אינפי 1

תרגיל 9

אביב וקנין
316017128

1

1.1

הטור לא מתכנס.
נראה זאת לפי מבחן ההשוואה.
ידוע כי מתקיים לכל n טבעי:

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{1}{n}$$

ולפי מבחן ההשוואה, מכיוון שהטור ההרמוני אינו מתכנס, גם הטור הזה אינו מתכנס.

1.2

הטור לא מתכנס, ניתן לראות זאת לפי אריתמטיקה של גבולות.
ראשית, נחשב את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

בנוסף, ידוע כי:

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot ... \cdot \frac{n}{n+1} = (\frac{n}{n+1})^{n^2}$$

לפי אריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot ... \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

והרי את הגבול הזה קל לחשב:

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2} = 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 = 1$$

לכן, הטור אינו מתכנס, מכיוון שהסדרה מתכנסת ל־1.

1.4

הטור מתכנס, נראה זאת לפי מבחן המנה.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 2^n}{n^2 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

מכיוון שגבול המנה קטן מ־1, הטור אכן מתכנס.

1.5

נראה כי הטור אינו מתכנס, בעזרת מבחן המנה.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{3^n n!(n+1)^{n+1}} = \frac{3n^n}{(n+1)^n}$$

ולפי אריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^n}{n^n}}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = 3$$

מכיוון שגבול המנה גדול מ־1, הטור אינו מתכנס.

1.7

הטור מתכנס, נראה זאת לפי מבחן השורש.
כלומר, עלינו להראות כי:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 < 1$$

ואכן:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - \lim_{n\to\infty} 1 = 1 - 1 = 0$$

כפי שרצינו, הגבול קטן מ־0 ולכן הטור מתכנס לפי מבחן השורש.

1.8

אותו הדבר כמו סעיף ה' רק עם 2 במקום 3?

2

2.1

2.1.1 $\Longleftarrow$

נניח כי הטור של a_n מתכנס, ולכן, הוא מקיים את קריטריון קושי להתכנסות טורים, ובפרט, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > t > N$ מתקיים:

$$|\sum_{i=t}^{k} a_i| < \varepsilon$$

כעת, בכדי להראות שהטור של a_{n+m} מתכנס אף הוא, נראה כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N' \in \mathbb{N}$ שנבחר כך:

$$N' = \max(0, N - m)$$

כאשר ה־N הוא אותו ה־N המתאים לטור a_n, כך שלכל $k' > t' > N'$ מתקיים:

$$|\sum_{i=t'}^{k'} a_i| < \varepsilon$$

כלומר, לפי קריטריון קושי להתכנסות טורים, הסדרה a_{n+m} ניתנת לסכימה. $\square$

2.1.2 $\Longrightarrow$

נניח כי הסדרה a_{n+m} ניתנת לסכימה, לכן, היא מקיימת את קריטריון קושי, ובפרט מתקיים כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > t > N$ מתקיים:

$$|\sum_{i=t}^{k} a_{i+m}| < \varepsilon$$

מכיוון שהסדרה a_{n+m} היא תת־סדרה של a_n, הרי האינדקס ה־N'י קיים בה, אולם בהזזה מסוימת של m אינדקסים ימינה.
כלומר, אם נבחר את N' להיות:

$$N' = N + m$$

נראה כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N' \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k' > t' > N'$ מתקיים:

$$|\sum_{i=t'}^{k'} a_i| < \varepsilon$$

כלומר, לפי קריטריון קושי להתכנסות טורים, הסדרה a_n ניתנת לסכימה. $\square$

2.2

הראינו בסעיף א' כי אם הטור של a_n מתכנס, אזי גם הטור של הסדרה a_{n+m} מתכנס.
לכן, לפי הגדרת הסכום, אם נחבר את m האיברים הראשונים לסכום האינסופי של a_{n+m}, נקבל בדיוק את a_n.

3

3.1

לא הצלחתי

3.2

נראה תחילה כי הסדרה הבאה ניתנת לסכימה:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$

לפי מבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}}}{\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}}<1$$

קל לראות כי המכנה גדול מהמונה, ולכן לפי מבחן המנה - הסדרה מתכנסת.
כעת, לפי משפט לייבניץ, אנו יכולים להסיק כי גם טור לייבניץ של הסדרה מתכנס.
מכיוון שהטור מתכנס, אנו יודעים כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים:

$$|S_n-L|<\varepsilon$$

לפי סעיף א', אנו יודעים כי מתקיים:

$$|S_n-L|\leqslant|a_{n+1}|=\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}}\leqslant\frac{1}{n}$$

לכן, אם נבחר את $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$ התנאי יתקיים בהכרח.
עבור $\varepsilon=10^{-4}$ נצטרך לבחור את:

$$N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{10^{-4}}=10000$$

לכן, דוגמה לבחירה תהיה $N=10000$.