

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной
физики

**Отчет по лабораторной работе №2
“Интервальный анализ”**

Выполнили студент группы 5030102/10201:

Умнов Сергей Алексеевич

Преподаватель:

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Теория	2
2.1	Допусковое множество	2
2.2	Функционал	3
2.3	b -коррекция ИСЛАУ	3
2.4	A -коррекция ИСЛАУ	3
2.5	Ab -коррекция ИСЛАУ	3
3	Реализация	3
4	Результаты	4
4.1	Максимум распознающего функционала	4
4.2	Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части (A -коррекция)	4
4.3	Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части (b -коррекция) . . .	5
4.4	Достижение разрешимости за счёт Ab -коррекции	6
5	Выводы	6

1 Постановка задачи

Дан набор ИСЛАУ 1

$$\mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b}, \quad x = (x_1, x_2) \quad (1)$$

с матрицей и вектором правой части:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Необходимо:

- Проверить непустоту допускового множества ИСЛАУ 1,
- Построить график функционала $\text{Tol}(x)$ для 1,
- Построить допусковое множество ИСЛАУ 1,
- Найти $\arg\max \text{Tol}$ и образующие допускового функционала.

Для достижения непустого допускового множества провести коррекцию ИСЛАУ 1:

- Правой части ИСЛАУ — b -коррекция,
- Матрицы ИСЛАУ — A -коррекция,
- Комбинацией предыдущих методов с одновременным изменением правой части и матрицы ИСЛАУ — Ab -коррекция.

Для всех видов коррекции построить график функционала $\text{Tol}(x)$, допускового множества, отобразить $\arg\max \text{Tol}$ и найденные ранее частные решения набора СЛАУ.

2 Теория

2.1 Допусковое множество

Пусть даны интервальная $m \times n$ матрица $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ и интервальный m -вектор правой части $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$

Допусковым множеством решений ИСЛАУ называется множество

$$\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A \in \mathbf{A} \exists b \in \mathbf{b} : Ax = b\}. \quad (5)$$

Это множество решений всевозможных точечных систем $Ax = b$, для которых произведение Ax при любых $A \in \mathbf{A}$ попадает в интервалы правых частей \mathbf{b} .

2.2 Функционал

Функционалом (распознающим) $\text{Tol}(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m \times n} \times \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{R}$ называется выражение

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad} \mathbf{b}_i - \left| \text{mid} \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}. \quad (6)$$

Принадлежность $x \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$, то есть допустовое множество решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ есть множество уровня

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$$

функционала Tol .

2.3 b -коррекция ИСЛАУ

Пусть матрица \mathbf{A} ИСЛАУ неизменна, и значения $\text{mid} \mathbf{b}_i, i \in \overline{1, m}$ зафиксированы. Тогда расширение вектора \mathbf{b} путем его замены на вектор

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e}, \quad K \geq 0, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^T \quad (7)$$

приведет к тому, что значение абсолютного максимума T распознающего функционала $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ возрастет на постоянную K :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) + K = T + K$$

прием $\arg\max \text{Tol}$ — положение точки T — не изменится.

2.4 A -коррекция ИСЛАУ

A -коррекцией ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ заключается в замене матрицы \mathbf{A} ее интервальной матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ такой, что

$$\text{rad}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) < \text{rad} \mathbf{A}, \quad \text{mid}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) = \text{mid} \mathbf{A}, \quad \mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}].$$

2.5 Ab -коррекция ИСЛАУ

Ab -коррекцией ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ заключается в комбинированном применении A -коррекции и b -коррекции, при этом первый этап процесса — сужение элементов матрицы \mathbf{A} , второй этап — уширение вектора правой части \mathbf{b} .

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: <https://github.com/vainmoon/interval-analysis>

4 Результаты

4.1 Максимум распознающего функционала

Максимум распознающего функционала $T = -0.7$ находится в точке $\tau = (1, 2)^T$, для всех формулировок. Образующая функционала в начальном случае для ИСЛАУ (4):

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \end{pmatrix} \quad (8)$$

В таком случае допустовое множество пусто, ведь ИСЛАУ несовместна в рамках заданных допусков. Требуется значительное уменьшение всех допусков.

Рис. 1: Расположение максимума распознающего функционала

4.2 Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части (А-коррекция)

Для обеспечения разрешимости системы с использованием А-коррекции в формулировке (2) выполним следующие шаги:

1. **Определение исходных параметров.** Для текущих значений системы значение толерантности вычисляется как

$$T = \text{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.7 \Rightarrow |T| = 0.7.$$

Максимум распознающего функционала достигается в точке

$$\tau = \text{Arg max}_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = (1, 2)^T,$$

откуда $|\tau_1| = 1$ и $|\tau_2| = 2$.

2. **Вычисление радиуса матрицы.** Радиус элементов матрицы \mathbf{A} определяется как

$$\text{rad}A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

3. **Нахождение интервала корректировки.** Составим и решим систему неравенств для интервала допустимых значений e , учитывая ограничение на радиус коррекции:

$$\begin{cases} 0 \leq e \leq 0.3, \\ e + 2e = K \geq |T| = 0.7. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$0.2(3) \leq e \leq 0.3.$$

4. **Выбор оптимального значения.** Для дальнейших расчётов выберем среднее значение в найденном интервале:

$$e_{\text{mid}} = \frac{0.2(3) + 0.3}{2} = 0.2(6).$$

5. **Построение скорректированной системы.** С учётом выбранного значения e_{mid} , интервальная система принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.917, 0.983] & [0.967, 1.033] \\ [1.017, 1.083] & [0.967, 1.033] \\ [1.067, 1.133] & [0.967, 1.033] \\ [-0.033, 0.033] & [0.967, 1.033] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix}.$$

Максимум со значением $T = 0.1$ расположен в точке $\tau = (1, 2)^T$.

Рис. 2: Поверхности распознающих функционалов после A -корректировки

Рис. 3: Допусковое множество решений после A -корректировки

4.3 Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части (b -коррекция)

Для формирования интервальной матрицы использовался коэффициент $K = 1$ для всех рассматриваемых ИСЛАУ. Например, задача 4 принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1.75, 4.15] \\ [1.85, 4.25] \\ [1.9, 4.3] \\ [0.8, 3.2] \end{pmatrix}.$$

Рис. 4: Поверхности распознающих функционалов после b -коррекции

Рис. 5: Допусковое множество решений после b -коррекции

Минимальное значение коэффициента K , равное 0.7, в предельном случае неотрицательной области сходится к точке $\tau = (1, 2)^T$.

4.4 Достижение разрешимости за счёт Аб-коррекции

Процесс включал два этапа: сначала выполнялось сужение левой части (A -коррекция), а затем — расширение правой части (b -коррекция) с коэффициентом $K = 1$.

Рис. 6: Поверхности распознающих функционалов после Аб-корректировки

Рис. 7: Допусковое множество решений после Аб-корректировки

5 Выводы

- Проведённый анализ показал, что для исходных ИСЛАУ допустимое множество решений отсутствует, так как максимальное значение распознающего функционала $T = -0.7$ оказалось отрицательным. Это свидетельствует о несовместимости системы в заданных интервалах.
- Для устранения несовместимости были использованы методы коррекции правой части (b -коррекция) и матрицы коэффициентов (A -коррекция). В результате применения b -коррекции с коэффициентом $K = 1$ удалось достичь положительного значения распознающего функционала $T = 0.3$, что подтверждает наличие допустимого множества решений для скорректированной системы.
- Метод A -коррекции также обеспечил разрешимость системы. Корректировка матрицы коэффициентов привела к положительному значению распознающего функционала, что позволило определить допустимое множество решений и подтвердить эффективность данного подхода.
- Анализ графиков допустимых множеств и распознающего функционала показал, что после коррекции изменился профиль поверхности $\text{Tol}(x)$. Это свидетельствует о влиянии коррекции на свойства системы. Кроме того, смещение максимума распознающего функционала указывает на улучшение совместимости системы.