אינפי 1

תרגיל 7

אביב וקנין
316017128

1 הוכיחו או הפריכו

1.1

הטענה נכונה. לפי אריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \infty + \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\infty + \lim_{n\to\infty} b_n = L$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = L - \infty = -\infty$$

1.2

הטענה אינה נכונה.
לשם דוגמה, ניקח את a_n להיות:

$$a_n = n$$

וניקח את b_n להיות n^2 עבור מספרים אי־זוגיים ו־n^3 עבור מספרים זוגיים, כלומר:

$$b_n = n^2, n^3, n^2, n^3 ...$$

אכן מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \in \mathbb{R}$$

אולם, b_n מתבדרת, ולכן לא מתכנסת ל־∞ או ל־$-\infty$. $\square$

2

2.1

אנו רוצים להראות כי A_n מתכנסת ל־L.
ראשית, נחלק את A_n לסכום של שני איברים:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + a_{N+2} + ... + a_n}{n}$$

2.1.1 <u>הביטוי השמאלי</u>

מכיוון שנתון כי a_n מתכנסת, הרי היא חסומה ע"י M כלשהו, לכן, נבחר n כך ש:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_N}{n} < \frac{N_1 \cdot M}{n} < \frac{L+\varepsilon}{2}$$

2.1.2 <u>הביטוי הימני</u>

מכיוון שנתון כי a_n מתכנסת ל־L:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; |a_n - L| < \frac{L+\varepsilon}{2}$$

כעת, נוכל להראות כי:

$$|A_n - L| = |\frac{a_1 + a_2 + ... + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + a_{N+2} + ... + a_n}{n}| < \frac{L+\varepsilon}{2} + \frac{L+\varepsilon}{2} - L = \varepsilon$$

לכן, מהגדרת הגבול, $A_n - L$ מתכנסת ל־L.

2.2

הטענה אינה נכונה.
ניקח את:

$$a_n = (-1)^n$$

כלומר, a_n אינה מתכנסת.
בנוסף:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 0$$

לכן:

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = 0 \implies \lim_{n\to\infty} A_n = 0$$

ניתן לראות כי a_n מתבדרת ו־A_n מתכנסת. $\square$

3

3.1

הטענה אינה נכונה.
לשם דוגמה, ניקח את:

$$a_n = n^{-1}$$
$$m_n = 2n - 1$$

לכן, a_n לא חסומה מלעיל, מכיוון שהיא שואפת בסירוגין ל־$\infty, -\infty$.
ואילו a_{m_n} חסומה מלעיל ע"י 0. כלומר, סדרה אחת מתבדרת בעוד השנייה מתכנסת ־ סתירה. $\square$

3.2

לשם פשטות, נסתכל על הצורה הקונטרה־חיובית של המשפט, ונראה כי אם a_n חסומה מלעיל, אז גם a_{m_n} חסומה מלעיל.
ידוע לנו כי m_n היא סדרה עולה ממש של אינדקסים, כלומר ־ מספרים טבעיים.
בנוסף, ידוע כי a_n חסומה מלעיל, אז:

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant M$$

לכן, אם נשלב את שתי המסקנות, נגלה כי לא משנה מהו ערך m_n, ערך הסדרה a_n בנקודה זו בהכרח קטן מ־M. כלומר ־ הסדרה חסומה מלעיל. $\square$

4

4.1

נניח כי מתקיים:

$$K \neq L$$

כלומר, הגבולות החלקיים של a_n מתכנסים למספרים שונים, בהתאם לזוגיות או אי־זוגיות האינדקס.
לפיכך, אם תתי־הסדרות של a_n מתכנסות לערכים שונים, הרי שהסדרה לא יכולה להתכנס לערך יחיד, וזה נובע באופן מיידי ממשפט הירושה.
כלומר ־ a_n מתבדרת.

4.2

נניח כי מתקיים:

$$K = L$$

לכן, בדומה לסעיף הקודם, אנו יודעים שהסדרה מקבלת גבול זהה בין אם האינדקס זוגי, ובין אם הוא אי־זוגי.
כלומר, לכל אינדקס, כאשר הסדרה a_n שואפת לאינסוף, גבול הסדרה הוא L. $\square$

5

5.1

לפי הגדרת הסדרה האינדוקטיבית:

$$b_{n+1} = \frac{1}{1+b_n} \tag{1}$$

$$b_{n+2} = \frac{1}{1+b_{n+1}} \tag{2}$$

לפי (1) ו־(2) וקצת אלגברה:

$$b_{n+2} = \frac{1+b_n}{2+b_n} = 1 - \frac{1}{b_n+2}$$

5.2

נראה בעזרת אינדוקציה כי $b_{2k-1} = c_k$ היא סדרה מונוטונית עולה, כלומר כי מתקיים:

$$c_{k+1} \geqslant c_k$$

5.2.1 בסיס האינדוקציה

$$c_1 = b_1 = 0$$
$$c_2 = b_3 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} \geqslant 0$$

5.2.2 הנחת האינדוקציה

נניח כי מתקיים $c_{k+1} \geqslant c_k$.

5.2.3 צעד האינדוקציה

נרצה להראות כי מתקיים:

$$c_{k+2} \geqslant c_{k+1}$$

לפי הגדרת הסדרה c_k, ידוע כי מתקיים:

$$c_k = b_{2k-1}$$
$$c_{k+1} = b_{2k+1}$$
$$c_{k+2} = b_{2k+3}$$

בדומה לסעיף א', נבטא את c_{k+1} בעזרת c_k ואת c_{k+2} בעזרת c_{k+1}:

$$c_{k+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+c_k}} \tag{3}$$

$$c_{k+2} = 1 - \frac{1}{c_k + 2} \tag{4}$$

לפי הנחת האינדוקציה, (3) ו־(4):

$$c_{k+2} \geqslant c_{k+1}$$

כלומר, הראינו כי הסדרה b_{2k-1} מונוטונית.
נראה בעזרת אינדוקציה כי $b_{2k} = d_k$ היא סדרה מונוטונית יורדת, כלומר כי מתקיים:

$$d_{k+1} \leqslant d_k$$

5.2.4 בסיס האינדוקציה

$$d_1 = b_2 = 1$$
$$d_2 = b_4 = \frac{2}{3}$$
$$\frac{2}{3} \leqslant 1$$

5.2.5 הנחת האינדוקציה

נניח כי מתקיים $d_{k+1} \leqslant d_k$.

5.2.6 צעד האינדוקציה

נרצה להראות כי מתקיים:

$$d_{k+2} \leqslant d_{k+1}$$

לפי הגדרת הסדרה d_k, ידוע כי מתקיים:

$$d_k = b_{2k}$$
$$d_{k+1} = b_{2k+2}$$
$$d_{k+2} = b_{2k+4}$$

בדומה לסעיף א', נראה את d_{k+1} בעזרת d_k ואת d_{k+2} בעזרת d_{k+1}:

$$d_{k+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+d_k}} \tag{5}$$

$$d_{k+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+d_{k+1}}} \tag{6}$$

לפי הנחת האינדוקציה, (5) ו־(6):

$$d_{k+2} \leqslant d_{k+1}$$

כלומר, הראינו כי הסדרה b_{2k} מונוטונית. □

5.3

נראה באינדוקציה כי c_k חסומה מלעיל ע"י 1, ומכך נוכל להסיק כי היא מתכנסת. כלומר, אנו רוצים להראות כי:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad c_k \leqslant 1$$

5.3.1 בסיס האינדוקציה

$$c_1 = b_1 = 0 \leqslant 1$$

5.3.2 הנחת האינדוקציה

נניח כי מתקיים:

$$c_k \leqslant 1$$

5.3.3 צעד האינדוקציה

אנו רוצים להראות כי מתקיים:

$$c_{k+1} \leqslant 1$$

לפי סעיף א', ניתן לבטא את c_{k+1} כ:

$$c_{k+1} = 1 - \frac{1}{c_k + 2}$$

מכיוון שהסדרה c_k חסומה מלרע ע"י 0 כי היא מונוטונית עולה, הרי הביטוי במכנה בהכרח חיובי, ולכן:

$$1 - \frac{1}{c_k + 2} \leqslant 1$$

כפי שרצינו להוכיח.
**לא הצלחתי להראות כי d_k חסומה מלרע.

6

6.1 $\Longleftarrow$

נניח כי a_n לא חסומה מלעיל.
כלומר, קיימת סדרת אינדקסים כלשהי m_n אשר מקיימת:

$$\lim_{n\to\infty} a_{m_n} = \infty$$

6.2 $\Longrightarrow$

נניח בשלילה כי הסדרה a_n חסומה מלעיל, כלומר מתקיים:

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant M \tag{1}$$

בנוסף, נניח כי קיימת תת סדרה a_{n_k} השואפת לאינסוף, כלומר מתקיים:

$$\forall M' \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad a_n > M' \tag{2}$$

נשים לב כי הביטויים (1) ו־(2) מנוגדים זה לזה מבחינה לוגית.
לכן, נסיק כי ההנחה שלנו הייתה שגויה, ו־a_n לא חסומה מלעיל. $\square$

7

לפי טענה 5.41 בהרצאה ־ תת סדרה של תת־סדרה היא תת־סדרה.
לפי הנתון בתרגיל, **לכל** תת־סדרה של a_n קיימת תת־סדרה המתכנסת ל־L.
בנוסף, לפי משפט הירושה, אנו יודעים כי אם סדרה מתכנסת ל־L אזי **כל** תת־סדרה שלה מתכנסת ל־L גם כן.
לכן, ניתן להסיק כי:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

$\square$