

מאגר שאלות - שבוע 4

כפל מטריצות

שאלות חימום

1. נתונות מטריצות $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ מעל \mathbb{R} . חשבו את AB ואת BA .

2. שאלת תרגול פעיל.

3. נתונות מטריצות

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{bmatrix}$$

חשבו את המכפלות: BAC ו ABC, BC, AC .

4. על הקבוצה $M_n(\mathbb{F})$ (קבוצת כל המטריצות $n \times n$ מעל שדה \mathbb{F}) הגדרנו פעולת חיבור מטריצות ופעולת כפל מטריצות. יתר על כן, ראינו שקיימות $O_n, I_n \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש O_n היא נטרלית ביחס לפעולת החיבור ו I_n היא נטרלית ביחס לפעולת הכפל. האם $M_n(\mathbb{F})$ (יחד עם פעולות אלה) היא שדה? אם לא, אילו מאקסיומות השדה לא מתקיימות?

שאלות ברמת קושי בינונית

5. יהיו $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ו $C, D \in M_{n \times p}(\mathbb{F})$. הוכיחו כי מתקיים

$$(A + B)C = AC + BC \quad \text{and} \quad A(C + D) = AC + AD$$

6. יהיו $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ו $B \in M_{n \times p}(\mathbb{F})$ ו $\lambda \in \mathbb{F}$. הוכיחו כי מתקיים

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

7. יהיו $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $C, D \in M_{n \times p}(\mathbb{F})$ ו $\lambda \in \mathbb{F}$. נניח כי מתקיים

$$AC = AD = O$$

הוכיחו כי

$$A(\lambda C + D) = O$$

8. שאלת תרגול פעיל.

9. תהי

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

חשבו את A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 ו A^{17} .

10. מצאו מטריצה $A \in M_2(\mathbb{F})$ כך ש $A \neq O_2$ וגם $A^2 = O_2$.

$$11. \text{ חשבו את } A^{2020} \text{ כאשר } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

רמז: אולי תרצו להשתמש בשאלה 16 ובאינדוקציה.

שאלות ברמת קושי גבוהה

12. שאלת תרגול פעיל.

מטריצות הפיכות

שאלות חימום

13. יהיו $A, D \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות כך ש $AD = O_n$ וגם $D \neq O_n$. הוכיחו ש A אינה הפיכה.

שאלות ברמת קושי בינונית

14. תהי (A_1, \dots, A_s) סדרה של מטריצות ב $GL_n(\mathbb{F})$. הוכיחו באינדוקציה $A_1 \cdot \dots \cdot A_s \in GL_n(\mathbb{F})$ (כלומר שהמכפלה היא מטריצה הפיכה) וש

$$(A_1 \cdot \dots \cdot A_s)^{-1} = A_s^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}.$$

15. שאלת תרגול פעיל.

16. יהי \mathbb{F} שדה.

$$(א) \text{ הוכיחו שלכל } a, b \in \mathbb{F} \text{ מתקיים } \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ב) \text{ הסיקו כי לכל } a \in \mathbb{F} \text{ המטריצה } \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ הפיכה וחשבו את המטריצה ההפוכה שלה.}$$

$$(ג) \text{ הוכיחו שלכל } a, b \in \mathbb{F} \text{ מתקיים } \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ד) \text{ הסיקו כי לכל } a \in \mathbb{F}, a \neq 0 \text{ המטריצה } \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ הפיכה וחשבו את המטריצה ההפוכה שלה.}$$

$$(ה) \text{ הוכיחו: } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ו) \text{ הסיקו כי המטריצה } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ הפיכה וכי } \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

17. נתונות מטריצות $A \in M_n(\mathbb{F})$ ו $B \in M_k(\mathbb{F})$. נגדיר מטריצה

$$C = \begin{bmatrix} A & O_{n \times k} \\ O_{k \times n} & B \end{bmatrix}$$

שימו לב ש C מסדר $(n+k) \times (n+k)$. הוכיחו כי C הפיכה אם ורק אם A וגם B הפיכות.

18. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימת $A^2 - A + I = O$. הוכיחו ש A הפיכה והביעו את A^{-1} באמצעות A ו I .

19. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימת $A^3 - 2A + I = O$. הוכיחו ש A הפיכה והביעו את A^{-1} באמצעות A ו I .

20. יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. הוכיחו כי אם $AB^2 - A$ הפיכה אז גם $BA - A$ הפיכה.

21. שאלת תרגול פעיל.

שאלות ברמת קושי גבוהה

22. נתונות מטריצות $A \in M_n(\mathbb{F})$, $B \in M_k(\mathbb{F})$ ו $D \in M_{n \times k}(\mathbb{F})$. נגדיר מטריצה

$$C = \begin{bmatrix} A & D \\ O_{k \times n} & B \end{bmatrix}$$

שימו לב ש C מסדר $(n+k) \times (n+k)$. הוכיחו כי אם A וגם B הפיכות אז C הפיכה.

האם גם ההפך נכון?

23. יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. ידוע כי המטריצות A, B ו $A+B$ הפיכות. הוכיחו כי המטריצה $A^{-1} + B^{-1}$ הפיכה.