

מתמטיקה דיסקרטית

תרגיל 7

1

1.1

נציב את:

$$\begin{aligned}x &= 2^3 \\ y &= (-7)\end{aligned}$$

בנוסחת הבינום של ניוטון, ונקבל:

$$\begin{aligned}(8-7)^n &= (1)^n = 1 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{3n-i} (-1)^i 7^i = \\ &= 2^{3n} \binom{n}{0} - 7 \cdot 2^{3(n-1)} \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n 7^n \binom{n}{n}\end{aligned}$$

□

כלומר, לפי נוסחת הבינום, הזהות מתקיימת.

1.2

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

כעת, נגזור את שני הצדדים:

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

ונציב $x=2$:

$$n(2+1)^{n-1} = n \cdot 3^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k \cdot 2^{k-1}$$

□

לאחר שנכפול ב-2 את שני צדי המשוואה, נקבל את הזהות.

2

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

כעת, נגזור את שני הצדדים:

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

נגזור שוב ונקבל:

$$(n-1)n(x+1)^{n-2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k-1) k x^{k-2}$$

□

נציב $x=1$ ונקבל את הזהות המבוקשת.

3

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} x^k$$

נציב $x = 1$ ונקבל:

$$(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k}$$

נחלק ב-2 ונקבל את הזהות המבוקשת:

$$2^{2n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$$

□

4

נציב בנוסחת ההכלה והדחה ונקבל:

$$28 = |A \cap B \cap C| + 15 + 14 + 11 - 6 - 5 - 4$$
$$|A \cap B \cap C| = 3$$

5

ניתן להסתכל על שאלה זו כלמצוא את כל הפונקציות f מ- $A \setminus \{a\}$ ל- B כך שהתמונה של f מכילה את $B \setminus \{b\}$.
נסמן:

$$C = \{f : f : A \setminus \{a\} \rightarrow B\}$$

נניח כי:

$$B = \{1, 2, 3, b\}$$

נציב בנוסחת ההכלה והדחה ונקבל:

$$|C_1 \cap C_2 \cap C_3| = 3 \cdot 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 1 = 634$$

קבוצת כלל הפונקציות מחושבת ע"י:

$$4^5 = 1024$$

נחסר את הקבוצות ונקבל את התוצאה המבוקשת:

$$1024 - 634 = 390$$

בכדי לחשב את מספר הדרכים, נרצה לחסר את האפשרויות ה"רעות" מכלל האפשרויות.
כלל האפשרויות:

$$\binom{15}{6} = 5005$$

מספר האפשרויות הרעות במתמטיקה ובמדמ"ח, כלומר בלי לבחור אותם:

$$|M| = |C| = \binom{9}{6} = 84$$

מספר האפשרויות הרעות בפיזיקה:

$$|P| = \binom{12}{6} = 924$$

כעת, נרצה לחשב את:

$$|A| - |M \cup C \cup P|$$

ונעשה זאת ע"י הצבה בנוסחת ההכלה והדחה:

$$|M \cup C \cup P| = 84 + 84 + 924 - 1 - 1 = 1090$$

לכן נקבל:

$$|A| - |M \cup C \cup P| = 5005 - 1090 = 3915$$

□