

Лекции по математическому анализу.

CONTENTS

История математического анализа	1
1. Множества и действия над ними. Точные грани числовых множеств.	1
1.1. Алгебра высказываний	1
1.2. Аксиомы множеств	2
2. Понятие отображения, образ и прообраз множества при отображении, суперпозиция отображений, сужение отображения, график отображения. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Обратное отображение.	2
2.1. Аксиомы Пеано	3
2.2. Точные грани числовых множеств.	5
2.3. Иррациональные числа	6
2.4. Показательная функция	7
2.5. Логарифмы.	7
2.6. Свойства полноты множества действительных чисел	7
3. Счетные и не счетные множества	8

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Definition. Математический анализ-область науки, где изучается переменная величина своеобразными методами исследования (анализом посредством б.м. или посредством предельных переходов.

Предшественниками были: метод исчерпывания и метод неделимого.

Definition. Метод исчерпывания - античный метод для исследования площадей или объёмов тела. Для нахождения некоторой фигуры вписывалась монотонная последовательность других фигур и доказывалось, что их площадь неограничено приближается к площади искомой фигуры. Затем вычислялся предел и выдвигалась гипотеза, что этот предмет равен R , доказывалось, что обратное приводит к противоречию.

Definition. Метод неделимого - совокупность предметов для вычисления площадей геометрических тел. Идея метода для плоских фигур: разделить их на фигуры нулевой ширины, потом собирать без изменения длины, площадь которых известна.

1. Множества и действия над ними. Точные грани числовых множеств.

1.1. Алгебра высказываний.

(1) $p \wedge q$ -конъюнкция (логическое произведение)

- (2) $p \vee q$ - дизъюнкция (логическое или)
- (3) $p \rightarrow q$ - импликация с посылкой p (если..., то...)
- (4) $p \equiv q$ - эквиваленция (тогда и только тогда)
- (5) \bar{q} - отрицание
- (6) V - произвольное истинное
- (7) F - произвольное ложное
- (8) \exists - квантер существования
- (9) \forall - квантор всеобщности

p, q, r - произвольные высказывания

Definition. Множество - совокупность неупорядоченных неповторяющихся объектов

1.2. Аксиомы множеств.

- (1) Аксиома объемности - если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то они совпадают. $A=B$
- (2) Аксиома суммы - для произвольных множеств A и B существует множество, элементами которого являются элементы множества A и все элементы множества B . $A \cup B$
- (3) Аксиома разности - для произвольного множества A и B существует множество, элементами которого являются те и только те элементы множества A , которые не являются элементами множества B . $A \setminus B$
- (4) Существует по крайней мере одно множество
 - (a) Произведение - $A \cap B$ множеств A и B - это общая часть сомножителей:
 $\forall x \in A \cap B \equiv (x \in A)(x \in B)$
 - (b) Симметричная разность - разность двух множеств A и B определяется как : $A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Definition. Включение - множества A называется подмножеством B , если каждый элемент множества A принадлежит множеству B . $A \subset B$

Definition. $C_M A$ - дополненное множества A в M . $C_M A = M \setminus A$

2. ПОНЯТИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, ОБРАЗ И ПРООБРАЗ МНОЖЕСТВА ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ, СУПЕРПОЗИЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ, СУЖЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, ГРАФИК ОТОБРАЖЕНИЯ. СЮРЪЕКТИВНЫЕ, ИНЪЕКТИВНЫЕ И БИЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ОБРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ.

Definition. Прямое (декартовое) произведение множеств X и Y называется множеством всех упорядоченных пар (x, y) : $x \in X, y \in Y, X \times Y \neq Y \times X$

Definition. Отображение - правило f , по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие определенный, и при этом единственный, элемент $y \in Y$. (отображение множества X в множества Y). X - область значения. Y - область определения.

Definition. Отображение $f : N \rightarrow Y$ множества N в произвольное множество Y будем называть последовательностью (в Y). Числовой последовательностью же мы будем называть : $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Definition. График функции - $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$

Definition. Образ множества A при отображение f называется множеством $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$

Definition. Прообраз множества B при отображение $f : X \rightarrow Y$ ($B \subset Y$) называется множеством $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

Definition. Транзитивность - $f : X \rightarrow Y$ $g : Y \rightarrow Z \Rightarrow h : X \rightarrow Z$ $h(x) = g(f(x)) \forall x \in X$, где $g(f(x))$ -суперпозиция отображения.

Definition. $f \circ g$ - суперпозиция $f : X \rightarrow Y$ $g : Y \rightarrow Z \Rightarrow h : X \rightarrow Z$

Claim. $g \circ (f \circ g) = (h \circ g) \circ f \forall x \in X$

Proof. $[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = [(h \circ g) \circ f](x)$ \square

Definition. $f : X \rightarrow Y$ отображение f от X в Y называется

- сюръективным или отображением “на” $f(X) = Y$
- инъективным или взаимно однозначным отображением “в” $\forall x_1, x_2 \in X$
 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
- биективным или взаимно однозначным отображением “на” (одновременно и сюръективно и инъективно)

Пусть наше отображение биективно \Rightarrow можно установить новое отображение:

$$g : Y \rightarrow X \quad (y \in Y, g(y) = x \in X) \quad (g(y) = x) \Leftrightarrow (f(x) = y) \quad g = f^{-1}$$

(1) обратное отображение биективно

(2) Имеет место равенства:

$$(a) \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X$$

$$(b) \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y$$

$$(3) \quad f^{-1} : Y \rightarrow X, \quad f : X \rightarrow Y \Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f$$

//дописать

Example. Отображение. Инъективное не сюръективное. //вставить картинку.

Example. Отображение. Не инъективное, сюръективное.

Example. Отображение. Инъективное, сюръективное \Rightarrow биективное

2.1. Аксиомы Пеано.

- (1) l - натуральное число
- (2) Для каждого натурального числа n есть однозначно определенное следующее число $\rho(n)$
- (3) Не существует такого натурального числа n , для которого $\rho(n) = l$
- (4) Если n_1 и n_2 - различные натуральные числа, то $\rho(n_1) \neq \rho(n_2)$
- (5) (Аксиома индукции) Пусть P - некоторое свойство, которым может обладать натуральное число; таким образом $P(n)$ -верно, если натуральное число n обладает свойством P и ложно в противном случае. Тогда если $P(1)$ истинно и для любого натурального числа n из $P(n) \Rightarrow P(\rho(n)) \Rightarrow P(n)$ выполняется для любого натурального n .

Definition. $P(1)$ - база индукции

$P(n) \rightarrow P(\rho(n))$ - шаг индукции

N -множество натуральных чисел

Z -множество целых чисел

\mathbb{Q} -множество рациональных чисел

\mathbb{R} -множество вещественных чисел

Определение действительных чисел.

- (1) Действительное(вещественные) число a записывается в виде бесконечной десятичной дроби $a = \pm a_0, \dots a_n$, где a_0 -неотрицательное целое число, а каждое $a_n \in N_+$
- (2) Бесконечная десятичная дробь называется периодической и записывается в виде $a = \pm a_0, \dots a_n (\beta_1, \dots \beta_n)$, если после некоторого десятичного разряда группы цифр $(\beta_1, \dots \beta_n)$ бесконечные периодические числа являются рациональными числами $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$
- (3) Переход от записи рационального числа $a = \pm a_0, \dots a_n$ к виду $\frac{p}{q}$ производится по формуле // написать формулу
- (4) Число $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ -абсолютная величина(модуль) числа

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha = 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$$
- (5) Бесконечная десятичная дробь называется допустимой, если она не содержит периода, состоит только из цифр 9. Любое действительное число может быть записано в виде допустимой бесконечной дроби.

Свойства действительных чисел:

- (1) Операции сложения $\forall a, b$ существует сумма $a + b$:
 - (a) Для любой пары чисел a, b $a + b = b + a$ (коммутативность)
 - (b) $\forall a, b, c$ $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность)
 - (c) $\forall a$ $a + 0 = a$ (существует нейтральный элемент)
 - (d) $\forall a$ $\exists (-a)$: $a + (-a) = 0$ (существует противоположный элемент)
- (2) Операция умножения $\forall a, b$ определяет и при том однозначным образом число, называемые их произведением $a * b$
 - (a) $a * b = b * a$
 - (b) $a * (b * c) = (a * b) * c$
 - (c) $a * 1 = a$
 - (d) $a \neq 0 \exists \frac{1}{a}, a^{-1}$: $a^{-1} * a = 1$
- (3) Связь операций сложения и умножения $\forall a, b, c$ $(a + b) * c = ac + bc$ (дистрибутивность)
- (4) Упорядоченность $a > 0, a = 0, a < 0$
 - (a) $a + b > 0$, если $a > 0 \wedge b > 0$
 - (b) $a * b > 0$, если $a > 0 \wedge b > 0$

Сравнение действительных чисел.

- (1) Сравнение неотрицательных чисел $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ $\beta = \beta_1, \dots, \beta_n$ $\beta_n = \alpha_n \forall n = 0, 1, \dots$
 Если неотрицательное действительное число записать в виде допустимой бесконечной дроби, то говорят, что $\alpha < \beta$, если $\alpha_0 \leq \beta_0$ и существует такое номер n , что $\alpha_n = \beta_n \forall n = 0, 1, \dots, n-1$, а $\alpha_n < \beta_n$
- (2) Сравнение произвольных действительных чисел. Если a -неотрицательное, b -отрицательное $\Rightarrow a > b$. Если $a \leq 0 \wedge b \leq 0 \Rightarrow |a| = |b|$
- (3) Неравенство содержащие знак модуля.
 $|a + b| \leq |a| + |b|$, $|a + b| \geq |a| - |b|$ (неравенство треугольника)

Действительные числа обладают свойством непрерывности.

Definition. Нетривиальное множество элементов, обладающих выше перечисленными свойствами, называют множеством действительных чисел.

Definition. Расширенная числовая прямая-дополним множество элементов следующими символами: $+\infty, -\infty$. Обозначим \bar{R}

Definition. $\forall a, b \in R, a \leq b$ можно соотнести множество:

- (1) $[a, b] \triangleq \{x \in R | a \leq x \leq b\}$ -отрезок или сегмент
- (2) $(a, b) \triangleq \{x \in R | a < x < b\}$ -интервал
- (3) $[a, b) \triangleq \{x \in R | a \leq x < b\}$ -полуинтервал

2.2. Точные грани числовых множеств.

Conjecture. Множество $E \subset R$ называется

- ограниченным сверху, если существует такое число $M \in R$, что $x \leq M \forall x \in E$
- ограниченным снизу, если существует такое число $m \in R$, что $m \leq x \forall x \in E$
- ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу.

Lemma. Для того чтобы множеству $E \subset R$ было ограничено необходимо и достаточно, чтобы $\exists C \in R$, что $|x| \leq C \forall x \in E$

Proof. Необходимость \Rightarrow Пусть множество $E \subset R \Rightarrow m \in R, M \in R \Rightarrow m \leq x \leq M, \forall x \in E \Rightarrow -C \leq x \leq C \forall x \in E, C = \max\{|m|, |M|\} \Rightarrow C \geq |m| \geq -m \Rightarrow -C \leq m, M \leq |M| \leq C$ По свойству абсолютной величины $x \leq C \forall x \in E$ (4) \square

Proof. Достаточность. $\Leftarrow \exists C \in R$ Если выполняется условие $-c \leq x \leq c$, то $M \leq |M| \leq C \Rightarrow$ множество ограничено. \square

Definition. Если множество $E \subset R$ ограничено сверху, то всякое такое число $M \in R$, что $x \leq M \forall x \in E$, будем называть верхней гранью этого множества. Аналогично, если множество $E \subset R$ ограничено снизу, то всякое такое число $m \in R$, что $M \leq x \forall x \in E$ будем называть нижней гранью этого множества.

Definition. Наименьшая из верхних граней множества $E \subset R$ называется точной верхней гранью $\sup E$ -supremum этого множества, а наибольшая из его нижних граней называется точной нижней $\inf E$ -infimum.

Remark. С учетом определения 2 и 3 определение точной верхней грани в развернутой форме можно сформулировать так: Число $C \in R$ называется точной нижней гранью множества, если

- (1) $x \leq C \forall x \in E$
- (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in E : C - \varepsilon < x$ (никакое число меньше C верхних граней множества E никакой верхней гранью не является)

Remark. С учетом определений точной нижней грани в развернутой форме можно сформулировать так: Число $C \in R$ называется точной верхней гранью множества, если

- (1) $x \leq C \forall x \in E$

(2) $\forall \varepsilon > 0$ Никакое число меньше C верхней гранью множества E не является

(3) $\exists x_\varepsilon \in E : C - \varepsilon < x_\varepsilon$

Remark. Число $C \in R$ называется точной верхней гранью множества, если

(1) $C \leq x \forall x \in E$

(2) $\forall \varepsilon > 0$ Никакое число большей C нижней гранью множества E не является

(3) $\exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon < C + \varepsilon$

Definition. Не всякое числовое множество имеет наибольшей или наименьший элемент.

Наибольший элемент($\max E$) множества $E \subset R$ $M(M \in E) x \leq M \forall x \in E$

Наименьший элемент($\min E$) множества $E \subset R$ $m(m \in E) x \geq m \forall x \in E$

Definition. Всякое непустое, ограниченное сверху числовое множество имеет точную верхнюю грань, а всякое непустое, ограниченное снизу числовое множество имеет точную нижнюю грань.

Proof. (1) Пусть множество $E \subset R$ не пусто, тогда оно обязано иметь хотя бы одну грань. \Rightarrow множество всех верхних граней не пусто(F). $x \leq y \forall x \in E \forall y \in F$. По аксиоме непрерывности $\Rightarrow \exists c \in R x \leq c \leq y \forall x \in E \forall y \in F \Rightarrow$ с-верхняя грань $E \Rightarrow c$ наименьшее из всех граней $\Rightarrow c = \sup E$ (точная верхняя грань) \square

Если неограничено сверху $\sup E = +\infty$, неограничено снизу $\inf E = -\infty$

Theorem. Принцип Архимеда -каково бы ни было действительное число a , \exists такое натуральное число n , что $n > a$: $\forall a \in R \exists n \in N n > a$

Proof. (от противного) Допустим, что принцип Архимеда не выполняется. $\exists a \in R, \forall n \in N n \leq a \Rightarrow$ число a ограничивает сверху множество натуральных чисел. Множество натуральных чисел как всякое непустое ограниченное непустое множество имеет конечную верхнюю грань. $\beta = \sup N \beta - 1 < \beta \Rightarrow$ Согласно свойству верхних граней $\exists n > \beta - 1 \Rightarrow n + 1 > \beta n + 1 \in N \square$

Следствие. Каковы бы ни были числа a и b : $0 < a < b$ существует такое натуральное число n , что $na > b$

Example. $\frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ найдём $\sup X$ найдём $\inf X$. Возьмем $c > 0 \Rightarrow \exists n : \frac{1}{n} < c \forall c$ уже не ограничивает $X \Rightarrow \inf \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 0 \frac{1}{n} \in (0, 1]$

2.3. Иррациональные числа.

Definition. Иррациональные числа. (Дедекиндр). Рассмотрим разбиения множества всех рациональных чисел на два не пустых подмножества A и \acute{A} назовём такое разбиение сечением если выполняются 2 условия:

(1) каждое рациональное число попадает в одно из множества A или \acute{A}

(2) каждое число a множества A меньше каждого числа \acute{a} множества \acute{A}

A : A -нижний класс сечения

\acute{A} -верхний класс сечения

Definition. Три вида сечения

- (1) в нижнем классе нет наибольшего числа, а в верхнем классе есть наименьшее число
- (2) в нижнем классе имеется наибольшее число, а в верхнем классе нет наибольшего
- (3) ни в нижнем классе нет наибольшего числа, ни в верхнем классе - наименьшего

в первых двух случаях говорят что сечение приводится рациональным числом r которое является пограничным между множеством A и \dot{A} . r - определяет сечение.

Definition. Всякое сечение вида 3 определяет некоторое иррациональное число a .

Definition. Иррациональное число - вещественное число, которое не является рациональным Q . Иррациональные числа можно представить в виде бесконечной не периодической дроби.

2.4. Показательная функция. $a^r, a > 0, r \in Q$

- (1) $r_1 < r_2, a > 1, a^{r_1} < a^{r_2}$, если $a < 1, a^{r_1} > a^{r_2}$
- (2) $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$
- (3) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$
- (4) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

Определим теперь степень α^β для любого действительного β и $\alpha > 0, \alpha \neq 1, \beta \in Q$. $b < \beta < \dot{b}, \alpha^b < \alpha^\beta < \alpha^{\dot{b}}$ называется некоторое число $\gamma: \alpha^b < \gamma < \alpha^{\dot{b}}$ ограниченное сверху: $\alpha^{\dot{\beta}} \gamma = \sup_{b < \beta} \{\alpha^b\}$ $\alpha^\beta < \gamma < \alpha^{\dot{\beta}}$

2.5. Логарифмы. Задача: установить существование логарифма любого вещественного числа $\gamma \in N, \alpha > 1$. Если $\exists r, \alpha^r = \gamma$, то r -искомый логарифм

Proof. Предположим что нет r . Тогда проведем сечение по следующему правилу B/\dot{B} . В классе B заменим все $b: \alpha^b < \gamma$, а в классе \dot{B} все $\dot{b}: \alpha^{\dot{b}} > \gamma$. Эти члены B и \dot{B} не пустые. В силу неравенства Бернулли.

$$\alpha^n > 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1), n > \frac{\gamma}{(\alpha - 1)}, \alpha^n > \gamma \Rightarrow n \in \dot{B}$$

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} < \frac{1}{n(\alpha - 1)}, n > \frac{1}{\gamma(\alpha - 1)}, \alpha^{-n} < \gamma \Rightarrow -n \in B$$

Таким образом построенное сечение определяет число вещественное которое является пограничным между этими классами.

По определению степени $\alpha^b < \alpha^\beta < \alpha^{\dot{b}}$ причем α^β -единственное удовлетворяющее всех подобным неравенствам. Для самого числа $b < \beta < \dot{b}, \alpha^b < \gamma < \alpha^{\dot{b}} \Rightarrow \alpha^\beta = \gamma, \beta = \log_\alpha \gamma$ \square

2.6. Свойства полноты множества действительных чисел. Принцип вложенных отрезков. (принцип Коши-Кантора)

Conjecture. Система числовых отрезков

$[a_1, b_1], [a_2, b_1], \dots, [a_n, b_n], \dots, a_n \in R, b \in R, n = 1, 2, \dots$ называется системой вложенных отрезков, если

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

т.е. если каждый следующий отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]: [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \dots \subset [a_1, b_1]$

Theorem. (Теорема Кантора). Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы.

Proof. // рисунок

A -множество всех концов a_n B -множество всех правых концов b_n . $\forall m, n : a_m \leq b_n \Rightarrow \exists \xi a_m < \xi < b_n \Rightarrow \xi \in [a_n, b_m]$ \square

Definition. Пусть задана система отрезков $[a_n, b_n], a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что длина $b_n - a_n$ отрезков этой системы стремится к нулю, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такое номер n_ε , что для всех номеров выполняется неравенство $b_n - a_n < \varepsilon \forall n, m$.

Theorem. (Теорема Кантора 2). Для всякой системы, вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы, причем для всякой системы, вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, $\exists!$ точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы, причем

$$\xi = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{b_n\}$$

Proof. Пусть длина отрезков стремится к нулю. Покажем, что существует только одна точка принадлежащая всем отрезкам.

(от противного). Пусть имеется две точки $\xi, \xi' \in [a_n, b_n]$. Тогда $\forall n \left| \xi - \xi' \right| < |b_n - a_n|$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2} \left| \xi - \xi' \right|$. Тогда $\left| \xi - \xi' \right| < \frac{1}{2} \left| \xi - \xi' \right|$!!! \square

3. СЧЕТНЫЕ И НЕ СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Definition. Множество X и Y называются эквивалентными или равномошными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие (биекция). $X \sim Y$

Свойства

- (1) (рефлексивность) $X \sim X$ для любого множества X
- (2) (симметричность) $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$
- (3) (транзитивность) $X \sim Y$ и $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

Definition. Множество X называется конечным если существует такое натуральное n , что $X \sim [1, n]$. В противном случае оно называется бесконечным.

Definition. Множество X называется счётным, если $X \sim \mathbb{N}$

Theorem. Всякое бесконечное множество содержит счётные подмножества.

Proof. Возьмём множество A и выберем элемент $a_1 : A_1 = A \setminus \{a_1\}$. Так же $a_2 : A_2 = A \setminus \{a_1, a_2\}$. Такие элементы не повторяются $\Rightarrow B = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ является счётным подмножеством множества A \square

Theorem. Всякое бесконечное подмножество счётного множества счётно.

Proof. Пусть X -счётное множество, введём бесконечное подмножество Y .

$X = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ Возьмём элемент n_1 -наименьший из тех $N : x_n \in Y$

Выбираем $n_2 : n_2 > n_1, x_{n_2} \in Y$ Пронумеруем Y $Y = \{x_{n_k} | k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow Y$ -счётное множество. \square

Следствие: Всякое подмножество не более чем счётного множества не более чем счётно.

Theorem. Объединение счётного числа и счётного множества счётно

Proof. $A_n, n \in \mathbb{N}$ - счётные множества

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots\} \quad n \in \mathbb{N}$$

//рисунок

□

Theorem. Множество всех рациональных чисел счётно.

Proof. Рассмотрим множество: $A_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$ $A_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots\}$ $A_3 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots\}$

Этой матрицей //дописать

□

Theorem. Множество всех вещественных чисел несчётно

Proof. Достаточно доказать, что несчётно множество всех вещественных чисел несчётно. Будем считать, что множество всех

бесконечных дробей можно пересчитать.

т.е x_1, x_2, \dots (1) $x_1 = a_0^1, a_1^1, a_2^1, \dots$ $x_2 = a_0^2, a_1^2, a_2^2, \dots$

Докажем, что существует $x = b_0, b_1, b_2, \dots$ (2), которое не содержится в последовательности (1), где b_0 -произвольное целое положительное число, остальные цифры b_n ($1 \leq b_n \leq 8$), $b_n \neq a_n \forall n$

По построению дробь 2 не содержится в плоскости 1. Это противоречит тому, что плоскость 1 содержит все бесконечные положительные дроби. □

Definition. Мощность множества -это то общее, что есть у всех эквивалентных между собой подмножеств.

Мощность множества-класс эквивалентных ему множеств.

$Card X$ -мощность $Card$ -кардинальное число

Алеф нуль -кардинальное число, являющееся мощностью счётного множества (не описуемая буква)

$Card X > Card Y$ -множество X больше Y

Theorem. (Теорема Кантора-Берштейна)

Пусть A и B -произвольные множества. Если $\exists A_1 \subset A : A_1 \sim B$, а $\exists B_1 \subset B : B_1 \sim A \Rightarrow A \sim B$