LAK - ćwiczenia nr 4

1. Reprezentacja liczb

1.1. Liczby całkowite (konwersja z systemu dziesiętnego do binarnego)

Załóżmy, że N_0 jest liczbą całkowitą dodatnią. W układzie dwójkowym możemy ją rozpisać następująco:

$$N_0 = a_0 2^0 + a_1 2^1 + ... + a_k 2^k = a_0 + 2 \cdot \left(a_1 2^0 + ... + a_k 2^{k-1}\right) = a_0 + 2 \cdot N_1$$

gdzie $a_i \in \{0, 1\}$. Widać z tego, że $a_0 = modulo(N_0, 2)$. Analogicznie z liczby N_1 obliczamy kolejny wyraz a_1 rozwinięcia dwójkowego N_0, i tak dalej. Otrzymujemy zatem Algorytm 1.

Algorytm 1 Konwersja binarna liczby całkowitej

```
function [bin] = dec2bin_1(n)
   // n - konwertowana liczba całkowita (naturalna)
   i=1
   while n>0 do
      bin(i)=modulo(n,2)
      n=int(n/2)
      i=i+1
   end
endfunction
```

1.2. Ułamki

Niech U_1 jest liczbą wymierną z przedziału$(0, 1)$ (innymi słowy - ułamkiem). Wtedy ułamek ten możemy rozwinąć w szereg **ujemnych** potęg liczby 2:

$$U_1 = \frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + ...$$

gdzie $b_i \in \{0, 1\}$- kolejne cyfry w dwójkowym przedstawieniu ułamka U_1. Wtedy:

$$2 \cdot U_1 \quad = \quad b_1 + \frac{b_2}{2^1} + \frac{b_3}{2^2} + ... = b_1 + U_2\,.$$

Zatem pierwszą cyfrę b_1 rozwinęcia binarnego lułamka U_1 otrzymamy jako

$$b_1 = int(2 \cdot U_1)\,,$$

zaś następną cyfrę $b_2$otrzymujemy stosując tą samą procedurę do ułamka U_2 mającego wartość:

$$U_2 = 2 \cdot U_1 - b_1\,.$$

Otrzymujemy natychmiast Algorytm 2.

Algorytm 2 Konwersja binarna ułamka

```
function [bin] = dec2bin_2(u, prec)
   // u - konwertowany ułamek
   // prec - maksymalna liczba cyfr rozwinęcia binarnego konwertowanego ułamka
   i=1
   while u>0 & i<=prec do
      bin(i)=int(2*u)
      u=k-bin(i)
      i=i+1
   end
endfunction
```

1.3. Liczby rzeczywiste

Każdą liczbę x ($x \neq 0$) można reprezentować jednoznacznie w postaci wykładniczej: $x = s \cdot m \cdot 2^c$, gdzie $s \in \{-1, 1\}$ jest **znakiem** liczby, $m \in [\frac{1}{2}, 1)$ to tzw. **mantysa**, zaś całkowitą liczbę c nazywamy **cechą**. W komputerze wartości m i c są reprezentowane za pomocą skończonej liczby bitów. W związku ze skończonym zakresem wartości przyjmowanych przez cechę ($c_{\text{min}} \leq c \leq c_{\text{max}}$) w reprezentacji zmiennoprzecinkowej można reprezentować tylko liczby ze skończonego zakresu $\frac{1}{2}2^{c_{\text{min}}} \leq |x| < 2^{c_{\text{max}}}$ oraz 0.

2. Ćwiczenia

Wpisz poniższe polecenia w linii poleceń Scilaba. Przyjrzyj się otrzymanym wynikom.

```
--> %eps

--> format (10); exp (1)

--> format (20); exp (1)

--> format (20); 0.1

--> format (25); 0.1
```

Sprawdź wartość logiczną następujących wyrażeń:

```
-->1 + %eps == 1

-->1 + %eps / 2 == 1
```

```
-->1 - 0.9 == 0.1

-->0.9 / 2 * 2 == 0.9

-->0.9 / 3 * 3 == 0.9

-->(0.1 + 0.2) + 0.3 == 0.1 + (0.2 + 0.3)
```

Co dostrzegłeś? Czy potrafisz wyjaśnić przyczynę?

Zadania

Zadanie 1

Oblicz sumę szeregu:

$$S = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{k^2}$$

sumując elementy szeregu:

— od $k = 1$ do 10000 ("w górę"),
— od $k = 10000$ do 1 ("w dół").

Czy wyniki różnią się? Wyjaśnij otrzymane rezultaty.

Zadanie 2

Zadanie dotyczy różnych sposobów obliczania tzw. sumy Pitagorasa, jako funkcji rzeczywistej o dwóch argumentów rzeczywistych:

$$h(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zdefiniuj funkcję w Scilabie obliczającą wartość funkcji:

— z definicji,
— ze wzoru:

$$\begin{aligned} h(a,b) &= \sqrt{a^2(1+r)}\,, \\ r &= \frac{b}{a}\,; \end{aligned} \tag{1}$$

— wykorzystując algorytm Molera i Morrisona[1].

Przetestuj tę funkcję dla następujących par argumentów:

[1] Kod funkcji udostępniony przez prowadzącego.

— $a = 1$, $b = 1$,
— $a = 3$, $b = 4$,
— $a = 10^{200}$, $b = 1$,
— $a = 10^{-200}$, $b = 10^{-200}$.

Co zauważyłeś? Czy potrafisz wyjaśnić przyczyny różnic?

Zadanie 3

Następujaca nieliniowa zależność rekurencyjna (tzw. "mapa logistyczna"):

$$\begin{aligned} y(t=0) &= y_0\,, \\ y(t+1) &= r \cdot y(t) \cdot (1 - y(t))\ , \quad t > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

jest m.in. dyskretnym modelem dynamiki populacji gatunku zwierząt roślinożernych na wyspie o stałej ilości pożywienia. W tym modelu iterowana wielkość y_i jest traktowana jako "gęstość" tej populacji (zmienia się w przedziale od 0 do 1), dyskretna wielkośćt mierzy kolejne odstępy czasowe, w których liczona jest liczba zwierząt, zaś parametr r określa rozrodczość gatunku (np. ile par młodych "generuje" jedna para dorosłych osobników). Model milcząco zakłada, że zwierzątka osiągają zdolność rozmnażania się w czasie nie dłuższym niż jedna jednostka czasowa od chwili narodzenia, zaś po narzodzeniu młodych są usuwane z wyspy (np. w formie przetworzonej trafiają na półki sklepowe hipermarketu). Na wyspie nie ma żadnych drapieżników ani chorób, jedynym powodem śmierci zwierzątek (innym niż usunięcie) może być jedynie brak pożywienia.

Zbadaj, jak będzie zachowywać się populacja dla parametru rozrodczości r równego: 0.5, 1, 2, 3, 4. Jako wartość początkową gęstości populkacji przyjmij wartość losową z przedziału $0, 1)$ (funkcja **rand**).

Dla $r = 4$ sprawdź, jak zmieni się opis dynamiki populacji, jeśli układ (2) zapiszemy w algebraicznie równoważnej formie:

$$\begin{aligned} z(t=0) &= y_0\,, \\ z(t+1) &= r \cdot z(t) - r \cdot z^2(t)\,, \quad t > 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Co jest przyczyną zaobserwowanego zjawiska? Ustal dla jakich wartości parametru r zaobserwowane zjawisko nie zachodzi.