80131-1 - אינפי 1 (סמ' א') תשפ"א 2020-2021 - תרגיל 5

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל-24/11/2020 בשעה 21:00.

1. קבעו עבור כל אחת מהסדרות הבאות אם היא מתכנסת או מתבדרת. אם היא מתבדרת, הוכיחו זאת. אם היא מתכנסת, נחשו את גבולה, והוכיחו את הניחוש שלכם לפי הגדרת הגבול בלבד.

(א) **(לא להגשה)** $a_n = \frac{3n^5+1}{4n^6+n}$ (ב) $b_n = \frac{5+(-1)^n n}{4n^2+1}$ (ג) $c_n = (n+1)^2 - n^2$ (ד) $d_n = \frac{\sqrt{16n^2+3}}{n}$

2. תזכורת: סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הינה **סדרה מתכנסת** אם קיים לה גבול L כלשהו. סדרה שאינה מתכנסת נקראת **סדרה מתבדרת.**

(א) כתבו בכמתים את הטענה "הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת**".

(ב) כתבו בכמתים (ללא סימן השלילה הלוגי) את הטענה "הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **לא מתכנסת**".

(ג) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{n} & n \text{ is even} \\ 2 & n \text{ is odd} \end{cases}$ **לא מתכנסת** (כלומר מתבדרת). (העזרו בסעיף ב').

3. נתונים $L \in \mathbb{R}$ וסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. בכל סעיף מופיעה טענה. הוכיחו אותה או הפריכו אותה באמצעות דוגמה נגדית.

(א) **(לא להגשה)** אם $\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} = \{\, b_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(ב) $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.

(ג) **(לא להגשה)** אם לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(ד) אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ ולכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

4. נתונה סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \leqslant a_n$. נתון כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$L \in \mathbb{R}$.

(א) הוכיחו כי $0 \leqslant L$.

(ב) הוכיחו כי אם $L = 0$ אז הסדרה $(\sqrt{a_n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- 0 .

(ג) הוכיחו כי אם $L > 0$ אז הסדרה $(\sqrt{a_n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\sqrt{L}$.

5. (א) **(לא להגשה)** הוכיחו שלכל $x > 0$ ו- $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(1+x)^n > \frac{n(n-1)}{2}x^2$.

(ב) נתון $1 < q \in \mathbb{R}$. היעזרו בסעיף א' כדי להוכיח לפי ההגדרה ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$.

(ג) הוכיחו שלכל $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. (העזרו בסעיף א' ובשאלה 8 בתרגיל 2).

(ד) היעזרו בסעיף ג' כדי להוכיח ש- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגם $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אזי גם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(ב) אם לכל n טבעי $a_n, b_n \neq 0$ וכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגם $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אזי גם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(ג) אם לכל n טבעי $a_n, b_n \neq 0$ וכן $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ או $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

7. בשאלה 7 של תרגיל 4 הוכחתם: יהי $n \in \mathbb{N}$ ו- $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ עם $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.
אם $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ אז $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

(א) יהיו $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ עם $0 < y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$. הוכיחו : $\sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n} \leqslant \dfrac{y_1 + \cdots + y_n}{n}$.

(רמז: הגדירו $G = \sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n}$ ו- $x_k = \dfrac{y_k}{G}$ לכל $1 \leqslant k \leqslant n$, והעזרו בשאלה 7 של תרגיל 4).

(ב) **(לא להגשה)** הסיקו מסעיף א' : יהיו $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$ עם $0 < z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_n$. אזי :

$$\frac{n}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}} \leqslant \sqrt[n]{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n} .$$

הערה : השרשרת $\dfrac{z_1 + \cdots + z_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n} \geqslant \dfrac{n}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}}$ נקראת **`אי-שוויון הממוצעים`.**

$\dfrac{z_1 + \cdots + z_n}{n}$ נקרא **ממוצע חשבוני** (או **אריתמטי**) של $z_1, \ldots, z_n$.

$\sqrt[n]{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n}$ נקרא **ממוצע הנדסי** (או **גיאומטרי**) של $z_1, \ldots, z_n$.

$\dfrac{n}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}}$ נקרא **ממוצע הרמוני** של $z_1, \ldots, z_n$.