Лекции по математическому анализу.

Contents

История математического анализа

Definition. Математический анализ-область науки, где изучается переменная величина своеобразными методами иследования (анализом посредствам б.м. или посредствам предельных переходов.

Предшествинеками были: метод исчерпования и метод неделимового.

Definition. Метод исчерпования - античныйметоддля исследования площадей или объёмов тела. Для нахождения некоторой фигуры вписывалась монотоная последовательность других фигур и доказывалось, что их площадь неограничено приближается к площади искомой фигуры. Затем вычислялся предел и выдвагалась гипотиза , что этот предмет равен R , доказывалось, что обратное приводит к противоречию.

Definition. Метод неделимового -совокупность предметов для вычесления площадей геометрических тел. Идея метода для плоских фигур: разделить их на фигуры нулевой ширины, потом собирать без изменения длины , площадь которых известна.

1. Множества и действия над ними. Точные грани числовых множеств.

1.1. Алгебра высказываний.

(1) $p \wedge q$–конъюкция (логическое произведение)
(2) $p \vee q$ -дизъюнкция (логическое или)
(3) $p \to q$-импликация с посылкой p (если..., то...)
(4) $p \equiv q$-эквиваленция (тогда и только тогда)
(5) $\overline{q}$-отрицание
(6) V - произвольное истиное
(7) F - произвольное ложное
(8) $\exists$ - квантер существования
(9) $\forall$-квантор всеобщности

p,q,r - произвольные высказывания

Definition. Множество -совокупность неупорядоченных неповторяющихся объектов

1.2. Аксиомы множеств.

(1) Аксиома объемности -если множества А и В состоят из одних и тех же элементов, то они совпадают. А=В
(2) Аксиома суммы - для произвольных множеств А и В существует множество, элементы которого являются элементами множества А и все элементы множества В. $A \cup B$
(3) Аксиома разности -для произвольного множества А и В существует множество, элементами кторого являются те и только те элементы множества А, которые не являются элементами множеста В. $A \setminus B$
(4) Существет по крайней мере одно множество
  (a) Произведение -$A \cap B$ множеств А и В -это общая часть сомножетелей: $\forall x \in A \cap B \equiv (x \in A)(x \in B)$
  (b) Симметричная разность -разность двух множеств А и В определяется как : $A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (A \setminus B)$

Definition. Включение -множесвто А называется подмножеством В, если каждый элемент множества В принадлежит множеству А. $A \subset B : A = B, B = A$

Definition. $\mathrm{C}_M A$-дополненое множества А в М. C_m=$A \setminus B$

Definition. Прямое(декартовое) произведение множеств X и Y называется множество всех упорядочных пар(x,y): $x \in X$, $x \in Y$, $X \times Y \neq Y \times X$

Definition. Отображение -правило f, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответсвие определеный, и при этом единственный, элемент $y \in Y$.(отображение множества X в множества Y). X- область значения. Y-область определения.

Definition. Отображение $f : N \to Y$ множества N в произвеольное множество Y будем называть последовательностью (в Y) .Числовой последовательностью же мы будем называть : $\{x_n\}_{i=1}^{\infty}$

Definition. График функции - $\mathit{\Gamma}_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$

Definition. Образ множества А при отображение f называется множество $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$

Definition. Прообраз множества В при отображение $f : X \to Y$ $(B \subset Y)$ называется множество $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

Definition. Транзитивность - $f : X \to Y$ $g : Y \to Z \Rightarrow h : X \to Z$ $h(x) = g(f(x)) \forall x \in X$, где $g(f(x))$-суперпозиция отображения.

Definition. $f \circ g$ - суперпозиция $f : X \to Y$ $g : Y \to Z \Rightarrow h : X \to Z$

Claim. $g \circ (f \circ g) = (h \circ g) \circ f \ \forall x \in X$

Proof. $[h \circ (g \circ f)] = h\left((g \circ f)(x)\right) = h\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right) = (h \circ g)\left(f\left(x\right)\right) = \left[(h \circ g) \circ f\right](x)$ □

Definition. $f : X \to Y$ отображение f от X в Y называется

- сюръективным или отображением "на" $f(X) = Y$
- инъективным или взаимно однозначным отображение "в" $\forall x_1, x_2 \in X$ $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$, $x_1 = x_2$ $f(x_1) = f(x_2)$

- биективным или взаимно однозначным отображением “на” (одновременно и сюръективно и инъективно

Путь наше отображение биективно $\Rightarrow$можно установить новое отображение:
$g : Y \to X$ $(y \in Y, g(x) = x \in X)$ $(g(y) = x) \Leftrightarrow (f(x) = y)$ $g = f^{-1}$

(1) обратное отображение биективно
(2) Имеет место равенства:
  (a) $f^{-1}(f(x)) = x \ \forall x$