{F_2} = \operatorname{div}(\vec{F} - \vec{\nabla}\Phi) = \operatorname{div} \vec{F} - \operatorname{div}(\vec{\nabla}\Phi)$

откуда $\operatorname{div}(\vec{\nabla}\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi$, где $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Отсюда получаем уравнение $\Delta\Phi = \operatorname{div} \vec{F}$ — дифференциальное уравнение в частных производных. $\square$

Определение 2.23. $\Delta\Phi = 0$ — уравнение Лапласа, где Φ — скалярное поле. Оно называется гармоническим (лапласовым) полем.

Более общее уравнение $\Delta\Phi = f(x, y, z)$ — уравнение Пуассона.

Подробнее смотри математическую физику (му-а-ха-ха).

3 Интегралы, зависящие от параметра

Пример 3.1. Пусть требуется вычислить интеграл вида $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Этот интеграл сходится по признаку Дирихле. Проблема в том, что интеграл неберущийся (косяк!). Но это не значит, что его нельзя посчитать (так как он определенный, то результат число и это число существует). Введем интеграл $J(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$, тогда $I = J(0)$. Однако его тоже нельзя взять. Но если мы продифференцируем: $J'(\alpha) = -\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx =$ (по частям) $= \frac{-1}{1+\alpha^2}$. Проинтегрируем по α: $J(\alpha) = -\int \frac{dx}{1+\alpha^2} = -\arctan \alpha + C$.

$J(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to +\infty \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$.

Тогда $J(\alpha) = -\arctan \alpha + \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = J(0) = \frac{\pi}{2}$

В данных вычислениях использовались некоторые переходы/операции, которые нужно обосновать.

3.1 Равномерная сходимость функции нескольких переменных

Будем все расписывать для функций двух переменных, но это можно распространить и на случай функции большего числа переменных.

Пусть $f(x, y)$, где $x \in X, y \in Y$.

Определение 3.1. Будем говорить, что функция $f(x, y)$ равномерно на X сходится к $\varphi(x)$ при $y \to y_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall y \in Y : \ |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$.

Запись: $f(x, y) \rightrightarrows_{y \to y_0}^{x \in X} \varphi(x)$.

Свойства равномерной сходимости:

1) Критерий Коши: Чтобы $f(x, y)$ равномерно (по $x \in X$) ограничено сходилась к некоторой функции при $y \to y_0$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall y_1, y_2 \in Y : \ \begin{cases} |y_1 - y_0 < \delta| \\ |y_2 - y_0 < \delta| \end{cases} \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon \ \forall x \in X$.

2) Предел по Гейне: $f(x, y) \rightrightarrows_{y \to y_0}^{x \in X} \varphi(x) \Leftrightarrow \forall y_n \in Y : \ y_n \to_{n \to \infty} y_0 \Rightarrow f(x, y_n) \rightrightarrows_{n \to \infty}^{x \in X} \varphi(x)$. Данное свойство заключается в том, что понятие равномерной сходимости функции можно свести к понятию равномерной сходимости функциональной последовательности и в результате многие теоремы, доказанные ранее для функциональных последовательностей автоматически переносятся на случай функций.

3) Пусть $x \in X = [a, b]$, $y \in Y = [c, d]$ (то есть функция задана на прямоугольнике). $G = X \times Y$ (этот самый прямоугольник). Пусть $f(x, y)$ — непрерывна (интегрируема) на G. $f(x, y) \rightrightarrows_{y \to y_0}^{x \in [a,b]} \varphi(x)$, $y_0 \in [c, d]$. Тогда $\varphi(x)$ непрерывна (интегрируема) на $[a, b]$.

4) Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Пусть $f(x, y) \to_{y \to y_0} \varphi(x)$, $f(x, y) \to_{x \to x_0} \psi(y)$. И пусть хотя бы одна из этих двух сходимостей является равномерной. Тогда $\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$.

Лемма 3.1. *Пусть $x \in X = [a, b]$, $y \in Y = [c, d]$ (то есть функция задана на прямоугольнике $G = X \times Y$). Пусть $f(x, y)$ — непрерывна на G. Тогда $\forall y_0 \in Y \Rightarrow f(x, y) \rightrightarrows_{y \to y_0}^{x \in [a,b]} f(x, y_0)$*

Замечание: лемма останется справедливой, если G — замкнутое ограниченное множество.

Доказательство. $f(x,y)$ непрерывна на G, G замкнуто и ограничено, тогда по теореме Кантора $f(x,y)$ — равномерно непрерывна на G. Запишем определение равномерной непрерывности для многомерного случая: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in G\ \begin{cases}|x_1-x_2|<\delta\\|y_1-y_2|<\delta\end{cases}\Rightarrow$ $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$.

Положим $x_1=x_2=x,\ y_1=y, y_2=y_0$. Тогда $\forall y\in[c,d]:\ |y-y_0|<\delta$ и $\forall x\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$$

Но это и означает, что равномерное на $[a,b]$ стремление $f(x,y)$ и $f(x,y_0)$ при $y\to y_0$. Доказано. □

3.2 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Определение 3.2. Пусть $f(x,y)$ определена и ограничена при $x\in[a,b], y\in[c,d]$ и $G=[a,b]\times[c,d]$. Пусть при любом фиксированном $y\in[c,d]$ $f(x,y)$ является интегрируемой по x на отрезке $[a,b]$, то есть существует

$$J(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

— интеграл, зависящий от параметра. В качестве параметра выступает y.

Теорема 3.1. *(о непрерывности)*
Пусть $f(x,y)$ непрерывна на G. Тогда $J(y)$ — непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. $\forall y_0\in[c,d]$.

$$|J(y_0+\Delta y)-J(y_0)|=\left|\int_a^b f(x,y_0+\Delta y)dx-\int_a^b f(x,y_0)dx\right|\le$$
$$\le\int_a^b|f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)|\,dx\le(*)\le\int_a^b\varepsilon dx=\varepsilon(b-a)$$

$(*)$Так как наша функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна на G (по теореме Кантора), то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x\in[a,b],\ \forall\Delta y:\ |\Delta y|<\delta\Rightarrow|f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$.

В результате получаем определение непрерывности. $J(y)$ непрерывна. □

Теорема 3.2. *(о предельном переходе)*
$f(x,y)\rightrightarrows_{y\to y_0}^{x\in[a,b]}\varphi(x),\ y_0\in[c,d]$. *Тогда* $\lim_{y\to y_0}J(y)=\int_a^b\varphi(x)dx$.

Доказательство. $f(x,y)\rightrightarrows_{y\to y_0}^{x\in[a,b]}\varphi(x)\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall y\in[c,d]:\ |y-y_0|<\delta\Rightarrow$ $|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in[a,b]$.

$$\left|J(y)-\int_a^b\varphi(x)dx\right|=\left|\int_a^b f(x,y)dx-\int_a^b\varphi(x)dx\right|\le$$
$$\le\int_a^b|f(x,y)-\varphi(x)|\,dx<\int_a^b\varepsilon dx=\varepsilon(b-a)$$

Следовательно, $\lim_{y\to y_0}J(y)=\int_a^b\varphi(x)dx$. □

Теорема 3.3. *(о интрегральном переходе)*

$f(x,y)$ непрерывна на G. Тогда

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \iint_G f(x,y)dxdy$$

Доказательство. Очевидно из свойств двойного интеграла. □

Теорема 3.4. *(о дифференциальном переходе — правило Лейбница)*

$f(x,y)$ — непрерывна на G. и $\exists$ непрерывная $\frac{\partial f}{\partial y}$ на G. Тогда $J'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}dx$.

Доказательство.

$$J'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{J(y+\Delta y) - J(y)}{\Delta y} =$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \left(\int_a^b f(x, y+\Delta y)dx - \int_a^b f(x,y)dx \right) =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\int_a^b (f(x,y+\Delta y)dx - f(x,y)dx)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b \frac{(f(x,y+\Delta y)dx - f(x,y)dx)}{\Delta y} =$$

$$= (\frac{(f(x,y+\Delta y)dx - f(x,y)dx)}{\Delta y} \to_{\Delta y \to 0} \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \text{(из леммы)}$$

$$\frac{(f(x,y+\Delta y)dx - f(x,y)dx)}{\Delta y} \rightrightarrows^{x\in[a,b]}_{\Delta y \to 0} \frac{\partial f}{\partial y}) = \text{(теорема о предельном переходе)} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b \frac{(f(x,y+\Delta y)dx - f(x,y)dx)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}dx$$

□

Пример 3.2. *$J(y) = \int_0^1 dydx$.*

$$J'(y) = \left(\int_0^1 xydx \right)' = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}(xy)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

Введем более общее определение интеграла, зависящего от параметра.

Определение 3.3. $J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$, $y \in [c,d]$, то есть границы J зависят от параметра.

Теорема 3.5. *(о непрерывности)*

Пусть $f(x,y)$ непрерывна на G, $a(y), b(y)$ непрерывна на $[c,d]$. Тогда $J(y)$ — непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. (точнее, его идея). $\forall y_0 \in [c,d]$

$$|J(y_0+\Delta y)-J(y_0)| = \left|\int_{a(y_0+\Delta y)}^{b(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)dx - \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx\right| =$$

$$= |\int_{a(y_0+\Delta y)}^{a(y_0)} f(x,y_0+\Delta y)dx + \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0+\Delta y)dx +$$

$$+ \int_{b(y_0)}^{b(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)dx - \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx| \leq$$

$$\leq \left|\int_{a(y_0+\Delta y)}^{a(y_0)} f(xy_0+\Delta y)dx\right| + \left|\int_{b(y_0)}^{b(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)dx\right| +$$

$$+ \left|\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \left(f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)\right)dx\right|$$

Первые два слагаемых стремятся к нулю из непрерывности $a(y), b(y)$, а третье в силу непрерывности функции f. Будем считать, что доказано. ☐

Теорема 3.6. *(о предельном переходе)*

$f(x,y) \rightrightarrows^{x}_{y\to y_0} \varphi(x)$. Также $a(y) \to_{y\to y_0} \hat{a}, b(y) \to_{y\to y_0} \hat{b}$, Тогда $\lim_{y\to y_0} J(y) = \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \varphi(x)dx$.

Доказательство. Аналогично частному случаю. ☐

Теорема 3.7. *(об интегральном переходе)*

$f(x,y)$ непрерывна на G, $a(y), b(y)$ — непрерывны на $[c,d]$. Тогда

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \iint_G f(x,y)dxdy$$

Доказательство. Ну вы поняли. Следует из определния двойного интеграла. ☐

Теорема 3.8. *(обобщенное правило Лейбница)*

$f(x,y)$ — непрерывна на G. и $\exists$ непрерывная $\frac{\partial f}{\partial y}$ на G, $a(y), b(y)$ непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$. Тогда

$$J'(y) = \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\right)'_y =$$

$$= \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}dx + f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y)$$

Доказательство. $\Phi(y,u,v) = \int_u^v f(x,y)dx$. Тогда

$$J(y) = \Phi(y, a(y), b(y))$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$J'(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}a'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}b'(y)$$

Распишем частные производные:
$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y} dx$ по частному правилу Лейбница.
$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(v, y)$ по теореме Барроу.
$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(u, y)$ по теореме Барроу.
$u = a(y), v = b(y)$ и получаем требуемое. □

Пример 3.3. $J(y) = \int_{y^2}^{\ln(y)} xydx$

По правилу Лейбница:

$$J'(y) = \int_{y^2}^{\ln(y)} xdx + y\ln(y)\frac{1}{y} - y^2 y2y =$$

3.3 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Определение 3.4. Пусть $f(x, y)$ определена при $x \geq a,\ y \in [c, d]$, где $c, d \in \widehat{\mathbb{R}}$. Будем считать, что f интегрируема по x на $[a, A]$ при любом $A \geq a\ \forall y \in [c, d]$.

Тогда функция

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

называется несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра.

Определение 3.5. $F(A, y) = \int_a^A f(x, y)dx$, где $A \geq a$. Если существует конечный $\lim_{A\to+\infty} F(A, y)$ при любом $y \in [c, d]$, то тогда интеграл $J(y)$ называется сходящимся $\forall y \in [c, d]$. То есть $\forall \varepsilon > 0, \forall y \in [c, d],\ \exists \overline{A}(\varepsilon, y) > 0 :\ \forall A \geq \overline{A} \Rightarrow \left|\int_{\overline{A}}^{+\infty} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$.

Если при этом $\overline{A} = \overline{A}(\varepsilon)$ не зависит от y, то $J(y)$ сходится равномерно на $[c, d]$.

Пример 3.4.

$$J(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$$

$y = 0 \Rightarrow J(0) = 0,\ y \neq 0 \Rightarrow J(y) = e^{-xy}|_0^{+\infty} = (*)$. Интеграл будет сходящийся при $y \geq 0$. $(*) = 1$

Будет ли эта сходимость равномерной?

а) $y \in [0, d],\ d > 0$.

Распишем: $y \neq 0 \Rightarrow |\int_{\overline{A}}^{\infty} xe^{-xy}dx| = \left|-e^{-xy}|_{\overline{A}}^{\infty}\right| = e^{-\overline{A}y} \to_{\overline{A}\to\infty} 0$. Убрав черту перейдем к пределу. $e^{-Ay} \not\rightrightarrows_{A\to+\infty} 0$. Интеграл сходится неравномерно.

б) $y \in [c, d],\ c > 0$. Тогда $e^{-Ay} \rightrightarrows_{A\to\infty}^{y\in[c,d]} 0$. В этом случае интеграл будет сходиться равномерно на $[c, d]$.

Теорема 3.9. *(критерий равномерной сходимости Коши)*

$J(y)$ — равномерно сходится на $[c, d]$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{A}(\varepsilon) > 0 :$ $\forall A_1, A_2 > \overline{A} \Rightarrow \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x, y)dx\right| < \varepsilon\ \forall y \in [c, d]$.

Доказательство. Аналогично одномерному случаю □

Теорема 3.10. *Признак равномерной сходимости Вейерштрасса:*

Пусть $|f(x, y)| \leq \varphi(x),\ \forall x \geq a, \forall y \in [c, d]$. Пусть $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ — сходится, тогда $J(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)dx$ — сходится равномерно на $[c, d]$

Доказательство. Следует из критерия Коши. $\square$

Теорема 3.11. *Признак равномерной сходимости Дирихле.*

Пусть $F(A,y) = \int_a^A f(x,y)dx$ *является равномерно ограниченной (ее можно оценить константой, не зависящей ни от* A*, ни от* y*) при* $A \geq a,\ y \in [c,d]$*. Функция* $g(x,y)$ *монотонна по* x *при любом* $y \in [c,d]$*.* $g(x,y) \rightrightarrows_{x\to+\infty}^{y\in[c,d]}$*. Тогда* $\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ *равномерно сходится на* $[c,d]$*.*

Доказательство. - Где пруфы, Билли? - Нет у меня никаких пруфов! $\square$

Теорема 3.12. *Признак равномерной сходимости Абеля.*

Пусть $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ *— равномерно сходится по* $y \in [c,d]$*. Функция* $g(x,y)$ *монотонна по* x *при любом* $y \in [c,d]$*.* $g(x,y)$ *равномерно ограничена при* $x \geq a,\ y \in [c,d]$*. Тогда* $\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ *равномерно сходится на* $[c,d]$*.*

Сформулируем далее 4 основные теоремы о непрерывности, предельном, дифференциальном и интегральном переходе.

Теорема 3.13. *(о предельном переходе)*

Пусть $J(y)$ *сходится равномерно на* $[c,d]$*. Пусть* $f(x,y) \rightrightarrows_{y\to y_0}^{x\in[a,A]} \varphi(x),\ \forall A \geq a$*. Тогда* $\lim_{y\to y_0} J(y) = \int_a^\infty \varphi(x)dx$*.*

Доказательство.

$$\lim_{y\to y_0} J(y) = \lim_{y\to y_0}\int_a^\infty f(x,y)dx = \lim_{y\to y_0}\lim_{A\to\infty}\underbrace{\int_a^A f(x,y)dx}_{=F(A,y)} =$$

$$= \begin{pmatrix} F(A,y)\text{сход. равномерно по} \\ y\in[c,d]\text{при } A\to\infty \\ \text{тогда см. свойство из 1 пар.} \end{pmatrix} = \lim_{A\to\infty}\lim_{y\to y_0}\int_a^A f(x,y)dx =$$

$$= (\text{по теореме для собственных интегралов (см. предыдущий параграф)} =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_a^A \varphi(x)dx = \int_a^\infty \varphi(x)dx$$

$\square$

Теорема 3.14. *(о непрерывности)*

Пусть $f(x,y)$ *является непрерывной при* $x \geq a,\ y \in [c,d]$ *и пусть* $J(y)$ *сходится равномерно на* $[c,d]$*. Тогда* $J(y)$ *непрерывна на* $[c,d]$*.*

Доказательство. $\forall y_0 \in [c,d]$:

$$\lim_{y\to y_0} J(x,y) = \lim_{y\to y_0}\int_a^\infty f(x,y)dx = (\text{по теореме о пр. перех.}^*) =$$

$$= \int_a^\infty f(x,y_0)dx = J(y_0)$$

$(^*)$(то, что подынтегральная функция сходится непрерывно, следует из непрерывности и леммы из первого параграфа) $\square$

Теорема 3.15. *(об интегральном переходе)*

Пусть $f(x,y)$ непрерывна при $x \geq a$, $y \in [c,d]$ и пусть $J(y)$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда $\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)dy$.

Доказательство. $\forall A \geq a$. По теореме об интегральном переходе для собственных интегралов (см. предыдущий параграф):

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x,y)dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)dy$$

Устремим $A \to \infty$.

$$\lim_{A\to\infty} \int_c^d dy \int_a^A f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)dy$$

По теореме о предельном переходе для собственных интегралов знак предела слева можно запихнуть под знак первого интеграла и получить доказательство. □

Теорема 3.16. *(о дифференциальном переходе)*

Пусть $f(x,y)$ непрерывна при $x \geq a$, $y \in [c,d]$ и $\exists$ непрерывная $\frac{\partial f}{\partial y}$ при $x \geq a$, $y \in [c,d]$. Пусть $J(y)$ сходится на $[c,d]$ и $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}dx$ равномерно сходился на $[c,d]$. Тогда $J'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}dx$

Доказательство. $\forall y_0 \in [c,d]$.

$$J'(y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{J(y_0+\Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\Delta y}\left(\int_a^\infty f(x,y_0+\Delta y)dx - \int_a^\infty f(x,y_0)dx\right) =$$
$$= \lim_{\Delta y\to 0} \int_a^\infty \frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y}dx = (\text{теорема о предельном переходе}) =$$
$$\int_a^\infty \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y}dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx$$

Обоснуем теперь, почему теорему о предельном переходе можно применить:

$$\frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y} \rightrightarrows^{x\in[a,H]}_{\Delta y\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)$$

по лемме из параграфа 1

Остается доказать, что $\int_a^\infty \frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx$ сходится равномерно на $[c,d]$.

По условию $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}dx$ сходится равномерно на $[c,d]$. По критерию сходимости Коши $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\overline{A}(\varepsilon) > 0 :\ \forall A_1, A_2 \geq \overline{A} \Rightarrow \left|\int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial f}{\partial y}dx\right| < \varepsilon\ \forall y \in [c,d]$. Введем $\Phi(y) = \int_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx$. Дифференцируем: $\Phi'(y) = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial f}{\partial y}dx$ (по правилу Лейбница - см. предыдущий параграф). Отсюда

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} \frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y}dx\right| = \left|\frac{\Phi(y_0+\Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y}\right| =$$
$$(\text{по т. Лагранжа}\exists\Theta \in (0,1)) = |\Phi'(y_0+\Theta\Delta y)| < \varepsilon$$

Отсюда интеграл $\int_a^\infty \frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx$ сходится по критерию Коши, доказано. □

Аналогично можно ввести понятие несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра и сформулировать все четыре теоремы для них.

3.4 Эйлеровы интегралы

Пример 3.5. Рассмотрим функцию вида $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ — бетта-функция или Эйлеров интеграл первого рода.

Если $a, b \geq 1$, то это собственный интеграл. Если хотя бы один из параметров меньше единицы, то возникает несобственный интеграл.

Если оба параметра больше нуля, то интеграл сходится. Иначе он расходится. Будем далее считать, что $a, b > 0$.

Бетта-функция есть интеграл от дифференциального бинома. Если хотя бы одно из чисел $a, b, a+b$ целое, то интеграл будет берущимся. Иначе интеграл будет не берущийся.

Некоторые свойства бетта-функции:

1) $B(a,b) = \begin{bmatrix} -x = t \\ -dx = dt \end{bmatrix} = B(b,a)$ — симметричность.

2) $B(a,b)$ — по частям, следовательно, если $b > 1$, $B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$

Если $b > m$, то $B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b-2}{a+b-2} \cdot ... \cdot \frac{b-m}{a+b-m} \cdot B(a,b-m)$. Из симметрии можно аналогично представить для a. Отсюда следует, что $B(a,b)$ достаточно исследовать при $a, b \in (0,1]$.

—

Определение 3.6. Функция $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ — гамма-функция или Эйлеров интеграл второго рода.

Всегда есть несобственность первого рода: сходится $\forall a$. Если $a \geq 1 \Rightarrow$ несобственность 2 рода не возникает. Если же взять $a < 1 \Rightarrow$ возникнет несобственность 2 рода в точке $x = 0$. Итого, если $a > 0$ — сходится, если $a \leq 0$ — расходится.

Далее будем считать, что $a > 0$.

Свойства гамма-функции:

1) Применимо правило Лейбница (дифференцирование по параметру) любое число раз: $\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\ln xe^{-x}dx$, $\Gamma''(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\ln^2 xe^{-x}dx$. По сравнению с другими множителями, логарифм не будет вносить никакого вклада в сходимость интеграла на нуле и бесконечности.

2) $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx =$ (по частям) $= \underbrace{\frac{x^a}{a}e^{-x}|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{x^a}{a}e^{-x}dx = \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^\infty x^a e^{-x}dx}_{\Gamma(a+1)}$. Отсюда $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

3) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^\infty = 1$. Отсюда, $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 6$. Таким образом, $\Gamma(a+1) = a!$.

4) $\Gamma(a)$ — дифференцируемая функция при $a > 0$.

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. По теореме тРолля $\exists c \in (1,2): \ \Gamma'(c) = 0$.

Посмотрим на вторую производную: $\Gamma''(a) > 0$ при любом $a > 0$. Тогда $\Gamma'(a)$ возрастает на $(0,+\infty)$. То есть $\Gamma'(a) < 0$ на $(0,c)$, $\Gamma'(a) > 0$ на $(c,+\infty)$. Отсюда $\Gamma(a)$ убывает на $(0,c]$ и возрастает на $[c,+\infty)$.

То есть $\Gamma(a) \to_{a\to\infty} +\infty$. $\lim_{a\to+0}\Gamma(a) = \lim_{a\to+0}\frac{\Gamma(a+1)}{a} = +\infty$

5) $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Без доказательства, слишком сложно.

3.5 Интеграл Фурье

Пусть $f(x)$ определена на $[-l,l]$. Разложим ее в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right)$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{k\pi t}{l} dt$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin\frac{k\pi t}{l} dt$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)dt+ \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{k\pi t}{l} dt \cos\frac{k\pi x}{l} + \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin\frac{k\pi t}{l} dt \sin\frac{k\pi x}{l} \right) = \\ = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{k\pi(t-x)}{l} dt \qquad (*) \end{aligned}$$

Пусть $f(x)$ определена на $(-\infty, +\infty)$ и $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ (то есть $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$).

В формуле $(*)$ перейдем к пределу: $l \to +\infty$.

$\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)dt \to_{l\to\infty} 0$

Сумма в формуле $(*)$ может быть представлена как сумма Римана для следующего интеграла:

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} F(\lambda) d\lambda$$

где

$$F(\lambda) = \int_{-l}^{l} f(t) \cos\lambda(t-x) dt$$

Разбиваем на части $0 < \frac{1\pi}{l} < \frac{2\pi}{l} < ...$ промежуток $[0, +\infty)$. В качестве промежуточных точек выбираем правую точку каждого кусочка: $\xi_k = \frac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, ...$

Тогда сумма Римана примет вид:

$$\frac{1}{\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} F(\xi_k)}_{\int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{\pi k(t-x)}{l} dt} \cdot \underbrace{\Delta x_k}_{=\frac{\pi}{l}} \Rightarrow (*)$$

Тогда формальный переход в $(*)$ при $l \to \infty$ приведет к следующему:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\lambda(t-x) dt \right) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\lambda(t-x) dt \qquad (**)$$

Это и есть интеграл Фурье.

Замечание 3.1. Перепишем интеграл Фурье так, чтобы он был похож на ряды Фурье:

$$f(x) = \int_0^\infty (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x) d\lambda$$

где:

$$\begin{cases} a_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt \\ b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt \end{cases}$$

Формулу $(**)$ надо далее обосновать.

Будем рассматривать поточечную сходимость интеграла Фурье, то есть сходимость в заданной точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t - x_0) dt$$

Внутренний интеграл сходится из условий абсолютной интегрируемости функции $f(t)$. (косинус тупо оцениваем сверху единицей). То есть нужно обосновать абсолютную сходимость внешнего интеграла.

Обозначим:

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t - x_0) dt$$

Проверим: $J(A) \to_{A \to +\infty}$?

Преобразуем:

$$\begin{aligned} J(A) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_0^A \cos \lambda(t - x_0) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin \lambda(t - x_0)}{t - x_0} \Big|_0^A dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin A(t - x_0)}{t - x_0} dt = [t - x_0 = z] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z + x_0) \frac{\sin Az}{z} dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{z \to -z} + \int_0^{+\infty} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (f(x_0 - z) + f(x_0 + z)) \frac{\sin Az}{z} dz \end{aligned}$$

Лемма 3.2. *(аналог леммы Римана)*

Пусть $g(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, +\infty)$. Тогда

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^{+\infty} g(z) \sin Az dz = 0$$

Предположим, что $f(x)$ является непрерывной в x_0 или терпит там разрыв первого рода.

$$S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

(среднее арифметическое предела справа и предела слева)

$\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0$

Теорема 3.17. *(Дини)*

$f(x)$ — определена и абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$

$x_0 \in (-\infty, +\infty)$

$f(x)$ непрерывна в x_0 или терпит разрыв первого рода. Тогда $\exists h > 0 :$ $\frac{\varphi(t)}{t}$ — абсолютно интегрируема на $[0, h] \Rightarrow$ интеграл Фурье сходится в точке x_0 к S_0.

Теорема 3.18. *(Дирихле-Жордана)*

$f(x)$ — определена и абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$

$x_0 \in (-\infty, +\infty)$

$f(x)$ непрерывна в x_0 или терпит разрыв первого рода. Тогда $\exists h > 0 :$ $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[x_0 - h, x_0 + h] \Rightarrow$ интеграл Фурье в точке x_0 сходится к S_0.

3.6 Комплексная форма интеграла Фурье

Интеграл Фурье можно записать в комплексной форме.

Обозначим $G_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt$, $G_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)dt$

Функция G_1 является четной, а G_2 — нечетной.

Распишем интеграл Фурье:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} G_1(\lambda)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\lambda)d\lambda - i\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\lambda)d\lambda}_{=0(\text{т.к. нечетная})} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt \qquad (***)$$

Формулу $(***)$ можно представить как суперпозицию двух формул:

Обозначим

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

Отсюда получим

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

$g(\lambda)$ — прямое преобразование Фурье.

$f(x)$ — обратное преобразования Фурье.

$g(\lambda)$ — образ $f(x)$

$f(x)$ — прообраз $g(x)$.

На этом мы закончили, всем удачи на экзамене.