

## מאגר שאלות - שבוע 3

### מטריצה בצורת מדרגות מצומצמת

בשיעור הוגדרה מהי מטריצה בצורת מדרגות מצומצמת וגם למדנו על אלגוריתם גאוס-ג'ורדן שבהינתן מטריצה  $A$  מייצר מטריצה בצורת מדרגות מצומצמת  $B$  כך ש  $B$  שקולה לפי שורה ל  $A$ .

### שאלות חימום

1. אלו מהמטריצות הבאות הן בצורת מדרגות מצומצמת? עבור מטריצה שאינה בצורת מדרגות מצומצמת ציינו למה לא.

$$U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad U_7 = [0 \quad 2 \quad 1] \quad U_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$U_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2. תהי  $A$  מטריצה מסדר  $m \times n$  בצורת מדרגות מצומצמת בעלת  $r$  שורות שונות מאפס. הסבירו מדוע  $r \leq m$  וגם  $r \leq n$ .

3. שאלת תרגול פעיל.

### שאלות ברמת קושי בינונית

4. בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצאו מטריצה בצורת מדרגות מצומצמת השקולה לפי שורה למטריצה הנתונה

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}$$
$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 6 & 12 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

### שאלות ברמת קושי גבוהה

5. שאלת תרגול פעיל.

## פתרון מערכת משוואות

### שאלות חימום

6. נתונה מערכת משוואות מעל  $\mathbb{R}$  הנעלמים  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= b^1 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_4 &= b^2 \\ 2X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 3X_4 &= b^3 \end{aligned}$$

(א) רשמו את מטריצת המקדמים המורחבת של המערכת. נסמן מטריצה זו ב  $[A | b]$ .

(ב) תוך שימוש באלגוריתם גאוס-ז'ורדן מצאו מטריצה  $[R | d]$  כך ש  $[R | d]$  שקולה לפי שורה ל  $[A | b]$  וגם ש  $R$  היא מטריצה בצורת מדרגות מצומצמת.

(ג) הסבירו מדוע  $R$  שקולה לפי שורה ל  $A$ .

(ד) רשמו את מערכת המשוואות המתאימה למטריצה  $[R | d]$ .

(ה) מהו התנאי על  $b^1, b^2, b^3$  שיש לדרוש על מנת שהמערכת הנתונה תהיה עקבית?

(ו) מצאו  $b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$  שעבורו המערכת הנתונה אינה עקבית.

### שאלות ברמת קושי בינונית

7. נתונה  $A$  מטריצה ריבועית  $n \times n$  השקולה לפי שורה למטריצת היחידה. יהי  $b \in \mathbb{F}^n$ . הראו שהמערכת הלא-הומוגנית שמטריצת המקדמים המורחבת שלה היא  $[A | b]$  היא עיקבית ויש לה פתרון יחיד.

8. יהי  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ . מצאו את כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}X_1 + 2X_2 - 6X_3 &= 0 \\ -4X_1 + 5X_3 &= 0 \\ -3X_1 + 6X_2 - 13X_3 &= 0 \\ -\frac{7}{3}X_1 + 2X_2 - \frac{8}{3}X_3 &= 0 \end{aligned}$$

9. שאלת תרגול פעיל.

10. יהי  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ . מצאו את כל הפתרונות (אם קיימים) של המערכת

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 + 2X_3 &= 1 \\ 2X_1 + 2X_3 &= 1 \\ X_1 - 3X_2 + 4X_3 &= 2 \end{aligned}$$

11. שאלת תרגול פעיל.

12. נתונה  $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ . מצאו את כל הרביעיות  $b \in \mathbb{R}^4$  כך שלמערכת המשוואות שמטריצת המקדמים המורחבת שלה היא  $[A | b]$  קיים פתרון.

13. נתונה מערכת כללית של שתי משוואות בשני נעלמים מעל שדה  $\mathbb{F}$

$$\begin{aligned} aX_1 + bX_2 &= b^1 \\ cX_1 + dX_2 &= b^2 \end{aligned}$$

על פי שאלה משבוע שעבר הסיקו כי למערכת יש פתרון יחיד אם ורק אם  $ad - bc \neq 0$ .

14. נתונה מערכת משוואות בשלושה נעלמים מעל  $\mathbb{R}$ . פתרו אותה.

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 + X_3 &= 0 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 &= 0 \\ 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 &= 0 \end{aligned}$$

15. נתונה מערכת משוואות בארבעה נעלמים מעל  $\mathbb{R}$ . פתרו אותה.

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_3 + X_4 &= 1 \\ 2X_1 + X_3 + 2X_4 &= 0 \\ 2X_1 + X_2 + X_4 &= -1 \end{aligned}$$

16. נתונה מערכת משוואות בשלושה נעלמים מעל  $\mathbb{R}$ . פתרו אותה.

$$\begin{aligned} 5X_1 + 2X_2 + 4X_3 &= 0 \\ -X_3 &= 10 \\ 3X_1 + X_2 + 2X_3 &= -5 \end{aligned}$$

17. נתונה מערכת משוואות בשלושה נעלמים מעל  $\mathbb{R}$ . פתרו אותה.

$$\begin{aligned} X_2 + X_3 &= 0 \\ X_1 + X_3 &= 10 \\ X_1 + X_2 &= -5 \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 5 \end{aligned}$$

### שאלות ברמת קושי גבוהה

18. יהיו  $A$  ו  $B$  מטריצות מסדר  $2 \times 3$  בצורת מדרגות מצומצמת. נסמן ב  $M$  את מערכת המשוואות ההומוגניות שמטריצת מקדמים שלה היא  $A$  ונסמן ב  $N$  את מערכת המשוואות ההומוגניות שמטריצת מקדמים שלה היא  $B$ . הוכיחו שאם למערכות ההומוגניות  $M$  ו  $N$  יש את אותה קבוצת פתרונות אז  $A = B$ .

### חיבור וכפל בסקלר של מטריצות

עבור מטריצות  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  וסקלר  $k \in \mathbb{F}$  הגדרנו פעולות חיבור מטריצות וכפל בסקלר להיות

$$(A + B)_j^i = a_j^i + b_j^i \quad (kA)_j^i = ka_j^i$$

### שאלות חימום

19. יהי  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ . נתונות המטריצות

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ונתונים הסקלרים

$$\alpha = 4 \quad \beta = \frac{1}{2}$$

חשבו (אם אפשר) את הביטויים הבאים. אם אי אפשר, ציינו מדוע.

$$A + B \quad A + C \quad \alpha A - B \quad \alpha \left( \frac{1}{\beta} D - C \right)$$

20. רישמו את המטריצה  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  כצירוף לינארי של המטריצות  $\{E_j^i\}$  עם  $1 \leq i \leq 2$  ו  $1 \leq j \leq 3$ .

## שאלות ברמת קושי בינונית

21. הוכיחו שפעולת החיבור של מטריצות (מאותו גודל!) היא אסוציאטיבית.
22. הוכיחו שפעולת החיבור של מטריצות (מאותו גודל!) היא קומוטטיבית.
23. הוכיחו כי לכל מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  מתקיים  $1 \cdot A = A$ .
24. הוכיחו כי לכל מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  וזוג סקלרים  $c, d \in \mathbb{F}$  מתקיים  $c(dA) = (cd)A$ .
25. הוכיחו כי לכל מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  מתקיים  $(-1) \cdot A = -A$ . ובאופן כללי יותר, לכל מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  וסקלר  $c \in \mathbb{F}$  מתקיים  $(-c)A = -(cA)$ .
26. הוכיחו את שתי תכונות הדיסטריבוטביות של הפעולות חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר.