אינפי 1

תרגיל 8

אביב וקנין
316017128

1

1.1

נראה כי סדרת מרחקי הקטעים הסגורים $[a_n, b_n]$ מתכנסת ל־0.
אנו בעצם רוצים להראות כי מתקיים:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |b_n - a_n| < \varepsilon$$

נבחר את N כך ש־$N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, ולכן מתקיים:

$$|b_n - a_n| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2} < \frac{1}{(1\backslash\sqrt{\varepsilon})^2} = \varepsilon$$

לכן, מרחקי הקטעים מתכנסים ל־0, וסדרת הקטעים מקיימת את תנאי הלמה של קנטור.

1.2

נקרא לסדרת הקטעים מסעיף א' c_n ונגדיר אותה כ:

$$c_n = b_n - a_n$$

בנוסף, הראינו כי c_n מתכנסת ל־0, כלומר:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

לכן, מאריתמטיקה של גבולות:

$$0 = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

1.3

אנו צריכים למצוא N ספציפי עבורו מתקיים:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

מסעיף ב', ידוע כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$$

ולכן זה זהה ללמצוא N עבור:

$$|a_n - b_n| = |b_n - a_n| < \varepsilon$$

ולכן, אם נציב $\varepsilon = \frac{1}{100}$ בנוסחה למציאת ε אשר מצאנו בסעיף א', נקבל:

$$N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{100}}} = 10$$

דוגמה ל־N כזה היא 11. $\square$

2

2.1

$$a_1 = 0 \qquad a_3 = \frac{1}{2} \qquad a_5 = \frac{3}{4} \qquad a_7 = \frac{7}{8} \qquad a_9 = \frac{15}{16}$$

$$a_2 = 0 \qquad a_4 = \frac{1}{4} \qquad a_6 = \frac{3}{8} \qquad a_8 = \frac{7}{16} \qquad a_{10} = \frac{15}{32}$$

2.2

$$a_{2n+1} = \frac{n-2}{n-1}$$
$$a_{2n} = \frac{\frac{2^n}{2} - 1}{2^n} = \frac{2^n - 2}{2^{n+1}}$$

2.3

לסדרה יש שני גבולות חלקיים.

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-2}{n}}{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 2}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n-2}{2^n}}{\frac{2^{n+1}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{2^n}}{2} = \frac{1}{2}$$

3

3.1 ?

3.2

דוגמה לסדרה מסוג זה היא:

$$a_n = \sqrt{n}$$

המרחק בין איברי הסדרה מתכנס לאפס, אולם יחד עם זאת, סדרה זו שואפת לאינסוף, ולכן אינה מתכנסת ־ כלומר מתבדרת.

5

5.1

בכדי להראות כי a_n ניתנת לסכימה, נראה כי הטור שלה מתכנס.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{3^i+1} < \sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{3^i} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{3})^i$$
$$= 2(1-(\frac{2}{3})^n) < 2$$

הראינו שהטור של a_n חסום מלעיל, וכעת נראה שהוא מונוטוני עולה.

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1} > \sum_{i=1}^{n} a_i$$

מכיוון שהטור של a_n הוא סדרה מונוטונית עולה וגם חסומה מלעיל, ניתן להסיק כי הוא מתכנס, ולכן, a_n ניתנת לסכימה.

5.2

b_n לא ניתנת לסכימה.
ידוע לנו כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = \infty$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2n-1}$$

לכן, לפי משפט הסנדוויץ' במובן הרחב, ניתן להסיק כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} = \infty$$

ומכיוון שהסדרה לא מתכנסת - היא לא ניתנת לסכימה.

5.3

הוכחנו בהרצאה כי:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \tag{1}$$

לכן:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

כלומר, לפי אריתמטיקה של גבולות הראינו כי הסדרה c_n מתכנסת ל-1.
הראינו כי אם סדרה ניתנת לסכימה אזי היא מתכנסת ל-0, ולכן אם היא אינה מתכנסת ל-0, היא אינה ניתנת לסכימה, כמו במקרה זה.

5.4

מכיוון ש־p_n היא סדרה של מספרים טבעיים, ניתן להניח כי:

$$-1 \leqslant (-1)^{p_n} \leqslant 1$$

ולכן:

$$g_n = -\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{(-1)^{p_n}}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

אם נעביר אגפים, נקבל:

$$0 \leqslant \frac{(-1)^{p_n}+1}{n^2} = f_n \leqslant \frac{2}{n^2} = e_n \tag{1}$$

אם נראה כי e_n ניתנת לסכימה, אזי גם נראה כי f_n ניתנת לסכימה.
ראשית, נראה כי:

$$\frac{2}{k^2-k} = \frac{2k-2(k-1)}{(k-1)k} = \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k} \tag{2}$$

כעת, נראה כי הטור של e_n מתכנס, לכל $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n^2} < \sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n^2-n} \overset{(2)}{=} \sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n} =$$
$$= (\frac{2}{1}-\frac{2}{2}) + (\frac{2}{2}-\frac{2}{3}) + (\frac{2}{3}-\frac{2}{4}) + ... - \frac{2}{N-1}) + (\frac{2}{N-1} - \frac{2}{N}) =$$
$$= 2 - \frac{2}{N}$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-n} = 2$$

לכן, ניתן להסיק כי:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2} < 2$$

כלומר, הטור של e_n חסום מלעיל, נראה כי הוא גם מונוטוני עולה:

$$\sum_{n=1}^{n+1} \frac{2}{n^2} = \sum_{n=1}^{n} \frac{2}{n^2} + \frac{2}{(n+1)^2} > \sum_{n=1}^{n} \frac{2}{n^2}$$

מכיוון שהטור של e_n חסום מלעיל ומונוטוני עולה, הוא גם מתכנס.
מכיוון שe_n ניתנת לסכימה, הרי גם f_n ניתנת לסכימה, מאחר וכל איברי הסדרות אי־שליליים לפי 1.
בנוסף, גם הסדרה $-\frac{1}{n^2}$ ניתנת לסכימה, מאחר ו:

$$\frac{1}{n^2} - (-\frac{1}{n^2}) = \frac{2}{n^2}$$

בנוסף:

$$f_n = \frac{(-1)^{p_n}+1}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{(-1)^{p_n}}{n^2}$$

מכיוון שסכום סדרות ניתנות לסכימה יוצר סדרה ניתנת לסכימה, הרי קיבלנו כי:

$$d_n = \frac{(-1)^{p_n}}{n^2}$$

ניתנת לסכימה. □

6

6.1

אי שוויון הממוצעים