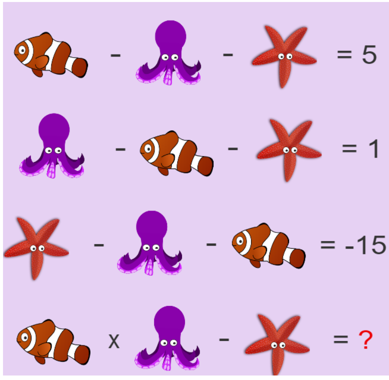
Práctico 2

Sistemas de ecuaciones
Soluciones

[1]

(1) Para cada uno de los siguientes problemas, plantee el sistema lineal que le permita resolver el problema e intente resolverlo con las herramientas que posee hasta el momento.

(a)

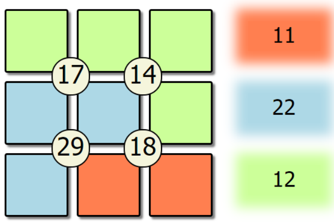


Solución: La idea de este ejercicio era hacerlo sin ningún método "sofisticado" (por ejemplo eliminación gaussiana).
Conviene representar los animales marinos con incógnitas. Llamaremos x al pez, y al pulpo y z a la estrella de mar. El sistema se traduce entonces en:

$$\begin{cases} x - y - z = 5 & \text{(1a)} \\ -x + y - z = 1 & \text{(1b)} \\ -x - y + z = -15 & \text{(1c)} \end{cases}$$

Una manera sería ir despejando en orden, por ejemplo z de la primera ecuación, reemplazar en la segunda, despejar y y reemplazar todo en la tercera para obtener un valor para x.
Lo haremos de otra manera:
Sumando las ecuaciones $(1a)$ y $(1b)$ resulta $-2z = 6$, por lo que $z = -3$.
Sumando $(1a)$ y $(1c)$ resulta $-2y = -10$, por lo que $y = 5$.
Sumando $(1b)$ y $(1c)$ resulta $-2x = -14$, por lo que $x = 7$.
En resumen si (x, y, z) es solución del sistema, debe ser $\boxed{(x, y, z) = (7, 5, -3)}$. Es directo chequear que efectivamente es solución.
Finalmente, pez $\times$ pulpo $-$ estrella $= x \cdot y - z = 35 + 3 = \boxed{38}$.

(b) *Juego Suko.* Colocar los números del 1 al 9 en las celdas de la siguiente tabla de modo que el número en cada círculo sea igual a la suma de las cuatro celdas adyacentes, y la suma de las celdas del mismo color sea igual al número en el rectángulo de igual color que aparece en la columna de la derecha.



[1]Estas son algunas soluciones posibles. Podría haber otras maneras de resolver los problemas del práctico.

Solución: Queremos ver qué valor toma cada celda y, por lo tanto, a cada celda le asignamos una variable:

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

Tenemos entonces las 9 incógnitas que debemos resolver y la información del Suko original nos dice que se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 12, & (2a)\\ x_4 + x_5 + x_7 &= 22, & (2b)\\ x_8 + x_9 &= 11, & (2c)\\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 17, & (2d)\\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 &= 14, & (2e)\\ x_4 + x_5 + x_7 + x_8 &= 29, & (2f)\\ x_5 + x_6 + x_8 + x_9 &= 18. & (2g) \end{cases}$$

Además de que $(x_1, \dots, x_9)$ es una reordenación de $(1, \dots, 9)$, es decir $x_i \in \mathbb{N}$, $1 \le x_i \le 9$ y $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
Se podría intentar resolver el sistema en general. Como tenemos 9 variables y 7 ecuaciones, quedarían 2 variables libres de las cuales las otras 7 variables dependerían. Sin embargo, será mucho más fácil trabajar con las ecuaciones directamente y usar que los x_i tienen que ser naturales distintos entre 1 y 9.

De $(2b)$ tenemos $x_4 + x_5 + x_7 = 22$. Reemplazando en $(2f)$ resulta $\boxed{x_8 = 7}$. Con esto, mirando $(2c)$, resulta $\boxed{x_9 = 4}$.

Reemplazando en $(2g)$, $\boxed{x_5 + x_6 = 7}$. De aquí, $(2e)$ implica $\boxed{x_2 + x_3 = 7}$ y por $(2a)$, $\boxed{x_1 + x_6 = 5}$.

De estas 3 igualdades se deduce que, al ser $x_i \in \mathbb{N}$, ninguna de las variables x_1, x_2, x_3, x_5, x_6 pueden valer 8 o 9. Por lo tanto $\{x_4, x_7\} = \{8, 9\}$, lo cual dice que $\boxed{x_4 + x_7 = 17}$ y así, en $(2b)$ tenemos que $x_5 + 17 = 22$, de donde $\boxed{x_5 = 5}$. Por las igualdades del párrafo anterior tenemos que $\boxed{x_6 = 2}$, $\boxed{x_1 = 3}$.

Por último, miremos $(2d)$. Tenemos que $x_2 + x_4 + 8 = 17$. De aquí vemos que $x_4 \neq 9$, pues $x_2 \in \mathbb{N}$. Entonces $\boxed{x_4 = 8}$ y $\boxed{x_2 = 1}$. De $x_2 + x_3 = 7$ y $x_4 + x_7 = 17$ obtenemos que $\boxed{x_3 = 6}$ y $\boxed{x_7 = 9}$.

En conclusión, la solución es:

$$\boxed{\begin{array}{llllll} x_1 &= 3, & x_2 &= 1, & x_3 &= 6,\\ x_4 &= 8, & x_5 &= 5, & x_6 &= 2\\ x_7 &= 9, & x_8 &= 7, & x_9 &= 4. \end{array}}$$

(2) (a) Encontrar un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ no nulo que sea ortogonal a los vectores

$$u = (4, -1, 1), \quad v = (2, 1, 1) \quad \text{y} \quad w = (1, 2, 1).$$

¿Hay un único vector con esta propiedad? En caso de que no, ¿Cómo describiría a todos los vectores que satisfacen dicha propiedad?

Solución: Un vector (x, y, z) será ortogonal a u, v y w si y sólo si el producto escalar con estos es cero. Es decir, debe verificar las siguientes igualdades:

$$\langle u,(x,y,z)\rangle = \langle v,(x,y,z)\rangle = \langle w,(x,y,z)\rangle = 0.$$

Desarrollando explícitamente estos productos escalares obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x - y + z &= 0 \quad (3a)\\ 2x + y + z &= 0 \quad (3b)\\ x + 2y + z &= 0 \quad (3c)\end{cases}$$

Entonces, para encontrar un vector ortogonal a los vectores dados debemos resolver este sistema. Nuevamente hay varias maneras.
Sumando $(3a)$ con $(3b)$ resulta $6x + 2z = 0$, de donde $z = -3x$.
Reemplazando en $(3b)$ resulta $2x + y - 3x = 0$, de donde $y = x$.
Si reemplazamos en $(3c)$ llegaremos a $0 = 0$ con lo cual no hay condiciones extras.
Por lo tanto llegamos a que si (x, y, z) es solución, entonces tiene que ser de la forma $(x, x, -3x) = x(1, 1, -3)$.
Recíprocamente, es fácil de chequear que $(1, 1, -3)$ es solución del sistema, por lo que $\langle u,(1,1,-3)\rangle = \langle v,(1,1,-3)\rangle = \langle w,(1,1,-3) = 0$. Usando P3 del producto escalar resulta que $x(1, 1, -3)$ también es ortogonal a u, v y w, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

En conclusión, un vector no nulo ortogonal a u, v y w es $(1, 1, -3)$. No es único, el conjunto de todos los vectores ortogonales a u, v y w es $\boxed{\{x(1, 1, -3) \mid x \in \mathbb{R}\}}$, es decir los múltiplos del vector $(1, 1, -3)$.

(b) Decidir si existe un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que pertenezca a la intersección de los planos

$$P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y + z = 1\},$$
$$P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 2\},$$
$$P_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = -1\}.$$

Solución: Un vector (x, y, z) pertenece a los tres planos si y sólo si satisface las ecuaciones que definen cada uno de los planos. En otras palabras, $(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \cap P_3$ si y sólo si es solución del sistema formado por las tres ecuaciones que definen los planos:

$$\begin{cases} 4x - y + z &= 1 \quad (4a)\\ 2x + y + z &= 2 \quad (4b)\\ x + 2y + z &= \text{-1} \quad (4c)\end{cases}$$

Restando $(4b) - (4c)$ se obtiene $x - y = 3$, de donde $y = x - 3$.
Reemplazando en $(4a)$ se obtiene $4x - x + 3 + z = 1$ de donde $z = -2 - 3x$.
Reemplazando en $(4b)$ se obtiene $2x + x - 3 - 2 - 3x = 2$, de donde $-5 = 2$, lo cual es un absurdo (otras manipulaciones que se hagan al sistema llevarán a otros absurdos). Por lo tanto no existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que pertenezca a $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ y así $\boxed{P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset}$.

(c) Encontrar los coeficientes reales del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manera tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$.

SOLUCIÓN: Si $p(x) = ax^2+bx+c$, evaluando en 1, 2 y 3, de acuerdo a las condiciones pedidas, tenemos:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} p(1)=2 & \Rightarrow & a\cdot 1^2 & + & b\cdot 1 & + & c & = & 2 \\ p(2)=7 & \Rightarrow & a\cdot 2^2 & + & b\cdot 2 & + & c & = & 7 \\ p(3)=14 & \Rightarrow & a\cdot 3^2 & + & b\cdot 3 & + & c & = & 14. \end{array}$$

Nuestro objetivo es averiguar a, b y c, que como vemos, se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a+b+c &= 2 \qquad (5a) \\ 4a+2b+c &= 7 \qquad (5b) \\ 9a+3b+c &= 14 \qquad (5c) \end{cases}$$

Restando $(5b)-(5a)$ resulta $3a+b=5$, de donde $b=5-3a$.
Restando $(5c)-(5b)$ resulta $5a+b=7$, de donde $b=7-5a$.
De estas dos ecuaciones obtenemos $5-3a=7-5a$ y de aquí $2a=2$. Por lo tanto $\boxed{a=1}$, y por consiguiente, $\boxed{b=2}$ y $\boxed{c=-1}$. Se chequea fácilmente que $(1,2,-1)$ cumple el sistema de ecuaciones por lo tanto $(1,2,-1)$ es la solución del sistema.

En conclusión, el polinomio buscado es $\boxed{x^2+2x-1}$.

(3) Determinar cuáles de las siguientes matrices son MERF.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN: Recordemos que una matriz MERF debe satisfacer:
i) La primera entrada no nula de una fila es 1 (el 1 principal).
ii) Cada columna que contiene un 1 principal tiene todos los otros elementos iguales a 0.
iii) Todas las filas nulas están al final de la matriz, y
iv) En dos filas consecutivas no nulas el 1 principal de la fila inferior está más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.

Por inspección de las matrices, vemos que las primeras cuatro satisfacen la definición de MERF.

La 5ta matriz no satisface (*ii*), pues el 1 principal en la 2da fila está en la columna 3 y en esa columna hay otro elemento no nulo (en la posición $(3,3)$ hay un 1).

La 6ta matriz tampoco es MERF pues la fila 2 es nula y la fila 3 no lo es. Luego no satisface (*iii*).

(4) Dar todas las posibles matrices 2×2 con coeficientes reales que son escalón reducidas por filas.

SOLUCIÓN: Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz 2×2. Para que A sea MERF, debe ser $a=0$ o $a=1$ (cualquier otro valor de a haría que A no cumpla la condición (*i*) de ser MERF).

Si $a=0$, debe ser $b=0$ o $b=1$ (nuevamente, si no fuera así, no cumpliría (*i*)).

Si $b=0$, para cumplir (*iii*), la matriz debe ser la matriz nula $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Si $b=1$, entonces $d=0$ (por (*ii*)). Nuevamente, para cumplir (*i*), debe ser $c=0$ o $c=1$. De ser $c=1$ incumpliría (*iv*) por lo que debe ser $c=0$ y así la matriz es $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Si $a = 1$, entonces $c = 0$. Luego $d = 0$ o $d = 1$ (por (i)).

Si $d = 0$, b puede ser cualquier número real, quedando así la matriz $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Si $d = 1$, entonces $b = 0$ (por (ii)) quedando la matriz identidad $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

En conclusión, las posibles matrices 2×2 con coeficientes reales escalón reducidas por filas son

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} b \in \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

(5) (a) Encontrar una MERF equivalente por filas a cada una de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Realizaremos operaciones elementales por fila a cada una de las matrices hasta obtener una MERF como en el Teorema 2.4.3. Se puede seguir estrictamente el algoritmo allí establecido o no, no hay un sólo camino de operaciones posible para llegar a una MERF. Lo que sí, debemos estar seguros que llegamos a una MERF si no seguimos el algoritmo estrictamente.

Para ahorrar pasos a veces haremos más de una operación en el mismo paso, entiéndase que hacemos las operaciones en orden de arriba hacia abajo. Además, hacemos las operaciones en la primera fila que aparece en el paso, por ejemplo $F_2 - 2F_1$ significa que cambiamos F_2 por $F_2 - 2F_1$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1 - 3F_2]{F_2/(-5)} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Comentario: Si hubieramos seguido estrictamente el algoritmo, el primer paso habría sido dividir F_1 por $\frac{1}{2}$ y después tendríamos que haber trabajado con fracciones. En cambio detectamos el 1 en la 2da fila y la cambiamos con la primera.

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - iF_1]{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2+2i \\ 0 & (1+i) - i(-i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2+2i \\ 0 & i \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 + iF_2 \\ F_3 - iF_2}]{F_2/(2+2i)} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2/4]{F_3 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3/(-2)]{F_1 + \frac{1}{2}F_3} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}}$$

Comentario: Como con la primera matriz del ejercicio, en el segundo paso convino restar directamente $F_3 - F_2$ y después hacer $\frac{1}{4}F_2$ en vez de primero dividir y después restar el múltiplo adecuado (lo cual implicaba trabajar mucho con fracciones). En el último paso no nos salvamos de las fracciones pero resulta más cómodo visualmente primero restar $F_1 + \frac{1}{2}F_3$ y luego conseguir un 1 principal en F_3 haciendo $-\frac{1}{2}F_3$.

(b) Probar que las siguientes matrices son equivalentes por fila.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución: Llamemos A y B a las matrices. Uno podría intentar mirando las dos matrices encontrar exactamente qué operaciones elementales por fila realizarle a la primera para obtener la segunda. No obstante, es más fácil como regla general obtener una MERF de cada una y analizar con las MERF.

Realizamos entonces operaciones elementales por fila para llevar a ambas matrices a una MERF:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_1]{\substack{F_2+3F_1 \\ F_3+4F_1 \\ F_4-F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \\ 0 & 0 & 14 & 13 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_4/(-3) \\ F_2 \leftrightarrow F_4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 13 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3-14F_2 \\ F_4-15F_5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-F_3 \\ F_4+2F_3 \\ F_2-F_3 \\ F_1+4F_3 \\ F_1+5F_2}} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} = R_A$$

Comentario: Notar que no redujimos $F_1 + 5F_2$ hasta el último paso, donde conseguimos un 0 en la entrada $(2,4)$ y así nos ahorramos de tener que hacer $a_{14}+5a_{24}$. La idea es ir consiguiendo los 1 principales primero y después cuando terminamos, reducir de abajo para arriba ya que las columnas de la izquierda sólo tienen 0, entonces no se ven afectadas las otras entradas de las filas anteriores (por eso en el último paso casi que ni hay que pensar en las cuentas que se están haciendo).

Por otro lado

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} = R_B.$$

En conclusión, mostramos que $A \sim R_A$ y $B \sim R_B$ ($\sim$ significa "es equivalente por filas a"), pero como $R_A = R_B$ y $\sim$ es una relación de equivalencia, se tiene que $A \sim B$, como queríamos mostrar.

(6) Para cada una de las MERF del Ejercicio 3,

(a) asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

(b) asumir que es la matriz ampliada de un sistema no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

Solución: Las MERF del Ejercicio 3 son

$$(i)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (ii)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad (iii)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (iv)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a)

(i) El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0, \end{cases}$$

luego $x_1 = -2x_2$ y $x_3 = 0$, por lo que las soluciones del sistema son

$$\{(-2x_2, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \boxed{\{t(-2,1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}}.$$

(ii) El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 &= 0, \end{cases}$$

luego $x_1 = -2x_3$, $x_2 = 3x_3$ y las soluciones son

$$\{(-2x_3, 3x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \boxed{\{t(-2,3,1) \mid t \in \mathbb{R}\}}.$$

(iii) El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{cases} x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0, \end{cases}$$

luego las soluciones son $\{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \boxed{\{t(1,0,0) \mid t \in \mathbb{R}\}}$.

(iv) El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{cases} x_2 &= 0, \end{cases}$$

luego las soluciones son $\{(x_1, 0, x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} = \boxed{\{s(1,0,0) + t(0,0,1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}}$.

(b) Las matrices ampliadas son

$$(i)\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad (ii)\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right], \quad (iii)\ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad (iv)\ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(i) El sistema no homogéneo correspondiente es

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 0 &= 1. \end{cases}$$

Como $0 \neq 1$, el sistema $\boxed{\text{no tiene solución}}$.

(ii) El sistema correspondiente es

$$\begin{cases} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -3, \end{cases}$$

luego la solución es $\boxed{(2, -3)}$.

(iii) El sistema correspondiente es

$$\begin{cases} x_2 &= 0 \\ 0 &= 1. \end{cases}$$

Como $0 \neq 1$, el sistema $\boxed{\text{no tiene solución}}$.

(iv) El sistema correspondiente es

$$\begin{cases} x_2 &= 0, \end{cases}$$

luego las soluciones son $\boxed{\{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}}$.

(7) Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir paramétricamente el conjunto de soluciones e indicar una MERF asociada al sistema.

(a) $\begin{cases} -x-y+4z=0 \\ x+3y+8z=0 \\ x+2y+5z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-3y+5z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ -y+3z=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x-z+2t=0 \\ -x+2y-z+2t=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -x-y+4z=1 \\ x+3y+8z=3 \\ x+2y+5z=1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x-3y+5z=1 \\ 2x-3y+z=3 \\ -y+3z=1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x-z+2t=1 \\ -x+2y-z+2t=3 \\ -x+y=1 \end{cases}$

Solución:

(a) Tenemos el sistema de ecuaciones lineales $AX=0$, donde $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Sea R_A una MERF de A. Entonces $(A \mid 0)$ es equivalente por filas a $(R_A \mid 0)$. Por Teorema 2.3.6 (ojo que está mal el enunciado, es para cualquier sistema, no hace falta no homogéneo), el sistema $R_AX=0$ tiene las mismas soluciones que nuestro sistema original. Calculamos ahora una MERF de A:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_1]{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2\leftrightarrow F_3]{F_2-2F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1-F_2]{\substack{F_3/(-6) \\ F_2-9F_3 \\ F_1+4F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_A.$$

Entonces, una MERF asociada al sistema es $\boxed{R_A=\mathrm{Id}_3}$, la matriz identidad. Así, la única solución de $R_AX=0$ (y por lo tanto del sistema original) es la trivial $\boxed{(0,0,0)}$.

(d) Este sistema es $AX=Y$ donde A es la del inciso (a) e $Y=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Para calcular las soluciones, usaremos Teorema 2.3.6, es decir haremos operaciones por filas a la matriz ampliada $(A \mid Y)$ hasta llegar a $(R_A \mid Z)$, donde Z se obtiene de aplicarle las operaciones por filas que llevan A en R_A al vector Y. Entonces las soluciones del sistema serán las de $R_AX=Z$.

No hace falta reducir la matriz de nuevo, basta aplicarle las operaciones que realizamos en el inciso (a) sólo al vector Y:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_1]{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2\leftrightarrow F_3]{F_2-2F_3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1-F_2]{\substack{F_3/(-6) \\ F_2-9F_3 \\ F_1+4F_3}} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una MERF asociada al sistema es $\boxed{\mathrm{Id}_3}$ (como en (a), obviamente) y la solución del sistema es $\boxed{(-3,2,0)}$.

Comentario: Es de esperar, por Teorema 2.4.8, que si una MERF de la matriz del sistema es Id, entonces el sistema $AX=Y$ tiene solución única para todo Y, lo que justo sucede en los sistemas (a) y (d).

(b) El razonamiento es análogo a (a):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2/3]{F_3 + \frac{1}{3}F_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 + 3F_2} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_B}$$

Luego una MERF asociada al sistema es $\boxed{R_B}$ y las soluciones del sistema $BX = 0$ son las del sistema

$$\begin{cases} x - 4z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4z \\ y = 3z. \end{cases}$$

Por lo tanto las soluciones del sistema son $\boxed{\{t(4,3,1) : t \in \mathbb{R}\}}$.

(e) Como la matriz de este sistema es la misma que en (b) podemos aplicar el mismo razonamiento que en el apartado (d). Las soluciones del sistema serán las de $R_B X = Z$, donde Z es aplicarle a $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ las operaciones que llevan B en R_B:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + \frac{1}{3}F_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Notar que los siguientes pasos ($F_2/3$ y $F_1 + 3F_2$) no involucran F_3, por lo que no hace falta realizarlos. Esto es porque con las operaciones realizadas hasta aquí, vemos que las soluciones de $BX = Y$ son las mismas que el sistema asociado a la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{array}\right],$$

pero $\frac{4}{3} \neq 0$ por lo que $\boxed{\text{no hay solución}}$. Una MERF asociada es por supuesto $\boxed{R_B}$ del inciso (b).

Comentario: Recordar que si R tiene filas nulas, entonces el sistema $RX = Y$ tiene solución si y sólo si las coordenadas de Y correspondientes a las filas nulas son 0, ver página 59 del apunte. Respecto a los conjuntos de soluciones, podemos decir que como una MERF de la matriz B tiene filas nulas, entonces las soluciones de (b) son infinitas, lo que confirma el Corolario 2.4.5. Además, en (e) se da uno de los casos posibles planteados en ese mismo corolario en que el sistema $BX = Y$ no tiene solución.

(c) Aplicamos un razonamiento análogo a (a) y (b):

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 + F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2/2]{F_3 - \frac{1}{2}F_2} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_C}.$$

Luego $\boxed{R_C}$ es una MERF asociada al sistema. El sistema ahora es

$$\begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = z - 2t \\ y = z - 2t. \end{cases}$$

Así, las soluciones del sistema son

$$\{(z - 2t, z - 2t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} = \boxed{\{z(1,1,1,0) + t(-2,-2,0,1) \mid z, t \in \mathbb{R}\}}.$$

(f) Como la matriz de este sistema es la misma que en (c) podemos aplicar el mismo razonamiento que en (d) y (e). Las soluciones serán las de $R_C X = Z$, donde Z es aplicarle a $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ las operaciones que llevan C en R_C.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2/2]{F_3-\frac{1}{2}F_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una MERF asociada al sistema es $\boxed{R_C}$ (del inciso (c)). El sistema equivalente quedó

$$\begin{cases} x - z + 2t = 1 \\ y - z + 2t = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = z - 2t + 1 \\ y = z - 2t + 2. \end{cases}$$

Así, las soluciones del sistema son

$$\{(z-2t+1, z-2t+2, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} = \boxed{\{z(1,1,1,0) + t(-2,-2,0,1) + (1,2,0,0) \mid z, t \in \mathbb{R}\}}.$$

Comentario: Respecto a los conjuntos de soluciones, como R_C tiene filas nulas, las soluciones de (c) tienen que ser infinitas. Además, notemos que todas las soluciones de (f) se obtienen a partir de sumarle el conjunto de todas las soluciones de (c) a la solución particular $(1,2,0,0)$.

Comentario: Respecto a la relación entre la cantidad de parámetros, incógnitas y unos principales de una MERF asociada, la fórmula intuitiva (que más adelante podremos justificar mejor) es "cant. incógnitas = cant. parámetros + unos principales".

(8) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2, b_3) o (b_1, b_2, b_3, b_4) para los cuales cada sistema tiene solución.

$$\text{(a)} \begin{cases} x - 3y + 5z = b_1 \\ 2x - 3y + z = b_2 \\ -y + 3z = b_3 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x - z + 2t = b_1 \\ -x + 2y - z + 2t = b_2 \\ -x + y = b_3 \\ y - z + 2t = b_4 \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} -x - y + 4z = b_1 \\ x + 3y + 8z = b_2 \\ x + 2y + 5z = b_3 \end{cases}$$

Solución:

(a) La matriz ampliada del sistema es

$$[B|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & b_1 \\ 2 & -3 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right].$$

Observar que B es la misma matriz que la de los ejercicios (7) b) y e) y, por lo tanto, los pasos para reducir la matriz asociada al sistema serán los mismos. Por Teorema 2.3.6, las soluciones al sistema $BX = Y$ son las mismas que las del sistema $R_B X = Z$, donde Z se obtiene de Y al aplicarle las operaciones que llevan B en R_B.

Viendo los pasos que hicimos anteriormente para reducir B, determinamos $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ y vemos las condiciones que deben cumplir b_1, b_2 y b_3 para que haya solución.

Notar que como $R_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, el sistema tendrá solución si y sólo si $z_3 = 0$, por lo que sólo hace falta rastrear las operaciones que terminen afectando a z_3, en este caso $F_2 - 2F_1$ y $F_3 + \frac{1}{3}F_2$ (las siguientes operaciones ya no afectan a la tercera fila, que es la fila nula, por lo que no impondrán ninguna condición sobre (b_1, b_2, b_3) y no hace falta considerarlas para este ejercicio).

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + \frac{1}{3}F_2} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 + \frac{b_2 - 2b_1}{3} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema tiene solución si y sólo si $b_3 + \frac{b_2 - 2b_1}{3} = 0$, o equivalentemente $3b_3 + b_2 - 2b_1 = 0$.

Luego el conjunto de b_i's para los cuales el sistema tiene solución es

$$\boxed{\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : -2b_1 + b_2 + 3b_3 = 0\}}.$$

Comentario: Si nos pidiesen calcular las soluciones, asumiendo $-2b_1 + b_2 + 3b_3 = 0$, no queda otra que aplicarle todos los pasos al vector Y del comienzo. Pero si, en cambio, nos piden ver cuál es la condición para que haya solución, podemos ahorrarnos algunos pasos como hicimos en este inciso.

(b) La matriz ampliada del sistema es

$$[D|Y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & b_2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array}\right].$$

Análogamente al inciso (a), las soluciones del sistema serán las de $R_D X = Z$ donde R_D es una MERF equivalente por filas a D y Z se obtiene de Y aplicando los pasos que llevan D en R_D. Reducimos:

$$[B|Y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & b_2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_1 + b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_1 + b_3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4-F_2]{F_3-2F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 - b_1 - 2b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_1 - b_3 \end{array}\right]$$

Luego el conjunto de b_i's para los cuales el sistema tiene solución es

$$\boxed{\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 - b_1 - 2b_3 = 0 \wedge b_4 - b_1 - b_3 = 0\}}.$$

(c) La matriz ampliada del sistema es

$$[A|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & b_1 \\ 1 & 3 & 8 & b_2 \\ 1 & 2 & 5 & b_3 \end{array}\right].$$

Observar que A es la misma matriz que la de los ejercicios (7) a) y d). El razonamiento para resolver el ejercicio es análogo a (b) y (c).

Sin embargo, hay una diferencia fundamental. Recordar del Ejercicio (7) que una MERF equivalente por filas a A es la matriz Identidad I_3. Por lo tanto, las soluciones del sistema $AX = Y$ serán las mismas que las del sistema $\mathrm{I}_3 X = Z$ donde Z se obtiene de Y al aplicarle los pasos que llevan A en I_3. Pero el sistema $\mathrm{I}_3 X = Z$ siempre tiene solución, de hecho es única, ya que es $X = Z$, es decir $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$ y $x_3 = z_3$. Por lo tanto, no importa cuáles sean los valores de b_1, b_2, b_3, el sistema $AX = Y$ siempre tiene solución.

Luego el conjunto de b_i's para los cuales el sistema tiene solución es $\boxed{\mathbb{R}^3}$.

Comentario: Recordar el Teorema 2.4.8. Si A es equivalente por filas a I_n entonces el sistema $AX = Y$ tiene una única solución (y es un si y sólo si, pero lo que nos importa para el ejercicio es la ida).

Comentario: Respecto a la relación entre cantidad de ecuaciones en la descripción implícita, cantidad de incógnitas y unos principales, la fórmula intuitiva (más adelante la justificaremos mejor) es "cant. incógnitas=unos principales+cant. ecuaciones en la desc. impl".

(9) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Reduciendo A por filas,

(a) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = 0$.

(b) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) determinar para cuales a, el sistema $AX = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ admite solución. Para tales valores de a, calcular las soluciones del sistema.

Solución:

(a) Para encontrar las soluciones del sistema $AX = 0$, basta reducir la matriz A aplicando operaciones elementales por filas:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - \frac{8}{7}F_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1 + 3F_2]{\substack{\frac{1}{7}F_2 \\ \frac{7}{6}F_3 \\ F_2 - \frac{1}{7}F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_3$$

Como una MERF es I_3 y tenemos un sistema homogéneo $AX = 0$, el sistema tiene sólo la solución trivial $(0, 0, 0)$. Notar que todas las operaciones realizadas valen tanto para $\mathbb{R}$ como para $\mathbb{C}$, por lo que $\boxed{(0, 0, 0)}$ es la única solución para ambos casos.

Comentario: Antes de realizar el último paso ya podemos esperar que una MERF sea la matriz identidad I_3, por eso es que uno puede realizarlo rápido sin casi pensar las cuentas. Esto vale en general para matrices $n \times n$ cada vez que en la reducción llegamos a una matriz "en forma triangular" en donde los elementos de la diagonal son todos no nulos. El proceso es el siguiente: dividimos cada fila por el elemento de la diagonal para obtener un uno principal en cada fila y después empezamos en orden, desde la última fila hasta la primera, haciendo 0 todos los elementos de arriba de cada uno principal.

(b) Análogamente a lo realizado en el Ejercicio 7, repetimos ahora la secuencia de operaciones elementales realizadas a A sobre el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$. En este caso, como el sistema es no homogéneo, sí debemos realizar todas las operaciones necesarias para llevar A en I_3, incluidas las que no efectuamos en el paso anterior porque no era necesario, es decir $F_3/(\frac{6}{7})$, $F_2 - F_3$, $\frac{1}{7}F_2$ y $F_1 + 3F_2$. Entonces, al aplicar estas operaciones a Y resulta

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{8}{7}F_2} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1-\frac{8i}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-F_3]{F_3/(\frac{6}{7})} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{6}-\frac{14i}{6} \\ \frac{7}{6}-\frac{8i}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1+3F_2]{F_2/7} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+i \\ -\frac{1}{6}-\frac{1}{3}i \\ \frac{7}{6}-\frac{4}{3}i \end{bmatrix} = Z$$

Como I_3 es una MERF, la solución es única y es $X = Z$. Como vemos, la solución tiene números complejos, por lo que el sistema $\boxed{\text{no tiene solución en } \mathbb{R}}$, pero $\boxed{\text{sí tiene solución en } \mathbb{C}}$, y es $\boxed{X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+i \\ -\frac{1}{6}+\frac{1}{3}i \\ \frac{7}{6}-\frac{4}{3}i \end{bmatrix}}$.

(c) Como una MERF de A es I_3, sabemos por Teorema 2.4.8 que para cualquier a el sistema $AX = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ tiene solución (aquí estamos pensando $a \in \mathbb{R}$. Si $a \in \mathbb{C}$ entonces no hay solución en $\mathbb{R}$ pero sí en $\mathbb{C}$).
Ahora, para hallarla debemos aplicarle las operaciones al vector:

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{8}{7}F_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a-\frac{8}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-F_3]{F_3/(\frac{6}{7})} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{6}a+\frac{14}{6} \\ \frac{7}{6}a-\frac{8}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1+3F_2]{F_2/7} \begin{bmatrix} -\frac{a}{2}+1 \\ -\frac{a}{6}+\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6}a-\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la solución al sistema es $\boxed{X = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2}+1 \\ -\frac{a}{6}+\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6}a-\frac{4}{3} \end{bmatrix}}$

(10) (a) Mostrar que los siguientes sistemas no son equivalentes, estudiando sus soluciones.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -x+y=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

(b) Mostrar que las siguientes matrices no son equivalentes por fila.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

donde a, b y c son números reales.

Solución:

(a) Supongamos, buscando una contradicción, que los sistemas fueran equivalentes. Entonces, por el Teorema 2.2.3, tendrían el mismo conjunto de soluciones.

Resolvemos $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$. En este caso podemos simplemente restar la segunda ecuación con la primera ecuación y deducimos que $\boxed{x=-1}$, de donde $\boxed{y=2}$.

Resolvemos $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones obtenemos $\boxed{y=-1}$ y $\boxed{x=-2}$.

En conclusión, la solución del primer sistema es $(x, y) = (-1, 2)$ y la solución del segundo sistema es $(x, y) = (-1, -2)$.

Como los dos sistemas tienen distinto conjunto de soluciones, no son sistemas equivalentes.

(b) Llamemos A y B a las matrices. Supongamos, buscando una contradicción, que A es equivalente por filas a B.

Sean $AX = 0$ y $BX = 0$ los sistemas homogéneos asociados. Por hipótesis, $A \sim B$. Como cualquier operación elemental por fila que apliquemos al vector 0 nos devolverá el vector 0, tenemos que $(A \mid 0) \sim (B \mid 0)$. Entonces, por Teorema 2.3.6 las soluciones de los sistemas homogéneos $AX = 0$ y $BX = 0$ deben ser las mismas. Sin embargo, veamos que no es así.

Reducimos A a una MERF:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-bF_1]{F_2-aF_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_2]{F_3+cF_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_3 .$$

Como una MERF de A es I_3 sabemos que $AX = 0$ tiene sólo la solución trivial $(0, 0, 0)$.

Reducimos B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No nos hace falta seguir operando para llegar a una MERF, con las operaciones realizadas ya detectamos que no habrá un 1 principal en la tercer columna, por lo que habrá una variable libre y así tendremos infinitas soluciones.

Como los sistemas $AX = 0$ y $BX = 0$ no tienen las mismas soluciones, los sistemas no son equivalentes. Por lo tanto A no es equivalente por filas a B.

Comentario Importante: No tuvimos que preocuparnos por el valor de a, b, c pues estabamos multiplicando. Si en algún paso hubieramos tenido que dividir por alguno de ellos, por ejemplo a tendríamos que haber separado en dos casos: $a = 0$ y $a \neq 0$. Este comentario es importante para el Práctico 4.

(11) Suponga que tiene que resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Antes de empezar a hacer cuentas y apelando a la teoría, ¿Qué puede afirmar acerca del conjunto de soluciones en base a si $m > n$, $m = n$ ó $m < n$? ¿Cómo saber si es vacío o no vacío? ¿Si tiene una o varias soluciones?

Solución: Este ejercicio puede servir como un resumen o repaso de lo visto en la teoría. Dado un sistema $AX = Y$, armamos la matriz ampliada $(A \mid Y)$, reducimos hasta llegar a una MERF R de A, quedando así un sistema $RX = Z$. Por Teorema 2.3.2, $AX = Y$ y $RX = Z$ tienen las mismas soluciones.

$\boxed{\text{Caso } m = n}$ (Misma cantidad de incógnitas que de ecuaciones):

Si R no tiene filas nulas, $R = \mathrm{I}_n$, por lo que el sistema $AX = Y$ tiene una única solución: $X = Z$.

Si R tiene filas nulas, digamos las últimas $r + 1$ filas, y se cumple que alguno de los z_{r+1}, z_{r+2}, …, z_n es no nulo, entonces no hay solución.

Si $z_{r+1} = \cdots = z_n = 0$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones (dandole cualquier valor a $x_{r+1}, \ldots, x_n$ y despejando los correspondientes valores de $x_1, \ldots, x_r$ obtenemos una solución).

$\boxed{\text{Caso } m > n}$ (Más ecuaciones que incógnitas): Como debe haber un 1 principal por cada columna de R, la cantidad de unos principales de R es $\leq n < m$. Luego hay al menos una fila de R que no tiene un 1 principal, por lo que es nula. Como hay al menos una fila nula, podemos asegurar que existe Y tal que el sistema $AX = Y$ no tiene solución (ver Demostración de Corolario en Clase "Sist. de ec. lin. 3"). De haber solución, podría ser única o no, por ejemplo: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ tiene solución única (el $(0,0)$) y $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ tiene infinitas soluciones (de la forma $x(1,0)$, $x \in \mathbb{R}$).

$\boxed{\text{Caso}\, m < n}$ (Más incógnitas que ecuaciones): Como debe haber un 1 principal por cada fila de R, la cantidad de unos principales de R es $\leq m < n$ por lo que R tiene al menos una columna que no tiene un uno principal. Esto quiere decir que la correspondiente variable es libre y por lo tanto podemos asegurar que de haber solución, tiene que haber infinitas soluciones (ver Teorema en Clase "Sist. de ec. lin. 3"). Ejemplo en donde no hay solución: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ejemplo en donde hay solución: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$.

(12) Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ (no necesariamente distintos).

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, plantear un sistema de ecuaciones lineales que le permita encontrar un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales de grado $n-1$ tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \quad \dots \quad , p(\lambda_n) = b_n,$$

y dar la matriz ampliada del sistema (en el Práctico 4 volverá a aparecer).

(b) Dar una condición con la cual pueda afirmar que el sistema anterior no tiene solución.

Solución:

(a) Podemos escribir a un polinomio genérico de grado $n-1$ con coeficientes reales como $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, donde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Queremos que $p(\lambda_i) = b_i$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Esto se traduce en n ecuaciones con n incógnitas $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ de la forma $a_0 + a_1\lambda_i + a_2\lambda_i^2 \cdots + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} = b_i$, es decir el sistema es:

$$\begin{cases} a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_1^2 a_2 + \cdots + \lambda_1^{n-1} = b_1 \\ a_0 + \lambda_2 a_1 + \lambda_2^2 a_2 + \cdots + \lambda_2^{n-1} = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad = \vdots \\ a_0 + \lambda_n a_1 + \lambda_n^2 a_2 + \cdots + \lambda_n^{n-1} = b_n \end{cases}$$

La matriz ampliada es

$$[V|Y] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} & b_n \end{array}\right].$$

(La matriz V se llama *matriz de Vandermonde* y volverá a aparecer en el Práctico 4)

(b) Si para algún par de índices i, j sucede que $\lambda_i = \lambda_j$ pero $b_i \neq b_j$ entonces el sistema no tiene solución. En efecto, de haber un polinomio solución p, tendríamos que $b_i = p(\lambda_i) = p(\lambda_j) = b_j$ por lo que $b_i = b_j$, lo que es una contradicción con la condición que supusimos.

Comentario: También podemos ver la condición de la matriz. Si $\lambda_i = \lambda_j$ pero $b_i \neq b_j$, entonces restando $F_i - F_j$ tenemos un sistema equivalente donde la matriz tiene una fila nula y la correspondiente entrada de los b_i quedaría $b_j - b_i$, que es no nulo si $b_i \neq b_j$.

Veremos en el Práctico 4 que si $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$, entonces siempre vamos a poder encontrar un polinomio que satisfaga las condiciones del ejercicio.

(13)

(a) Sean $u = (1,2,1)$, $v = (-1,1,2)$ y $w = (1,1,1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Decidir si existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ no todos nulos, tales[2] que
$$xu + yv + zw = (0,0,0).$$

(b) Sean $u = (1,2,1)$, $v = (-1,1,2)$ y $w = (1,1,1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Decidir si existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales[3] que
$$xu + yv + zw = (1,2,3).$$

En caso de existir, ¿cuántas ternas (x, y, z) satisfacen lo pedido?

Solución:

(a) Para ver más claro el problema empecemos por desarrollar la combinación lineal
$$\begin{aligned}(0,0,0) &= xu + yv + zw\\ &= x(1,2,1) + y(-1,1,2) + z(1,1,1)\\ &= (x - y + z, 2x + y + z, x + 2y + z).\end{aligned}$$

Ahora bien, esta igualdad vale si y sólo si cada uno de las coordenadas de este último vector es cero. Es decir, debe valer que x, y, z son solución del sistema
$$\begin{cases} x - y + z = 0\\ 2x + y + z = 0\\ x + 2y + z = 0\end{cases}$$

Veamos las soluciones de este sistema, razonando análogamente a Ejercicio 7. Reducimos la matriz correspondiente al sistema a una MERF:
$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}F_2]{F_2\leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow[F_1+F_2]{\substack{-F_3\\ F_1-F_3}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \mathrm{I}_3\,.$$

Como una MERF de A es I_3, entonces el sistema $AX = 0$ tiene sólo la solución trivial $(0,0,0)$. Esto quiere decir que no existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $xu + yv + zw = (0,0,0)$. Dicho de otro modo, la única combinación lineal posible es la nula $(x, y, z) = (0,0,0)$.

(b) Análogamente a (a), desarrollamos la combinación lineal.
$$\begin{aligned}(1,2,3) &= xu + yv + zw\\ &= x(1,2,1) + y(-1,1,2) + z(1,1,1)\\ &= (x - y + z, 2x + y + z, x + 2y + z).\end{aligned}$$

[2] Más adelante, en el contexto de espacios vectoriales, veremos que este problema nos pregunta sobre la *(in)dependencia lineal* de los vectores u, v y w.

[3] Más adelante, en el contexto de espacios vectoriales, veremos que este problema nos pregunta sobre si un vector pertenece o no al espacio generado por los vectores u, v y w, o dicho de otro modo, si se puede escribir como *combinación lineal* de ellos.

Entonces, de existir x, y, z, debe valer que x, y, z son solución del sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

La matriz del sistema es la misma que la de (a). Como obtuvimos I_3 como una MERF asociada, entonces el sistema $AX = Y$ tiene una única solución, con lo cual hemos respondido ya a lo que nos preguntaba el enunciado.

Comentario: Si nos pidieran dar la solución explícitamente, debemos aplicarle los pasos que hicimos para reducir la matriz a I_3 al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Para el interesado, la respuesta sería $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2)$.

(14) Dar todas las posibles matrices 2×3 con coeficientes reales escalón reducidas por filas.

Solución: El procedimiento es análogo a Ejercicio 4. Una matriz 2×3 genérica se escribe $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Un posible análisis por casos teniendo en cuenta las condiciones para que A sea MERF es el siguiente:

Supongamos $a = 0$, $b = 0$.

Si $c = 0$ entonces obtenemos $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y si $c = 1$ entonces obtenemos $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Supongamos $a = 0$, $b = 1$.

Si $f = 0$ entonces tenemos $\begin{bmatrix} 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$ y si $f = 1$ entonces tenemos $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Supongamos $a = 1$.

Si $e = 0$ entonces

Si $f = 0$ tenemos $\begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b, c \in \mathbb{R}$; y si $f = 1$ tenemos $\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

Si $e = 1$ obtenemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & f \end{bmatrix}$, donde $c, f \in \mathbb{R}$.

En conclusión, las MERF 2×3 posibles con coeficientes reales son:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & f \end{bmatrix}}$$

(15) Repita el ejercicio (7) pero con el sistema: $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

Solución:

El procedimiento es análogo a Ejercicio 7. Planteamos la matriz del sistema (como es homogéneo podemos olvidarnos de la columna de 0s) y la reducimos hasta llegar a una MERF:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}F_2]{F_3 - \frac{1}{2}F_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto las soluciones del sistema son

$$\boxed{\left\{\left(\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}}.$$

(16) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2) o (b_1, b_2, b_3) para los cuales cada sistema tiene solución.

(a) $\begin{cases} x + y = b_1 \\ 2x + 2y = b_2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y = b_1 \\ 2x - 2y = b_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y + z = b_1 \\ 3x + y + 4z = b_2 \\ -x + 3y + 2z = b_3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x - y + 2z + w = b_1 \\ 2x + 2y + z - w = b_2 \\ 3x + y + 3z = b_3 \end{cases}$

Solución: Se procede análogo a Ejercicio 8. Miramos qué pinta tiene una MERF de cada una de las cuatro matrices y deducimos si hay o no condiciones para (b_1, b_2).

$$(a) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como la MERF a la que llegamos tiene la segunda fila nula, luego el conjunto de vectores (b_1, b_2) para los cuales hay solución es $\{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_2 - 2b_1 = 0\}$.

$$(b) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1 - F_2]{-\frac{1}{4}F_2} \mathrm{I}_2\,.$$

Como la MERF a la que llegamos es I_2, el conjunto de vectores (b_1, b_2) para los cuales hay solución es todo $\mathbb{R}^2$.

$$(c) \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_1]{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - 3F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - \frac{1}{2}F_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No hace falta seguir reduciendo la matriz hasta una MERF. Vemos que la única fila nula será la tercera. Para ver la condición sobre (b_1, b_2, b_3) debemos aplicarle las operaciones que hicimos hasta ahora y mirar la tercera coordenada:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_1]{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} -b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - 3F_1} \begin{bmatrix} -b_3 \\ b_2 + 3b_3 \\ b_1 + 2b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - \frac{1}{2}F_2} \begin{bmatrix} -b_3 \\ b_2 + 3b_3 \\ b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 \end{bmatrix}.$$

Notar que $b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 = 0$ es equivalente a $2b_1 - b_2 + b_3 = 0$. Luego el cjto de (b_1, b_2, b_3) tales que hay solución es $\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2b_1 - b_2 + b_3 = 0\}$.

$$(d) \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como en (c), no hace falta seguir reduciendo, la única fila nula que habrá es la tercera.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - b_1 - b_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ El cjto de (b_1, b_2, b_3) tales que hay solución es $\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \mid b_3 - b_1 - b_2 = 0\}$.

(17) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2021 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2022 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2023 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2120 \end{bmatrix}$.

(a) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

(b) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

(a) Vamos a reducir la matriz A para encontrar una MERF. Notemos que para $2 \leq i \leq 100$, se tiene que $F_i = F_{i-1} + (1\,1 \cdots 1)$. Entonces $F_i - F_{i-1} = (1\,1 \cdots 1)$. Esto nos dice que podemos reducir restando $F_i - F_{i-1}$. Realizamos estas operaciones empezando por $F_{100} - F_{99}$, $F_{99} - F_{98}$ y así siguiendo hasta $F_2 - F_1$; y luego serán evidentes las operaciones que hay que hacer para llevarla a una MERF.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2021 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2022 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2023 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2120 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 - F_2 \\ F_2 - F_1}]{\substack{F_{100}-F_{99} \\ \vdots}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2021 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2 \\ \vdots \\ F_{100} - F_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2021 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 - F_2 \\ F_1 \leftrightarrow F_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2020 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \cdots & -2019 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2020 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

la MERF a la que llegamos nos dice que entonces las soluciones del sistema son

$$\left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{2021}) \in \mathbb{R}^{2021} \mid x_1 = \sum_{j=3}^{2021} (j-2)x_j,\ x_2 = -\sum_{j=3}^{2021} (j-1)x_j \right\}.$$

(b) Para encontrar las soluciones de $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ le tenemos que aplicar las operaciones que le aplicamos a A al vector de unos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 - F_2 \\ F_1 \leftrightarrow F_2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto las soluciones son

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_{2021}) \in \mathbb{R}^{2021} \mid x_1 = -1 + \sum_{j=3}^{2021} (j-2)x_j,\ x_2 = 1 - \sum_{j=3}^{2021} (j-1)x_j \right\}$$

(18) Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución unica, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + ky - z & = & 1 \\ -x + y + k^2 z & = & -1 \\ x + ky + (k-2)z & = & 2 \end{cases}$$

Solución: Sea $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Planteamos la matriz del sistema (no ampliada), la reducimos hasta una MERF:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & k^2-1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}.$$

Antes de seguir reduciendo, debemos distinguir dos casos:

Supongamos que $k=-1$. Nos queda la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para saber si hay una, ninguna o infinitas soluciones, no hace falta seguir reduciendo pues vemos que habrá una única fila nula. Basta con aplicarle F_2+F_1 a Y para saber si la segunda coordenada es 0 o no (la operación F_3-F_1 no modifica la segunda coordenada). El vector obtenido es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ cuya segunda coordenada sí es nula. Por lo tanto si $k=-1$ hay solución, y como hay una fila nula tiene que haber infinitas soluciones.

Supongamos que $k \neq -1$. Seguimos reduciendo, ahora podemos dividir la segunda fila por $k+1$ ya que es no nulo:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & k^2-1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{k+1}F_2} \begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}.$$

Nuevamente debemos distinguir dos casos:

Supongamos que $k=1$. Nos queda la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vemos que no hace falta seguirla reduciendo, ya que sólo habrá una única fila nula. Debemos entonces aplicarle la operación F_3-F_1 al vector Y y ver si obtenemos que la tercera coordenada es nula o no (las otras operaciones F_2+F_1 y $\frac{1}{2}F_2$ no modifican la tercera coordenada). El vector obtenido es $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ cuya tercera coordenada no es nula, por lo tanto si $k=1$ no hay solución.

Supongamos que $k \neq 1$. Seguimos reduciendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{k-1}F_3} \begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dada la pinta triangular de la matriz y que sus elementos diagonales son no nulos, ya hemos visto que una MERF de A es I_3 luego hay solución única.

En resumen:

$k=-1$ hay infinitas soluciones.

$k=1$ no hay solución.

$k \neq 1, -1$ hay única solución.

(19)

(a) En cada caso decidir si los sistemas son equivalentes y si lo son, expresar cada ecuación del primer sistema como combinación lineal de las ecuaciones del segundo.

(i) $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ $\quad$ (ii) $\begin{cases} -x-y+4z=0 \\ x+3y+8z=0 \\ \frac{1}{2}x+y+\frac{5}{2}z=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x-z=0 \\ y+3z=0 \end{cases}$

(b) Mostrar que los siguientes sistemas no son equivalentes pero poseen el mismo conjunto de soluciones.

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y=0 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

(c) ⓐ Probar que si dos sistemas de ecuaciones lineales en dos incógnitas homogéneos tienen las mismas soluciones entonces son equivalentes.

Solución:
(a)
(i) Sabemos que sistemas equivalentes tienen mismas soluciones. Además, como es un sistema 2×2 homogéneo, item (c) nos dice que si tienen las mismas soluciones entonces son equivalentes.

Resolvemos ambos sistemas. Como son 2×2 podemos simplemente despejar, por ejemplo sumando las ecuaciones en el primero obtenemos $x=0$ y, por lo tanto, $y=0$. En el segundo, restamos 1ra con 2da y obtenemos $x=0$, de donde $y=0$. Como tienen las mismas soluciones, son equivalentes.

Para escribir las ecuaciones del primer sistema como combinación lineal de las ecuaciones del 2do, podemos olvidarnos de la columna de ceros (pues todo es homogéneo) y entonces deberíamos hallar dos pares distintos (a,b) tales que

$$x-y=a(3x+y)+b(x+y), \quad 2x+y=a(3x+y)+b(x+y),$$

lo que es equivalente a resolver dos sistemas

$$\begin{cases} 1=3a+b \\ -1=a+b \end{cases}, \quad \begin{cases} 2=3a+b \\ 1=a+b \end{cases}.$$

Podemos resolverlos de modo simultáneo (ya que ambos les corresponde la misma matriz), planteando la siguiente matriz ampliada y resolviendo:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{F_1-3F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}F_2]{F_1+\frac{1}{2}F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Las combinaciones lineales son $x-y=(3x+y)-2(x+y)$ y $2x+y=\frac{1}{2}(3x+y)+\frac{1}{2}(x+y)$.

Para escribir las ecuaciones del 2do sistema en términos del 1ro el procedimiento es análogo.

$$3x+y=a(x-y)+b(2x+y), \quad x+y=a(x-y)+b(2x+y) \implies \begin{cases} 3=a+2b \\ 1=-a+b \end{cases}, \quad \begin{cases} 1=a+2b \\ 1=-a+b \end{cases}$$

Planteamos la matriz ampliada y resolvemos en simultáneo:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2+F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{F_1-2F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Las combinaciones lineales son $3x+y=\frac{1}{3}(x-y)+\frac{4}{3}(2x+y)$ y $x+y=-\frac{1}{3}(x-y)+\frac{2}{3}(2x+y)$.

(ii) Estudiamos las soluciones de ambos sistemas:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_1]{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+\frac{1}{2}F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3-\frac{1}{4}F_2 \\ \frac{1}{2}F_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Por la pinta triangular de la matriz y dado que los elementos de la diagonal son no nulos, vemos que una MERF del sistema es I_3 por lo que la única solución es la trivial. En cambio, en el segundo sistema hay más incógnitas que ecuaciones. Por lo visto en el Ejercicio 11, sabemos que habrá infinitas soluciones (recordar que un sistema homogéneo siempre tiene al menos una solución, la trivial). Como el conjunto de soluciones es distinto, los sistemas no pueden ser equivalentes.

(b) Ambos sistemas tienen el mismo conjunto de soluciones: ninguna (pues debería cumplirse $0 = 1$ en ambos casos, lo cual es absurdo). Sin embargo, los sistemas no son equivalentes. En efecto, si lo fueran, podríamos escribir $x+y = 0$ como una combinación lineal de $x + 2y = 0$ y $x + 2y = 1$, con lo cual existirían a y b tales que $x + y = 0$ se escribe como $a(x + 2y = 0) + b(x + 2y = 1)$. Desarrollando la ecuación, debería ser la ecuación $(a + b)x + y(2a + 2b) = b$ igual a la ecuación $x + y = 0$. Por lo tanto $b = 0$, $a = 1$ y $2a = 1$ lo cual es un absurdo. Por lo tanto no son equivalentes.

Comentario: Este ejemplo (pavo en algún sentido) muestra que es falso el enunciado "dos sistemas con mismo conjunto de soluciones son equivalentes". Sin embargo, es cierto el siguiente enunciado "dos sistemas con mismo conjunto **no vacío** de soluciones son equivalentes". No veremos la prueba en general, el item (c) es el caso particular 2×2 homogéneo.

(c) Supongamos que $AX = 0$ y $BX = 0$ tienen las mismas soluciones, A, B matrices 2×2. Sean R_A y R_B MERFs de A y B respectivamente. Por Teorema 2.3.6 y la hipótesis del ejercicio, sabemos que $R_AX = 0$ y $R_BX = 0$ tienen las mismas soluciones. Si logramos probar que $R_A \sim R_B$ entonces tendríamos $A \sim R_A \sim R_B \sim B$, con lo cual $(A \mid 0) \sim (B \mid 0)$ lo cual diría que los sistemas $AX = 0$ y $BX = 0$ son equivalentes.

Por Ejercicio (4), sabemos que las posibles MERFs 2×2 son:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_b = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; b \in \mathbb{R}, \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veamos que los conjuntos de soluciones de los sistemas homogéneos asociados a cada una de esas MERF son distintos.

$\mathbf{0}X = 0$ tiene como solución todo $\mathbb{R}^2$.

$R_1X = 0$ tiene como solución $\{x(1, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$R_bX = 0$ tiene como solución $\{y(-b, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

$\mathrm{I}_2\, X = 0$ tiene como solución sólo al $(0, 0)$.

Estos 4 conjuntos son distintos, por lo que si $R_AX = 0$ y $R_BX = 0$ tienen las mismas soluciones, es por que $R_A = R_B$. Esto implica $A \sim B$ como queríamos.

(20) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz asociada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

Solución: La afirmación es que si a, b, c, d son todos no nulos entonces el sistema tiene sólo la solución trivial $(0, 0, 0, 0)$ y si alguno es nulo entonces tiene infinitas soluciones.

Si a, b, c, d son todos no nulos, podemos dividir en cada fila por uno de ellos para conseguir un 1 principal en la diagonal. Luego, en la cuarta columna restando múltiplos adecuados hacemos 0 todas las $*$ de esa columna. Notar que las demás entradas de la cuarta fila son 0 por lo que no modifican las otras filas. Luego repetimos lo mismo con el 1 principal de la tercera columna y con el 1 principal de la segunda. Así, llegamos a que una MERF es I_4 y por lo tanto el sistema tiene sólo la solución trivial $(0, 0, 0, 0)$.

Ahora analicemos el caso en donde a, b, c o d son nulos. Recordemos que si hay una fila nula, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

Si $d = 0$ entonces la cuarta fila es nula. Si $d \neq 0$ entonces restando múltiplos adecuados hacemos 0 las $*$ de la última columna. Ahora, si $c = 0$, nos quedaría una fila nula (pues la $*$ de la derecha ahora es 0). Si $c \neq 0$ hacemos 0 las $*$ de la tercera columna, quedando así la segunda fila $(0\,b\,0\,0)$. Si $b = 0$ la fila es nula. Si $b \neq 0$ hacemos 0 la $*$ de la segunda columna y ahora queda la primera fila $(a\,0\,0\,0)$ por lo que si $a = 0$ la fila es nula.

Conclusión: si en el proceso de reducción para resolver un sistema homogéneo nos queda la matriz de la pinta triangular como en el ejercicio, el sistema tendrá sólo la solución trivial si todos los elementos de la diagonal son no nulos, e infinitas si alguno de ellos es nulo. Por supuesto este análisis vale para sistemas $n \times n$ (probaremos más formalmente este hecho en general usando "Determinantes").

(21) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz ampliada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & * & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & * \end{array}\right)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

Solución: En este ejercicio no hay mucha conclusión que podamos sacar. Lo más importante, es que si $c \neq 0$ entonces el sistema no tiene solución. Si $c = 0$, hay que ir analizando los números que hay en las $*$, por ejemplo si $d = 0$, la $*$ de la entrada $(4, 4)$ debería ser 0. Lo único que podemos asegurar, dado que hay al menos una filas nula, es que si existe al menos una solución, entonces hay infinitas.