Конспекты по математическому анализу. Карелин Владимир Витальевич.

Abstract. Напечатаны Щербаковым Глебом.

Contents

История математического анализа

Definition. Математический анализ — область науки, где изучается переменная величина своеобразными методами иследования (анализом посредством б.м. или посредством предельных переходов).

Предшествинеками были: метод исчерпывания и метод неделимого.

Definition. Метод исчерпывания — античный метод для исследования площадей или объёмов тела. Для нахождения некоторой фигуры вписывалась монотоная последовательность других фигур и доказывалось, что их площадь неограничено приближается к площади искомой фигуры. Затем вычислялся предел и выдвагалась гипотиза , что этот предмет равен R , доказывалось, что обратное приводит к противоречию.

Definition. Метод неделимового — совокупность предметов для вычисления площадей геометрических тел. Идея метода для плоских фигур: разделить их на фигуры нулевой ширины, потом собирать без изменения длины , площадь которых известна.

1. Множества и действия над ними. Точные грани числовых множеств.

1.1. Алгебра высказываний.

(1) $p \wedge q$ — конъюкция (логическое произведение)
(2) $p \vee q$ — дизъюнкция (логическое или)
(3) $p \to q$ — импликация с посылкой p (если..., то...)
(4) $p \equiv q$ — эквиваленция (тогда и только тогда)
(5) $\overline{q}$ — отрицание
(6) V — произвольное истиное
(7) F — произвольное ложное
(8) $\exists$ — квантор существования
(9) $\forall$ — квантор всеобщности

p, q, r — произвольные высказывания.

Definition. Множество — совокупность неупорядоченных неповторяющихся объектов .

1.2. Аксиомы множеств.

(1) Аксиома объемности: если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то они совпадают: $A = B$.
(2) Аксиома суммы: для произвольных множеств A и B существует множество, элементы которого являются элементами множества A и все элементы множества B. $A \cup B$
(3) Аксиома разности: для произвольного множества A и B существует множество, элементами которого являются те и только те элементы множества A, которые не являются элементами множеста B. $A \setminus B$
(4) Существет по крайней мере одно множество
   (a) Произведение: $A \cap B$ множеств A и B — общая часть сомножетелей: $\forall x \in A \cap B \equiv (x \in A)(x \in B)$
   (b) Симметричная разность: разность двух множеств A и B определяется как : $A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Definition. Включение множества A называется подмножеством B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B. $A \subset B$

Definition. $\mathrm{C}_M A$ — дополненое множества A в M. $C_m = A \backslash B$.

2. Понятие отображения, образ и прообраз множества при отображении, суперпозиция отображений, сужение отображения, график отображения. Сюрьективные, инъективные и биективные отображения. Обратное отображение.

Definition. Прямым (декартовым) произведением множеств X и Y называется множество всех упорядочных пар $\{(x, y) :\ x \in X, y \in Y\}$, при этом $X \times Y \neq Y \times X$

Definition. Отображение — правило f, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответсвие определеный, и при этом единственный, элемент $y \in Y$.(отображение множества X в множество Y). Здесь X называется областью определения, а Y — областью значения.

Definition. Отображение $f : N \to Y$ множества N в произвольное множество Y будем называть последовательностью (в Y).Числовой последовательностью же мы будем называть : $\{x_n\}_{i=1}^{\infty}$

Definition. График функции — $\mathit{\Gamma}_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$

Definition. Образом множества A при отображении f называется множество $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$

Definition. Прообразом множества B при отображении $f : X \to Y$ $(B \subset Y)$ называется множество $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

Definition. Транзитивность — $f : X \to Y$ $g : Y \to Z \Rightarrow h : X \to Z$ $h(x) = g(f(x)) \forall x \in X$, где $g(f(x))$ --- суперпозиция отображения.

Definition. $f \circ g$ — суперпозиция $f : X \to Y$ $g : Y \to Z \Rightarrow h : X \to Z$

Claim. $g \circ (f \circ g) = (h \circ g) \circ f$ $\forall x \in X$

Proof. $[h \circ (g \circ f)] = h\left((g \circ f)(x)\right) = h\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right) = (h \circ g)\left(f\left(x\right)\right) = [(h \circ g) \circ f](x)$ □

Definition. $f : X \to Y$ отображение f от X в Y называется:
TODO: переформулировать это.

- сюръективным или отображением "на" $f(X) = Y$
- инъективным или взаимно однозначным отображением "в" $\forall x_1, x_2 \in X$ $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$, $x_1 = x_2$ $f(x_1) = f(x_2)$
- биективным или взаимно однозначным отображением "на" (одновременно и сюръективно и инъективно)

Путь наше отображение биективно $\Rightarrow$ можно установить новое отображение:
$g : Y \to X$ $(y \in Y, g(x) = x \in X)$ $(g(y) = x) \Leftrightarrow (f(x) = y)$ $g = f^{-1}$

(1) обратное отображение биективно
(2) Имеют место равенства:
    (a) $f^{-1}\left(f\left(x\right)\right) = x$ $\forall x \in X$
    (b) $f\left(f^{-1}\left(y\right)\right) = y \, \forall x \in Y$
(3) $f^{-1} : Y \to X$, $f : X \to Y \Rightarrow \left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

//дописать

Example. Отображение. Инъективное, не сюръективное.//вставить картинку.

Example. Отображение. Не инъективное, сюръективное.

Example. Отображение. Инъективное, сюръективное $\Rightarrow$ биективное

2.1. **Аксиомы Пеано.**

(1) l — натуральное число
(2) Для каждого натурального числа n есть однозначно определенное следующее число $\rho(n)$
(3) Не существует такого натурального числа n , для которого $\rho(n) = l$

(4) Если n_1 и n_2 — различные натуральные числа, то то $\rho(n_1) \neq \rho(n_2)$

(5) (Аксиома индукции)Пусть P --- некоторое свойство, которым может обладать натуральное число; таким образом P(n) --- верно, если натуральное число n обладает свойством P и ложно в противном случае.Тогда если $P\left(1\right)$ истино и для любого натурального числа из $P\left(n\right) \Rightarrow P\left(\rho\left(n\right)\right) \Rightarrow P(n)$ выполняется для любого натурального n.

Definition. $P(1)$ — база индукции

$P\left(n\right) \rightarrow P\left(S\left(n\right)\right)$ — шаг индукции

N — множество натуральных чисел

Z — множество целых чисел

Q — множество рациональных чисел

R — множество вещественных чисел

Определение действительных чисел.

(1) Действительное (вещественное) число a записывается в виде бесконечной десятичной дроби $a = \pm a_0, ...a_n$, где a_0 --- неотрицательное целое число , а каждое $a_n \in N_+$

(2) Бесконечная десятичная дробь называется периодической и записывается в виде $a = \pm a_0, ...a_n\left(\beta_1, ..\beta_n\right)$, если после некоторого десятичного разряда группе цифр $\left(\beta_1, ..\beta_n\right)$ Бесконечные переодические числа являются рациональными числами $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$. TODO: переформулировать это.

(3) Переход от записи рационального числа $a = \pm a_0, ...a_n$ к виду $\frac{p}{q}$ производится по формуле // написать формулу

(4) Число $\alpha_0, ..., \alpha_n$ — абсолютная величина(модуль) числа

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha = 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$$

(5) Бесконечная десятичная дробь называется допустимой, если она не содержит периода, состоит только из цифр 9. Любое действиетельное число может быть записано в виде допустимой бесконечной дроби.

Свойства действительных чисел:

(1) Операции сложения $\forall a, b$ существет сумма $a + b$:
  - (a) Для любой пары чисел a, b верно $a + b = b + a$ (коммутативность)
  - (b) $\forall a, b, c$ верно $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность)
  - (c) $\forall a$ верно $a + 0 = a$ (существует нейтральный элемент)
  - (d) $\forall a\ \exists(-a)$: $a + (-a) = 0$ (существует противоположный элемент)

(2) Операция умножения $\forall a, b$ определяет и при том однозначным образом число, называющиеся их призведение $a * b$
  - (a) $a * b = b * a$
  - (b) $a * (b * c) = (a * b * c)$
  - (c) $a * 1 = a$
  - (d) $a \neq 0\ \exists \frac{1}{a}, a^{-1} : a^{-1} * a = 1$

(3) Связь операций сложения и умножения $\forall a, b, c\ (a + b) * c = ac + bc$ (дистрибутивность)

(4) Упорядоченность $a > 0, a = 0, a > 0$
  - (a) $a + b > 0$, если $a > 0$ ^ $b > 0$
  - (b) $a * b > 0$, если $a > 0$ ^ $b > 0$

Сравнение действительных чисел.

(1) Сравнение неотрицательных чисел $\alpha = \alpha_1, ..., \alpha_n$ $\beta = \beta_1, ..., \beta_n$ $\beta_n = \alpha_n \, \forall n = 0, 1...$
Если неотрицательное действительное число можно записать в виде допустимой бесконечной дроби, то говорят, что $\alpha < \beta$, если $\alpha_0 \leq \beta_0$ и существует такое номер n, что $\alpha_n = \beta_n \, \forall n = 0, 1, ..., n-1$, а $\alpha_n < \beta_n$
(2) Сравнение произвольных действительных чисел. Если a— неотрицательное,b — отрицательное $\Rightarrow a > b$. Если $a \leq 0 \,\hat{}\, b \leq 0 \Rightarrow |a| = |b|$
(3) Неравенства, содержащие знак модуля.
$|a + b| \leq |a| + |b|$, $|a + b| \geq |a| - |b|$ (неравенство треугольника)

Действительные числа обладают свойством непрерывности.

Definition. Нетривиальное множество элементов, обладающих выше перечислеными свойствами, называют множеством действительных чисел.

Definition. Расширенная числовая прямая — дополним множество элементов следующими символами: $+\infty$, $-\infty$. Обозначим $\overline{R}$

Definition. $\forall a, b \in R, a \leq b$ можно соотнести множество:

(1) $[a, b] \underline{\triangle} \, \{x \in R | a \leq x \leq b\}$ — отрезок или сегмент
(2) $(a, b) \underline{\triangle} \, \{x \in R | a < x < b\}$ — интервал
(3) $[a, b) \underline{\triangle} \, \{x \in R | a \leq x < b\}$ — полуинтервал

2.2. **Точные грани числовых множеств.**

Conjecture. *Множесство $E \subset R$ называется*

- ограниченным сверху, если существует такое число $M \in R$, что $x \leq M$ $\forall x \in E$
- ограниченым снизу, если существует такое число $m \in R$, что $m \leq x$ $\forall x \in E$
- ограниченным, если оно ограниченно сверху и снизу.

Lemma. *Для того чтобы множесво $E \subset R$ было ограничено необходимо и достаточно, чтобы $\exists C \in R$,что $|x| \leq C \; \forall x \in E$*

Proof.
Необходимость. $\Rightarrow$ Пусть множество $E \subset R \Rightarrow m \in R \; M \in R \Rightarrow m \leq x \leq M, \forall x \in E \Rightarrow -C \leq x \leq C \; \forall x \in E \; C = max \{|m|, |M|\} \; C \geq |m| \geq -m \;\; \Rightarrow -C \leq m \; M \leq |M| \leq C$ По свойству абсолютной величины $x \leq C \;\; \forall x \in E(4)$
Достаточность. $\Leftarrow \exists C \in R$ Если выполняется условие $-c \leq x \leq c$, то $M \leq |M| \leq C \Rightarrow$ множество ограниченно. □

Definition. Если множесво $E \subset R$ ограничено сверху, то всякое такое число $M \in R$, что $x \leq M \; \forall x \in E$, будем называть верхней гранью этого множества. Аналогично , если множесво $E \subset R$ ограничено снизу, то всякое такое число $m \in R$, что $M \leq x \; \forall x \in E$ будем называть нижней гранью этого множества.

Definition. Наименьшая из верхних граней множесва $E \subset R$ называется точной верхней гранью $\sup E$ — supremum этого множества, а наибольшая из его нижних граней называется называется точной нижней $\inf E$ — infimum .

Remark. С учетом определиния 2 и 3 определение точной верхней грани в развернутой форме можно сформулировать так: Число $C \in R$ называется точной нижней гранью множества, если

(1) $x \leq E\ \forall x \in E$
(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in E : C - \varepsilon < x$ (никакое число меньше C верхних граний множесва E никакой верхней гранью не является)

Remark. С учетом определиний точной нижней грани в развернутой форме можно сформулировать так: Число $C \in R$ называется точной верхней гранью множества, если

(1) $x \leq C\ \forall x \in E$
(2) $\forall \varepsilon > 0$ Никакое число меньше C верхней гранью множества E не является
(3) $\exists x_\varepsilon \in E : C - \varepsilon < x_\varepsilon$

Remark. Число $C \in R$ называется точной верхней гранью множества , если

(1) $C \leq x\ \forall x \in E$
(2) $\forall \varepsilon > 0$ Никакое число большей C нижней гранью множества E не является
(3) $\exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon < C + \varepsilon$

Definition. Не всякое числовое множество имеет наибольший или наименьший элемент.

Наибольший элемент($\max E$) множества $E \subset R$ $M (M \in E)$ $x \leq M\ \forall x \in E$
Наименьший элемент($\min E$) множества $E \subset R$ $m(m \in E)$ $x \geq M\ \forall x \in E$

Definition. Всякое непустое, ограниченное сверху числовое множесвто имеет точную верхнюю грань, а всякое непустое, ограниченное снизу числое множество имеет точную нижную грань.

Proof. (1) Пусть множество $E \subset R$ не пусто, тогда оно обязанно иметь хотя бы одну грань. $\Rightarrow$ множество всех верхних граней не пусто (F). $x \leq y\ \forall x \in E\ \forall y \in F$. По аксиоме непрерывности $\Rightarrow \exists c \in R\ \ x \leq c \leq y\ \forall x \in E\ \forall y \in F \Rightarrow c$ --- верхняя грань $E \Rightarrow c$ наименьшее из всех граней $\Rightarrow c = \sup E$ (точная верхняя грань) $\square$

Если неограниено сверху $\sup E = +\infty$, неогрнаичену снизу $\inf E = -\infty$

Theorem. *Принцип Архимеда: каково бы ни было действительное число a, $\exists$ такое натуральное число n, что $n > a$: $\forall a \in R\ \exists n \in N\ n > a$*

Proof. (от противного)

Допустим, что принцип Архимеда не выполняется. $\exists a \in R, \forall n \in N\ n \leq a$ $\Rightarrow$ число a ограничивает сверху множество натуральных чисел. Множество натуральных чисел как всякое непустое ограниченное множество имеет конечную верхнюю грань. $\beta = \sup N\ \beta - 1 < \beta \Rightarrow$ Согласно свойству верхних граней $\exists n > \beta - 1 \Rightarrow n + 1 > \beta\ n + 1 \in N$ $\square$

Corollary. *Каковы бы ни были числа a и b: $0 < a < b$ существет такое натуральное число n , что $na > b$*

Example. $\frac{1}{n}, n = 1, 2, ...$ найдём $\sup X$, найдём $\inf X$. Возьмем $c > 0 \Rightarrow \exists n$: $\frac{1}{n} < c\ \forall c$ уже не ограничивает $X \Rightarrow \inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0\ \frac{1}{n} \in (0, 1]$

2.3. **Иррациональные числа.**

Definition. Иррациональные числа. (Дедекинд). Расмотрим разбиения множества всех рациональных чисел на два не пустых подмножества A и $\acute{A}$ назовём такое разбиение сечением, если выполняются 2 условия:

(1) каждое рациональное число попадает в одно из множества A или $\acute{A}$
(2) каждое число a множества A меньше каждого числа $\acute{a}$ множества $\acute{A}$

A : A --- нижний класс сечения
$\acute{A}$ --- верхний класс сечения

Definition. Три вида сечения

(1) в нижнем классе нет наибольшего числа , а в верхнем классе есть наименьшее чило
(2) в нижнем классе имеется наибольшеее число, а в верхнем класее нет наибольшего
(3) ни в нижнем классе нет наибольшего числа, ни в верхнем классе — наименьшего

в первых двух случаях говорят что сечение призводиться рациональным числом r которое являятся пограничным между множеством A и $\acute{A}$. r --- определяет сечение.

Definition. Всякое сечение вида 3 определяет некоторе иррациональное число a.

Definition. Иррациональное число — вещественное число, которе не является рациональным Q. Иррациональные числа можно представить в виде бесконечной не периодической дроби.

2.4. **Показателная функция.** a^r ,$a > 0$ $r \in Q$

(1) $r_1 < r_2$ $a > 1$ $a^{r_1} < a^{r_2}$, если $a < 1$ $a^{r_1}{>}a^{r_2}$
(2) $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$
(3) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1r_2}$
(4) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

Определим теперь степень α^β для любого действительного β и $\alpha > 0$ α^b $b, \acute{b} \in Q$ $b < \beta < b$ $\alpha > 1$ α^β называется некторое число γ: $\alpha^b < \gamma < \alpha^b$ $\{a^b\}$ ограниченное сверху:$\alpha^{\acute{\beta}}$ $\gamma = sup_{b<\beta}\left\{\alpha\right\}^\beta$ $\alpha^\beta < \gamma < \alpha^{\acute{\beta}}$

2.5. **Логарифмы.** Задача: установить существование логарифма любого вещественного числа $\gamma \in N$ $\alpha > 1$. Если $\exists r$ $\alpha^r = \gamma$, то r — искомый логарифм

Proof. Предоложим что нет r .Тогда проведем сечение по следущему правилу $B/\acute{B}$. В классе B заменим все b: $\alpha^b < \gamma$,а в классе $\acute{B}$ все $\acute{b}$: $\alpha^{\acute{b}} > \gamma$. Эти члены B и $\acute{B}$ не пустые. В силу неравенства Бернули.

$\alpha^n > 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1)$, $n > \frac{\gamma}{(\alpha-1)}$, $\alpha^n > \gamma \Rightarrow n \in \acute{B}$

$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} < \frac{1}{n(\alpha-1)}$, $n > \frac{1}{\gamma(\alpha-1)}$, $\alpha^{-n} < \gamma$ $-n \in B$

Таким образом построенное сечение определяет число вещественное которое является пограничным между этими плоскостями.

По определению степени $\alpha^b < \alpha^\beta < \alpha^{\acute{b}}$ причем α^β — единственное удовлетворяющее всех подобным неравенствам. Для самого числа $b < \beta < \acute{b}$ $\alpha^\beta < \gamma < \alpha^\beta$ $\Rightarrow \alpha^\beta = \gamma$ $\beta = log_\alpha\gamma$ □

2.6. **Свойства полноты множества действительных чисел.** Принцип вложенных отрезком.(принцип Коши --- Кантора)

Conjecture. *Система числовых отрезков*

$[a_1, b_1]$,$[a_2, b_1]$,..., $[a_n b_{,n}]$, ...$a_n \in R, b \in R_n, n = 1, 2...$ *называется системой вложенных отрезков, если*

$a_1 \leq a_2 ... \leq a_n \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1$

т.е. если каждый следующий отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$*:* $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset ... \subset [a_1, b_1]$

Theorem. *(Теорема Кантора). Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, которе принадлежит всем отрезкам данной системы.*

Proof. // рисунок

A --- множество всех концов a_n B --- множество всех правых концов b_m. $\forall m, n : a_m \leq b_n$ $\exists \xi$ $a_m < \xi < b_n \Rightarrow \xi \in [a_n, b_m]$ □

Definition. Пусть задана система отрезков $[a_n, b_n]$,$a_n, b_n \in R$. Будем говорить, что длина $b_n - a_m$отрезков этой системы стремится к нулю , если $\forall \varepsilon > 0$ существует такое номер n_ε, что для всех номеров выполняется неравенство $b_n - a_m < \varepsilon$ $\forall n, m$.

Theorem. *(Теорема Кантора 2). Для всякой системы, вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы, причем для всякой системы, вложенных открезков с длинами, стремящимися к нулю,* $\exists!$ *точка, придлежащая всем отрезкам даннной системы, причем*

$\xi = \sup_{n \in N} \{a_n\} = \inf_{n \in N} \{b_n\}$.

Proof. Пусть длина отрезков стремится к нулю. Покажем, что существет только одна точка, приндалежащая всем отрезкам.

(от противного). Пусть имеется две точки ξ,$\acute{\xi} \in [a_n, b_n]$. Тогда $\forall n$ $\left|\xi - \acute{\xi}\right| < |b_n - a_n|$ $b_n - a_n < \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}\left|\acute{\xi} - \xi\right|$ $\left|\acute{\xi} - \xi\right| < \frac{1}{2}\left|\acute{\xi} - \xi\right|$!!! □

3. Счетные и не счетные множества

Definition. Множество X и Y называются эквивалентными или равномощными, если между ними можно установить взаимно --- однозначное соответсвие (биекция).$X \sim Y$

Свойства:

(1) (рефлексивность) $X \sim X$ для любого множества X
(2) (симметричность) $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$
(3) (транзитивность) $X \sim Y$ и $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

Definition. Множество X называется конечным если существует такое натуральное n , что $X \sim [1, n]$. В противном случае оно называется бесконечным.

Definition. Множество X называется счётным, если $X \sim N$

Theorem. *Всякое бесконечное множество содержит счётные подмножества.*

Proof. Возьмём множество A и выбирем элемент $a_1 : A_1 = A \setminus \{a_1\}$. Так же $a_2 : A_2 = A \setminus \{a_1, a_2\}$. Такие элементы не повторяются $\Rightarrow B = \{a_n | n \in N\}$ является счётным подмножеством множества A □

Theorem. *Всякое бесконечное подмножество счётного множества счётно.*

Proof. Пусть X — счетное множество, введём бесконечное подмножество Y.

$X = \{x_n | n \in N\}$ Возьмём элемент n_1 — наименьший из тех N:$x_n \in Y$

Выбираем n_2:$n_2 > n_1$, $x_n \in Y$ Пронумеруем Y $Y = \{x_{n_k} | k \in N\} \Rightarrow Y$ --- счётные множество. □

Следствие: Всякое подмоножество не более чем счётного множества не более чем счётно.

Theorem. *Объединение счётного числа и счётного множества счётно*

Proof. $A_n, n \in N$ --- счётные множество

$$A = \bigcup_{n=1}^{x}$$

$A_n = \{a_{n_1}, a_{n_2}, ...\}$ $n \in N$

//рисунок □

Theorem. *Множество всех рациональных чисел счётно.*

Proof. Рассмотрим множество: $A_1 = \{1, 2, 3...\}$ $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, ...\right\}$ $A_3 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, ...\right\}$

Этой матрицей //дописать □

Theorem. *Множество всех вещественных числе несчётно*

Proof. Достаточно доказать, что несчётные множество всех всщественных чисел несчётно. Будем считать, что множество всех

бесконечных доробей можно пересчитать.

т.е $x_1, x_2, ...$ (1) $x_1 = a^1_0, a^1_1, a^1_2 ...$ $x_2 = a^2_0, a^2_1, a^2_2 ...$

Докажем, что существет $x = b_0, b_1, b_2 ...$ (2), которое не содержится в последовательности (1), где b_0 --- произвольное целове положительное число, остальные цифры b_n $(1 \leq b_n \leq 8)$, $b_n \neq a_n \forall n$

По построению дробь 2 не содержится в плостксоти 1. Это противоречит тому, что плоскость 1 содержит все бесконечные положительные дроби. □

Definition. Мощность множества --- это то общее, что есть у всех эквивалентных между собой подмножеств.

Мощность множества --- класс эививалентных ему множеств.

$CardX$ --- мощность $Card$ --- кардинальное число

Алеф нуль ($\aleph_0$) --- кардинальное число, являющееся мощностью счётного множества (не описуемая буква)

$CardX > CardY$ --- множество X больше Y

Theorem. *(Теоема Кантора-Берштейна)*

Пусть A и B --- произвольные множества. Если $\exists A_1 \subset A : A_1 \sim B$, а $\exists B_1 \subset B : B_1 \sim A \Rightarrow A \sim B$

3.1. **Комплексные числа.**

Definition. Комплексные числа --- является расширенным множеством действительных чисел, было введено понятие мнимой единицы $\sqrt{i^2} = -1$ $z = a + ib$

$a = R(z)$ --- действительная часть
$b = Im(z)$ --- мнимая часть
$|z_0| = \sqrt{a^2 + b^2}$ --- модулем
ϕ --- комплексного числа

Definition. Показательная формула комплексного числа
$z_0 = exp(i\phi) = (z_0)(cos\phi + isin\phi)$

3.1.1. *Операции над комплексными числами.* $z_0 = a + ib, z_1 = c + id$.

(1) $z = z_0 + z_1 = a + c + i(b + d)$
(2) $z = z_0 - z_1 = a - b + i(b - d)$
(3) $z = z_0 * z_1 = (a + bi)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + cb)$

3.1.2. *Комплексное сопряженные числа.* $\begin{cases} z_0 = a + ib \\ z_1 = a - ib \end{cases}$ --- комплексно-сопряженные

чилса $z_1 = \bar{z_0}$
$|\bar{z_0}| = |z_0|$ $\phi_{\bar{z_0}} = -\phi_{z_0}$
$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z_0|^2$

3.1.3. *Деление комплексных чисел.* $z = \frac{z_1}{z_0}, |z_0| > 0$

$z = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(dc-ad)}{c^2+b^2} = \frac{ac+bd}{c^2+b^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

4. Числовые последовательности и ряды

4.1. **Понятие предела числовой последовательности. Сходящиеся последовательности.**

Definition. Числовые последовательностью $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называются всякие отображение натуральных чисел N во множество вещественных чисел R.
$f : N \cup \{0\} \to R$
$g : N \setminus \{1, 2, ..., R - 1\} \to R$
$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$

Definition. Число называется пределом последовательности $\{x_n\}$ если $\forall\varepsilon > 0$
$\exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N$ $|x_n - a| < \varepsilon$ $(a \in R)$

Remark. В любом ε окрестности числа a содержится бесконечное число этой последовательности, при этом вне этой окрестности содержится только конечное чило. $a = lim_{n\to\infty} x_n$ $x_n \to_{n\to\infty} a$
$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \sim |x_n - a| < \varepsilon$