Algebra I
Notas de Clase

J.C. H. A.

14-03-2023

Índice general

Capítulo 1

Repaso

1.1. Cuerpos

Estudiaremos sistemas de eucaciones lineales, como encontrar las soluciones, algebra de matrices (objetos que vienen asociados a un sist de ecuaciones lineales), una funcion mas absracta que son los espacios vectoriales y transformaciones lineales.
Todo se resolvera mediante sistema de ecuaciones lineales. Estos son un nuemero finito de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots &= \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Coeficientes de lsistema: $a_{11}, \ldots, a_{mn}$
Terminos independientes, $b_1, \ldots, b_m$
Algunos ejemplos de cuerpos son $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$, p primo.

Definición 1.1.1: Cuerpo

Un **cuerpo** es un conjunto F junto con dos operaciones (binarias)

- $+ : F \times F \longrightarrow F$,
- $\cdot : F \times F \longrightarrow F$,

Observación 1.1.1 Notacion

- $+(a, b) \mapsto a + b$
- $\cdot(a, b) \mapsto a \cdot b$ o ab

Estas operaciones satisfacen los siguientes axiomas.
Axiomas:

(1) Asociatividad de +:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad \forall a,b,c, \in F..$$

(2) Conmutatividad de +

$$a+b = b+a, \quad \forall a,b \in F..$$

(3) Existe $0 \in F$ tal que

$$a+0 = a, \quad \forall a \in F.$$

(4) $\forall a \in F, \exists b \in F : a+b = 0$

(5) Asociatividad de $*$:

$$(ab)c = a(bc), \forall a,b,c \in F.$$

(6) Conmutatividad de $*$:

$$ab = ba, \forall a,b \in F.$$

(7) Existe $1 \neq 0$ tal que

$$a \cdot 1 = a, \forall a \in F.$$

(8) $\forall a \in F \; a \neq 0, \exists c \in F : ac = 1.$

(9) Distributividad:

$$a(b+c) = ab+ac \quad \forall a,b,c \in F..$$

Nota:-

En los cuerpos no existe relacion de orden.

Ejemplo 1.1.1 (Ejemplo finito, $F_2 = \{0,1\}$ con las siguientes operaciones)

Para la suma

- $0+0=0$
- $0+1=1$
- $1+0=1$
- $1+1=0$

Nota:-

Si

$$\begin{aligned} 1+1 &= 1 \\ 1+1+(-1) &= 1+(-1) \\ 1+0 &= 0 \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

Absurdo pues por axioma 8, el neutro de la suma y el producto deben ser distintos.

Para el producto

- $0 * 0 = 0$
- $0 * 1 = 0$
- $1 * 0 = 0$
- $1 * 1 = 1$

Nota:-

$$0 \cdot a = 0, \quad \forall a \in F,$$

cualquiera sea F cuerpo.

Nota:-

Demostración:

$$
\begin{aligned}
0 \cdot a &= (0 + 0) \cdot a \\
0 \cdot a &= 0 \cdot a + 0 \cdot a \\
0 \cdot a + (-0 \cdot a) &= 0 \cdot a + (0 \cdot a + (-0 \cdot a)) \\
0 &= 0 \cdot a + 0 \\
0 &= 0 \cdot a
\end{aligned}
$$

😄

1.2. Propiedades de los cuerpos:

Los axiomas en principio son axiomas de existencia. Estas son propiedades que se derivan de los axiomas:

(1) 0 y 1 son unicos. Tambien, $\forall a \in F$, el opuesto de a es unico (se denota $(-a)$) y si $a \neq 0$, el inverso de a es unico (se denota (a^{-1})).

(2) "Puedo asociar el $-$"

$$-(ab) = (-a)b = a(-b).$$

(3) $a, b \neq 0$,, entonces $ab \neq 0$ y $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Observación 1.2.1 Notacion:

$$a, b \in F : b \neq 0, \quad ab^{-1} = \frac{a}{b}.$$

Ejemplo 1.2.1 ($\frac{1}{a} = a^{-1}$)

1.3. Numeros complejos:

Definir la estructura del cuerpo es definir las dos operaciones que hacen al cuerpo. Entonces:

En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$, que denotaremos por $\mathbb{C}$, definimos las operaciones

- $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$
- $(a,b) \cdot (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$

Notemos que podemos identificar a $\mathbb{R}$ con $\{(a, 0 : a \in \mathbb{R})\}$
Ademas, si tengo

- $1 = (1,0),\ i = (0,1) \in \mathbb{C}$

Para todo $z \in \mathbb{C} : z = (a,b)$ se cumple que

$$z = a \cdot 1 + b \cdot i = a + ib.$$

Notemos que sucede si hago i^2

$$\begin{aligned} i^2 &= (0,1) \cdot (0,1) \\ &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= (-1, 0) \end{aligned}$$

Luego $i^2 = -1$

Nota:-

La multiplicacion de numeros complejos da otro numero complejo.
Sea $z = a + ib, \quad w = a' + ib'$

$$zw = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Nota:-

Debido a que cada numero complejo queda perfectamente determinado por la tupla (a,b) (pues tienen la forma $z = a + ib$) puedo representarlos en el plano

1.4. Operaciones con complejos

El modulo de $z = a + ib,\ a,b \in \mathbb{R}$ es:

$$|z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

Observación 1.4.1 $|z| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0 + 0i = 0$

El conjugado de $z = a + ib,\ a,b \in \mathbb{R}$ es

$$\overline{z} = a - ib.$$

Observación 1.4.2 $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$(i.e. : $b = 0$)

Contenido:

$$
\begin{aligned}
z\overline{z} &= \\
&= (a+ib)(a-ib) = (a \cdot a + b \cdot b) + i(a(-b) + ab) \\
&= a^2 + b^2 \\
&= |z|^2
\end{aligned}
$$

Proposición 1.4.1 Con las operaciones definidas anteriormente, $\mathbb{C}$ es un cuerpo.

Nota:-

Los elementos de $\mathbb{C}$ se llaman **numeros complejos**.

Demostración: (Idea).
Los axiomas de

- asociatividad (para + y ·)
- conmutatividad (para + y ·), y
- distributividad

se prueban de manera rutinaria.
Se verifica tambien que

- $0 = (0, 0i) = (0, 0)$ es neutro para +
- $1 = (1, 0i) = (1, 0)$ es neutro para ·
- El opuesto de $z = a + ib$ es $-z = -a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

Usando la relacion: $z\overline{z} = |z|^2$, podemos probar que $\forall z = a + ib \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 b^2} \quad a, b, \in \mathbb{R}.$$

😄

Observación 1.4.3 Notacion:

$$
\begin{aligned}
\frac{a+ib}{a'+ib} &= (a+ib)(a'+ib')^{-1} \\
&= (a+ib)\left(\frac{a'}{a'^2+b'^2} - i\frac{b'}{b'^2+a'^2}\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.4.1 (Como expreso $\frac{1+2i}{2-i}$ en la forma $a + ib : a, b \in \mathbb{R}$?)

$$
\begin{aligned}
\frac{1+2i}{2-i} &= (i+2i)(2-i)^{-1} \\
&= (1+2i)\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right) \\
&= \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}i\right) \\
&= 0+1i \\
&= i
\end{aligned}
$$

La ecuacion $x^2+1=0$, que no tiene solucion en $\mathbb{R}$, **ahora si tiene solucion en $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$** . De hecho $i, -i$ son dos soluciones de esta ecuacion.

1.5. Identidad de Euler

$$e^{i\pi=-1}.$$

De forma mas general

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\ sen\theta.$$

1.6. Forma polar de un Numero Complejo no Nulo

Supongamos $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$.
z queda perfectamente determinado tanto por el par (a, b) como por el par (θ, r) donde r es el modulo de z. Es decir

$$\frac{z}{|z|} = \frac{z}{r}.$$

$$\frac{z}{r} = e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Entonces,

$$z = re^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_{>0}, \theta \in [0, 2\pi].$$

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones lineales

Sea F un cuerpo (e.g. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \dots$) un sistema de ecuaciones lineales (*), de m ecuaciones con n incognitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Donde $a_{ij} \in F$, $i \leqslant i \leqslant m, i \leqslant j \leqslant n \quad$ y $\quad b_i \in F$, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

Definición 2.0.1: Sistema homogeneo

El sistema se dice homogeneo si todos los terminos independientes son iguales a cero, es decir

$$b_i = b_2 = \cdots = b_m = 0.$$

Nota:-

Una solucion del sistema (*) es una n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ $x_i \in F$ tal que satisface todas las ecuaciones.

Observación 2.0.1

Si el sistema es homogeneo, siempre admite al menos una solucion $(0, 0, \dots, 0)$. Esta se dice la solucion trivial.

Estudiaremos el metodo de **elminiacion de variables** para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
Una combinacion lineal de las ecuaciones de (*) es una ecuacion que se obtiene de las dadas multiplicando cada una por un **escalar** y luego sumandolas.

$$c_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + c_2(a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots + c_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) = c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_mb_m.$$

$\uparrow$ CORREGIR INDICES.
En otras palabras:

$$(c_1a_{11}+c_2a_{21}+\dots c_ma_{m1})x_1+c_1(a_{12}+\cdots+c_ma_{m2})x_2+\cdots+(c_1a_{1n}+\cdots+c_ma_{mn})x_n=c_1b_1+\cdots+c_mb_m$$

Dado otro sistema (**)

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1+\cdots+a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{21}x_1+\cdots+a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{m1}x_1+\cdots+a'_{mn}x_n &= b'_m \end{aligned}$$

Decimos que (**) es equivalente al (*) si toda ecuacion del (**) es combinacion lineal de las ecuaciones de (*) y reciprocamente toda ecuacion de (*) es combinacion lineal de las ecuaciones de (**).

Observación 2.0.2

Esto define realmente una relacion de equivlencia entre sistemas lineales con n incognitas.

Proposición 2.0.1

Dos sistemas de ecuaciones equivalentes tienen el mismo conjunto de soluciones

Demostración: Por simetria basta probar que si (*) y (**) son equivalentes entonces toda solucion de (*) es solucion de (**)

Para esto recordamos que toda ecuacion de (**) es de la forma

$$c_1(a'_{11}x_1+\cdots+a'_{1n}x_n)+c_2(a'_{21}x_1+\cdots+a'_{2n}x_n)+\cdots+c_m(a'_{m1}x_1+\cdots+a'_{mn}x_n)=c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_mb_m.$$

para ciertos $a_{11},\dots,a_{mn}\in F$

Luego es dado que si $(x_1,\dots,x_n)$ es solucion de (*), entonces satisface esta ecuacion. 😄

Nota:-

Sistemas equivalentes que se obtienen por combinaciones lineales de uno con el otro tambien poseen las mismas soluciones.

Ejemplo 2.0.1

Consideramos los sistemas

$$\begin{aligned} x-y+2z&=1 \\ y+z&=0 \end{aligned}$$

$$2x + y = -1$$
$$x - z = 1$$

Las soluciones del primer sistema son $(1 + 3t, t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$. Luego $(1, 0, 0)$ es solucion del primer sistema con $t = 0$. Sin embargo no es solucion del segundo. Luego **NO** son sistemas equivalentes por la proposicion anterior.

Nota:-

Usar t y no y viene porque y esta "parametrizando las soluciones de mi sistema".

En el primer sistema:
A la primera ecuacion le sumamos la segunda y conservamos la segunda. Me queda

$$x + 3z = 1$$
$$y + z = 0$$

Si hago la suma de la primera ecuacion $+(-1)$ por la segunda y conservo la segunda recupero el sistema original.
Luego los sistemas si son equivalentes, es decir comparten las mismas soluciones.
En el nuevo sistema $x = 1 - 3z$ e $y = -z$ y z puede tomar cualquier valor $t \in \mathbb{R}$.
Luego las soluciones del primer sistema son $(1 - 3t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. O tambien $(1 + 3s, s, -s)$ $s \in \mathbb{R}$

Nota:-

Notar como "las ternas" son distintas, pero como los parametros recorren todo $\mathbb{R}$, ambos representan los mismos conjuntos

Definición 2.0.2

Sean m, $n \in \mathbb{N}$. Una matriz $m \times n$ con coeficientes en F es una funcion

$$A = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to F.$$

Representaremos a A como una ordenacion rectangular

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ & \vdots & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

donde $A_{ij} = A(i, j) \quad \forall i \leqslant i \leqslant m \; i \leqslant j \leqslant n$.
Llamaremos coeficientes de A a $A_{ij} \in F, \quad \forall i, j$.

Nota:-

A_{ij} fila i columna j.

Ejemplo 2.0.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Llamaremos $F^{m\times n}$ al conjunto de todas las matrices, es decir

$$F^{m\times n} = \{A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}\} \longrightarrow F \text{ matriz} .$$

Definición 2.0.3: Matriz columna

Tendra la forma

$$(A_{11} \dots A_{m1}) \longrightarrow F^{m\times 1}.$$

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Y a la matriz

Observación 2.0.3 Notacion

Indicaremos al sistema como

$$AX = Y, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Observación 2.0.4

Combinaciones lineales de ecuaciones ≡ a hacer combinaciones lineales de las filas de las matrices (coeficiente a coeficiente)

Vamos a considerar las siguientes operaciones elementales por filas tales que

$$e : A \rightsquigarrow e(A).$$

donde e es

(1) Multiplicar una fila por $c \in F, c \neq 0$.

(2) A una fila i le sumo c veces la fila j con $i \neq j$ y c cualquier escalar.

(3) Permutar dos filas.

Ejemplo 2.0.3

Tomo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea $e_1 = F_1 \cdot \frac{1}{2}$

$$e_1(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea $e_2 = F_1 \cdot F_1 + (-2)F_3$

$$e_2(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sea $e_3 = F_1 \leftrightarrow F_2$

$$e_3(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nota:-

Sea cualquiera la operacion elemental e, esta es una combinacion lineal de filas de la matriz A, luego al aplicar las operaciones elementales mantengo las soluciones porque mantengo matrices que representan sistemas equivalentes.

2.1. Repaso

Dada $A \in F^{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ & \vdots & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad A_{ij} \in F.$$

Tenemos operaciones elementales e tales que $A \rightsquigarrow e(A)$ de tres tipos

- Multiplicar una fila de A por $c \in F, c \neq 0$.
- Reemplazar la F_i (fila i) por $F_i + cF_j$, $c \in F, j \neq i$.
- Permutar dos filas de A. $F_i \leftrightarrow F_j$.

2.2. Operaciones elementales por filas

Proposición 2.2.1

Sean $A, B \in F^{m \times n}$. Supongamos que

$$B = e(A), \text{ donde } e \text{ es una operacion elemental por filas }.$$

Entonces existe una operacion elemental por filas e' que es del mismo tipo de e (1,2,3) tal que

$$A = e'(B).$$

Demostración: Consideramos cada posible tipo de operacion elemental e.

Si e es de tipo 1) e multiplica la fila i por $c \neq 0$.

Como $c \neq 0 \Longrightarrow \exists c^{-1} \in F$ tal que

$$c^{-1}c = 1.$$

Sea e' la operacion elemental por filas que multiplica la fila i por c^{-1}.

Entonces

$$e'(B) = e'(e(A)) = e'(A).$$

Si e es de tipo 2) e reemplaza la fila i por $F_i + cF_j$, $i \neq j$.

Sea e' la operacion elemental por filas que reemplaza la fila i por $F_i + (-c)F_j$.

Entonces e' es una operacion elemental del mismo tipo que e y

$$e'(B) = e'(e(A)) = A.$$

Si e es de tipo 3) $e : F_i \leftrightarrow F_j$. Entonces

$$e(B) = A.$$

😃

Definición 2.2.1

Dadas dos matrices $A, B \in F^{m\times n}$ decimos que B es equivalente por filas a A si B se obtiene de A mediante un numero finito de operaciones elementales por filas, es decir

$$B = e(e_k(e_{k-1}(\ldots e_2(e_1(A))).$$

Ejemplo 2.2.1

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A \xrightarrow{F_1-2F_3} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1/(-7)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{7} & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = B \text{ es equivalente por filas a } A..$$

Nota:-

A es equivalente por iflas a $B \Leftrightarrow$ los sistemas homogeneos asociados tienen los mismos conjuntos de soluciones.

Proposición 2.2.2

La equivalencia por filas define una relacion de equivalencia en el conjunto $F^{m\times n}$.

Demostración: Hay que demostrar que la relacion es reflexiva, simetrica, y transitiva.
Reflexiva: A es equivalente por filas a A pues $A = e(A)$ donde e es multiplicar la fila 1 por $c = 1 \neq 0$
Simetrica: Por la proposicion anterior si $B = e_k(e_{k-1}(\ldots e_2(e_1(A))))$ existen operaciones elementales por filas $e'_k, e_k - 1', \ldots, e'_2, e'_1$ tales que

$$e'_1(e'_2(\ldots e'_k(B))) = A \quad \therefore A \text{ es equivalente a } B.$$

Transitividad: Supongamos que B es equivalente a A y C es equivalente a B. Queremos probar ver que C equivalente a A.

$$e_k(e_{k-1}(\ldots e_2(e_1(B)))) = e_k(e_{k-1}(\ldots e_2(e_1(\underbrace{e'_k(e'_{k-1}(\ldots e'_2(e'_1(A)))}_{B}))))) = C.$$

Esto prueba que C es equivalnte a A.

😃

Nota:-

$A \in F^{m\times n}$: sistema de ecuaciones homogeneo:

$$AX = 0 : \begin{cases} A_{11}X_1 & + & A_{12}X_2 & + & \ldots & + & A_{1n}X_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & & & = & \vdots \\ A_{m1}X_1 & + & A_{m2}X_2 & + & \ldots & + & A_{mn}X_n & = & 0 \end{cases}.$$

Teorema 2.2.1

Sean $A, B \in F^{m\times n}$. Si A es equivalente por filas a B entonces A y B tienen el mismo conjunto de soluciones.

Nota:-

Dos sistemas son equivalentes si cada ecuacion de uno de ellos es combinacion lineal de las ecuaciones del otro.

Demostración: Por hipotesis $B = e_k(e_{k-1}(\ldots(e_2(e_1(A)))))$ con $e_1, \ldots, e_k$ operaciones elementales por filas. Basta probar el enunciado cuando

$$B = e(A) \quad e \text{ operacion elemental por filas.}\ .$$

Distinguimos los distintos tipos para e:

Tipo 1) $e : F_1 \longrightarrow cF_j \quad c \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & & A_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

El sistema $BX = 0$ es

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{11}X_1 & + & A_{12}X_2 & + & \cdots & + & A_{1n}X_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \\ cA_{i1}X_1 & + & cA_{i2}X_2 & + & \cdots & + & cA_{in}X_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \\ A_{m1}X_1 & + & A_{m2}X_2 & + & \cdots & + & A_{mn}X_n & = & 0 \end{array}.$$

La i-esima ecuacion de $BX = 0$ es la $i-$esima ecuacion de $AX = 0$ multiplicado por C. Y las otras ecuaciones son las mismas de $AX = 0$

$\therefore$ $AX = 0$ y $BX = 0$ son equivalentes, pues $A = e'(B)$, con $e' : F_i \to c^{-1}F_i$.

En $BX = 0$ Si $j \neq i$ la ecuacion j de $BX = 0$

$$0 \cdot \mathrm{Eq}_1^{(A)} + \cdots + 1Ec_j^{(A)} + \cdots + 0 \cdot Ec_m^{(A)}.$$

Si $i = j$, $0 \cdot \mathrm{Eq}_1^{(A)} + \cdots + cEc_i^{(A)} + \cdots + 0 \cdot Ec_m^{(A)} = 0$

Los demas tipos de operaciones elementales se tratan de manera similar.
Sea $B = e(A)$ con e de Tipo 2.

$$F_i : F_i + cF_j, i \neq j.$$

Corresponde a sumar a la ecuacion i de $AX = 0$ c veces la ecuacion j. Y las demas no cambian, luego son combinacion lineal una de la otra y por ende sistemas equivalentes.
Tipo 3: $F_i : F_i + F_j, i \neq j$.
La $r-$ esima ecuacion no cambia si $r \neq i, j$
Las ecuaciones i y j de $AX = 0$ se intercambian. Y las demas no cambian, luego son combinacion lineal una de la otra y por ende sistemas equivalentes. 😄

Nota:-

Dos matrices equivalentes por filas tienen sistemas de ecuaciones asociados equivalentes. Es decir tienen las mismas soluciones. Entonces combinando esto con el teorema anterior obtenemos lo siguiente

Corolario 2.2.1

$A, B \in F^{m \times n}$ son equivalentes por filas, entonces los sistemas homogeneos $AX = 0$ y $BX = 0$ tienen las mismas soluciones.

Nota:-

Si quiero resolver $AX = 0$ puedo hacer operaciones elementales por filas en la matriz A para llegar a una matriz resultante B mas facil de resolver al hacer $BX = 0$.

Nota:-

Si dos sistemas tienen conjunto de soluciones distintos, implica por la reciproca que las matrices no son equivalentes.

Ejemplo 2.2.2 (8)b))

$$\begin{cases} 2y + z &= 0 \\ -x + y + 2z &= 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}.$$

$$A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 \cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$BX = 0 : \begin{cases} x - \frac{3}{2}z &= 0 \end{cases}.$$

Por el corolario las ecuaciones de $AX = 0$ son las mismas que las de $BX = 0$ donde
Es decir (x, y, z) es solucion si y solo si es de la forma $(-\frac{3}{2}z, -\frac{1}{2}z, z)$
Es decir el conjunto solucion es

$$Solucion : \left\{ (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}z, z) : z \in F \right\} = \{(3t, -t, 2t)t \in F\}.$$

Mas adelante veremos que tipo de matriz sencilla B busco para poder buscar las soluciones del sistema asociado a B equivalente a A.

Nota:-

REPASO:
Si tenemos

$$AX = 0, \quad A \in F^{m \times n}.$$

Si B es equivalente a A por filas, entonces $AX = 0$ y $BX = 0$ tienen las mismas soluciones.

Decir que son equivalentes por filas significa que podemos obtener B a traves de A mediante una sucesion finita de operaciones elementales por fila.
Queremos encontrar alguna matriz B que sea muy "simple" de modo que $BX = 0$ se pueda resolver facilmente. Que las incognitas se puedan despejar sin ningun esfuerzo.

Definición 2.2.2: Matriz MRF

Una matriz R se dice reducida por filas si (MRF) si satisface lo siguiente

(1) El primer coeficiente no nulo de una fila no nula de R es igual a 1.

(2) Si el primer coeficiente no nulo de una fila de R esta en la columna j, entonces todos los demas coeficientes de la columna j son iguales a 0.

Ejemplo 2.2.3

(1) La matriz identidad $n \times n$: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in F^{m\times n}$ es MRF.

(2) Las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

No son reducidas por filas.

A tiene un elemento-no-nulo como primer elemento en la fila 2. No cumple con la condicion (1). Si cumple con la condicion (2).

B tiene como coeficiente no nulo un 1 en la primera fila, luego necesita que todos los demas elemento en esa columna sean 0. Pero esta ese 2, luego no cumple con la condicion (2).

Nota:-

En la practica, si A es MRF se puede resolver facilmente. Pues, el coeficiente no nulo en cada columna representa la una incognita.

Observación 2.2.1

$$A \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MRF!} \quad B \xrightarrow{F_3-2F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ MRF! .}$$

Definición 2.2.3: Coeficientes Principales

El primer coeficiente no nulo de una fila no nula de una matriz A se llama un coeficiente principal de A. A MRF los coeficientes principales son todos uno.

Nota:-

Los coeficientes principales solo nos importan cuando la matriz es MRF.

Teorema 2.2.2

Sea $A \in F^{m\times n}$. Entonces existen operaciones elementales por fila $e_1, \dots, e_k$ tales que $e_k(e_{k-1}(\dots e_1(A))) = R$ es MRF. En particular A es equivalente por filas a una matriz reducida por filas.

Nota:-

Mediante una sucesion de operaciones elementales por filas **siempre** puedo llevar a A a una matriz equivalente B MRF.

Demostración: Si $A = 0$ no hay nada que probar.
Supongamos que la primera fila no nula de A es la fila i, F_i , $1 \leqslant i \leqslant m$ (i.e. $F_l = 0 \quad \forall l < i$)

Sea A_{ij} el primer coeficiente no nulo de F_i. Sea e_1 : multiplicar a la F_i por el escalar no nulo $A_{ij}^{-1}(\neq 0)$ (valido pues $A_{ij} \neq 0$ y F cuerpo, luego existe el inverso).
Obtenemos $e_1(A)$, que tiene las mismas primeras filas no nula que A, pero con un 1 en la posicion A_{ij}.
A ese coeficiente principal 1 lo llamo pivot, ahora para cada $m \geqslant l > i$ tal que $A_{lj} \neq 0$. Sea e_l la operacion elemental por filas e_l : Reemplazo F_l por $F_l - A_j \cdot F_i$
Obtenemos luego de aplicar e_l's a $e_1(A)$ una matriz A' donde en la columna j tiene todos coeficiente 0 excepto en la fila i, donde tendra un coefciente principal igual a 1.
Si todas las filas $\neq F_i$ de A' son nulas $\Rightarrow A'$ MRF.
Si no, sea F_t, con $i < t \leqslant m$ la siguiente fila no nula de A'. Repetimos el procedimiento anterior.

Observación 2.2.2 $j' \neq j$

Es decir si $A'_{tj'}$ es el primer coeficiente no nulo de A' entonces multiplicamos F_t por $A_{tj'}^{-1}$ y obtenemos una matriz $e(A')$ donde ahora tengo otro 1 principal en $A_{tj'}$.
Ahora, para cada $1 \leqslant l \leqslant m$, tal que el coeficiente lj' de $e(A')$ sea no nulo (si hubiera alguno) hacemos
e'_l : Reemplazar F_l por $F_l - e(A')_{lj'} \cdot F_t$.
Obtenemos una matriz $e(A')'$ donde en la columna j' tengo todos los coeficientes 0 excepto en la fila t donde tengo un 1 principal.
Esto no altera lo que habiamos conseguido en la fila i: el primer coeficiente $\neq 0$ es 1 y todos los demas en su columna son 0.
Iterando el proceso anterior, llegamos a una matriz R MRF. ☺

Ejemplo 2.2.4

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot F_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + \frac{1}{2} F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 19 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \cdot \frac{1}{19}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{24}{19} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + 2F_3 \text{ y } F_2 + 4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{18}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{24}{19} \end{pmatrix}.$$

Esta ultima matriz es MRF. Y ademas es **escalonada**.

Si llamo R a la ultima matriz, notar que

Nota:-

El sistema

$$AX = 0 \text{ tiene las mismas soluciones que } RX = 0.$$

Pero $RX = 0$ es mucho mas facil de despejar, pues representa el sistema

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{9}{19} x_4 \\ x_2 = -\frac{18}{19} x_4 \\ x_3 = \frac{24}{19} x_4 \end{cases}.$$

Luego la solucion es

$$\left\{\left(\frac{9}{19}t, \frac{18}{19}t, -\frac{24}{19}t, t\right) t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Aqui x_4 es una **variable independiente** pues no depende de las demas. Las variables dependientes vienen de mis pivotes (mis 1 principales), mis x_1, x_2, x_3 son mis variables **dependientes**.

Nota:-

Las variables dependientes solo aparecen 1 vez en cada ecuacion y con coeficientes iguales a 1. Las variables independientes pueden aparecer varias veces en cualquier ecuacion.

Definición 2.2.4: Matriz MERF

Sea $R \in F^{m \times n}$.
Decimos que R es escalon reducida por filas (MERF) si cumple las siguientes condiciones:

(1) R es MRF.

(2) Ninguna fila nula de R precede a una fila no nula.

(3) Si R tiene r (las primeras r) filas no nulas, sea para cada $1 \leqslant i \leqslant r$ y $1 \leqslant k_i \leqslant n$ tal que el coeficiente principal de la fila i esta en la columna k_i. Entonces $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$

Nota:-

En otras palabras, R es MERF si es MRF y ademas sus filas no nulas estan ordenadas de arriba hacia abajo.

Ejemplo 2.2.5

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r = 2, \; k_1 =, \; k_2 = 4.$$

Esta matriz es MERF.

Corolario 2.2.2

Toda matriz $A \in F^{m \times n}$ es equivalente por filas a una MERF.

Demostración: Resulta del teorema anterior, ya que toda MRF puede llevarse a una MERF mediante permutaciones de fila.

😆

Nota:-

Como toda matriz por el teorema anterior es equivalente a una reducida por filas y ademas puedo ir de una MRF a una MERF haciendo intercambio entre las filas, entonces toda matriz es equivalente a una MERF.

2.3. Repaso

Vimos que es una MRF con sus dos condiciones. Que cualquier matriz es equivalente por filas a una MRF. La podemos llevar mediante una sucesion de operaciones elementales.
Vimos que es una MERF con sus dos condiciones para ser MRF y dos condiciones extra. Y que como podemos llegar de toda matriz a una MRF y podemos ir de una MRF intercambiando filas a una MERF, entonces que toda matriz A es equivalente por filas a una MERF.
Sea $R \in F^{m\times n}$ MERF, veamos cuales son las soluciones del sistema homogeneo

$$RX = 0.$$

Si R tiene r filas no nulas ($\therefore$ las primeras r). En particular $r \leqslant m$. Digamos que los coeficientes principales correspondientes estan en las columnas $k_1, \dots, k_n$.
Sea

$$\{1, \dots, n\} = \{k_1, \dots, k_r\} \cup J, \quad J = \left\{1 \leqslant i \leqslant n : i \neq k_j \ \forall j = 1, \dots, r\right\}.$$

Entonces el sistema $RX = 0$ se escribe en la forma

$$\begin{aligned} x_{k_1} + \sum_{j\in J} R_{1j} x_j &= 0 \\ x_{k_2} + \sum_{j\in J} R_{2j} x_j &= 0 \\ &\vdots \\ x_{k_r} + \sum_{j\in J} R_{rj} x_j &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ las soluciones se obtienen dando valores arbitrarios a $x_j : j \in J$ y poniendo

$$x_{k_j} = -\sum_{j\in J} R_{ij} x_j \qquad (*).$$

Nota:-
Arbitrario significa que x_j puede tomar cualquier valor en el cuerpo.

Observación 2.3.1

Si $r = n$, entonces $J \neq \emptyset$

y la unica solucion sera la trivial: $x_{k_1} = 0 = \cdots = x_{k_n}$

Teorema 2.3.1

Si $A \in F^{m\times n}$ tal que $m < n$, entonces el sistema homogeneo $AX = 0$ tiene soluciones no triviales.

Demostración: Como vimos antes, existe $R \in F^{m\times n}$ MERF tal que los sistemas $AX = 0$ y $RX = 0$ son equivalentes y luego tienen las mismas soluciones. Las soluciones de $RX = 0$ estan dadas por $(*)$.
Si R tiene r filas no nulas $\Rightarrow r \leqslant m < n \quad \therefore J \neq \emptyset$
Sea $j \in J$, dando a x_j el valor $1 \neq 0$ obtenemos una solucion no trivial.

☺

Llamaremos a las $x_j,\ j \in J$ variables independientes del sistema. Y a $x_{k_1} \dots x_{k_r}$ variables dependientes.

Corolario 2.3.1

Sea $A \in F^{n \times n}$. Entonces el sistema homogeneo $AX = 0$ admite solo la solucion trivial si y solo si A es equivalente por filas a la matriz identidad $n \times n, I_n$.

Demostración: $\Leftarrow$
Si A equivalente a I_n, entonces $AX = 0$ y $I_n X = 0$ tienen las mismas soluciones, y el ultimo solo admite la solucion trivial $(x_1 = \cdots = x_n = 0.\ )$ ☺

Demostración: $\Rightarrow$
Sea R MERF equivalente por filas a A. Por hipotesis $RX = 0$ solo admite la solucion trivial (pues $RX = 0$ es equivalente a $AX = 0$) $\Rightarrow$ no tiene variables independientes.
Como antes digamos que R tiene r filas no nulas y sean $1 \leqslant k_1 < \dots < k_r \leqslant n$ tal que el coeficiente principal de la fila i esta en la columna k_i.

$$\therefore \{k_1, \dots, k_r\} = \{1, \dots, n\} \qquad (J = \emptyset)$$

Como $\underline{1 \leqslant k_1 < \dots < k_r \leqslant n} \quad \Rightarrow \quad r = n$.
Luego $R \in F^{n \times n}$ MERF no tiene filas nulas.
La condicion subrayada sobre $k_i : 1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots k_n \leqslant n$ fuerza $k_i = i \quad \forall i = 1, \dots, n$.
$\therefore R = I_n$ (por la condicion de ser reducida por filas). ☺

Consideremos el sistema general $AX = Y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in F^{m \times 1}$. El metodo para resolverlo es analogo al anterior, pero realizando operaciones elementales por filas en la matriz ampliada del sistema:

$$(A|Y) = \tilde{A}.$$

Si obtenemos a partir de A una matriz MERF $R \in F^{m \times n}$ mediante operaciones elementales por filas, entonces las mismas operaciones aplicadas a $\tilde{A}$ nos daran una matriz $\tilde{R} = (R|Z), Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in F^{m \times 1}$.

Que es la matriz ampiada del sistema

$$RX = Z$$

Siendo $r, \quad 1 \leqslant k_1 < \dots < k_r \leqslant n$ y J como antes, las soluciones cuando existan estaran dadas por

$$\begin{array}{c} x_{k_1} = z_1 - \sum_{j \in J} R_{ij} x_j \\ \vdots \\ x_{k_r} = z_r - \sum_{j \in J} R_{ij} x_j \end{array}.$$

La condicion necesaria y suficiente para que haya solucion es

$$\begin{aligned} 0 &= z_{r+1} \\ &\vdots \quad \leftarrow \text{ Provienen de las filas nulas de } R \text{ .} \\ 0 &= z_m \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.1

Busquemos todos las posibles $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tales que el sistema $\begin{cases} x - z = y_1 \\ x - y + z = y_2 \\ 2x - y = y_3 \end{cases}$.

Formo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada:

$$(A|Y) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 2 & -1 & 0 & y_3 \end{array}\right)$$

Comienzo a operar elementalmente (xd)

$$\xrightarrow{F_2 - F_1 \text{ y } F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & -1 & 0 & y_3 - 2y_1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 - 2y_1 - y_2 + y_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & -2 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & -y_1 - y_2 + y_3 \end{array}\right).$$

Que representa al sistema

$$\begin{cases} x - z &= y_1 \\ y - 2z &= y_1 - y_2 \\ 0 &= -y_1 - y_2 + y_3 \end{cases}.$$

O en matrices

$$RX = Z$$

Con

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } \quad Z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 - y_2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ El sistema $AX = Y$ tiene solucion si y solo si

$$-y_1 - y_2 + y_3 = 0.$$

Si este es el caso, las soluciones del sistema estan determinadas por el siguiente sistema

$$\begin{aligned} &x = y_1 + z \\ &y = y_1 - y_2 + 2z \\ &z: \text{ variable indep. } z = t \in F \end{aligned}.$$

$$\{(y_1 + t, y_1 - y_2 + 2t, t) : t \in F\}$$

Por ejemplo, el sistema tiene solucion si $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y las soluciones son

$$\{(1 + t, 1 + 2t, t) : t \in F\}.$$

Definición 2.3.1

Sean $A \in F^{m\times k}, B \in F^{k\times n}$. El producto AB se define como la matriz $\in F^{m\times n}$ en la forma

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} A_{il}B_{lj} \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Observación 2.3.2

AB solo esta definido si el numero de columnas de A coincide con el numero de filas de B

Ejemplo 2.3.2

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB$ no esta definido.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-2)\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot 2 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 \\ & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) $A \in F^{m\times n}, X \in F^{n\times 1}$ Esta definido $AX \in F^{m\times 1}$. De manera que $AX = Y$ resulta una identidad entre matrices pues el coeficiente de AX en la fila i es exactamente

$$A_{i1}X_1 + A_{i2}X_2 + \cdots + A_{in}X_n = Y_i.$$

Proposición 2.3.1

Sean $A \in F^{m\times k}, B \in F^{k\times t}, C \in F^{t\times n}$.

Entonces

$$(AB)C \text{ y } A(BC).$$

estan definidos y son iguales.

Demostración: Como $AB \in F^{m\times t}, C \in F^{t\times n} \Rightarrow ABC$ esta definido y es $m \times n$.
$A \in F^{m\times k}, BC \in F^{k\times n} \Rightarrow A(BC)$ esta definida y es $m \times n$.

$$\begin{aligned}
[(AB)C]_{ij} &= \sum_{l=1}^{t} \underline{(AB)_{il}} C_{lj} \\
&= \underline{\sum_{l=1}^{t} \left(\sum_{s=1}^{k} A_{is} B_{sl} \right)} C_{lj} \\
&= \sum_{s=1}^{k} A_{is} \underline{\left(\sum_{l=1}^{t} B_{sl} C_{lj} \right)} \\
&= \underline{\sum_{s=1}^{k} A_{is} \, (BC)_{sj}} \\
&= [A\,(BC)]_{ij}
\end{aligned}$$

😄

Proposición 2.3.2

$A \in F^{m\times n}$, entonces

$$I_n A \overset{*}{=} A I_m = A.$$

Demostración: Veamos (*) $\forall i, j \quad 1 \leqslant i \leqslant m \quad 1 \leqslant j \leqslant n$

$$(I_m A)_{ij} = \sum_{l=1}^{m} (I_m)_{il} A_{lj} = (I_m)_{ii} A_{ij} = A_{ij}.$$

Donde

$$(I_m)_{il} = \delta_{il} = \begin{cases} 1, & i = l \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}.$$

😄

Ejemplo 2.3.3

Sea $A \in F^{n\times k}$

$$0_{m\times n} \cdot A = 0_{m\times k}.$$

$$A \cdot 0_{k\times u} = 0_{n\times u}.$$

2.4. Repaso

Se vio como multiplicar 2 matrices. Si $A \in F^{m\times k}, B \in F^{k\times n}$, entonces $AB \in F^{m\times n}$. Donde

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} A_{il}B_{lj} \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

La multiplicacion de matrices es asociativa, es decir, $A \in F^{m\times k}, B \in F^{k\times t}, C \in F^{t\times n}$, entonces

$$(AB)C = A(BC)$$

Observación 2.4.1 El producto sin embargo **NO** es conmutativo, incluso cuando estan definidos los productos AB y BA.

Otro resultado importante es que si $A \in F^{m\times n}$, entonces $I_nA \overset{*}{=} AI_m = A$. Donde I_n es la matriz identidad de $n\times n$ y I_m es la matriz identidad de $m \times m$.

Ejemplo 2.4.1 ($A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$)

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.4.2 (Dar ejemplos $n\times n$ para cualquier $n \geqslant 2$.)

2.5. Transpuesta de una matriz

Definición 2.5.1: Transpuesta de una Matriz

La transpuesta de $A \in F^{m\times k}$, es $A^t \in F^{k\times m}$ donde

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}).$$

Nota:-

Se intercambian filas por columnas.

Nota:-

Es importante notar que la transpuesta de la transpuesta de una matriz es la matriz original.

Respecto al producto de matrices, sea $B \in F^{k\times n}$

$$(AB)^t = B^tA^t.$$

Donde $A^t \in F^{k\times m}, B^t \in F^{n\times m}$, entonces $(AB)^t \in F^{n\times m}$ y $B^tA^t \in F^{n\times m}$.

Observación 2.5.1 Sea $A \in F^{m\times k}, B \in F^{k\times n}$

La fila i de AB es la combinacion lineal

$$A_{i1}F_1(B) + A_{i2}F_2(B) + \cdots + A_{ik}F_k(B).$$

donde $F_j(B)$: j-esima fila de B .

Ejemplo 2.5.1 ($A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$)

$$AB = \begin{pmatrix} 1F_1 + 0F_2 + 0F_3 \\ 0F_1 + 1F_2 + (-1)F_3 \\ 0F_1 + 0F_2 + 1F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 - F_3 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = e(B).$$

donde $e : F_2 : F_2 - F_3$.

2.6. Matriz elemental

Definición 2.6.1: Matriz elemental

Una **matriz elemental** $n \times n$ es una matriz

$$E = e(I_n), .$$

donde e es una operacion elemental por filas.

Ejemplo 2.6.1 ($n = 2$)

Tipo 1) Multiplicar una fila por c no nulo. $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, c \neq 0$.

Tipo 2) Sumar a una fila el multiplo de otra. $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, c \in F$.

Tipo 3) Permutar dos filas. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observación 2.6.1 Para un n dado hay

Tipo 1) n (elementos de la diagonal)

Tipo 2) $n^2 - n = n(n-1)$ (elementos fuera de la diagonal)

Tipo 3) $\binom{n}{2}$ (maneras de permutar las filas)

matrices elementales.

Teorema 2.6.1

Sea $A \in F^{m\times n}$ y sea e una operacion elemental por filas. Entonces

$$e(A) = EA, \quad \text{donde} \quad E = e(I_m) \in F^{m\times m}.$$

Demostración: Sean $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Comparemos los coeficientes i, j, de cada lado. Distinguimos los distintos tipos de operaciones elementales e.

Tipo 1) $e:$ multiplicar la fila r por un escalar $c \neq 0$

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} \text{ si } i \neq r \\ cA_{rj} \text{ si } i = r \end{cases}.$$

$$E = e(I) \qquad E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & , i \neq r \\ c\delta_{rk} & , i = r \end{cases}.$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij}, & i \neq r \\ \sum_{k=1}^{m} c\delta_{rk}A_{kj} = cA_{rj}, & i = r \end{cases}.$$

$\therefore e(A) = EA.$

Tipo 2) $e:$ Reemplazar fila r por $F_r + cF_s, \quad r \neq s$.

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & i = r \end{cases}.$$

$$E = e(I) \qquad E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & , i \neq r \\ S_{rj} + cS_{sj} & , i = r \end{cases}.$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij}, & i \neq r \\ \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk}A_{kj} + c\sum_{k=1}^{m} \delta_{sk}A_{kj} = A_{rj} + cA_{sj}, & i = r \end{cases}.$$

Tipo 3) $e:$ Permutar fila r y s . Queda de ejercicio.

😄

Corolario 2.6.1

Sean $A, B \in F^{m\times n}$, entonces son equivalentes:

(I) B es equivalente por filas a A.

(II) $B = E_l E_{l-1} \ldots E_2 E_1 A$, donde $E_1, \ldots, E_l \in F^{m\times m}$ son matrices elementales.

(III)

Demostración:

(I) Significa que

$$B \overset{(*)}{=} e_l(e_{l-1} \ldots e_2(e_1(A)) \ldots).$$

con $e_1, \dots, e_l$ operaciones elementales por filas. Luego

$$E_i = e_i(I).$$

Por teorema $(*) \Leftrightarrow B = E_l \dots E_2 E_1 A$

😄

Ejemplo 2.6.2 ($A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$)

Reduciendo llego a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = R \text{ MERF }.$$

Por el corolario deberia chequear que

$$R = \dots E_2 E_1 A \quad ?? .$$

Viendo las operaciones elementales que use para llegar a R ahora las aplico a la identidad, es decir busco

$$E_1 = e_1(I_2) = \dots .$$

$$E_2 = e_2(I_2) = \dots .$$

$$E_3 = e_3(I_2) = \dots .$$

$$E_4 = e_4(I_2) = \dots .$$

Y voy a tener que

$$R = E_4 E_3 E_2 E_1 A.$$

Nota:-

Notar el orden pues el producto no es conmutativo.

Observación 2.6.2

Si e : operacion elemental por filas. Sabemos que $\exists\ \tilde{e}$ del mismo tipo que e y tal que $\tilde{e}(e(A)) = e(\tilde{e}(A)) = A$ $\forall A$ adecuada.

Aplicado esto a $I = A \Rightarrow \tilde{E}E = E\tilde{E} = I$.

2.7. Matriz Inversa

Definición 2.7.1

Sea $A \in F^{n \times n}$. Una **inversa a izquierda** de A es una matriz $B \in F^{n \times n} : BA = I_n$.

Definición 2.7.2

Sea $A \in F^{n \times n}$. Una **inversa a derecha** de A es una matriz $C \in F^{n \times n} : AC = I_n$.

Definición 2.7.3

Si B es inversa a izquierda y a derecha, B se dice **inversa bilateral** o **inversa** de A y en tal caso A se dice **invertible**

Lema 2.7.1

Supongamos que A tiene inversa a izquierda B e inversa a derecha C. Entonces $B = C$

Demostración:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

😃

Corolario 2.7.1

Si A es inversible, su inversa es unica. Se denota A^{-1}.

Proposición 2.7.1

Sea $A \in F^{n\times n}, B \in F^{n\times n}$.

(I) A invertible $\Rightarrow A^{-1}$ es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

(II) A, B invertible $\Rightarrow AB$ es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración:

(I) Por hipotesis:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Luego A es inversa de A^{-1}, en particular A^{-1} es invertible.

(II) Hacemos el producto:

$$(AB)(A^{-1}B^{-1}) = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

😃