80131 - אינפי 1 (סמ' א') תשפ"א 2020-2021 - תרגיל 2

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל־03/11/2020 בשעה 21:00.

בכל התרגיל $\mathbb{F}$ מסמל שדה סדור.

1. יהיו $a,b\in\mathbb{F}$. הוכיחו כי $a\leqslant b$ אם ורק אם לכל $0_{\mathbb{F}}<\varepsilon\in\mathbb{F}$ מתקיים כי $a<b+\varepsilon$.

2. (א) **(לא להגשה)** הוכיחו כי קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ סגורה תחת חיבור, כלומר:

   לכל $m,n\in\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ מתקיים ש־ $m+n\in\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ (רמז: הוכיחו באינדוקציה).

   (ב) הוכיחו כי קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ סגורה תחת כפל, כלומר: לכל $m,n\in\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ מתקיים ש־ $mn\in\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$.

   (רמז: הוכיחו באינדוקציה והשתמשו בסעיף הקודם).

3. (א) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים: ($\stackrel{\text{def}}{=}$ מסמן שהביטוי המקוצר בצידו האחד מוגדר ע"י הביטוי בצידו האחר)

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\stackrel{\text{def}}{=}1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   (ב) יהי $1_{\mathbb{F}}\neq x\in\mathbb{F}$. הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{i=0}^{n-1}x^i\stackrel{\text{def}}{=}1_{\mathbb{F}}+x+x^2+...+x^{n-1}=\frac{1_{\mathbb{F}}-x^n}{1_{\mathbb{F}}-x}$$

   (עבור $n=1$ מופיע באגף שמאל הסימון x^0 , ובנוסחה הזו המוסכמה היא ש־ $x^0=1_{\mathbb{F}}$)

4. יהיו $m,n,s,t\in\mathbb{F}$ כך ש־ $0_{\mathbb{F}}<n$ ו־ $0_{\mathbb{F}}<t$ ו־ $\frac{m}{n}<\frac{s}{t}$. הוכיחו : $\frac{m}{n}<\frac{m+s}{n+t}<\frac{s}{t}$.

5. **(לא להגשה)** הוכיחו כי לא קיים איבר $r\in\mathbb{Q}$ עבורו $r^2=3$.

   ניתן להשתמש בעובדה שעבור $n\in\mathbb{N}$ מתקיים שאם 3 מחלק את n^2 אז הוא מחלק גם את n .

   הערה: חשבו היכן ההוכחה היתה נכשלת לו היינו מנסים להראות כי לא קיים איבר $r\in\mathbb{Q}$ עבורו $r^2=4$.

חזקות עם מעריך טבעי

הגדרה : יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור. לכל $a\in\mathbb{F}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר את האיבר בשדה שיסומן ב־a^n באופן הבא:

$$\begin{array}{ccc} a^1 & = & a \\ a^{n+1} & = & a\cdot a^n \end{array}$$

a^n נקרא a **בחזקת** n או לפעמים **החזקה ה־n־ית של** a . המספר n נקרא **המעריך**, והמספר a נקרא **הבסיס**.

הערה: זו הגדרה רקורסיבית (או אינדוקטיבית) : $a^2=a^{1+1}=a^1\cdot a=a\cdot a$, $a^3=a^{2+1}=a^2\cdot a=(a\cdot a)\cdot a$, וכן הלאה...

טענה ("חוקי חזקות"): יהיו $x,y\in\mathbb{F}$ ויהיו n ו־ m מספרים טבעיים. מתקיימות הזהויות הבאות ("חוקי חזקות"):

$(i)\ \ x^n\cdot x^m=x^{m+n}$ $\quad(ii)\ \ (xy)^n=x^ny^n$ $\quad(iii)\ \ (x^m)^n=x^{mn}$ $\quad(iv)\ \ \left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$ $(y\neq 0)$.

הערה: זהות (i) הוכחה בחומר עזר מס' 6.

7. **(לא להגשה)** הוכיחו את הזהויות $(ii)-(iv)$

   (הדרכה ל־ (iii) : קבעו את m והוכיחו באינדוקציה שהדבר מתקיים לכל n . הדרכה ל־(iv) : העזרו בסעיף (ii) .)

8. יהיו $0_{\mathbb{F}}\leqslant x,y\in\mathbb{F}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$. הוכיחו כי מתקיים: $x<y\ \Leftrightarrow\ x^n<y^n$.

   (**הדרכה:** קודם הוכיחו את הגרירה $x<y\ \Rightarrow\ x^n<y^n$ ורק לאחר מכן את הגרירה $x<y\ \Leftarrow\ x^n<y^n$).