Práctico 1

VECTORES EN $\mathbb{R}^n$
SOLUCIONES

Vectores y producto escalar.

1. Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
   a) $2v + 3w - 5u$,
   b) $5(v + w)$,
   c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

   SOLUCIÓN:
   a)
   $$\begin{aligned} 2v + 3w - 5u &= 2 \cdot (-1, 2, 0) + 3 \cdot (2, -3, -1) - 5 \cdot (1, -1, 1) \\ &= (-2, 4, 0) + (6, -9, -3) + (-5, 5, -5) = \boxed{(-1, 0, -8)} \end{aligned}$$
   b) $5(v + w) = 5 \cdot ((-1, 2, 0) + (2, -3, -1)) = 5 \cdot (1, -1, -1) = \boxed{(5, -5, -5)}$
   c) $5v + 5w = 5 \cdot (-1, 2, 0) + 5 \cdot (2, -3, -1) = (-5, 10, 0) + (10, -15, -5) = \boxed{(5, -5, -5)}$

2. Calcular los siguientes productos escalares.
   a) $\langle(-1, 2, -0), (2, -3, -1)\rangle$,
   b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.

   SOLUCIÓN:
   a) $\langle(-1, 2, -0), (2, -3, -1)\rangle = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) = -2 + (-6) + 0 = \boxed{-8}$
   b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -4 + (-2) = \boxed{-6}$

3. Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:
   $$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$

   SOLUCIÓN: Calculamos ambos miembros por separado.

   Miembro izquierdo: $\langle 2v + 3w, -u\rangle = \langle 2 \cdot (-1, 2, 0) + 3 \cdot (2, -3, -1), -(1, -1, 1)\rangle$
   $= \langle(-2, 4, 0) + (6, -9, -3), (-1, 1, -1)\rangle = \langle(4, -5, -3), (-1, 1, -1)\rangle$
   $= 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) = -4 + (-5) + 3 = \boxed{-6}$

   Miembro derecho: $-2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle = -2\langle(-1, 2, 0), (1, -1, 1)\rangle - 3\langle(2, -3, -1), (1, -1, 1)\rangle$
   $= -2 \cdot (-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1) - 3 \cdot (2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1)$
   $= -2 \cdot (-1 + (-2) + 0) - 3 \cdot (2 + 3 + (-1)) = -2 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = \boxed{-6}$

4. Probar que
   a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.
   b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

   SOLUCIÓN: Calculamos su producto interno para ver si es nulo.
   a) $\langle(2, 3, -1), (1, -2, -4)\rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-4) = 2 + (-6) + 4 = \boxed{0}$
   b) $\langle(2, -1), (1, 2)\rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 2 - 2 = \boxed{0}$

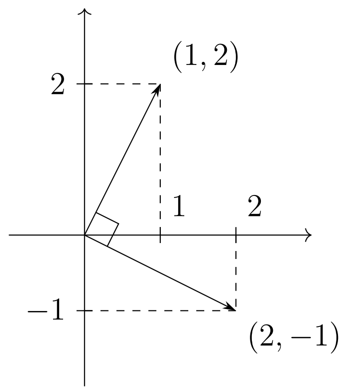


FIGURA 1. Ejercicio 4.b

5. Encontrar
   a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,
   b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,
   c) vectores $w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ donde $w_1 = (1, 1, 1)$, utilizar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

SOLUCIÓN:

a) Buscamos un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\langle (3, -4), (x, y) \rangle = 0.$$

O escrito de otro modo, $3x - 4y = 0$ o $3x = 4y$ o $x = \frac{4}{3}y$. Notemos que no tenemos ningún otra condición sobre los valores de x e y. Podemos entonces dar valores para y y tomar los correspondientes valores de x. Por ejemplo, si tomamos $y = 1$ entonces debemos tomar $x = \frac{4}{3}$. Es decir, el vector $(\frac{4}{3}, 1)$ es un ejemplo de vector ortogonal a $(3, 4)$.
Comentario: dado un vector (a, b), el vector $(-b, a)$ (o $(b, -a)$) siempre es ortogonal a (a, b), pues $\langle (a, b), (-b, a) \rangle = -ab + ba = 0$.

b) Procedemos como antes. Buscamos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\langle (2, -1, 4), (x, y, z) \rangle = 0,$$

es decir (x, y, z) tales que $2x - y + 4z = 0$. En este caso podemos despejar y en función de x y z (o podríamos despejar cualquiera de las otras). Es decir, $y = 2x + 4z$. Dando valores a x y z obtenemos valores para y. Por ejemplo, tomando $x = 1$ y $z = 0$, resulta $y = 2$, es decir, el vector $(1, 2, 0)$. En general, si uno tiene (a, b, c), podría tomar como ortogonal el vector $(-b, a, 0)$, pues $\langle (a, b, c), (-b, a, 0) \rangle = -ab + ab + 0 = 0$.

c) Seguiremos la idea de la Observación y el Ejemplo a continuación de la Proposición 1.7.5 (Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt) del Apunte. Elegimos un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ (la idea es elegirlo lo más simple posible). Por ejemplo, $v = e_1 = (1, 0, 0)$. Entonces el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, aplicado al conjunto $\{w_1\}$ y el vector v, nos asegura que el vector w_2 obtenido es ortogonal a w_1.

$$\begin{aligned} w_2 &= v - \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 \\ &= (1,0,0) - \frac{\langle (1,0,0),(1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle}(1,1,1) \\ &= (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) \\ &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Por comodidad, podemos tomar $w_2 = (2,-1,-1)$ (para no tener que trabajar con fracciones) ya que multiplicar por 3 no cambia la condición de ortogonalidad. Ahora elegimos otro vector (nuevamente lo más simple que se pueda), por ejemplo $v = e_2 = (0,1,0)$, y le aplicamos el proceso al conjunto $\{w_1, w_2\}$ y al vector v. Entonces el vector obtenido w_3 es ortogonal a los vectores $\{w_1, w_2\}$.

$$\begin{aligned} w_3 &= v - \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 \\ &= (0,1,0) - \frac{\langle (0,1,0),(1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle}(1,1,1) - \frac{\langle (0,1,0),(2,-1,-1)\rangle}{\langle (2,-1,-1),(2,-1,-1)\rangle}(2,-1,-1) \\ &= (0,1,0) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}(2,-1,-1) \\ &= \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

y por comodidad podríamos tomar $(0,1,-1)$ como w_3. En conclusión, $\{w_1, w_2, w_3\} = \{(1,1,1), (2,-1,-1), (0,1,-1)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

6. Encontrar la longitud de los vectores.

   (*a*) $(2,3)$, (*b*) (t, t^2), (*c*) $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$.

   Solución:

   a) $||(2,3)|| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \boxed{\sqrt{13}}$

   b) $||(t,t^2)|| = \sqrt{t^2+(t^2)^2} = \sqrt{t^2+t^4} = \boxed{|t|\sqrt{1+t^2}}$

   c) $||(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)|| = \sqrt{\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi} = \sqrt{1} = \boxed{1}$

7. Calcular $\langle v, w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

   (*a*) $v = (2,2), w = (1,0)$, (*b*) $v = (-5,3,1), w = (2,-4,-7)$.

   Solución: Para encontrar el ángulo se deben calcular además las normas de los vectores:

   a) $\langle v, w\rangle = \langle (2,2),(1,0)\rangle = 2\cdot 1 + 1\cdot 0 = 2 + 0 = \boxed{2}$

   $||v|| = ||(2,2)|| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

   $||w|| = ||(1,0)|| = \sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$

   $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle v, w\rangle}{||v||\,||w||}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}\cdot 1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{45^\circ}$

   b) $\langle v, w\rangle = \langle (-5,3,1),(2,-4,-7)\rangle = -5\cdot 2 + 3\cdot(-4) + 1\cdot(-7) = -10 - 12 - 7 = \boxed{-29}$

   $||v|| = ||(-5,3,1)|| = \sqrt{(-5)^2+3^2+1^2} = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35}$

   $||w|| = ||(2,-4,-7)|| = \sqrt{2^2+(-4)^2+(-7)^2} = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle v, w\rangle}{||v||\,||w||}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-29}{\sqrt{35}\sqrt{69}}\right)$ (se puede dejar escrito así, no hace falta calcular el número)

8. Sean $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$ los vectores de la base canónica. Sea $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3.$$

Solución: Verifiquemos ambas igualdades.

$$\begin{aligned} v = (x_1, x_2, x_3) &= (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) \\ &= x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) \\ &= x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3. \end{aligned}$$

Por otro lado, notar que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es un conjunto de vectores ortogonales entre sí (es decir $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = 0$), y cumplen que $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle v, e_1\rangle &= \langle x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, e_1\rangle \\ &= \langle x_1e_1, e_1\rangle + \langle x_2e_2, e_1 + \langle x_3e_3, e_1\rangle \\ &= x_1\langle e_1, e_1\rangle + x_2\langle e_2, e_1\rangle + x_3\langle e_3, e_1\rangle \\ &= x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 \\ &= x_1. \end{aligned}$$

De manera similar, $\langle v, e_2\rangle = x_2$ y $\langle v, e_3\rangle = x_3$, lo cual implica que

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3 = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3.$$

9. Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle.$$

b) Si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

Solución:

a) $\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle \overset{\mathbf{P2}}{=} \langle \lambda_1 v, u\rangle + \langle \lambda_2 w, u\rangle \overset{\mathbf{P3}}{=} \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle$

b) Aplicando primero P2 al miembro izquierdo del producto escalar y luego al derecho obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle &= \langle \lambda_1 v, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle \\ &= \langle \lambda_1 v, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_1 v, \lambda_2 w\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_2 w\rangle \end{aligned}$$

Ahora, aplicando P3 en cada miembro de cada producto escalar obtenemos

$$\lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_1\lambda_2\langle v, w\rangle + \lambda_2\lambda_1\langle w, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

Por hipótesis, v y w son ortogonales, es decir que $\langle v, w\rangle = 0$, y por P1, $\langle w, v\rangle = \langle v, w\rangle = 0$. Luego obtenemos

$$\lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_1\lambda_2 \underbrace{\langle v, w\rangle}_{0} + \lambda_2\lambda_1 \underbrace{\langle w, v\rangle}_{0} + \lambda_2^2\langle w, w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

Rectas.

10. En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores $\overrightarrow{vw}$ y $\overrightarrow{xy}$ son equivalentes y/o paralelos.
    a) $v = (1, -1)$, $w = (4, 3)$, $x = (-1, 5)$, $y = (5, 2)$.
    b) $v = (1, -1, 5)$, $w = (-2, 3, -4)$, $x = (3, 1, 1)$, $y = (-3, 9, -17)$.

    Solución: Calulamos las diferencias correspondientes y las analizamos:
    a) $w - v = (4, 3) - (1, -1) = (4 - 1, 3 - (-1)) = (3, 4)$
    $y - x = (5, 2) - (-1, 5) = (5 - (-1), 2 - 5) = (6, -3)$
    No son equivalentes pues $w - v \neq y - x$ y no son paralelos, pues si $y - x = \lambda(w - v)$, mirando la primera coordenada resultaría $6 = 3\lambda$, por lo que λ debería ser igual a 2. Sin embargo, $-3 \neq 2 \cdot 4$, luego no existe λ tal que $y - x = \lambda(w - v)$.
    b) $w - v = (-2, 3, -4) - (1, -1, 5) = (-2 - 1, 3 - (-1), -4 - 5) = (-3, 4, -9)$
    $y - x = (-3, 9, -17) - (3, 1, 1) = (-3 - 3, 9 - 1, -17 - 1) = (-6, 8, -18)$.
    No son equivalentes pues $w - v \neq y - x$ pero si paralelos, pues tomando $\lambda = 2$ se tiene que $y - x = \lambda(w - v)$.

11. Sea R_1 la recta que pasa por $p_1 = (2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.
    a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1.
    b) Graficar en el plano a R_1.
    c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1.
    d) Verificar si $p + p_1$ y $-p$ pertenecen a R_1

    Solución:
    a) Para dar la descripción paramétrica en este caso, necesitamos un punto por donde pase, por ejemplo $(2, 0)$, y un vector que sea ortogonal a $(1, 3)$, por ejemplo el $(3, -1)$, con lo que tenemos:
    Descripción paramétrica: $\boxed{R_1 = \{(2, 0) + t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}}$

    Para la descripción implícita simplemente reemplazamos todos los datos dados en la ecuación $ax + by = \langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle$ (la cual describe justamente la ecuación implícita de una recta que pasa por (x_0, y_0) y es ortogonal a (a, b), pág. 24 del apunte apunte) y tenemos:
    Descripción implícita: $\boxed{R_1 = \{(x, y) \mid x + 3y = 2\}}$
    b) ver figura 2.
    c) Para dar un punto sobre la recta conviene usar la descripción paramétrica. En este caso debe ser distinto a p_1, con lo que cualquier valor de $t \neq 0$ va a servir. Si tomamos por ejemplo $t = -1$ obtenemos $\boxed{p = (-1, 1)}$.
    d) Para verificar si un punto pertenece, conviene usar la descripción implícita. Calculamos cada punto y reemplazamos en la ecuación para ver si la satisface o no:

$p + p_1 = (-1, 1) + (2, 0) = (1, 1)$	$-p = (1, -1)$
$(1) + 3 \cdot (1) = 4 \neq 2$	$(1) + 3 \cdot (-1) = -2 \neq 2$
$\therefore p + p_1 \notin R_1$	$\therefore -p \notin R_1$

12. Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.
    a) R_2: recta que pasa por $p_2 = (0, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.
    b) R_3: recta que pasa por $p_3 = (1, 0)$ y es paralela al vector $(1, 3)$.

    Solución: Las gráficas están en la figura 2.
    El procedimiento para obtener las descripciones paramétrica e implícita de a) es análogo al de del ejercicio 11.

a) Descripción paramétrica: $\boxed{R_2 = \{t(3,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}}$

Descripción implícita: $\boxed{R_2 = \{(x,y) \mid x + 3y = 0\}}$

Tomando $t = -1$ tenemos $\boxed{p = (-3,1)}$.

$$\begin{array}{l|l} p + p_2 = (-3,1) + (0,0) = (-3,1) & -p = (3,-1) \\ (-3) + 3 \cdot (1) = -3 + 3 = 0 & (3) + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0 \\ \therefore p + p_2 \in R_2 & \therefore -p \in R_2 \end{array}$$

b) La descripción paramétrica de una recta que pasa por v y es paralela a w justamente es $\{v + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$, luego en este caso

Descripción paramétrica: $\boxed{R_3 = \{(1,0) + t(1,3) \mid t \in \mathbb{R}\}}$

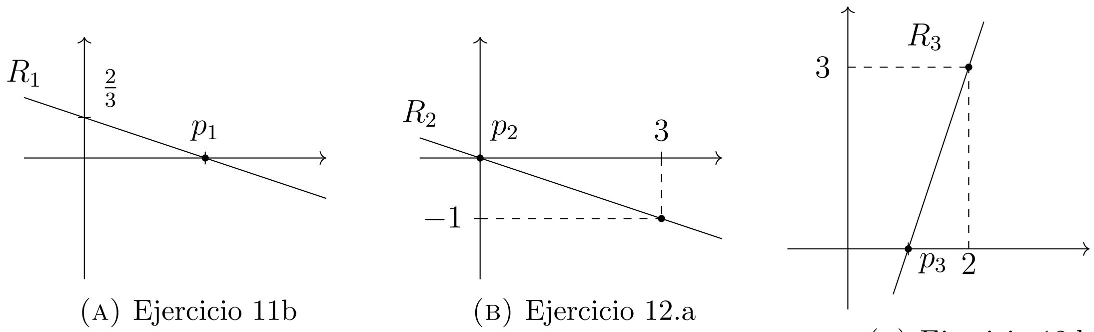
Para obtener la descripción implícita conviene partir de la descripción paramétrica: Sabemos que los puntos de la rectas son de la forma $(x,y) = (1,0) + t(1,3) = (1+t, 3t)$, o sea $x = 1 + t$ e $y = 3t$. Despejando t en ambas igualdades, obtenemos que

$$x - 1 = t = \frac{1}{3}y.$$

Deducimos entonces que todos los puntos de la recta son aquellos que satisfacen $x - \frac{1}{3}y = 1$ o equivalentemente $3x - y = 3$. En conclusión, la descripción implícita es $\boxed{R_3 = \{(x,y) \mid 3x - y = 3\}}$

Tomando $t = 1$ tenemos que $\boxed{p = (2,3)}$ es un punto de la recta distinto a $p_3 = (1,0)$.

$$\begin{array}{l|l} p + p_3 = (2,3) + (1,0) = (3,3) & -p = (-2,-3) \\ 3 \cdot 3 - 3 = 6 \neq 3 & 3 \cdot (-2) - (-3) = -3 \neq 3 \\ \therefore p + p_3 \notin R_3 & \therefore -p \notin R_3 \end{array}$$



(A) Ejercicio 11b

(B) Ejercicio 12.a

(C) Ejercicio 12.b

FIGURA 2

13. Calcular, numérica y graficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

SOLUCIÓN: Para este ejercicio conviene tomar la descripción implícita de las rectas. Comencemos con la intersección de las dos primeras rectas.

$$\begin{aligned} R_1 \cap R_2 &= \{(x,y) \mid x + 3y = 2\} \bigcap \{(x,y) \mid x + 3y = 0\} \\ &= \{(x,y) \mid x + 3y = 2 \quad \text{y} \quad x + 3y = 0\}. \end{aligned}$$

Es decir, la intersección de R_1 y R_2 son todos los puntos (x, y) que satisfacen las ecuaciones $x+3y = 2$ y $x+3y = 0$ al mismo tiempo. En otras palabras, son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Notemos que no hay ningún punto con esta propiedad. En efecto, para cualesquiera valores de x e y que elijamos, no puede suceder que al hacer la cuenta $x+3y$ obtengamos simultáneamente el resultado 2 y el resultado 0.

En conclusión, tenemos $\boxed{R_1 \cap R_2 = \emptyset}$

Analicemos ahora la otra intersección. Tenemos que

$$\begin{aligned} R_1 \cap R_3 &= \{(x, y) \mid x + 3y = 2\} \bigcap \{(x, y) \mid 3x - y = 3\} \\ &= \{(x, y) \mid x + 3y = 2 \quad \text{y} \quad 3x - y = 3\}. \end{aligned}$$

Es decir, la intersección de R_1 y R_3 es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

Para encontrar dichas soluciones podemos proceder por sustitución. Esto es, de la primera ecuación obtenemos que $x = 2 - 3y$. Luego sustituimos este valor de x en la segunda ecuación, obteniendo que

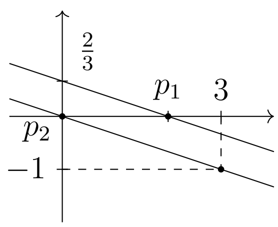
$$3x - y = 3 \cdot (2 - 3y) - y = 6 - 9y - y = 6 - 10y = 3.$$

De donde resulta que $y = \frac{3}{10}$. Ahora, usamos este valor de y en la primera ecuación:

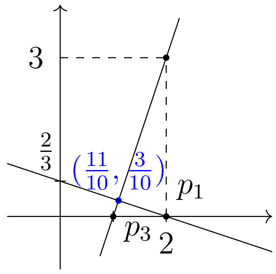
$$x + 3y = x + 3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) = 2$$

Entonces $x = \frac{11}{10}$. En conclusión, el par $x = \frac{11}{10}$, $y = \frac{3}{10}$ es la única solución del sistema y por lo tanto

$$\boxed{R_1 \cap R_3 = \left\{\left(\frac{11}{10}, \frac{3}{10}\right)\right\}}$$



(A) $R_1 \cap R_2$



(B) $R_1 \cap R_3$

Figura 3

14. Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ una recta en $\mathbb{R}^2$. Sean p y q dos puntos por los que pasa L.
    a) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0, 0) \in L$?
    b) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$? donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
    c) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p + q \in L$?

    Solución:
    a) Si $(0, 0) \in L$, entonces $(0, 0)$ cumple la ecuación normal de la recta, es decir, debe suceder $c = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$. Con lo cual debe ser $c = 0$ y por lo tanto es el único valor de c con esta propiedad.
    b) Si $\lambda = 1$ entonces $\lambda q = q$ con lo cual cualquier valor de c asegura que λq pertenece a L. Veamos ahora qué sucede si $\lambda \neq 1$.
    Recordemos que $ax+by = \langle (a, b), (x, y)\rangle$. Ahora, como la recta pasa por q se satisface que
    $$\langle (a, b), q\rangle = c.$$
    Si $\lambda q \in L$ entonces se satisface
    $$c = \langle (a, b), \lambda q\rangle.$$
    Usando P3 del producto escalar, tenemos que
    $$\langle (a, b), \lambda q\rangle = \lambda\langle (a, b), q\rangle = \lambda c.$$
    Por lo tanto, para que $\lambda q \in L$, debe cumplirse que $c = \lambda c$, o equivalentemente $0 = c(\lambda - 1)$. Como estamos suponiendo que $\lambda \neq 1$ debe ser $c = 0$.
    En conclusión, si $\lambda = 1$ cualquier valor de c asegura que $\lambda q \in L$, mientras que si $\lambda \neq 1$, sólo $c = 0$ asegura que $\lambda q \in L$.
    c) Como L pasa por p y q se satisfacen las ecuaciones
    $$\langle (a, b), p\rangle = c \quad \text{y} \quad \langle (a, b), q\rangle = c.$$
    Si $p + q \in L$ debe satisfacerse que
    $$c = \langle (a, b), p + q\rangle.$$
    Pero, usando P2 del producto escalar, tenemos que
    $$\langle (a, b), p + q\rangle = \langle (a, b), p\rangle + \langle (a, b), q\rangle = c + c,$$
    es decir que si $p + q \in L$ entonces debe ser $c = 2c$, por lo tanto debe ser $c = 0$ y es el único valor con esta propiedad.

15. Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Probar que L pasa por $(0, 0)$ si y sólo si pasa por $p + \lambda q$ para todo par de puntos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

    Solución:
    $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$. Si $(0, 0) \in L$, entonces por Ejercicio 14*a*) se tiene que $c = 0$. Ahora, sean $p, q \in L$, es decir que se satisfacen las ecuaciones
    $$\langle (a, b), p\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle (a, b), q\rangle = 0.$$
    Entonces, por P2 y P3 del prod. escalar
    $$\langle (a, b), p + \lambda q\rangle = \langle (a, b), p\rangle + \lambda\langle (a, b), q\rangle = 0 + \lambda \cdot 0 = 0.$$
    Como $p + \lambda q$ verifica la ecuación de la recta, entonces $p + \lambda q \in L$.
    $\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $p \in L$ cualquiera, y tomo $\lambda = -1$ y $q = p$. Tengo entonces por hipótesis que $p + \lambda q \in L$, pero $p + \lambda q = p + (-1)p = p - p = (0, 0)$ y por lo tanto $(0, 0) \in L$. $\square$

Comentario: Ej. 15 nos dice que las rectas que pasan por el origen son cerradas por la suma y la multiplicación por escalares, y que son las únicas que lo cumplen, es decir que si una recta no pasa por el origen entonces no cumple estas propiedades.

Ejercicios de repaso.

16. Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces
$$||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$
¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

Solución: Recordemos que por definición de norma, $\langle v, v\rangle = ||v||^2$. Además usaremos Ejercicio 9*b*) tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:
$$||v+w||^2 \overset{\text{def}}{=} \langle v+w, v+w\rangle \overset{9b)}{=} \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle \overset{\text{def}}{=} ||v||^2 + ||w||^2.$$
En $\mathbb{R}^2$ esta igualdad es el *Teorema de Pitágoras.*

17. Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que
$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz).}$$

Solución: Sean $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$. Como $|\langle v, w\rangle| \geq 0$ y $||v||\,||w|| \geq 0$, probar la desigualdad es equivalente a probar que
$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq ||v||^2||w||^2.$$
Recordar que si $a \in \mathbb{R}$ entonces $|a|^2 = a^2$, luego $|\langle v, w\rangle|^2 = \langle v, w\rangle^2$. Por otro lado $\langle v, w\rangle = v_1w_1 + v_2w_2$, $||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ y $||w|| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$. Entonces
$$\begin{aligned}
|\langle v, w\rangle|^2 \leq ||v||^2||w||^2 &\iff (v_1w_1 + v_2w_2)^2 \leq (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2)\\
&\iff v_1^2w_1^2 + 2v_1w_1v_2w_2 + v_2^2w_2^2 \leq v_1^2w_1^2 + v_1^2w_2^2 + v_2^2w_1^2 + v_2^2w_2^2\\
&\iff 2v_1w_1v_2w_2 \leq v_1^2w_2^2 + v_2^2w_1^2\\
&\iff 0 \leq v_1^2w_2^2 - 2v_1w_1v_2w_2 + v_2^2w_1^2\\
&\iff 0 \leq (v_1w_2 - v_2w_1)^2,
\end{aligned}$$
lo cual se cumple ya que todo número real al cuadrado es mayor o igual que 0. Queda probada así la desigualdad.

18. Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.
   a) Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 0\}$.
   b) Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 1\}$.
   c) ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2?

Solución:

a) Si escribimos $w = (x, y, z)$, entonces
$$w \in P_1 \iff \langle (2, -1, 1), (x, y, z)\rangle = 0,$$
es decir
$$w \in P_1 \iff 2x - y + z = 0.$$
Ahora pasamos de la ecuación implícita a la paramétrica, despejando por ejemplo y:
$$2x - y + z = 0 \iff y = 2x + z.$$
Así, los puntos que cumplen $2x - y + z = 0$ son los de la forma $(x, 2x + z, z)$, y a su vez $(x, 2x + z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1)$.

$\therefore$ $\boxed{P_1 = \{s(1,2,0) + t(0,1,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\}}$ (da lo mismo usar s,t que x,z)

b) Análogo al item anterior:

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in P_2 &\iff \langle (2,-1,1),(x,y,z)\rangle = 1\\ &\iff 2x - y + z = 1\\ &\iff 2x + z - 1 = y\\ &\iff (x,y,z) = (x, 2x+z-1, z) = (0,-1,0) + x(1,2,0) + z(0,1,1)\end{aligned}$$

$\therefore$ $\boxed{P_2 = \{(0,-1,0) + s(1,2,0) + t(0,1,1) \mid s,t, \in \mathbb{R}\}}$

c) Los planos P_1 y P_2 son paralelos. De hecho, el plano P_2 es el plano paralelo a P_1 que pasa por $(0,-1,0)$.

19. Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.
   a) π_1: el plano que pasa por $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,-2,0)$.
   b) π_2: el plano que pasa por $(1,2,-2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2,1,-1)$, $(3,-2,1)$.
   c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1,2,0) + t(2,0,1) + (1,0,0);\ s,t \in \mathbb{R}\}$.

Solución:

a) La descripción paramétrica de un plano que pasa por 3 puntos (que no estén en la misma recta, como en este caso) u,v,w es $\{u + s(v-u) + t(w-u) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$ (notar que para $s = t = 0$ pasa por u, para $s = 0, t = 1$ pasa por v y para $s = 1, t = 0$ pasa por w). Así, tomando $u = (0,0,0), v = (1,1,0)$ y $w = (1,-2,0)$ podemos escribir:

$$\pi_1 = \{s(1,1,0) + t(1,-2,0) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$$

Luego la ecuación paramétrica del plano es:
$\boxed{X(s,t) = s(1,1,0) + t(1,-2,0)}$
Para la ecuación normal necesitamos un vector que sea ortogonal a ambos vectores $(1,1,0)$ y $(1,-2,0)$. A simple vista, como ambos tienen la tercer coordenada nula, vemos que un vector que cumple eso es $e_3 = (0,0,1)$ (chequeese con una cuenta si no se está convencido).
Luego la ecuación normal resulta $\langle (x,y,z),(0,0,1)\rangle = \langle (0,0,0),(0,0,1)\rangle$, o equivalentemente $z = 0$. Es decir, la ecuación normal del plano es $\boxed{z = 0}$
y el plano en su forma normal es

$$\pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}.$$

(Podríamos haber elegido cualquier punto en π_1 en lugar de $(0,0,0)$, y todos deberían dar la misma ecuación).

Comentario: La ecuación normal o paramétrica del plano y la descripción en forma normal o paramétrica no son exactamente lo mismo, pero sí son conceptros muy relacionados. La ecuación es la igualdad que satisface un punto del plano, es decir $ax + by + cz = k$ sería la ecuación normal, y $X(t,s) = p_0 + tv + sw$ sería la ecuación paramétrica. La descripción en forma normal o paramétrica, es el conjunto de todos los puntos que satisfacen dichas ecuaciones, es decir, $\{(x,y,z) | ax+by+cz = k\}$ sería la forma normal, y $\{p_0 + tv + sw | t,s \in \mathbb{R}\}$ sería la forma paramétrica.

b) En este caso conviene empezar con la ecuación normal pues nos dan como dato que el plano es perpendicular a la recta que pasa por $(2,1,-1)$ y $(3,-2,1)$, la cual es paralela a $(3,-2,1) - (2,1,-1) = (1,-3,2)$ (pues una descripción paramétrica de la recta es $\{(2,1,-1) + t(1,-3,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$). Entonces podemos tomar $(1,-3,2)$ como vector normal y así la forma normal del plano resulta

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, (1,-3,2)\rangle = \langle (1,2,-2),(1,-3,2)\rangle\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = -9\}\end{aligned}$$

Es decir, la ecuación normal es $\boxed{x - 3y + 2z = -9}$
Para encontrar la forma paramétrica se siguen los mismos pasos que en Ej. 18:

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \pi_2 &\iff x - 3y + 2z = -9 \\ &\iff x = -9 + 3y - 2z \\ &\iff (x,y,z) = (-9 + 3y - 2z, y, z) = (-9,0,0) + y(3,1,0) + z(-2,0,1)\end{aligned}$$

$$\therefore \pi_2 = \{(-9,0,0) + s(3,1,0) + t(-2,0,1) \mid s,t, \in \mathbb{R}\}$$

La ecuación paramétrica resulta
$\boxed{X(s,t) = (-9,0,0) + s(3,1,0) + t(-2,0,1)}$

c) El plano ya viene dado en forma paramétrica, por lo que es fácil dar la ecuación paramétrica:
$\boxed{X(s,t) = (1,0,0) + s(1,2,0) + t(2,0,1)}$
Sólo resta expresarlo en forma normal. Para ello es necesario encontrar un vector (x,y,z) que sea perpendicular a $(1,2,0)$ y a $(2,0,1)$. Como en este caso no es obvio, podemos plantear ambos productos escalares y despejar:

$$\begin{cases} x + 2y &= 0 \\ 2x + z &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x &= -2y \\ z &= -2x = -2(-2y) = 4y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x &= -2y \\ z &= 4y \end{cases}$$

Por lo que el vector buscado es de la forma $(-2y, y, 4y) = y(-2,1,4)$ o, lo que es lo mismo, un vector perpendicular al plano puede ser cualquier múltiplo de $(-2,1,4)$ (en particular podemos tomar $(-2,1,4)$ como vector normal al plano). El plano en su forma normal es entonces:

$$\begin{aligned}\pi_3 &= \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, (-2,1,4)\rangle = \langle (1,0,0),(-2,1-4)\rangle\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + 4z = -2\}\end{aligned}$$

por lo que la ecuación normal queda $\boxed{-2x + y + 4z = -2}$

20. ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio (19*c*)? Describir la intersección en cada caso.

(*a*) $\{w : w = (3,2,1) + t(1,1,1)\}$, (*b*) $\{w : w = (1,-1,1) + t(1,2,-1)\}$,
(*c*) $\{w : w = (-1,0,-1) + t(1,2,-1)\}$, (*d*) $\{w : w = (1,-2,1) + t(2,-1,1)\}$.

Solución: La manera más directa de chequear si una recta interseca a un plano es con la ecuación implícita del plano. Si la dirección de la recta es perpendicular a la dirección normal del plano, la recta es paralela al plano. Luego, o bien toda la recta está contenida en el plano, o bien la recta y el plano tienen intersección vacía.

Si una recta no es paralela a un plano, lo corta en un único punto. La manera más fácil de hallar ese punto es reemplazar la parametrización de la recta en la ecuación normal y despejar t. Luego, reemplazando t en la parametrización de la recta se encuentra el punto.

a) Como $\langle(1,1,1),(-2,1,4)\rangle = 3 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(3+t)+(2+t)+4(1+t) &= -2 \\ -6-2t+2+t+4+4t &= -2 \\ 3t &= -2 \implies \boxed{t = -\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(3,2,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \boxed{\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

b) Como $\langle(1,2,-1),(-2,1,4)\rangle = -4 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(1+t)+(-1+2t)+4(1-t) &= -2 \\ -2-2t-1+2t+4-4t &= -2 \\ 3 &= 4t \implies \boxed{t = \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(1,-1,1) + \frac{3}{4}(1,2,-1) = \boxed{\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}$

c) Como $\langle(1,2,-1),(-2,1,4)\rangle = -4 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(-1+t)+(2t)+4(-1-t) &= -2 \\ 2-2t+2t-4-4t &= -2 \\ -4t &= 0 \implies \boxed{t = 0} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(-1,0,-1) + 0 \cdot (1,2,-1) = \boxed{(-1,0,-1)}$

d) Como $\langle(2,-1,1),(-2,1,4)\rangle = -1 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(1+2t)+(-2-t)+4(1+t) &= -2 \\ -2-4t-2-t+4+4t &= -2 \\ -t &= -2 \implies \boxed{t = 2} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(1,-2,1) + 2(2,-1,1) = \boxed{(5,-4,3)}$