80131-1 - אינפי 1 (סמ' א') תשפ"א 2020-2021 - תרגיל 3

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל-10/11/2020 בשעה 21:00.

בכל התרגיל $\mathbb{F}$ מסמל שדה סדור.

1. תהי $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה לא ריקה. הוכיחו כי $m \in \mathbb{F}$ הוא **החסם התחתון** של A אם ורק אם m מקיים את שני התנאים הבאים:
   (א) m חסם מלרע של A .
   (ב) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists a \in A \;\; a < m + \varepsilon$.

2. תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{F}$ ויהי $s \in \mathbb{F}$.
   (א) הוכיחו כי $s = \max(A)$ **אם ורק אם** $s = \sup(A)$ וגם $s \in A$.
   (ב) הוכיחו כי אם קיים ל-A מקסימום אז הוא **יחיד.**

3. יהיו $A, B \subseteq \mathbb{F}$ לא ריקות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   (א) אם $A \subseteq B$ ו- B חסומה מלרע אז A חסומה מלרע.
   (ב) אם $A \subseteq B$ ו- A חסומה מלעיל אז B חסומה מלעיל.
   (ג) **(לא להגשה)** אם A חסומה מלעיל ו- B חסומה מלרע אז $A \cup B$ חסומה.

4. יהיו $A, B \subseteq \mathbb{F} \neq \varnothing$ כך ש- $\sup A$ ו- $\sup B$ קיימים. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :
   (א) אם $A \subseteq B$ אז מתקיים $\sup B \leqslant \sup A$.
   (ב) אם $A \subseteq B$ ומתקיים $B \neq A$, אז מתקיים כי $\sup B < \sup A$.
   (ג) $-A = \{-a \mid a \in A\}$ חסומה מלרע ו- $\inf(-A)$ קיים וכן מתקיים $\inf(-A) = -\sup A$.

5. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, בדקו אם היא חסומה מלרע ו/או מלעיל.
אם כן, חשבו את האינפימום ו/או הסופרמום. קבעו גם האם קיימים מקסימום ומינימום, ואם כן, חשבו אותם.
הוכיחו את תשובותיכם! (ראו בבקשה את חומר עזר מס' 8 לפני פתרון שאלה זו).

$$A = \left\{ x^2 + 7x + 10 \;\middle|\; x \in \mathbb{F} \right\} \qquad , \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{F} \;\middle|\; x^2 + 7x + 10 > 0 \right\}$$

6. נסחו את תכונת החסם התחתון והראו שהיא שקולה ($\Leftrightarrow$) לתכונת השלמות.
קבלו השראה מהוכחה שהופיעה בהרצאה לגבי תכונת החסם העליון (משפט 6.4 בהרצאה של רז)

7. השלימו את הוכחת "למת החתכים" מההרצאה:
יהיו $A, B \subset \mathbb{R}$ שתי קבוצות לא ריקות כך שלכל $a \in A$ ו- $b \in B$ מתקיים $a \leqslant b$.
נתון כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $a \in A$ ו- $b \in B$ כך ש- $b - a < \varepsilon$.
הוכיחו כי קיים $M \in \mathbb{R}$ **יחיד** שהוא גם חסם מלעיל של A וגם חסם מלרע של B .

הערה: בשאלה זו אתם מוכיחים שתנאי ג) בלמת החתכים גורר את תנאי א).
מאחר שבהרצאה כבר הוכח א) גורר ב) ו- ב) גורר ג) , נסיק שכל התנאים שקולים.