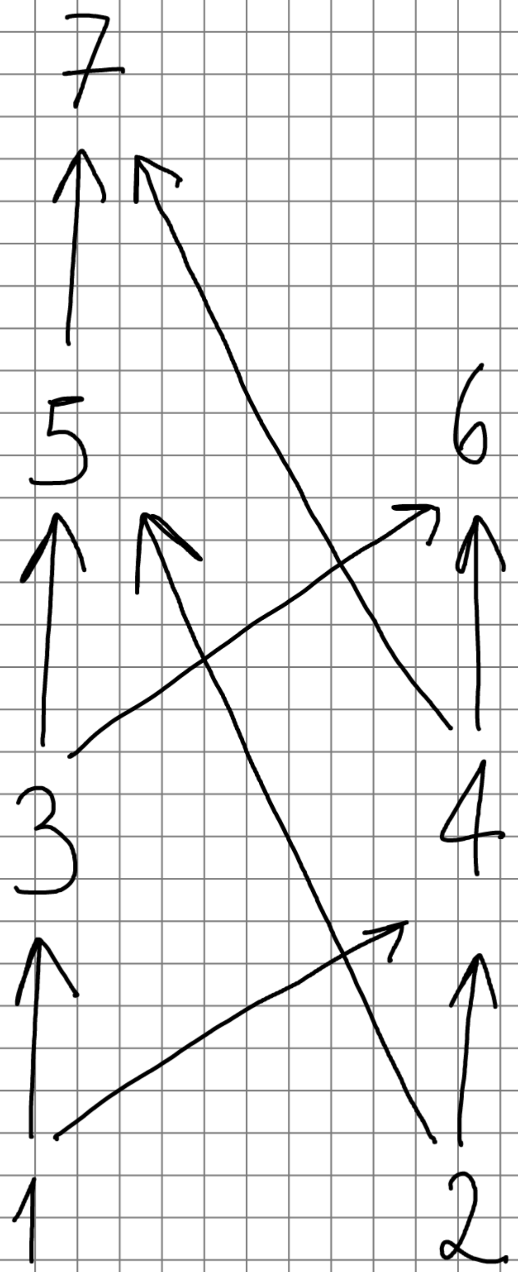
מתמטיקה דיסקרטית 1

תרגיל 5

אביב וקנין
316017128

1



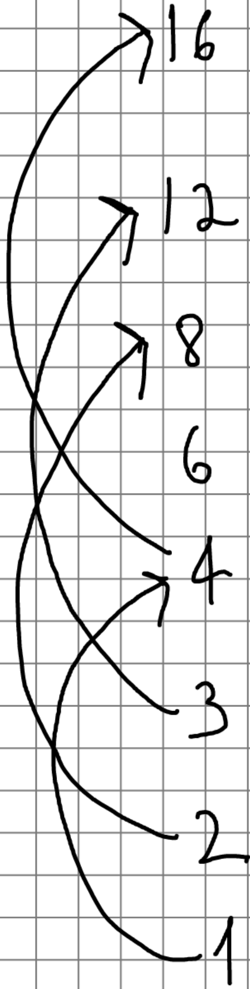
מינימליים: 1, 2

מקסימליים: 6, 7

2 ג

מינימליים: 6, 1, 2, 3

מקסימליים: 6, 8, 12, 16



---

2 ד

מינימלי: (0, 0, 0)

מקסימלי: (1, 1, 1)

$$(0,0,0) \downarrow (0,0,1) \downarrow (0,1,0) \downarrow (0,1,1) \downarrow (1,0,0) \downarrow (1,0,1) \downarrow (1,1,0) \downarrow (1,1,1)$$

נניח בשלילה שב־A לא קיים איבר מקסימלי, כלומר:

$$\forall a,b \in A \quad a \leqslant b$$

הבעיה היא, שיווצר מצב כמו:

$$a \leqslant b \leqslant c$$

ובמצב זה c הופך להיות האיבר המקסימלי.
נוכל להוסיף איבר נוסף d, אך נישאר באותו המצב מכיוון שהוא יהיה המקסימלי.
סיטואציה זו יכולה להמשיך ללא סוף, אולם נתון כי הקבוצה היא סופית, וזוהי סתירה. $\square$

4 כמה מספרים אי־זוגיים בעלי 4 ספרות ניתן להרכיב מהספרות 6, 5, 4, 3, 2, 1 ,כך שבנוסף:

ראשית, נסמן ב־A את קבוצת המספרים האי־זוגיים בעלי 4 ספרות שניתן להרכיב מ1־6.

$$|A| = 3 \cdot 6^3$$

4.1 הספרה 1 תופיע לפחות פעם אחת?

ניקח את B להיות הקבוצה בה הספרה 1 לא מופיעה.

$$|B| = 2 \cdot 5^3$$

וכעת נחסר את $|B|$ מ־$|A|$ בכדי לקבל את התשובה:

$$|A| - |B| = 3 \cdot 6^3 - 2 \cdot 5^3 = 398$$

4.2 הספרה 1 תופיע לכל היותר פעם אחת?

נחלק למקרים.

4.2.1 הספרה 1 תופיע פעם אחת בדיוק - C

במידה וספרת האחדות היא 1, יש לנו 5^3 אפשרויות. במידה וספרת האחדות אינה 1, יש לנו 3 מקרים שונים של $2 \cdot 5^2$. נחבר את המקרים ונקבל:

$$|C| = 5^3 + 3(2 \cdot 5^2) = 275$$

4.2.2 הספרה 1 לא תופיע כלל - D

במקרה זה:

$$|D| = 2 \cdot 5^3 = 250$$

כעת נחבר את המקרים ונקבל:

$$|C| + |D| = 525$$

4.3 כל הספרות שונות זו מזו?

במקרה זה יש לנו:

$$3^2 \cdot 4 \cdot 5 = 180$$

5 כמה מספרים בעלי 5 ספרות שונות ניתן להרכיב מ־ 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 כך שהם יתחלקו ב־ 5 וגם יכילו את 5?

נחלק לשני מקרים:

5.1 ספרת האחדות היא 5 - A

$$|A| = 4 \cdot 5 \cdot 6^2 = 720$$

5.2 ספרת האחדות היא 0 - B

$$|B| = 4 \cdot (4 \cdot 5 \cdot 6) = 480$$

נחבר את המקרים ונקבל:

$$|A| + |B| = 1200$$

6 כמה מספרים אי זוגיים בעלי 6 ספרות שונות ניתן להרכיב מהספרות 6, 5, 4, 3, 2, 1 כך שהם יהיו גדולים מהמספר 200000?

נחלק לשני מקרים:

6.1 ספרת האחדות היא 1 – A

$$|A| = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

6.2 ספרת האחדות שונה מ־1 – B

$$|B| = 2^2 \cdot 3 \cdot 4^2 = 192$$

נחבר את המקרים ונקבל:

$$|A| + |B| = 312$$

7 בכמה דרכים ניתן להכניס מלפפון, עגבניה, תפוח ואגס למקרר בעל 5 מדפים המסודרים זה מעל זה, כך שהמלפפון יהיה במדף גבוה יותר מהעגבניה? אין הגבלה כלשהי על מספר הפריטים בכל מדף.

ראשית, נבין כי מכיוון שיש לנו 5 מדפים שונים לדר את התפוח והאגס, אנו מקבלים 25 אפשרויות שונות:

$$5^2 = 25$$

שנית, יש לנו עשר אפשרויות שונות לסידור העגבנייה והמלפפון כך שהמלפפון יהיה מעל העגבנייה, לכן:

$$10(25) = 250$$

לכן, יש 250 דרכים לעשות זאת.

8 בכמה אופנים ניתן להכניס 6 פירות שונים למקרר בעל 5 מדפים כך שבמדף העליון יהיה בדיוק פרי אחד, במדף התחתון יהיה בדיוק פרי אחד וגם במדף האמצעי יהיה בדיוק פרי אחד?

ראשית, נבין כי לאחר סידור 3 הפירות על שלושת המדפים, יישארו לנו 3 פירות ושני מדפים, כלומר:

$$2^3 = 8$$

כעת, נחשב את האפשרויות לסידור שלושת המדפים:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

ונקבל את התשובה ע"י כפל מספר האפשרויות:

$$120 \cdot 8 = 960$$

9 נתון לוח משבצות בעל 4 עמודות ו־ 6 שורות. בכמה אופנים אפשר לסמן משבצות על הלוח כך שבכל עמודה תהיה בדיוק משבצת מסומנת אחת, וגם בשורה התחתונה תהיה לכל היותר משבצת מסומנת אחת?

נחלק למקרים.

9.1 השורה התחתונה מכילה בדיוק משבצת אחת מסומנת ־ A

כל עמודה היא מסומנת או לא מסומנת, כלומר יש לנו ארבע אפשרויות.
העמודה שהשורה האחרונה שלה מסומנת היא מקרה בעל אפשרות יחידה. ב־3 העמודות האחרות, יש לנו 5 אפשרויות שונות לסמן כל משבצת נותרת, כלומר:

$$|A| = 4(5^3) = 500$$

9.2 השורה התחתונה לא מכילה משבצות מסומנות ־ B

כאשר השורה התחתונה אינה משובצת, זה משאיר לנו ארבע עמודות, אשר לכל אחת מהן יש 5 סימונים שונים אפשריים:

$$|B| = 5^4 = 625$$

נחבר את המקרים ונקבל:

$$|A| + |B| = 500 + 625 = 1125$$