אלגברה לינארית 1

תרגיל 6

אביב וקנין
316017128

7 נתון מרחב וקטורי V מעל שדה F, הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

7.1

הטענה נכונה.
ידוע כי:

$$a \cdot u + v = w$$

נניח כי קיים סקלר נוסף המקיים את הביטוי:

$$b \cdot u + v = w$$

נראה כי הם שווים זה לזה, וזה יעיד על יחידות הסקלר.

$$\begin{aligned} a \cdot u + v &= b \cdot u + v \\ a \cdot u &= b \cdot u \\ a &= b \end{aligned}$$

אזי, קיים סקלר a יחיד המקיים את הביטוי.

7.2

הטענה אינה נכונה.
ניקח את:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

קל לראות כי לא קיים אף a המקיים:

$$a \cdot u + v = w$$

7.3

הטענה נכונה.
לשם נוחות, נסתכל על הביטוי הקונטרה־חיובי:

$$a \neq 0 \quad \wedge \quad v \neq 0 \implies av \neq 0$$

כעת, לפי הנתון:

$$a \neq 0$$

לכן, נוכל לכפול את שני צדי אי־השוויון ב־v:

$$av \neq 0$$

ובצורה דומה, נוכל להוכיח עבור $v \neq 0$.

7.4

הטענה נכונה.
ידוע כי:

$$av = v$$

לכן, נחסר v משני צדי השוויון:

$$av - v = v - v$$
$$v(a-1) = 0$$

לכן, האופציה היחידה לקיום 0 היא אם $v = 0$ או $a = 1$.

14

14.4

תת־הקבוצה W אינה מהווה תת־מרחב וקטורי של V.
זאת מכיוון שהיא אינה סגורה לכפל בסקלר.
ראשית, נפשט את הביטוי:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{z}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

כעת, נבחר את:

$$\lambda = i \in \mathbb{C}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{W}$$

ונראה כי:

$$\lambda \cdot y = \begin{bmatrix} i \\ 4i \\ 2i \end{bmatrix}$$

ואולם, בכדי שW תהיה סגורה לכפל בסקלר, יש צורך ש:

$$\exists z \in \mathbb{R} \quad z \cdot y = \begin{bmatrix} i \\ 4i \\ 2i \end{bmatrix}$$

וכמובן, דבר זה אינו אפשרי.

14.5

תת־הקבוצה W אינה מהווה תת־מרחב וקטורי של V.
זאת מכיוון שהיא אינה סגורה לחיבור.
ניקח את:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{W}$$

ונבצע חיבור של u עם עצמו:

$$u+u=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\4\end{bmatrix}\notin\mathbb{W}$$

כלומר, $u+v$ לא נמצא ב־W, כנדרש.

15

15.4

פונקצייה זו אכן מהווה תת־מרחב.
ראשית, היא מכילה את פונקציית האפס:

$$0(-0)+0(0)=0$$

כעת, נראה סגירות לחיבור.

נניח ש־f,g נמצאים בקבוצה.
כלומר, נרצה להראות כי מתקיים:

$$(f+g)(-x)+(f+g)(x)=0$$

נפשט את הביטוי:

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)$$

לפי הגדרת הקבוצה:

$$f(-x)=-f(x)$$

לכן:

$$f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x) \tag{1}$$

כעת, נעבוד על הביטוי השני:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \tag{2}$$

נחבר את (1) ואת (2):

$$\begin{aligned}-f(x)-g(x)+f(x)+g(x) &=\\ &=-f(x)+f(x)-g(x)+g(x)=\\ &=0\end{aligned}$$

כנדרש.
כעת, נראה סגירות לכפל בסקלר.
נניח כי קיימת פונקציה f השייכת לקבוצה, וסקלר $\lambda\in\mathbb{R}$.
נרצה להראות כי:

$$\lambda\cdot f(-x)+\lambda\cdot f(x)=0$$

נשתמש בהגדרת הקבוצה:

$$-\lambda f(x)+\lambda f(x)=0$$

לכן, הקבוצה היא תת־מרחב של V.

15.5

הפונקצייה אכן תת־מרחב.
פונקציית האפס נמצאת בה מכיוון שזוהי אכן הגדרת פונקציית האפס.
כעת, נראה סגירות לחיבור.
נניח כי f, g נמצאות בקבוצה:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$$

כעת, נראה סגירות לכפל בסקלר.
נניח כי $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) = \lambda(0) = 0$$

ולכן, λf בקבוצה, ולכן הקבוצה סגורה תחת כפל סקלרי.
מכאן, נוכל להניח כי הקבוצה היא אכן תת־מרחב של V.

15.6

הפונקצייה אינה תת־מרחב.
זאת מכיוון שהיא אינה סגורה תחת חיבור.
נניח כי f, g שייכים לקבוצה, לכן, נרצה להראות כי:

$$|(f+g)(x)| \leqslant 1$$

אולם לפי אי־שוויון ברנולי:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x)| &= \\ &= |f(x)+g(x)| \\ &\leqslant |f(x)| + |g(x)| \\ &\leqslant 2 \end{aligned}$$

לכן, ניתן להסיק כי הקבוצה אינה סגורה תחת חיבור, ולכן אינה מהווה תת־מרחב של V.

26

אנו צריכים למצוא וקטור v אשר יקיים:

$$\mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + v = \mathbb{R}^2_{col}$$

כלומר, עבור $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} + v = \mathbb{R}^2_{col}$$

דוגמה לוקטור אשר יקיים את הביטוי היא:

$$\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ \pi \end{bmatrix} = \mathbb{R}^2_{col} \quad u \in \mathbb{R}$$

וקטור נוסף:

$$\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42 \\ u \end{bmatrix} = \mathbb{R}^2_{col} \quad u \in \mathbb{R}$$

31

ידוע לנו כי $\langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle$ הוא תת־מרחב, כלומר, הוא סגור לחיבור ולכפל סקלרי.
לכן, אם נמצא קומבינציה לינארית אשר מקיימת $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = w$, אזי נוכל להסיק ש־$w$ שייך לתת־המרחב.
ואכן המשתנים הבאים:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -1 \\ c_3 &= 1 \end{aligned}$$

יפיקו את המשוואה הבאה:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} = w$$

לכן, נסיק כי:

$$w \in \langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle$$