אינפי 1

תרגיל 9

אביב וקנין
316017128

1

1.1

הטור לא מתכנס.
נראה זאת לפי מבחן ההשוואה.
ידוע כי מתקיים לכל n טבעי:

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{1}{n}$$

ולפי מבחן ההשוואה, מכיוון שהטור ההרמוני אינו מתכנס, גם הטור הזה אינו מתכנס. $\square$

1.2

הטור אכן מתכנס, נראה זאת לפי מבחן השורש:

$$\sqrt[n]{(\frac{n}{n+1})^{n^2}} = (\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

כעת, נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} \approx 0.3678 < 1$$

לכן, לפי מבחן השורש, הטור מתכנס. $\square$

1.4

הטור מתכנס, נראה זאת לפי מבחן המנה.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 2^n}{n^2 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

מכיוון שגבול המנה קטן מ־1, הטור אכן מתכנס.

1.5

נראה כי הטור אינו מתכנס, בעזרת מבחן המנה.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{3^n n!(n+1)^{n+1}} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3(\frac{n}{n+1})^n = 3(\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^n = \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

מכיוון שידוע לנו כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = e$$

נוכל להסיק כי הגבול הוא:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} \approx 1.1036 > 1$$

לכן, נוכל להסיק לפי מבחן המנה כי הטור אינו מתכנס. $\square$

1.7

הטור מתכנס, נראה זאת לפי מבחן השורש.
כלומר, עלינו להראות כי:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 < 1$$

ואכן:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - \lim_{n\to\infty} 1 = 1 - 1 = 0$$

כפי שרצינו, הגבול קטן מ־0 ולכן הטור מתכנס לפי מבחן השורש.

1.8

נראה כי הטור אכן מתכנס, בעזרת מבחן המנה.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{2^n n!(n+1)^{n+1}} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2(\frac{n}{n+1})^n = 2(\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^n = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

מכיוון שידוע לנו כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = e$$

נוכל להסיק כי הגבול הוא:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} \approx 0.7357 < 1$$

לכן, נוכל להסיק לפי מבחן המנה כי הטור מתכנס. $\square$

2

2.1

2.1.1 $\Longleftarrow$

נניח כי הטור של a_n מתכנס, ולכן, הוא מקיים את קריטריון קושי להתכנסות טורים, ובפרט, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > t > N$ מתקיים:

$$|\sum_{i=t}^{k} a_i| < \varepsilon$$

כעת, בכדי להראות שהטור של a_{n+m} מתכנס אף הוא, נראה כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N' \in \mathbb{N}$ שנבחר כך:

$$N' = \max(0, N - m)$$

כאשר ה־N הוא אותו ה־N המתאים לטור a_n, כך שלכל $k' > t' > N'$ מתקיים:

$$|\sum_{i=t'}^{k'} a_i| < \varepsilon$$

כלומר, לפי קריטריון קושי להתכנסות טורים, הסדרה a_{n+m} ניתנת לסכימה. $\square$

2.1.2 $\Longrightarrow$

נניח כי הסדרה a_{n+m} ניתנת לסכימה, לכן, היא מקיימת את קריטריון קושי, ובפרט מתקיים כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > t > N$ מתקיים:

$$|\sum_{i=t}^{k} a_{i+m}| < \varepsilon$$

מכיוון שהסדרה a_{n+m} היא תת־סדרה של a_n, הרי האינדקס ה־N'י קיים בה, אולם בהזזה מסוימת של m אינדקסים ימינה.
כלומר, אם נבחר את N' להיות:

$$N' = N + m$$

נראה כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N' \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k' > t' > N'$ מתקיים:

$$|\sum_{i=t'}^{k'} a_i| < \varepsilon$$

כלומר, לפי קריטריון קושי להתכנסות טורים, הסדרה a_n ניתנת לסכימה. $\square$

2.2

הראינו בסעיף א' כי אם הטור של a_n מתכנס, אזי גם הטור של הסדרה a_{n+m} מתכנס.
לכן, לפי הגדרת הסכום, אם נחבר את m האיברים הראשונים לסכום האינסופי של a_{n+m}, נקבל בדיוק את a_n.

3

3.1

לא הצלחתי

3.2

נראה תחילה כי הסדרה הבאה ניתנת לסכימה:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$

לפי מבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}}}{\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}}<1$$

קל לראות כי המכנה גדול מהמונה, ולכן לפי מבחן המנה - הסדרה מתכנסת.
כעת, לפי משפט לייבניץ, אנו יכולים להסיק כי גם טור לייבניץ של הסדרה מתכנס.
מכיוון שהטור מתכנס, אנו יודעים כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$|S_n - L| < \varepsilon$$

לפי סעיף א', אנו יודעים כי מתקיים:

$$|S_n - L| \leqslant |a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}} \leqslant \frac{1}{n}$$

לכן, אם נבחר את $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ התנאי יתקיים בהכרח.
עבור $\varepsilon = 10^{-4}$ נצטרך לבחור את:

$$N \geqslant \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{10^{-4}} = 10000$$

לכן, דוגמה לבחירה תהיה $N = 10000$. □

4

4.1

הטענה נכונה.
מכיוון שידוע לנו כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

נוכל להסיק כי לכל $\varepsilon > 0$ ובפרט ל־1 קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$|\frac{a_n}{b_n} - 0| = \frac{a_n}{b_n} < 1$$

נכפול את שני אגפי אי־השווין ב־b_n ונקבל כי החל ממקום מסוים מתקיים:

$$a_n < b_n$$

לפי מבחן ההשוואה, מכיוון ש־b_n ניתנת לסכימה, אזי גם a_n ניתנת לסכימה. $\square$

4.2

הטענה אינה נכונה.
ניקח את:

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}$$
$$b_n = 42$$

שתי הסדרות אכן מקיימות את תנאי השאלה, ואכן הטור של a_n מתכנס (לפי שאלה 1ד'), אולם קל לראות כי הסדרה הקבועה b_n אינה ניתנת לסכימה. $\square$

5

5.1

הטענה אינה נכונה עבור שני סוגי הטורים, ניקח את:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

לכן:

$$a_n^2 = \frac{1}{n^2}$$

הראינו בהרצאה כי a_n לא ניתנת לסכימה, ואילו a_n^2 אכן ניתנת לסכימה. □

5.2

5.2.1 טורים אי־שליליים

הטענה נכונה.
ניקח סדרה a_n כלשהי אשר ניתנת לסכימה.
לכן, לפי ההגדרה, אם נבחר $\varepsilon = 1$, אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$|a_n| = a_n < 1$$

לכן, מכיוון ש־$a_n < 1$ החל מאותו N מתקיים:

$$|a_n^2| = a_n^2 \leqslant a_n$$

וזאת מכיוון שכל ריבוע של מספר בין 0 ל־1 קטן או שווה למספר עצמו.
לכן, נוכל כעת להפעיל את מבחן ההשוואה, ולהסיק כי מכיוון שa_n ניתנת לסכימה, אזי גם a_n^2. □

5.2.2 טורים כלליים

הטענה אינה נכונה.
ראשית, נבין כי הסדרה $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ היא סידרה יורדת של מספרים אי־שליליים, המתכנסת לאפס.
כעת, לפי משפט לייבניץ ניתן להסיק כי הסדרה הבאה ניתנת לסכימה:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

כעת, נחשב את a_n^2־

$$a_n^2 = \frac{1}{n}$$

אולם, אנו יודעים כי $\frac{1}{n}$ לא ניתנת לסכימה.
לכן, אנו מבינים כי הטענה אינה נכונה.

5.3

5.3.1 טורים אי־שליליים

עבור טורים אי־שליליים, $|a_n| = a_n$ ולכן בדומה לסעיף ב', הטענה נכונה.

5.3.2 טורים כלליים