# אלגברה לינארית 1

תרגיל 7

**אביב וקנין**
316017128

# 4

נמצא את כל תתי המרחב של $\mathbb{R}$.
יהא $W$ תת־מרחב של $\mathbb{R}$, נחלק למקרים:

## 4.1 $\underline{W = 0}$

מקרה זה הוא הטריוואלי.
וקטור האפס מהווה מרחב וקטורי, ולכן הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}$.

## 4.2 $\underline{W \neq 0}$

מכיוון ש$W$ הינו תת מרחב, אנו יודעים כי הוא אינו ריק.
לכן, נוכל להניח כי הוא מכיל לפחות איבר אחד, אשר נקרא לו $w$.
מהגדרת תת־המרחב, ידוע כי:

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda w \in W$$

קל לראות כי ביטוי זה מבטא בעצם את כל הקומבינציות הלינאריות האפשריות ב$\mathbb{R}$, או ליתר דיוק, ניתן לראות כי:

$$Span(W) = R$$

מהגדרת הפרוס הלינארי, ניתן להסיק כי:

$$W \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

בנוסף, מהיות $W$ תת־מרחב של $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \subset W \tag{2}$$

בשל ההכלה הדו צדדית ב(1) ו־(2), הראינו כי:

$$W = \mathbb{R}$$

כלומר, $\mathbb{R}$ הוא תת־מרחב של עצמו.
לכן, הראינו כי תתי־המרחב של $\mathbb{R}$ הם $0$ ו־$\mathbb{R}$ עצמו. $\square$

## 7

כדי לבדוק אם שניהם שווים, נדרג את המטריצות לפי שורות, ונבדוק שוויון.

$$rref(T) = rref(\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \end{bmatrix})$$
$$rref(S) = rref(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix})$$

מכיוון שהם לא שווים, ניתן להסיק כי:

$$Span(S) \neq Span(T)$$

## 14

$S$ תלויה לינארית.
בכדי שהיא לא תהיה תלויה לינארית, אמור להיות לה פתרון יחיד למערכת ההומוגנית - והוא הפתרון הטריוויאלי.
אולם, אם נדרג את המערכת לפי שורות נקבל:

$$\operatorname{rref}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נוכל לראות בבירור כי למערכת יש משתנה חופשי, וזה מספיק בכדי לקבוע כי ל־$S$ יש פתרון לא טריוויאלי.
כלומר - $S$ תלויה לינארית. $\square$

## 20

### 20.1 $\Longrightarrow$

נניח כי $ad - bc \neq 0$.
לכן, אנו יודעים כי המטריצה הבאה הפיכה:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

מכיוון ש־$A$ הפיכה, אנו יודעים כי היא שקולה לפי שורות ל־$I_2$.
לכן, אנו יודעים כי הפתרון היחיד שלה למערכת ההומוגנית הוא הפתרון הטריוויאלי, ולכן, ניתן להסיק כי המערכת בלתי־תלויה לינארית.

### 20.2 $\Longleftarrow$

באופן דומה, אם נניח כי הקבוצה בלתי תלויה לינארית, נוכל להסיק מכך שאם נצרף את שני הוקטורים תחת מערכת אחת:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

נקבל וקטור בלתי־תלוי לינארית, אשר שקול לפי שורות ל־I.
הוכחנו בעבר כי וקטור כזה הוא הפיך, ומהיותו הפיך, ניתן להסיק כי:

$$\det(A) \neq 0 \implies ad - bc \neq 0$$

$\square$

## 22

מכיוון ש$S$ תלוי לינארית, נוכל לחסר את $v_3$ ממנו, וכך לקבל את $S'$, וכך:

$$Span(S) = Span(S')$$

ניקח את הוקטורים $S' = \{v_1, v_2, v_4\}$ ונדרג אותם:

$$\text{rref}(S') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כלומר, הראינו כי $S'$ היא קבוצה לא תלויה לינארית של וקטורים, ולכן, היא מהווה מרחב. $\square$

## 27

### 27.1

נראה כי $W_1, W_2$ הם תתי־מרחב של $V$.

#### 27.1.1 מטריצת האפס

ראשית, אם נציב $a = b = c = 0 \in \mathbb{F}$ עבור שתי הקבוצות, נמצא את וקטור האפס.

#### 27.1.2 סגירות תחת כפל סקלרי וחיבור וקטורי

נניח ש־$\vec{u}, \vec{v} \in W_1$ וש־$t \in \mathbb{F}$.
בנוסף, נניח כי $\vec{x}, \vec{y} \in W_2$.
לכן, אם נראה כי מתקיים:

$$t\vec{u} + \vec{v} \in W_1$$
$$t\vec{x} + \vec{y} \in W_2$$

אזי $W_1, W_2 \in V$.
נניח כי:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a & -a \\ b & c \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} d & -d \\ e & f \end{bmatrix}$$
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} d & e \\ -d & f \end{bmatrix}$$

לכן:

$$t\vec{u} + \vec{v} = c \cdot \begin{bmatrix} a & -a \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & -d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ta + d & -(ta + d) \\ tb + e & tc + f \end{bmatrix}$$

קל לראות כי:

$$t\vec{u} + \vec{v} \in W_1$$

ולכן $W_1 \leqslant V$.
בצורה דומה נראה עבור $W_2$:

$$t\vec{x}+\vec{y}=c\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & e \\ -d & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ta+d & tb+e \\ -(ta+d) & tc+f \end{bmatrix}$$

לכן, אנו רואים כי:

$$t\vec{x}+\vec{y}\in W_2$$

ולכן $W_2 \leqslant V$. $\square$

## 27.2

עלינו להראות כי:

$$W_1+W_2\leqslant V$$

### 27.2.1 מטריצת האפס

לפי א', אנו יודעים כי:

$$0_{W_1}\in W_1$$
$$0_{W_2}\in W_2$$

ולכן:

$$0_{W_1}+0_{W_2}=0\in W_1+W_2$$

### 27.2.2 סגירות תחת כפל סקלרי וחיבור וקטורי

ניקח שני וקטורים השייכים לקבוצה $W_1+W_2$:

$$\vec{x},\vec{y}\in W_1+W_2$$
$$t\in\mathbb{F}$$

אנו רוצים להראות כי:

$$t\vec{x}+\vec{y}\in W_1+W_2$$

בשל הגדרת הקבוצה $W_1+W_2$ אנו יודעים כי:

$$\vec{x}=u_1+u_2$$
$$\vec{y}=v_1+v_2$$

כאשר:

$$u_1,v_1\in W_1$$
$$u_2,v_2\in W_2$$

לכן מתקיימים:

$$\begin{aligned} t\vec{x} + \vec{y} &= t(u_1 + u_2) + v_1 + v_2 \\ &= (tu_1 + v_1) + (tu_2 + v_2) \end{aligned} \tag{1}$$

מכיוון שהראינו בסעיף א' כי הקבוצות הן תתי־מרחב, אנו יודעים כי הן סגורות תחת כפל סקלרי וחיבור וקטורי, ולכן:

$$\begin{aligned} tu_1 + v_1 \in W_1 \\ tu_2 + v_2 \in W_2 \end{aligned} \tag{2}$$

לכן, לפי (1) ו־(2), אנו רואים כי כל אחד מהאיברים שייך לאחד מתתי־המרחב, ולכן הסכום שלהם שייך לסכום של תתי־המרחבים, כלומר $W_1 + W_2$.
לכן, הראינו כי $W_1 + W_2$ מהווה תת־מרחב וקטורי של $V$ מכיוון שהוא מכיל את מטריצת האפס והוא סגור תחת כפל וחיבור. □

## 27.3

### 27.3.1 $\underline{W_1}$

ניתן להציג את $W_1$ כ:

$$W_1 = a\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לכן, הבסיס הוא:

$$Basis(W_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

### 27.3.2 $\underline{W_2}$

ניתן להציג את $W_2$ כ:

$$W_2 = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לכן, הבסיס הוא:

$$Basis(W_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

### 27.3.3 $\underline{W_1 + W_2}$

### 27.3.4 $\underline{W_1 \cap W_2}$

# 28

ראשית, נדרג את המטריצה:

$$R = rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 28.1 מרחב השורות

הבסיס של מרחב השורות הוא המטריצה $R$ ללא שורת האפסים, כלומר:

$$Basis(R(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

## 28.2 מרחב העמודות

ראשית, נזהה כי במטריצה $R$, עמודות הציר הינן במקומות ה־$1$ וה־$2$, לכן:

$$Basis(C(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

## 28.3 מרחב הפתרונות

נציג את קבוצת הפתרונות של $R$ בצורה פרמטרית:

$$N(R) = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{F} \right\} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

לכן, נוכל להסיק כי בסיס מרחב הפתרונות של $N(A)$ הוא:

$$Basis(N(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

## 28.4 אי־שוויון המרחבים

כעת, נרצה להראות כי שלושת המרחבים שמצאנו שונים.
ראשית, ברור כי מרחב השורות שונה משני המרחבים האחרים, מכיוון שהם לא אותו סוג של וקטורים.
כעת נראה כי מרחב העמודות שונה ממרחב הפתרונות.
מרחב העמודות הוא קבוצת כל הצירופים הלינאריים של העמודות של הבסיס של $C(A)$,או במילים אחרות:

$$C(A) = span(Basis(C(A))) = \\ = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{F} \right\}$$

ננסה להשוות ביניהם:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ונקבל:

$$\begin{aligned} -1 &= c_1 \\ 0 &= c_2 \\ 1 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

נפתור ונקבל סתירה:

$$1 = -1$$

לכן, המרחבים שונים. $\square$

## 29