אלגברה לינארית 1

בוחן

אביב וקנין
316017128

1

1.1

צירוף לינארי של S הוא כל הקומבינציות האפשריות שניתן להגיע אליהן ע"י פעולות חיבור וקטורי וכפל בסקלר.
לאחר ביצוע פעולות אלו, אנו בהכרח נישאר במרחב הוקטורי V, והפעולות יהיו בהכרח מוגדרות בעזרת השדה F.

1.2

אם תת־הקבוצה S היא תת־מרחב של V, אזי מתקיימים התנאים הבאים:

- S מכילה את וקטור האפס, או לחילופין - S היא לא קבוצה ריקה
- S סגורה תחת כפל סקלרי
- S סגורה תחת חיבור וקטורי

1.3

ניתן לומר כי הקבוצה S תלויה לינארית, אם אחד או יותר מהאיברים שלה, תלויים לינארית.
כלומר, אם ניתן להגיע מאיבר אחד לאיבר אחר, ע"י קומבינציה לינארית.
לדוגמה, נניח כי $s_1, s_2 \in S,\ c \in \mathbb{F}$, אז דוגמה לתלות לינארית היא אם מתקיים:

$$s_1 = c \cdot s_2$$

$\square$

2

נוכיח כי W הינו מרחב וקטורי, לפי זה שהוא מקיים את התנאים ציינו בסעיף **1ב'**.

2.1 וקטור האפס

מכיוון שכל תתי־המרחב הנמצאים בחיתוך מכילים את וקטור האפס בשל היותם תתי־מרחב, הרי גם החיתוך ביניהם מכיל את וקטור האפס.

$$0_v \in W_i \quad \forall i \quad 1 \leqslant i \leqslant 15$$

2.2 סגירות לחיבור וקטורי ולכפל סקלרי

מכיוון שעכשיו הוכחנו ש0_v נמצא ב־W, אנו יודעים כי W אינה קבוצה ריקה, לכן, נניח כי:

$$w_1, w_2 \in W, \quad c \in \mathbb{F}$$

אנו יודעים כי w_1, w_2 נמצאים בחיתוך של כל תתי־המרחבים, ולכן, אנו יודעים כי הם אכן מקיימים את שני התנאים האחרים של תת־מרחב, כלומר, שני הוקטורים סגורים תחת חיבור וקטורי וכפל סקלרי.
לכן, אנו יכולים להסיק את הטענה הבאה:

$$w_1 + c \cdot w_2 \in W$$

לכן, מכיוון שהראינו שוקטור האפס נמצא ב־W וגם כי האיברים בו סגורים תחת כפל סקלרי וחיבור וקטורי, ניתן להסיק כי W הוא תת מרחב של V. $\square$

3

כדי למצוא את המטריצות P ו־R, נוסיף מימין למטריצה A את מטריצת הזהות I_3 בתור מטריצה מורחבת, ולאחר מכן נדרג. לבסוף, נקבל:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

לכן, המטריצה ההפיכה P היא:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

והמטריצה בצורת מדרגות מצומצמת R היא:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□