LAK - ćwiczenia nr 5

Całkowanie równań różniczkowych (dla wielkości skalarnych i wektorowych)

Załóżmy, że stan pewnego układu jest opisany przez wektor stanu $Y = Y(t)$. Aby obliczyć wartści tego wektora w kolejnych chwilach czasu t musimy określić jego "prawo zmian":

$$\tfrac{d}{dt}Y(t) = F(t, Y)\,. \tag{1}$$

Aby rozwiązać za pomocą Scilaba tak sformułowane równanie wektorowe możemy wykorzystać funkcję ode, podając jej cztery argumenty:

— $Y(t_0) = Y_0$ - wektor wartości początkowych stanu,
— t_0 - wartość początkowa zmiennej czasu (najczęściej przyjmuje się $t_0 = 0$),
— t - wektor wartości zmiennej czasowych, dla ktorych ma być wyznaczane rozwiązanie,
— F - funkcja (ogólnie - wektorowa), w której zapisana jest prawa strona równania (1).

Wynikiem działania funkcji ode jest macierz wartości składowych wektora stanu Y w momentach określonych przez wektor punktów czasowych t.

Model fizyczny spadku swobodnego (bez oporu powietrza)

Przeanalizujmy spadek swobodny ciała o masie $m = 100$ kg, spadającego swobodnie (bez oporu powietrza) z wyskości $H = 100$ m, pod wpływem siły ciężkości F_g.

Z lekcji fizyki pamiętamy, że spadek swobodny odbywa się[1] pod wpływem siły ciężkości:

$$F = m \cdot g\,. \tag{2}$$

Opis stan naszego układu będzie polegał na podaniu aktualnej wysokości $y(t)$ spadającego ciała, oraz jego prędkości $v(t)$. Odpowiednie równania wyglądają następująco:

$$\begin{cases} \tfrac{d}{dt}y(t) & = -v(t)\,, \\ \tfrac{d}{dt}v(t) & = \tfrac{F}{m}\,. \end{cases} \tag{3}$$

[1] Milcząco przyjmujemy tutaj założenie o stałości przyspieszenia ziemskiego g, co jest uzasadnione dla stosunkowo niewielkich wysokości. Ogólnie powinniśmy stosować wzór na siłę grawitacji: $F = \frac{GMm}{(R_z+y)^2}$, gdzie $R_z$to promień Ziemi, M to masa Ziemi, y - aktualna wysokość spadającego ciała względem powierzni Ziemi.

Pierwsze równanie to po prostu definicja prędkości jako pochodnej położenia po czasie (minus wynika z opadania - zakładamy, że ciało spadające ma prędkość dodatnią). Drugie równanie wynika z drugiego prawa Newtona: $F = m \cdot a$, oraz z zapisania definicji przyspieszenia a jako pochodnej prędkości po czasie. Zauważmy, że po podstawieniu (2) do układu równań (3) masa m spadającego ciała redukuje się.

Jeśli teraz zdefiniujemy wektor stanu:

$$Y(t) = \left(\begin{array}{c} x(t) \\ v(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{array} \right), \tag{4}$$

oraz, w oparciu o prawe strony układu równań (3), uogólniony wektor siły:

$$F(t, Y) = \left(\begin{array}{c} -v(t) \\ g \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -Y_2(t) \\ g \end{array} \right), \tag{5}$$

to wektorowe równanie ruchu przyjmie ostatecznie postać:

$$\frac{d}{dt} Y = \left(\begin{array}{c} -Y_2 \\ g \end{array} \right). \tag{6}$$

Tak zdefiniowany problem może być teraz rozwiązany przez:

— zdefiniowanie "funkcji prawych stron" (5),
— określenie warunków początkowych (czyli $Y_1(0)$ oraz $Y_2(0)$),
— podanie chwili początkowej i wektora punktów czasowych, w których chcemy badać stan naszego układu,
— wywołania funkcji `ode` z odpowiednimi argumentami.

Skrypt Scilaba `Spadek_swobodny.sce` rozwiązujący to zagadnienie jest udostępniony przez prowadzącego.

Zadania

Zadanie 1 Spadek z uwzględnieniem oporu powietrza (2 pkt.)

Przeprowadź analizę numeryczną zagadnienia spadku swobodnego ciała o masie m, poddanego działaniu siły ciężkości F_g oraz siły oporu aerodynamicznego F_{op}:

$$m \frac{dv}{dt} = F_c - F_{op} \ ,$$

gdzie:

$$F_c = mg$$
$$F_{op} = \tfrac{1}{2} C_x \rho S v^2$$

oraz:

— g - przyspieszenie ziemskie
— C_x - współczynnik aerodynamiczny siły oporu,
— ρ - gęstość powietrza,
— v - prędkość ciała względem powietrza,
— S - powierzchnia rzutu ciała na płaszczyznę prostopadłą do wektora prędkości ciała.

Przeanalizuj przypadki spadku swobodnego człowieka:

— na Ziemi,
— na Marsie.

Zadanie 2 Układ "drapieżnik-ofiara" (2 pkt.)

Wykorzystując funkcję `ode` Scilaba rozwiąż model współzawodnictwa gatunków: polulacja zajęcy $Z = Z(t)$), populacja rysiów$R = R(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Z(t) & = a \cdot Z(t) \; - b \cdot Z(t) \cdot R(t) \\ \frac{d}{dt}R(t) & = c \cdot Z(t) \cdot R(t) - d \cdot R(t) \end{cases}$$

dla następującego parametrów:

$a = 0.1$, $b = 0.01$, $c = 0.001$, $d = 0.05$.

Pokaż na wykresach inne możliwe zachowania układu drapieżnik-ofiara.

Zadanie 3 "Motyl Lorenza" (2 pkt.)

Przedstaw graficzne rozwiązania modelu Lorenza:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = a \cdot (y - x) \\ \frac{dy}{dt} & = x \cdot (b - z) - y \\ \frac{dz}{dt} & = x \cdot y - c \cdot z \end{cases}$$

dla następujących zestawów wartości parametrów:

— $a = 10$; $b = 20$; $c = 8/3$
— $a = 10$; $b = 99.96$; $c = 8/3$
— $a = 10$; $b = 28$; $c = 8/3$

oraz następujących warunków początkowych:

— $x_0 = y_0 = z_0 = 10^{-8}$
— $t_0 = 0$

dla 5000 punktów czasowych czasu z przedziału $[0, 50]$.