אינפי 1

תרגיל 6

אביב וקנין
316017128

1 חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות. מותר להשתמש באריתמטיקה של גבולות ומשפט הסנדוויץ.

1.2

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

נחשב את גבול הסדרה באמצעות משפט הסנדוויץ'.
כלומר,עבור a_n ו־b_n מסוימים אשר קל למצוא את גבולם, נרצה להראות כי:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$$

ומכך, נוכל להסיק כי:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n)$$

ראשית, קל לראות כי אם נגדיר את b_n ואת c_n כך:

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$
$$c_n = \frac{1}{n}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$$

את גבולות סדרות b_n ו־c_n קל לחשב:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}(c_n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0$$

ולכן, לפי משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n) = 0$$

□

1.4

$$a_n = \sqrt[n]{x^n + y^n}$$

מכיוון ש־$0 \leqslant x \leqslant y$, ניתן לראות כי:

$$\sqrt[n]{y^n} \leqslant \sqrt[n]{x^n + y^n} \leqslant \sqrt[n]{y^n + y^n}$$
$$y \leqslant \sqrt[n]{x^n + y^n} \leqslant y\sqrt[n]{2}$$

כלומר, אם נוכיח כי הגבול של y והגבול של $y\sqrt[n]{2}$ שווים, נוכל להניח כי זהו אמנם הגבול של a_n.
כעת, נחשב את הגבולות משני צדי a_n:

$$\lim_{n\to\infty}(y) = y$$
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2}) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}(y\sqrt[n]{2}) = \lim_{n\to\infty}(y) \cdot \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2}) = y$$

לכן, לפי כלל הסנדוויץ' נוכל להסיק:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = y$$

1.5

$$a_n = (0.99999 + \frac{1}{n})^n$$

לפי אריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{n\to\infty}(0.99999) = 0.99999$$
$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}(0.99999 + \frac{1}{n}) = 0.99999 \tag{1}$$

ובנוסף:

$$\lim_{n\to\infty}((0.99999 + \frac{1}{n})^n) = (\lim_{n\to\infty}(0.99999 + \frac{1}{n}))^n \tag{2}$$

לכן, לפי (1) ו־(2):

$$\lim_{n\to\infty}((0.99999 + \frac{1}{n})^n) = (0.99999)^n = 0$$

□

2 הוכיחו כי הסדרות מתכנסות

נתון לנו כי:

$$b_n \leqslant c_n$$

לכן:

$$b_n - a_n \leqslant c_n - a_n \tag{1}$$

בנוסף, נתון לנו כי:

$$a_n \leqslant b_n$$

ומכאן נובע:

$$0 \leqslant b_n - a_n \tag{2}$$

לכן, לפי (1) ו־(2):

$$0 \leqslant b_n - a_n \leqslant c_n - a_n \tag{3}$$

בנוסף, אנו יודעים כי:

$$\lim_{n\to\infty}(0) = 0 \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0 \tag{5}$$

לכן, לפי כלל הסנדוויץ' על (3), (4) ו־(5) נוכל להסיק כי:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \tag{6}$$

ידוע לנו כי:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n) = L \tag{7}$$

לפי אריתמטיקה של גבולות על (6) ו־(7):

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - (b_n - a_n)) = L - 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = L \tag{8}$$

כעת, לפי (5) ו־(8), נוכל להסיק לפי הלמה של קנטור:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n) = L$$

□

3

3.1 הוכיחו כי הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ מתכנסת ל־1.

ידוע לנו כי:

$$0 < \alpha < a_n < \beta$$

לכן, ניתן להסיק:

$$\sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\beta} \tag{1}$$

הוכח כי:

$$\forall a > 0 \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a}) = 1 \tag{2}$$

לכן, לפי (2):

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{\alpha}) = 1 \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{\beta}) = 1 \tag{4}$$

לכן, אם נפעיל את כלל הסנדוויץ' על (1), (3) ו־(4), נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a_n}) = 1$$

□

3.2 הוכיחו כי הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ מתכנסת ל־1.

ידוע לנו כי הסדרה מתכנסת ל־L חיובי כלשהו, כלומר:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0 \tag{1}$$

הוכחנו בכיתה, כי:

$$\forall a > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \tag{2}$$

לכן, ע"י שילוב (1) ו־(2) נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{L} = 1$$

□

4 חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות במובן הרחב ישירות מההגדרה

4.1

$$a_n = \frac{n^3 - 100}{n^2 + 20n}$$

בכדי להוכיח שהסדרה שואפת לאינסוף, עלינו להוכיח כי:

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad a_n > M$$

נבחר N טבעי אשר מקיים:

$$N > M + 20$$

לכן, לכל $n > N$ מתקיים:

$$a_n > n - 20 > N - 20 > (M + 20) - 20 = M$$

לכן, לפי הגדרת הגבול במובן הרחב:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \infty$$

□

4.3

$$a_n = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

בכדי להוכיח שהסדרה שואפת לאינסוף, עלינו להוכיח כי:

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad a_n > M$$

נתחיל מהפסוק הבא:

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor > \sqrt{n} - 1$$

הפסוק נכון מכיוון שפונקציית הרצפה תחזיר מספר שמרחקו מערך הביטוי המקורי תמיד יהיה קטן מ־1.
לכן, כאשר אנו מחסירים 1 מערך הביטוי, a_n תמיד יהיה גדול יותר.
לכן, נבחר:

$$N \geqslant (M + 1)^2$$

לכן, לכל $n > N$ מתקיים:

$$a_n > \sqrt{n} - 1 > \sqrt{N} - 1 > M$$

לכן, לפי הגדרת הגבול במובן הרחב:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \infty$$

□

5 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

5.1

נרצה להוכיח כי:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$$

לכן, עלינו להוכיח:

$$\forall M>0 \;\; \exists N\in\mathbb{N} \;\; \forall n>N \;\;\; a_n\cdot b_n > M$$

נתון כי b_n חסומה מלרע החל ממקום מסוים ע"י מספר חיובי, כלומר:

$$\exists m\in\mathbb{R} \;\; \exists N_1\in\mathbb{N} \;\; \forall n>N_1 \;\;\; b_n \geqslant m$$

בנוסף, נתון כי a_n שואפת לאינסוף, לכן לפי הגדרה:

$$\forall M>0 \;\; \exists N_2\in\mathbb{N} \;\; \forall n>N_2 \;\;\; a_n > M \tag{1}$$

לפי (1), נוכל לבחור את a_n להיות גדול יותר בפרט מ:

$$a_n > \frac{M}{m}$$

נבחר את N להיות:

$$N = \max(N_1, N_2)$$

לכן, החל מהאינדקס ה־N'י בכל סדרה מתקיים לכל $n>N$:

$$a_n > \frac{M}{m}$$
$$b_n \geqslant m$$

לפי אקסיומות הסדר, ניתן להסיק כי:

$$a_n\cdot b_n > \frac{M}{m}\cdot m$$
$$a_n\cdot b_n > M$$

לפיכך, לפי הגדרת הגבול במובנו הרחב:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$$

□

5.2

נרצה להוכיח כי:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$$

לכן, עלינו להוכיח:

$$\forall M>0 \;\; \exists N\in\mathbb{N} \;\; \forall n>N \;\;\; a_n \cdot b_n > M$$

נתון כי b_n מתכנסת ל-L, כלומר:

$$\forall \epsilon>0 \;\; \exists N_1\in\mathbb{N} \;\; \forall n>N_1 \;\;\; |b_n - L| < \epsilon$$

ובפרט:

$$b_n > L - \epsilon \tag{1}$$

בנוסף, נתון כי a_n שואפת לאינסוף, לכן לפי הגדרה:

$$\forall M>0 \;\; \exists N_2\in\mathbb{N} \;\; \forall n>N_2 \;\;\; a_n > M \tag{2}$$

לפי (2), נוכל לבחור את a_n להיות גדול יותר בפרט מ:

$$a_n > \frac{M}{L-\epsilon}$$

נבחר את N להיות:

$$N = \max(N_1, N_2)$$

לכן, החל מהאינדקס ה-N'י בכל סדרה מתקיים לכל $n>N$:

$$a_n > \frac{M}{L-\epsilon}$$
$$b_n > L-\epsilon$$

לפי אקסיומות הסדר, ניתן להסיק כי:

$$a_n \cdot b_n > \frac{M}{L-\epsilon} \cdot L - \epsilon$$
$$a_n \cdot b_n > M$$

לפיכך, לפי הגדרת הגבול במובנו הרחב:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$$

$\square$

5.3

נראה כי הטענה אינה נכונה.
ניקח את:

$$a_n = n$$
$$b_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

אמנם:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

אך הסימן של b_n לא נשאר קבוע.
כלומר, כאשר אנו כופלים את $a_n b_n$ אנו מקבלים גבול מהצורה:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \frac{\infty}{\pm 0}$$

ומכיוון שהסימן של המכנה אינו קבוע, לא ניתן לומר כי הסדרה מתכנסת ל∞ או ל־$-\infty$. $\square$

6

6.1

נרצה להראות כי הסדרה מוגדרת.
החשש הוא שתחת השורש יהיה ביטוי שלילי, אולם מכיוון ש־$t \geqslant -2$, הביטוי תמיד יהיה מוגדר.
כעת, נרצה להראות שהסדרה **מונוטונית עולה**.
כלומר, נרצה להראות כי לכל n טבעי מתקיים:

$$a_{n+1} \geqslant a_n$$

נראה זאת באמצעות אינדוקציה:

6.1.1 בסיס האינדוקציה

$$\begin{aligned} a_1 &= t \\ a_2 &= \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+t} \end{aligned}$$

נניח בשלילה כי:

$$\begin{aligned} a_1 &\geqslant a_2 \\ t &\geqslant \sqrt{2+t} \end{aligned}$$

מכיוון שt מוגדר להיות ערך:

$$-2 \leqslant t \leqslant 2$$

נוכל לבחור את t להיות -2 ונקבל:

$$\begin{aligned} -2 &\geqslant \sqrt{2-2} \\ -2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

זוהי סתירה, ולכן בסיס האינדוקציה נכון.

6.1.2 הנחת האינדוקציה

נניח שהביטוי הבא נכון:

$$a_{n+1} \geqslant a_n$$

6.1.3 צעד האינדוקציה

נרצה להוכיח שהביטוי הבא נכון:

$$a_{n+2} \geqslant a_{n+1}$$

ידוע לנו כי:

$$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} \geqslant \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}$$

ניתן לבצע את מעבר זה לפי הנחת האינדוקציה.
לכן, הוכחנו כי הסדרה **מונוטונית עולה**.
כעת, נרצה להראות באינדוקציה כי הסדרה **חסומה מלעיל** ע"י 2.
כלומר, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$a_n \leqslant 2$$

6.1.4 בסיס האינדוקציה

לפי הגדרת סעיף א':

$$a_1 = t$$
$$-2 \leqslant t \leqslant 2$$

6.1.5 הנחת האינדוקציה

נניח כי:

$$a_n \leqslant 2$$

6.1.6 צעד האינדוקציה

נרצה להראות כי מתקיים:

$$a_{n+1} \leqslant 2$$

לפי כלל הנסיגה של הסדרה:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

ניקח את a_n להיות הערך המקסימלי שלו, כלומר - 2:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2 \leqslant 2$$

וכך, הוכחנו כי הסדרה **חסומה מלעיל** ע"י 2.

6.2

הסדרה **מוגדרת** לכל n טבעי מכיוון ש־t הוא חיובי.
לכן, אם רק נוסיף לו, או ניקח את השורש שלו, הביטוי תמיד יהיה מוגדר, מכיוון שתחת השורש לא יהיה ביטוי שלילי.
נראה באמצעות אינדוקציה כי הסדרה **מונוטונית יורדת**, כלומר כי לכל n טבעי מתקיים:

$$a_{n+1} \leqslant a_n$$

6.2.1 בסיס האינדוקציה

לפי הגדרת סעיף ב׳:

$$a_1 = t > 2$$
$$a_2 = \sqrt{2+t}$$

לכן, נרצה להראות כי מתקיים:

$$\sqrt{2+t} \leqslant t$$

מכיוון ש$t > 2$, ניקח $\epsilon > 0$ כך ש־$2 + \epsilon = t$.
מכיוון שϵ חיובי:

$$4 + \epsilon < 4 + \epsilon + 3\epsilon + \epsilon^2$$

לכן, ע״י לקיחת שורש לשני הצדדים החיוביים בהכרח, נוכל להראות כי:

$$\sqrt{2+t} = \sqrt{4+\epsilon} < 2 + \epsilon = t$$

כפי שרצינו להראות.

6.2.2 הנחת האינדוקציה

נניח כי:

$$a_{n+1} \leqslant a_n$$

6.2.3 צעד האינדוקציה

נרצה להראות כי מתקיים:

$$a_{n+2} \leqslant a_{n+1}$$

לפי כלל הנסיגה של הסדרה:

$$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}}$$
$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$\sqrt{2 + a_{n+1}} \leqslant \sqrt{2 + a_n}$$

וכך הראינו שהסדרה היא **מונוטונית יורדת**.

כעת, נרצה להראות כי הסדרה **חסומה מלרע**, כלומר כי קיים m כך שלכל n טבעי:

$$a_n \geqslant m$$

נבחר את $m = 2$ ונראה כי הוא חסם מלרע ע"י אינדוקציה.

6.2.4 בסיס האינדוקציה

לפי הגדרת סעיף ב':

$$a_1 = t > 2 = m$$

6.2.5 הנחת האינדוקציה

נניח כי:

$$a_n \geqslant 2$$

6.2.6 צעד האינדוקציה

נרצה להראות כי מתקיים:

$$a_{n+1} \geqslant 2$$

נוסיף את 2 לשני הצדדים של אי־השוויון של הנחת האינדוקציה:

$$2 + a_n \geqslant 4$$

וכעת ניקח את השורש השני של שני הצדדים:

$$\sqrt{2 + a_n} \geqslant 2$$

לפי כלל הנסיגה של הסדרה:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \geqslant 2$$

לכן, הוכחנו כי הסדרה **חסומה מלרע** ע"י $m = 2$.

6.3

בסעיף א' ראינו כי a_n חסומה מלעיל ומונוטונית עולה.
בכיתה, הוכחנו משפט המראה כי סדרה כזו מתכנסת אל הסופרמום שלה, והוא במקרה זה ־ 2.
מצד שני, בסעיף ב' ראינו כי a_n חסומה מלרע ומונוטונית יורדת.
מאותה הסיבה, סדרה זו מתכנסת אל האינפימום שלה, וגם הוא 2.
לכן, אנו יכולים להסיק מכך כי אין חשיבות לערכו של t, כל עוד הערך שלו גדול או שווה ל־-2,
כלומר כך ש־a_n תהיה מוגדרת. $\square$