אלגברה לינארית 1

תרגיל 7

אביב וקנין
316017128

4

נמצא את כל תתי המרחב של $\mathbb{R}$.
יהא W תת־מרחב של $\mathbb{R}$, נחלק למקרים:

4.1 $\underline{W = 0}$

מקרה זה הוא הטריוואלי.
וקטור האפס מהווה מרחב וקטורי, ולכן הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}$.

4.2 $\underline{W \neq 0}$

מכיוון שW הינו תת מרחב, אנו יודעים כי הוא אינו ריק.
לכן, נוכל להניח כי הוא מכיל לפחות איבר אחד, אשר נקרא לו w.
מהגדרת תת־המרחב, ידוע כי:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda w \in W$$

קל לראות כי ביטוי זה מבטא בעצם את כל הקומבינציות הלינאריות האפשריות ב$\mathbb{R}$, או ליתר דיוק, ניתן לראות כי:

$$Span(W) = R$$

מהגדרת הפרוס הלינארי, ניתן להסיק כי:

$$W \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

בנוסף, מהיות W תת־מרחב של $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \subset W \tag{2}$$

בשל ההכלה הדו צדדית ב(1) ו־(2), הראינו כי:

$$W = \mathbb{R}$$

כלומר, $\mathbb{R}$ הוא תת־מרחב של עצמו.
לכן, הראינו כי תתי־המרחב של $\mathbb{R}$ הם 0 ו־$\mathbb{R}$ עצמו. $\square$

14

S תלויה לינארית.
בכדי שהיא לא תהיה תלויה לינארית, אמור להיות לה פתרון יחיד למערכת ההומוגנית ־ והוא הפתרון הטריוויאלי.
אולם, אם נדרג את המערכת לפי שורות נקבל:

$$\mathrm{rref}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נוכל לראות בבירור כי למערכת יש משתנה חופשי, וזה מספיק בכדי לקבוע כי ל־S יש פתרון לא טריוויאלי.
כלומר ־ S תלויה לינארית. $\square$

20

20.1 $\Longrightarrow$

נניח כי $ad - bc \neq 0$.
לכן, אנו יודעים כי המטריצה הבאה הפיכה:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

מכיוון ש־A הפיכה, אנו יודעים כי היא שקולה לפי שורות ל־I_2.
לכן, אנו יודעים כי הפתרון היחיד שלה למערכת ההומוגנית הוא הפתרון הטריוויאלי, ולכן, ניתן להסיק כי המערכת בלתי־תלויה לינארית.

20.2 $\Longleftarrow$

באופן דומה, אם נניח כי הקבוצה בלתי תלויה לינארית, נוכל להסיק מכך שאם נצרף את שני הוקטורים תחת מערכת אחת:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

נקבל וקטור בלתי־תלוי לינארית, אשר שקול לפי שורות ל־I.
הוכחנו בעבר כי וקטור כזה הוא הפיך, ומהיותו הפיך, ניתן להסיק כי:

$$\det(A) \neq 0 \implies ad - bc \neq 0$$

$\square$

22

מכיוון שS תלוי לינארית, נוכל לחסר את v_3 ממנו, וכך לקבל את S', וכך:

$$Span(S) = Span(S')$$

ניקח את הוקטורים $S' = \{v_1, v_2, v_4\}$ ונדרג אותם:

$$\text{rref}(S') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כלומר, הראינו כי S' היא קבוצה לא תלויה לינארית של וקטורים, ולכן, היא מהווה מרחב. $\square$

27

27.1

נראה כי W_1, W_2 הם תתי־מרחב של V.

27.1.1 מטריצת האפס

ראשית, אם נציב $a = b = c = 0 \in \mathbb{F}$ עבור שתי הקבוצות, נמצא את וקטור האפס.

27.1.2 סגירות תחת כפל סקלרי וחיבור וקטורי

נניח ש־$\vec{u}, \vec{v} \in W_1$ וש־$t \in \mathbb{F}$.
בנוסף, נניח כי $\vec{x}, \vec{y} \in W_2$.
לכן, אם נראה כי מתקיים:

$$t\vec{u} + \vec{v} \in W_1$$
$$t\vec{x} + \vec{y} \in W_2$$

אזי $W_1, W_2 \in V$.
נניח כי:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a & -a \\ b & c \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} d & -d \\ e & f \end{bmatrix}$$
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} d & e \\ -d & f \end{bmatrix}$$

לכן:

$$t\vec{u} + \vec{v} = c \cdot \begin{bmatrix} a & -a \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & -d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ta + d & -(ta + d) \\ tb + e & tc + f \end{bmatrix}$$

קל לראות כי:

$$t\vec{u} + \vec{v} \in W_1$$

ולכן $W_1 \leqslant V$.
בצורה דומה נראה עבור W_2:

$$t\vec{x}+\vec{y}=c\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & e \\ -d & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ta+d & tb+e \\ -(ta+d) & tc+f \end{bmatrix}$$

לכן, אנו רואים כי:

$$t\vec{x}+\vec{y}\in W_2$$

ולכן $W_2 \leqslant V$. $\square$

27.2

עלינו להראות כי:

$$W_1+W_2\leqslant V$$

27.2.1 <u>מטריצת האפס</u>

לפי א', אנו יודעים כי:

$$0_{W_1}\in W_1$$
$$0_{W_2}\in W_2$$

ולכן:

$$0_{W_1}+0_{W_2}=0\in W_1+W_2$$

27.2.2 <u>סגירות תחת כפל סקלרי וחיבור וקטורי</u>

ניקח שני וקטורים השייכים לקבוצה W_1+W_2:

$$\vec{x},\vec{y}\in W_1+W_2$$
$$t\in\mathbb{F}$$

אנו רוצים להראות כי:

$$t\vec{x}+\vec{y}\in W_1+W_2$$

בשל הגדרת הקבוצה W_1+W_2 אנו יודעים כי:

$$\vec{x}=u_1+u_2$$
$$\vec{y}=v_1+v_2$$

כאשר:

$$u_1,v_1\in W_1$$
$$u_2,v_2\in W_2$$

לכן מתקיים:

$$\begin{aligned} t\vec{x} + \vec{y} &= t(u_1 + u_2) + v_1 + v_2 \\ &= (tu_1 + v_1) + (tu_2 + v_2) \end{aligned} \tag{1}$$

מכיוון שהראינו בסעיף א׳ כי הקבוצות הן תתי־מרחב, אנו יודעים כי הן סגורות תחת כפל סקלרי וחיבור וקטורי, ולכן:

$$\begin{aligned} tu_1 + v_1 \in W_1 \\ tu_2 + v_2 \in W_2 \end{aligned} \tag{2}$$

לכן, לפי (1) ו־(2), אנו רואים כי כל אחד מהאיברים שייך לאחד מתתי־המרחב, ולכן הסכום שלהם שייך לסכום של תתי־המרחבים, כלומר $W_1 + W_2$.
לכן, הראינו כי $W_1 + W_2$ מהווה תת־מרחב וקטורי של V מכיוון שהוא מכיל את מטריצת האפס והוא סגור תחת כפל וחיבור. $\square$

27.3