Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и физики

# Интервальный анализ
# Отчёт по лабораторной работе №1

Выполнил:

Студент: Умнов Сергей
Группа: 5030102/10201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024 г.

# Содержание

# 1 Постановка задачи

Пусть дана ИСЛАУ

$$Ax = b,\ x = (x_1, x_2)$$

И дана вещественная матрица

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Рассмотрим матрицу радиусов:

$$\text{rad}A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Построим интервальную матрицу следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} [a_{11} - \alpha \cdot A_i^{(1,1)}, a_{11} + \alpha \cdot A_i^{(1,1)}] & [a_{12} - \alpha \cdot A_i^{(1,2)}, a_{12} + \alpha \cdot A_i^{(1,2)}] \\ [a_{21} - \alpha \cdot A_i^{(2,1)}, a_{21} + \alpha \cdot A_i^{(2,1)}] & [a_{22} - \alpha \cdot A_i^{(2,2)}, a_{22} + \alpha \cdot A_i^{(2,2)}] \end{pmatrix} \tag{3}$$

$i = \overline{1, 2}$

Требуется:

- Найти диапазон значений $\alpha$, при которых $0 \in \det A$;
- Для минимального значения радиуса матричных элементов $\min \alpha$ найти точечную матрицу $A'$:

$$\det A' = 0.$$

В целях конкретизации и возможности проверки решения будем использовать следующую матрицу

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} 1.05 & 0.95 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

# 2 Теория

Интервалом $[a, b]$ вещественной оси $\mathbb{R}$ называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами $a$ и $b$, включая их самих, т. е.

$$[a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}. \tag{5}$$

Основные арифметические операции для интервалов:

1. **Сложение**
$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \tag{6}$$
2. **Вычитание**
$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c] \tag{7}$$
3. **Умножение**
$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \tag{8}$$
4. **Деление**
$$\frac{[a, b]}{[c, d]} = [\min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right)] \tag{9}$$

Характеристики интервалов:

1. **Средняя точка**
$$\text{mid}[a, b] = \frac{1}{2}(a + b) \tag{10}$$
2. **Ширина**
$$\text{wid}[a, b] = (b - a) \tag{11}$$
3. **Радиус**
$$\text{rad}[a, b] = \frac{1}{2}(b - a) \tag{12}$$

# 3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы была использована библиотека `numpy`.

## 3.1 Описание алгоритма

Для нахождения минимального значения $\alpha$ использовался итеративный метод с экспоненциальным увеличением шага:

1. **Экспонециальный поиск**
   - Инициализация: $k = 0$, $\alpha_0 = e^0$.
   - На каждой итерации значение $\alpha_k$ обновляется по формуле:
   $$\alpha_k = e^k, \quad k_{i+1} = k_i + 1.$$
   - Процесс продолжается, пока $0 \notin \det A(\alpha_k)$, где $A(\alpha_k)$ - матрица с заданным интервалом.
   - Найденное значение $\alpha_k$ используется в качестве верхней границы $b_0$ для следующего этапа.
2. **Уточнение методом бисекции**
   - Устанавливаются начальные границы: $a_0 = 0$, $b_0 = \alpha_k$
   - На каждой итерации вычисляется:
   $$\alpha_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}.$$
   - Если $0 \in \det A(\alpha_{k+1})$, то:
   $$b_{k+1} = \alpha_{k+1},$$
   иначе:
   $$a_{k+1} = \alpha_{k+1}.$$
   - Процесс продолжается, пока разница $b - a > \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность.
   - После завершения возвращается значение:
   $$\alpha^* = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

## 3.2 Ссылка на репозиторий

https://github.com/vainmoon/interval-analysis

# 4 Результат

## 4.1 Результаты вычислений параметра регуляризации

В процессе итеративного вычисления значения $\alpha_k$ и детерминанта матрицы $A_k$ для каждой итерации $k$ рассчитывались промежуточные значения, которые приведены в таблице ниже.

На каждой итерации значение $\alpha_k$ уточняется с помощью метода бинарного поиска, а детерминант матрицы $A_k$ вычисляется с использованием соответствующих интервалов.

| $k$ | $\alpha_k$ | $\det(A_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.500000 | $[-1.900000, 2.100000]$ |
| 1 | 0.250000 | $[-0.900000, 1.100000]$ |
| 2 | 0.125000 | $[-0.400000, 0.600000]$ |
| 3 | 0.062500 | $[-0.150000, 0.350000]$ |
| 4 | 0.031250 | $[-0.025000, 0.225000]$ |
| 5 | 0.015625 | $[0.037500, 0.162500]$ |
| 6 | 0.023438 | $[0.006250, 0.193750]$ |
| 7 | 0.027344 | $[-0.009375, 0.209375]$ |
| 8 | 0.025391 | $[-0.001563, 0.201563]$ |
| 9 | 0.024414 | $[0.002344, 0.197656]$ |
| 10 | 0.024902 | $[0.000391, 0.199609]$ |
| 11 | 0.025146 | $[-0.000586, 0.200586]$ |
| 12 | 0.025024 | $[-0.000098, 0.200098]$ |
| 13 | 0.024963 | $[0.000146, 0.199854]$ |
| 14 | 0.024994 | $[0.000024, 0.199976]$ |
| 15 | 0.025009 | $[-0.000037, 0.200037]$ |
| ... | ... | ... |

Таблица 1: Результаты вычислений для $\alpha_k$ и $\det(A_k)$

На 12-ой итерации было найдено значение $\alpha_{min} \approx 0.025$ при заданной точности $\varepsilon = 10^{-5}$

## 4.2 Итоговые результаты

Минимальное значение параметра регуляризации:

$$\alpha_{min} = 0.025$$

Интервальная матрица имеет такой вид:

$$A = \begin{bmatrix} [1.025,\ 1.075] & [0.925,\ 0.975] \\ [0.975,\ 1.025] & [0.975,\ 1.025] \end{bmatrix}$$

Определитель этой матрицы имеет вид:

$$det(A) = [0.0,\ 0.2]$$

Диапазон значений параметра регуляризации, при котором определитель интервальной матрицы $A$ включает ноль:

$$\alpha \in [0.025,\ +\infty)$$

## 4.3 Точечная матрица $A'$

Для найденного минимального значения $\alpha_{min}$ была определена точечная матрица $A'$, принадлежащая интервальной матрице $A$, такая, что $\det A' = 0$.

Точечная матрица $A'$:

$$A' = \begin{bmatrix} 1.025 & 0.975 \\ 1.025 & 0.975 \end{bmatrix}$$

Строки матрицы являются линейно зависимыми, значит, её определитель равен нулю и матрица является вырожденной.

# 5 Обсуждение

1. **Физическая интерпретация**
   Матрица $A'$ формируется путем минимизации радиуса матричных элементов $\delta$, что приводит к необратимости матрицы $A$, когда её определитель становится равным нулю ($\det A' = 0$). В результате система уравнений становится вырожденной, и её решение теряет однозначность, порождая бесконечное множество возможных решений. С физической точки зрения это указывает на то, что недостаточность данных, полученных с двух ракурсов, не позволяет точно реконструировать объект. Отсутствие необходимой информации для однозначного решения задачи приводит к неопределенности в процессе реконструкции.

2. **Чувствительность при минимальном радиусе**
   Когда радиус матричных элементов достигает минимума, формируется точечная матрица $A'$, которая является границей множества возможных матриц $A$, определяющих интервал неопределенности. В таком случае система становится крайне чувствительной к любым незначительным изменениям исходных данных. Даже малейшие искажения или шум в данных могут вызвать существенные изменения в результатах реконструкции, что значительно усложняет решение задачи томографии при работе с реальными данными, содержащими шум. Это подчеркивает критическую важность учета погрешностей данных при выполнении реконструкции.

3. **Практические соображения**
   В практической томографии для повышения точности и стабильности решения часто применяют большее количество ракурсов, чем два, что улучшает условия задачи и позволяет избежать ситуации, когда $\det A' = 0$. При ограниченном числе ракурсов существует высокая вероятность вырождения матрицы, что делает задачу плохо обусловленной. В таких случаях необходимо использовать специальные методы, учитывающие неопределенность данных и решающие проблему вырождения, такие как методы регуляризации или статистические подходы, которые помогают находить устойчивые решения, несмотря на недостаточность информации.

# 6 Выводы

В ходе лабораторной работы была сформирована интервальная матрица $A$ размером $2 \times 2$ следующего вида:

$$A = \begin{bmatrix} [1.05-\alpha, 1.05+\alpha] & [0.95-\alpha, 0.95+\alpha] \\ [1-\alpha, 1+\alpha] & [1-\alpha, 1+\alpha] \end{bmatrix}$$

Для этой матрицы был определен диапазон значений $\alpha$, при которых определитель интервальной матрицы включает ноль, что указывает на вырождение матрицы. Минимальное значение $\alpha = 0.025$ было установлено с помощью итерационного алгоритма с переменным шагом.

При значении $\alpha = 0.025$ интервальный определитель матрицы принимает значения в интервале $[0.0, 0.2]$, что включает ноль. Таким образом, это значение $\alpha$ является минимальным, при котором матрица $A$ становится вырожденной.

Для минимального значения $\alpha$ была найдена точечная матрица $A'$, принадлежащая интервальной матрице $A$, такая, что:

$$A' = \begin{bmatrix} 1.025 & 0.975 \\ 1.025 & 0.975 \end{bmatrix}$$

Эта матрица является вырожденной, так как её строки линейно зависимы, и её определитель равен нулю.

В общем случае, если матрица $A$ представляет собой матрицу линейной регрессии, она может иметь размерность $2 \times N$ (где $N \geq 2$) и не быть квадратной. В таких случаях для анализа необходимо рассматривать всевозможные квадратные подматрицы и для каждой подбирать своё значение $\alpha$, при котором эти матрицы будут неособенными (невырожденными). Затем, пересечение всех найденных матриц позволяет получить итоговую регуляризованную матрицу, которая удовлетворяет условиям задачи и может быть использована для дальнейшего анализа или вычислений.

# Список литературы

[1] А.Н. Баженов, С.И.Жилин, С.И. Кумков, С.П.Шарый "Обработка и анализ интервальных данных"–Москва–Ижевск:НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2024, стр. 44-60