אלגברה לינארית 1

תרגיל 8

אביב וקנין
316017128

7

$\underline{B_U}$ 7.1

ראשית, נמצא בסיס ל־U ע"י דירוג:

$$rref(U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן, הבסיס הוא:

$$B_U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$\underline{B_W}$ 7.2

שנית, נמצא בסיס ל־W ע"י דירוג מטריצת הפתרונות ההומוגנית:

$$rref(W) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

לכן, אם נבחר את $x_3 = t$ ואת $x_4 = k$, נקבל:

$$t \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_v$$

לכן:

$$B_W = \left\{ \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\underline{\mathbf{dim}(U+W)}$ 7.3

כעת, כדי למצוא את המרחב של שני תתי־המרחבים, ניקח את שני הבסיסים, נשים אותם במטריצה 4×4 ונדרג, ונקבל:

$$rref(U+W) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן, העמודה הרביעית תלויה לינארית, לכן הבסיס הוא:

$$B_{U+W}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-10\\3\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

והמימד הוא:

$$\dim(U+W)=3$$

$\square$

9

נבחר l כלשהו.
יש לציין כי מכיוון ש־L בלתי תלויה לינארית, היא בהכרח אינה מכילה את וקטור האפס, ולכן שני המקרים הבאים יכולים להתקיים.

9.1 l הוא צירוף לינארי של איבר כלשהו מ־G

במידה וזהו המקרה, נוכל "להחליף" את g ב־l ועדיין להשאר עם קבוצה אשר תיצור את V, וזאת מכיוון ששני האיברים תלויים לינארית, ולכן הפרוש הלינארי שלהם שווה.
לכן, במקרה זה, נקבל לפחות איבר אחד - g אשר נוכל "להוציא" מהקבוצה היוצרת, ולהחליף ב־l.

9.2 l הוא לא צירוף לינארי של איבר כלשהו מ־G

מקרה זה הוא פשוט יותר, והוא מעיד על כך שנוכל לקחת כל איבר g ולהחליפו ב־l ועדיין לקבל קבוצה אשר תיצור את V.
$\square$

10

10.1

10.1.1 פולינום האפס

מכיוון ש־U מכילה את כל האיברים מהצורה:

$$a+bz+cz^2$$

לכן, אם נציב $a=b=c=0$ נקבל:

$$0\in U$$

10.1.2 סגירות תחת כפל וחיבור

מכיוון שאנו יודעים שהקבוצה U איננה ריקה, ניקח את שני הפולינומים $u_1,u_2\in U$ ואיבר שרירותי $c\in\mathbb{C}$, ונראה כי מתקיים:

$$cu_1+u_2\in\mathbb{U}$$

13

תת המרחב הקטן ביותר הנמצא ב־V, או בעצם בכל תת־מרחב, הוא מרחב האפס, כלומר בהכרח מתקיים:

$$W_0 = \{0_v\}$$

תת־המרחב הגדול ביותר הנמצא בכל מרחב, הוא המרחב עצמו, כלומר מתקיים:

$$W_m = V$$

אנו יודעים כי בין כל שני תתי־מרחבים בסדרת תתי־המרחבים, מתקיים:

$$\dim(W_i + 1) - \dim(W_i) = 1$$

וזאת מכיוון שכל תת־מרחב גדול בהכרח מקודמו, כי הרי האיבר הנוסף מהווה תוספת למימד, מכיוון שאם לא, הרי יכולנו לבטא אותו באמצעות צירוף לינארי של תת־המרחב הקטן יותר.
אם לדוגמה ניקח מרחב וקטורי ממימד 1, הרי סדרת תתי המרחבים תהיה:

$$W_0 = \{0_v\}$$
$$W_1 = W_m = V$$

לכן, נוכל להסיק כי:

$$m = 1 = n$$

□

18

לפי הנתון:

$$x_1(1,0,-1) + x_2(1,1,1) + x_3(1,0,0) = (a,b,c)$$

לכן:

$$a = x_1 + x_2 + x_3$$
$$b = x_2$$
$$c = -x_1 + x_2$$

לפי, לפי אריתמטיקה:

$$x_1 = b - c$$
$$x_2 = b$$
$$x_3 = a + c - 2b$$

לכן:

$$[(a,b,c)]_B = (b - c, b, a + c - 2b)$$

□

19

19.1

נכניס את שני הוקטורים למטריצת שורות:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 1+i & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ונדרג:

$$\text{rref}(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix}$$

מכיוון ששני הוקטורים לאחר דירוג יוצרים שתי שורות שאינן שורות אפסים, הם מהווים בסיס, ולכן (v_1, v_2) מהווה בסיס סדור של W.

19.2

באופן דומה, נדרג את מטריצת השורות של (w_1, w_2):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 1+i \end{bmatrix}$$
$$\text{rref}(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix}$$

באופן דומה לסעיף א', שתי השורות אינן שורות אפסים ולכן הן מהוות בסיס סדור של W.

19.3

19.3.1 $\underline{v_1}$

נחשב את v_1 ביחס לבסיס הסדור (w_1, w_2):

$$x_1(1,1,0) + x_2(1,i,1+i) = (1,0,i)$$

ונקבל:

$$x_1 = \frac{1}{1+i}$$
$$x_2 = \frac{i}{1+i}$$

ולכן, וקטורי הקואורדינטות של v_1 ביחס לבסיס הסדור (w_1, w_2) הן:

$$(\frac{1}{1+i}, \frac{i}{1+i})$$

19.3.2 $\underline{v_2}$

נחשב את v_2 ביחס לבסיס הסדור (w_1, w_2):

$$x_1(1,1,0) + x_2(1,i,1+i) = (1+i,1,-1)$$

ונקבל:

$$x_1 = \frac{1+2i}{1+i}$$
$$x_2 = \frac{-1}{1+i}$$

ולכן, וקטורי הקואורדינטות של v_2 ביחס לבסיס הסדור (w_1, w_2) הן:

$$(\frac{1+2i}{1+i}, \frac{-1}{1+i})$$

$\square$

21

21.1

מכיוון ש־B בלתי תלויה לינארית, הרי שלושת הוקטורים שהיא מכילה לא תלויים זה בזה.
ולכן, שלושת הוקטורים הללו בהכרח מהווים בסיס עבור $\text{span}(B)$, מיידית לפי ההגדרה.

21.2

נציג את C כצירוף לינארי של B:

$$C = v_1[1,0,1] + v_2[1,1,1] + v_3[0,-1,1]$$

כעת, נוכל לדרג את שלושת מטריצות השורה שקיבלנו:

$$\text{rref}(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

והרי, קיבלנו את מטריצת הזהות.
כלומר, הראינו כי C היא סדרה בלתי תלויה לינארית, ובדומה ל־B, היא מהווה בסיס סדור של W.

21.3

P צריכה להיות $3x3$