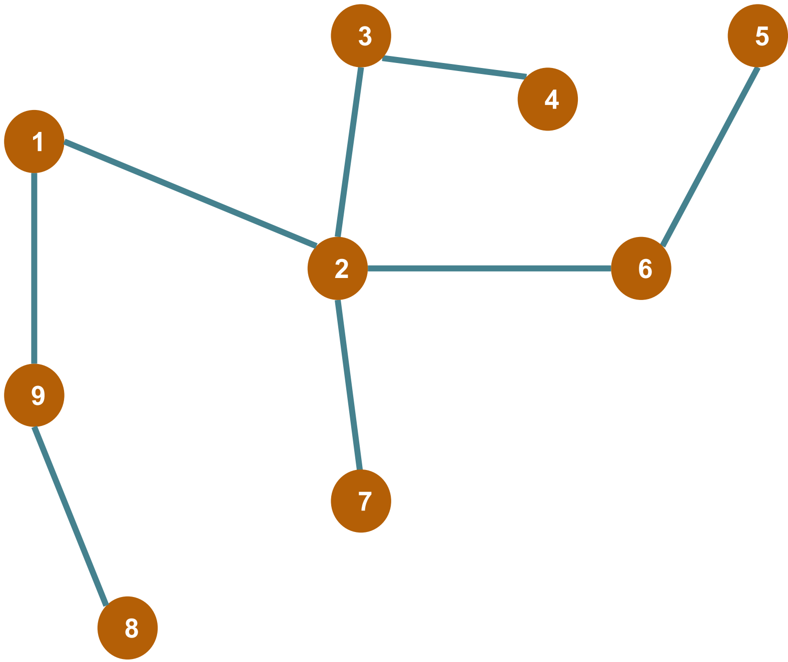
AED3 > Clase 6 > AGM

Árboles: Repaso

Definición 11: Más tipos de grafos: Árboles

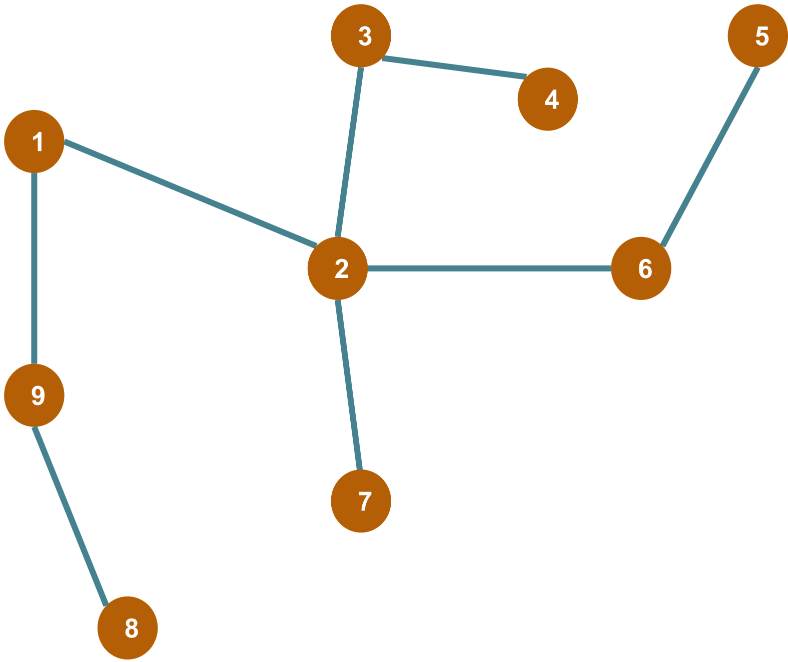
1. Grafo conectado y acíclico.
2. Si saco cualquier arista se desconecta.
3. Si agrego una arista cualquiera se forma un ciclo.



Árboles: Repaso

Definición 1:

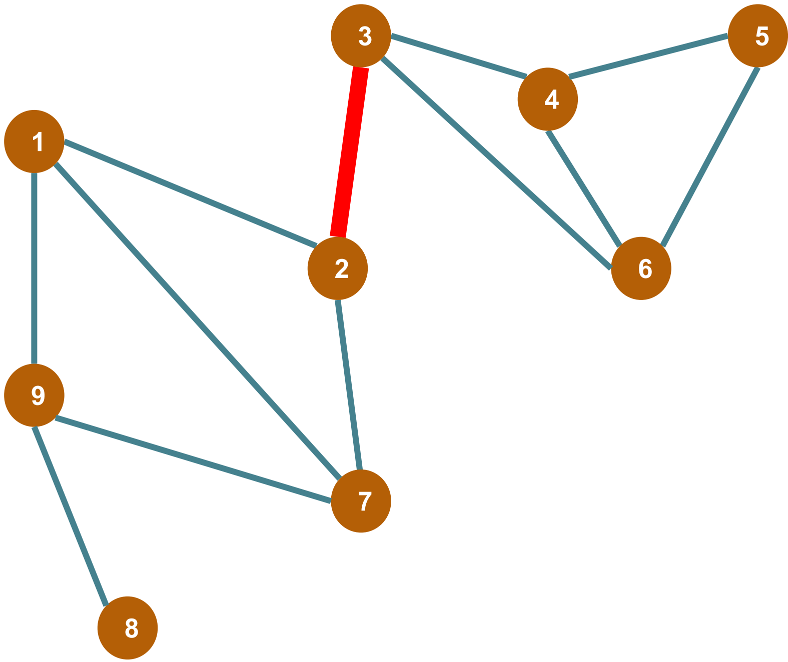
Un **árbol** es un grafo conexo sin circuitos simples.



Árboles: Repaso

Definición 2:

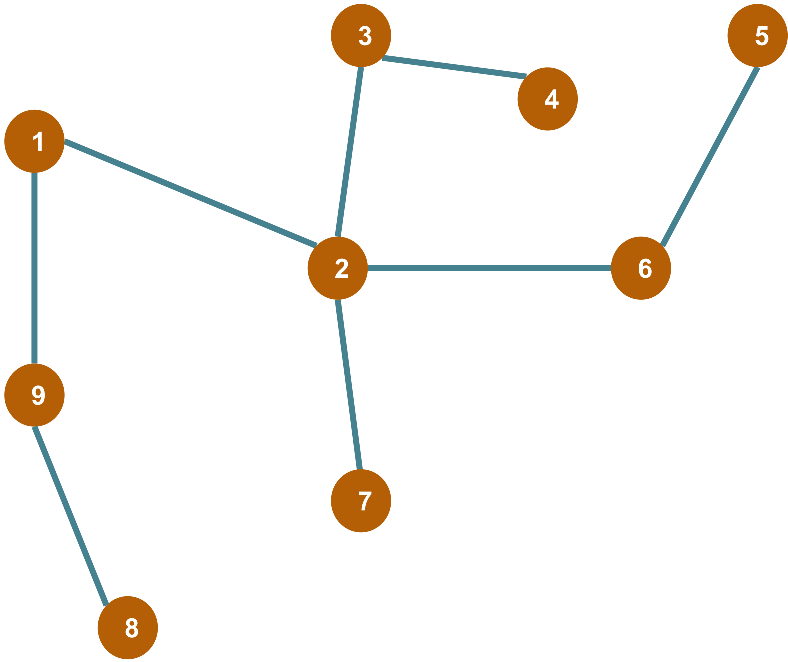
Una arista *e* de *G* es un **puente** si *G* - *{e}* tiene más componente que G. Es decir, si la saco desconecta.



Árboles: Repaso

Teorema: Equivalencias

1. *G* es un árbol *(grafo conexo sin circuitos simples)*.
2. *G* es un grafo sin circuitos simples y *e* una arista tq $e \notin E$. $G+e = (V, E+\{e\})$ tiene exactamente un circuito simple, y ese circuito contiene a e. *Es decir, si agrego una arista cualquiera se forma un ciclo.*
3. $\exists$ exactamente un camino simple entre todo par de nodos.
4. *G* es conexo, pero si se quita cualquier arista queda un grafo no conexo. *Es decir, si saco cualquier arista se desconecta, o toda arista es puente.*



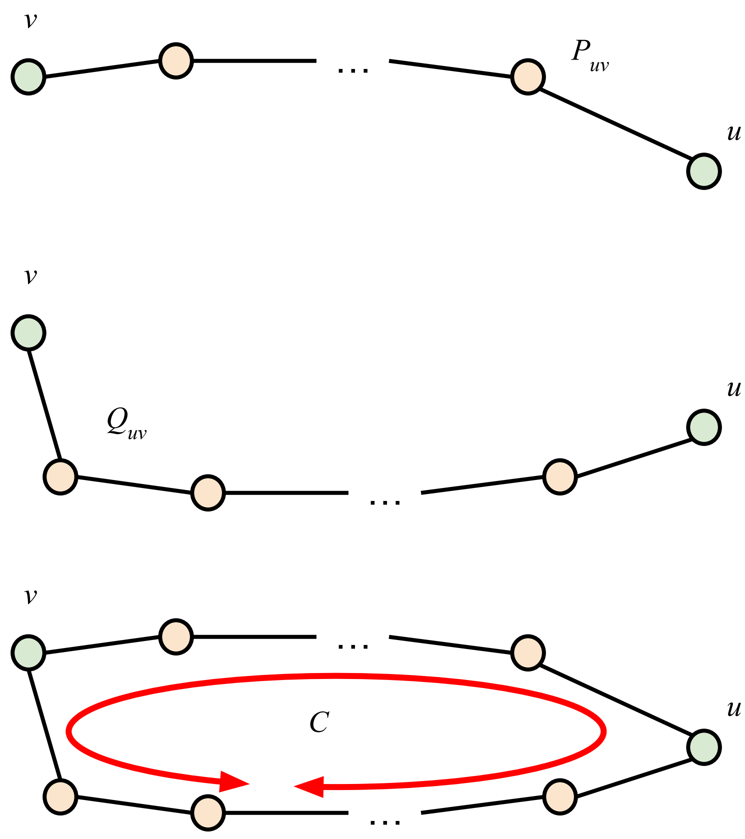
Árboles: Repaso

Lema 1:

La unión entre dos caminos simples distintos entre u y v contiene un circuito simple.

P_{uv} , Q_{uv}: Caminos simples

$C : P_{uv} + Q_{vu}$: Circuito simple

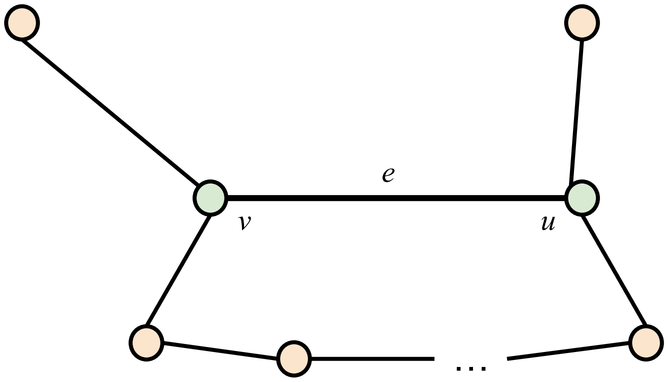


Árboles: Repaso

Lema 2: Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $e=(v,u) \in E$.

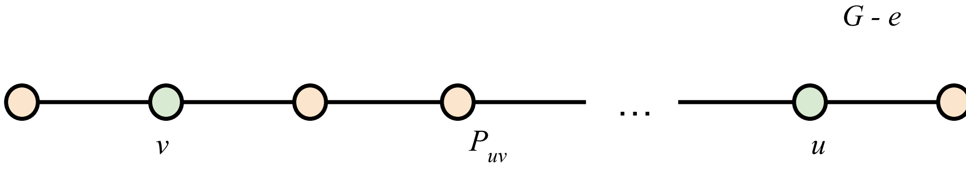
$G - e = (V, E \setminus \{e\})$ es conexo $\Leftrightarrow$ $e \in C$: circuito simple de G.

($e=(v,u) \in E$ es puente $\Leftrightarrow$ e no pertenece a un circuito simple de G).



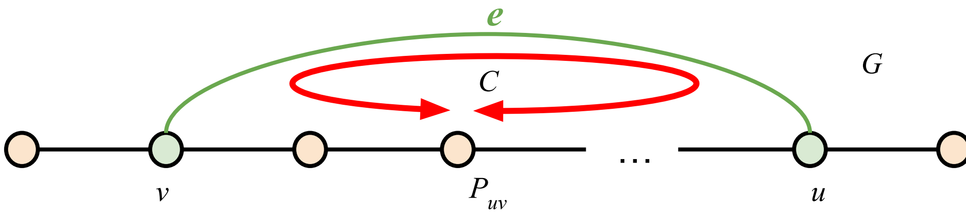
Demostración ($\Rightarrow$)**:**

$G - e$ es conexo $\Rightarrow$



Existe un camino simple entre u y v (P_{uv}) que no usa e.

Si agrego e se forma un circuito simple $C : P_{uv} + e$

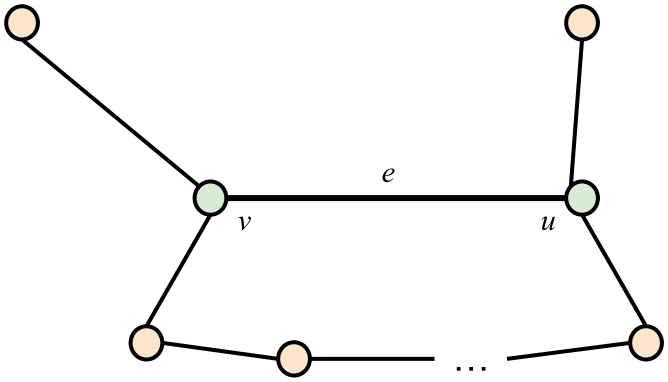


Árboles: Repaso

Lema 2: Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $e=(v,u) \in E$.

$G - e = (V, E \setminus \{e\})$ es conexo $\Leftrightarrow$ $e \in C$: circuito simple de G.

($e=(v,u) \in E$ es puente $\Leftrightarrow$ e no pertenece a un circuito simple de G).



Demostración ($\Leftarrow$)**:**

Sea C un circuito simple que contiene a $e=(u, v)$ $\Rightarrow$

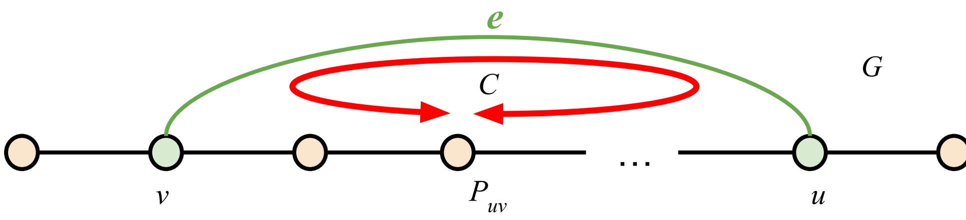
$C : P_{uv} + e$, tq P_{uv} no usa e.

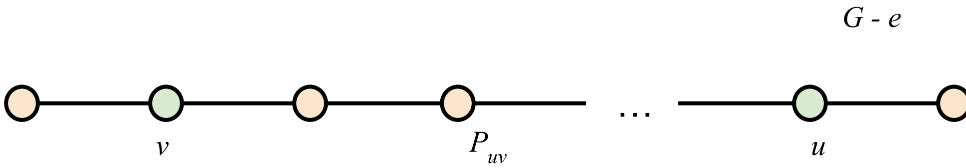
G es conexo $\Rightarrow$ Existe un camino entre todo par de vértices.

Si no usa e lo conservo en $G\text{-}e$.

Si usa e , la reemplazo por P_{uv} en $G\text{-}e$. $\Rightarrow$

Existe un camino entre todo par de vértices en $G\text{-}e$. $\Rightarrow$ $G\text{-}e$ es conexo

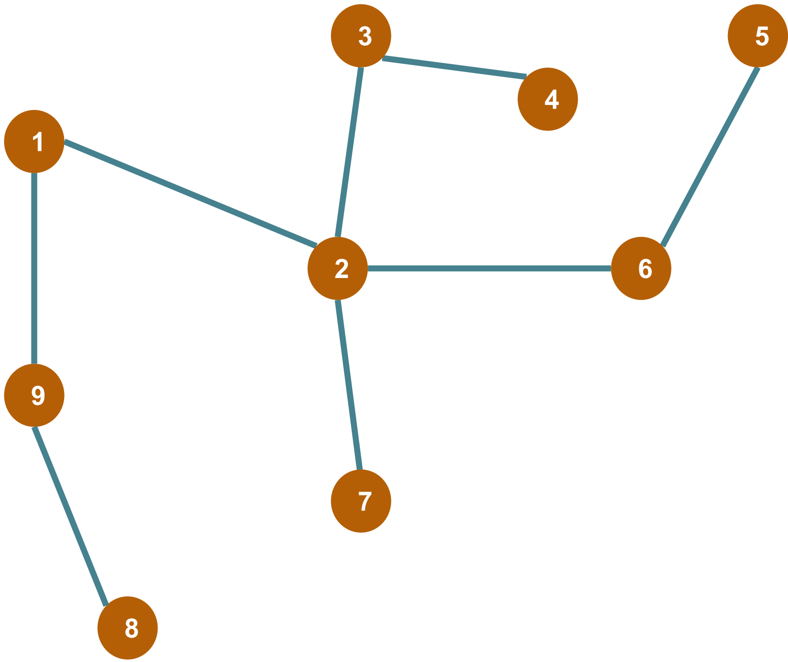




Árboles: Repaso

Teorema: Equivalencias

1. G es un árbol *(grafo conexo sin circuitos simples)*.
2. G es un grafo sin circuitos simples y e una arista tq $e \notin E$. $G+e = (V, E+\{e\})$ tiene exactamente un circuito simple, y ese circuito contiene a e. *Es decir, si agrego una arista cualquiera se forma un ciclo.*
3. $\exists$ exactamente un camino simple entre todo par de nodos.
4. G es conexo, pero si se quita cualquier arista queda un grafo no conexo. *Es decir, si saco cualquier arista se desconecta, o toda arista es puente.*



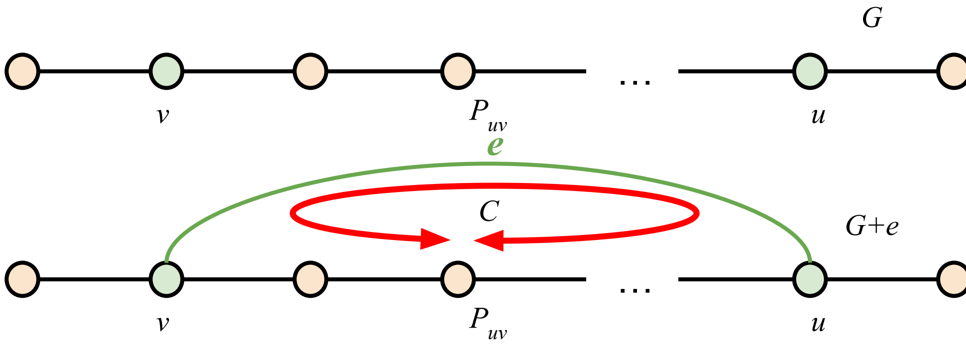
Árboles: Repaso

1 ⇒ 2) G es un árbol *(grafo conexo sin circuitos simples)*. ⇒ G es un grafo sin circuitos simples y e una arista tq $e \notin E$. $G+e = (V, E+\{e\})$ tiene exactamente un circuito simple, y ese circuito contiene a e. *Es decir, si agrego una arista cualquiera se forma un ciclo.*

Demostración (1 ⇒ 2):

Como G es conexo ⇒ Existe algún camino P_{uv} entre u y v.

Como $G+e$ es conexo ⇒ Existe algún circuito C: $P_{uv} + e$.



Árboles: Repaso

1 ⇒ 2) *G* es un árbol *(grafo conexo sin circuitos simples)*. ⇒ *G* es un grafo sin circuitos simples y *e* una arista tq $e \notin E$. $G+e = (V, E+\{e\})$ tiene exactamente un circuito simple, y ese circuito contiene a e. *Es decir, si agrego una arista cualquiera se forma un ciclo.*

Demostración (1 ⇒ 2):

Como *G* es conexo ⇒ Existe algún camino P_{uv} entre *u* y *v*.

Como $G+e$ es conexo ⇒ Existe algún circuito C: $P_{uv} + e$.

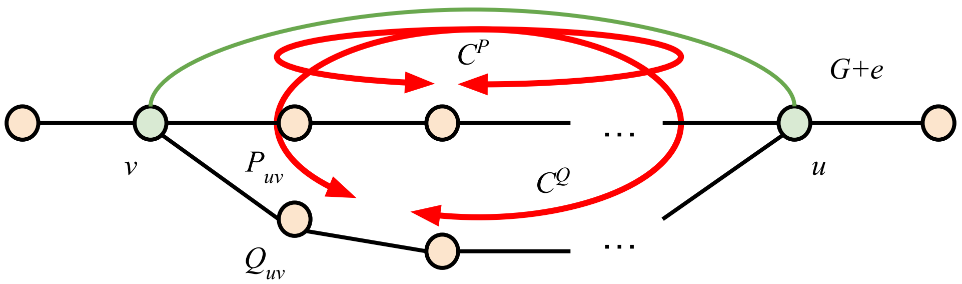
¿Por no existen más?

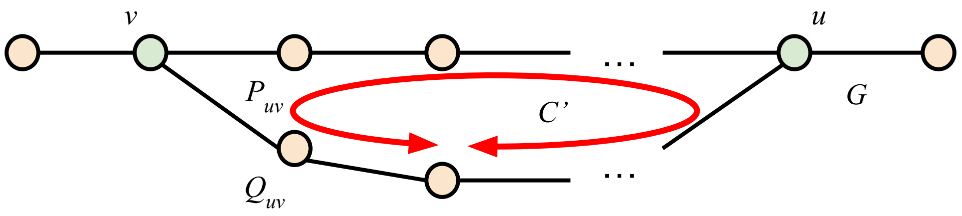
Supongo que existen dos C^P: $P_{uv} + e$ y C^Q: $Q_{uv} + e$ en $G+e$

⇒ Existe algún circuito C': $P_{uv} + Q_{vu}$ en $G+e$ no usa *e*

⇒ Existe algún circuito C': $P_{uv} + Q_{vu}$ en *G*

¡Absurdo!





Árboles: Repaso

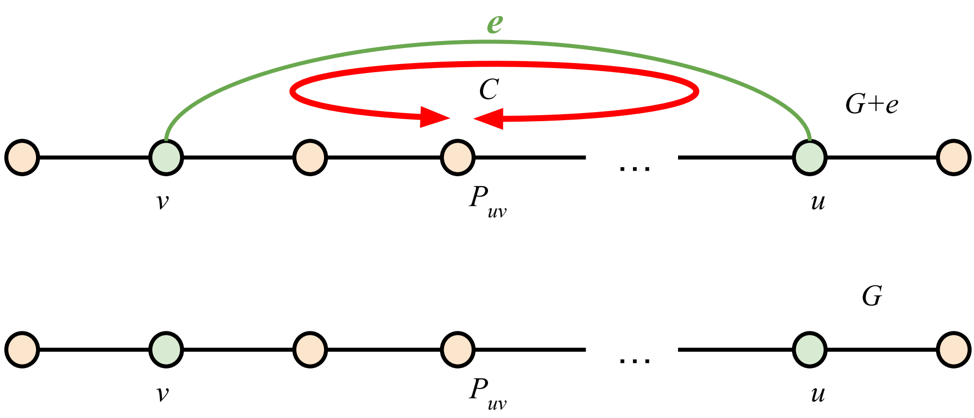
2 ⇒ 3) *G* es un grafo sin circuitos simples y *e* una arista tq $e \notin E$. $G+e = (V, E+\{e\})$ tiene exactamente un circuito simple, y ese circuito contiene a e. *Es decir, si agrego una arista cualquiera se forma un ciclo.* ⇒ ∃ exactamente un camino simple entre todo par de nodos.

Demostración (2 ⇒ 3):

Existe algún circuito *C*: $P_{uv} + e$. en $G+e$

⇒ Existe algún camino P_{uv} entre *u* y *v* en $G+e-e$

⇒ Existe P_{uv} entre todo par de vértices



¿Por no existen más?

Ídem 1 ⇒ 2

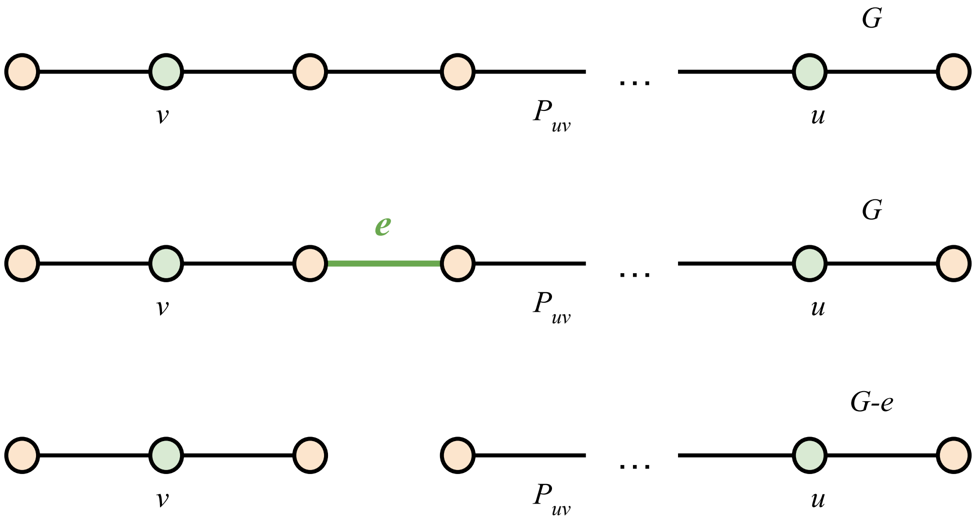
Árboles: Repaso

3 ⇒ 4) ∃ exactamente un camino simple entre todo par de nodos. ⇒ *G* es conexo, pero si se quita cualquier arista queda un grafo no conexo. *Es decir, si saco cualquier arista se desconecta, o toda arista es puente.*

Demostración (3 ⇒ 4):

Existe P_{uv} entre todo par de vértices ⇒ G es conexo

P_{uv} es único ⇒ Si saco cualquier arista $e \in P_{uv}$ se desconeta



Árboles: Repaso

4 ⇒ 1) *G* es conexo, pero si se quita cualquier arista queda un grafo no conexo. *Es decir, si saco cualquier arista se desconecta, o toda arista es puente.*⇒ *G* es un árbol *(grafo conexo sin circuitos simples)*.

Demostración (4 ⇒ 1):

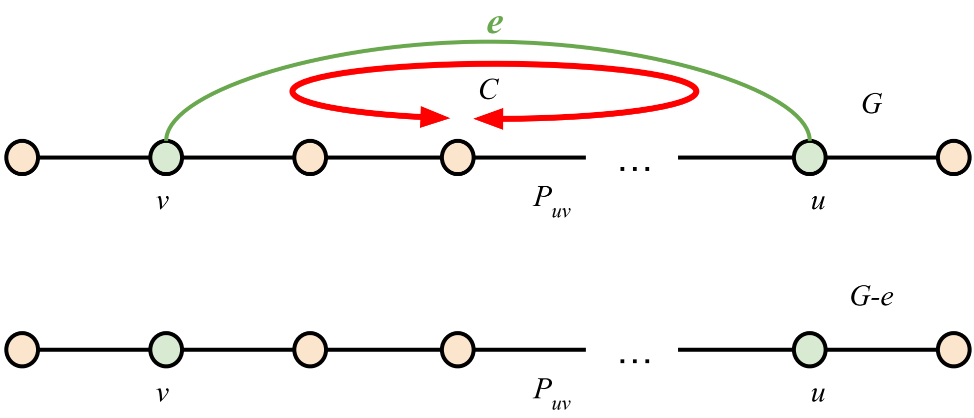
G es conexo

Si existe e tq $C : P_{uv} + e$ es circuito simple en G

⇒ Si saco e no se desconecta.

¡Absurdo!

⇒ *G* es conexo y sin circuitos simples (un árbol)



Árboles: Definiciones

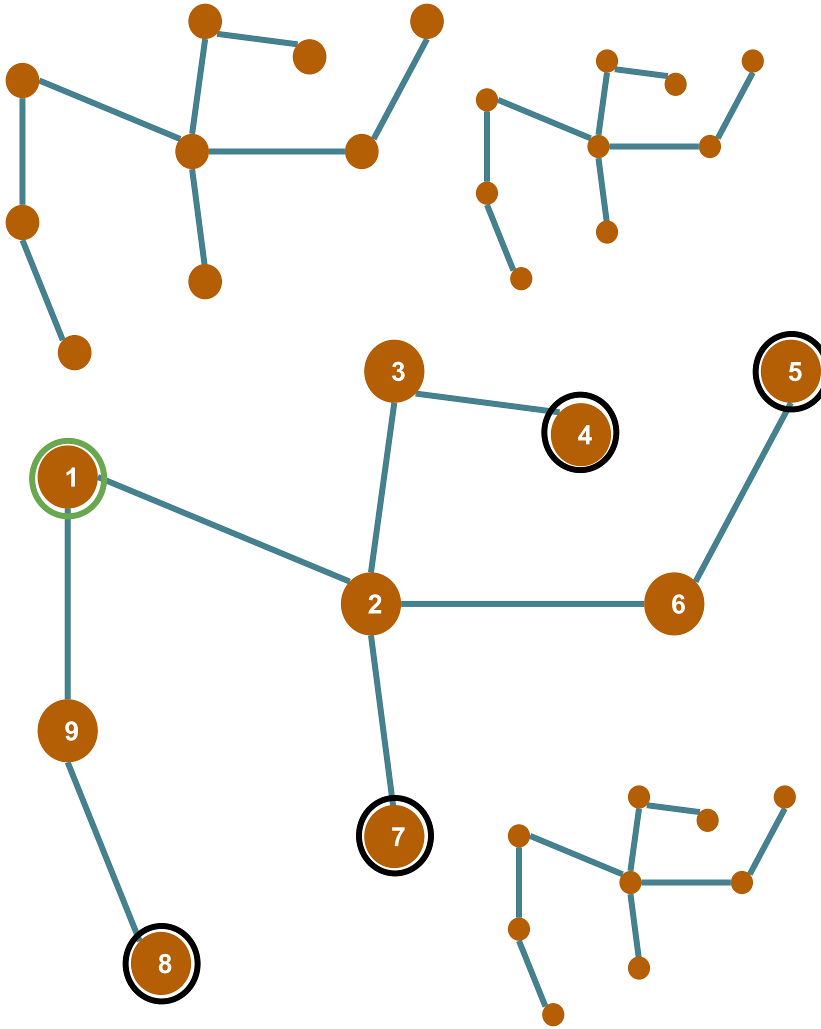
Árbol : *T*

Hoja: *u* tq $d(u) = 1$

Raíz: Algún vértice elegido

Bosque: Conjunto de árboles

Árbol trivial: *T* con $n=1$ y $m=0$



Árboles: Repaso

Lema 3: Todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas

Demostración:

$P : v_1 \ldots v_k$ es un camino simple maximal en T (no lo puedo extender más).

q.v.q. v_1 y v_k son hojas, es decir que $d(v_1) = 1$ y $d(v_k) = 1$

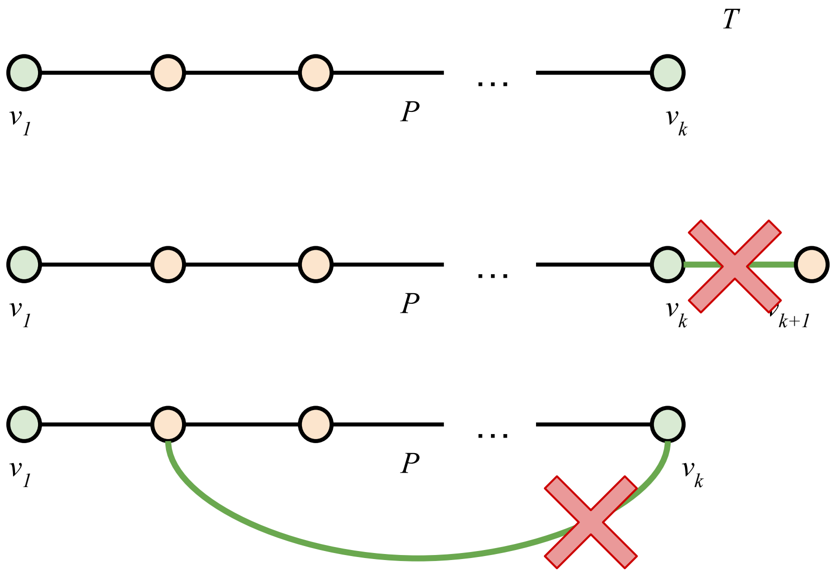
$d(v_k) > 0$ *porque conecta con* v_{k-1}

$d(v_k) > 1$??

No puedo agregar un vértice porque era maximal

No puedo ir a uno existente porque formo un circuito.

$\Rightarrow d(v_k) = 1$ *(idem* v_1*)*



Árboles: Repaso

Lema 4: Sea $G = (V, E)$ un árbol $\Rightarrow m = n - 1$

Demostración: Inducción en n.

Caso base: $n=1$ y $m=0$

Hipótesis inductiva: T' con k' vértices ($k' < k$) tiene $k' - 1$ aristas

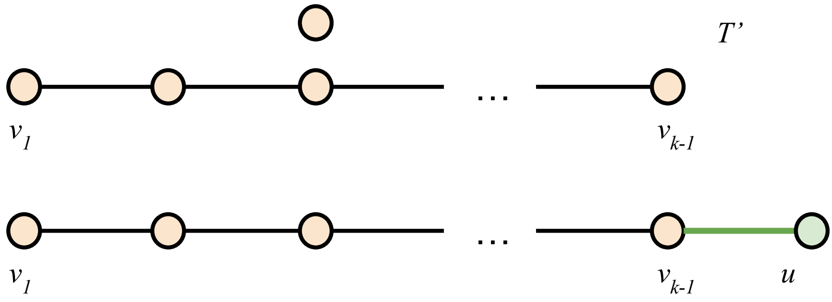
Paso inductivo: Sea u una hoja (sabemos que tiene por Lema 2).

$T' = T - u = (V \setminus \{u\}, E \setminus \{(u,v) \in E, \ \forall v \in V\}$

T' es conexo y sin circuitos con $k' = k - 1$ vértices $< k$

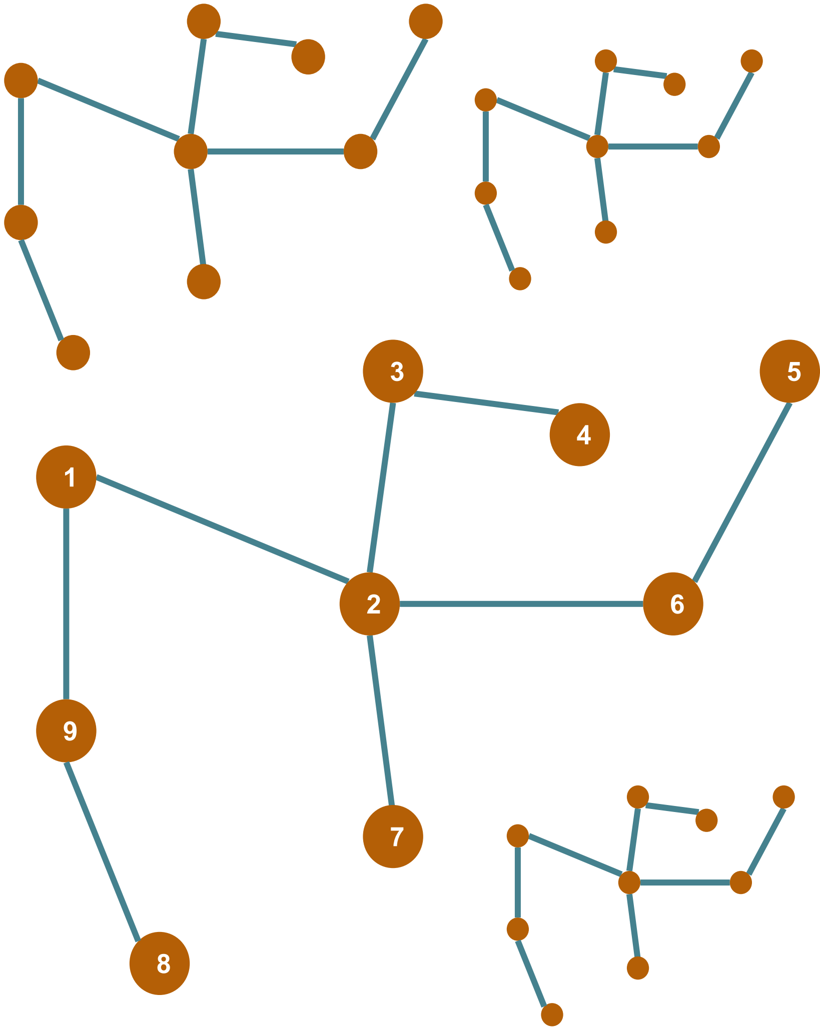
$\Rightarrow$ (Hip. ind.) tiene $k - 2$ aristas

Como u era una hoja $\Rightarrow d(u)=1 \ \Rightarrow T$ tiene $k - 2 + 1 = k - 1$ aristas



Árboles: Definiciones

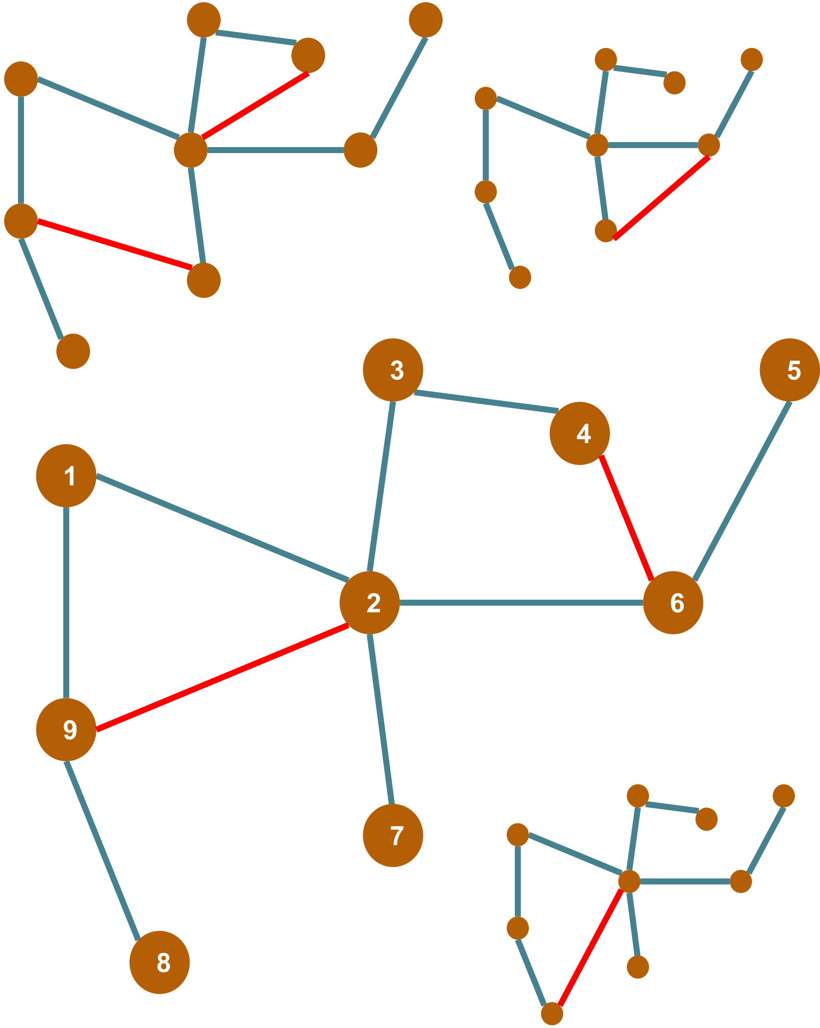
Corolario 1: Sea G un bosque con c c.c. $\Rightarrow m = n - c$



Árboles: Definiciones

Corolario 1: Sea G un bosque con c c.c. $\Rightarrow m = n - c$

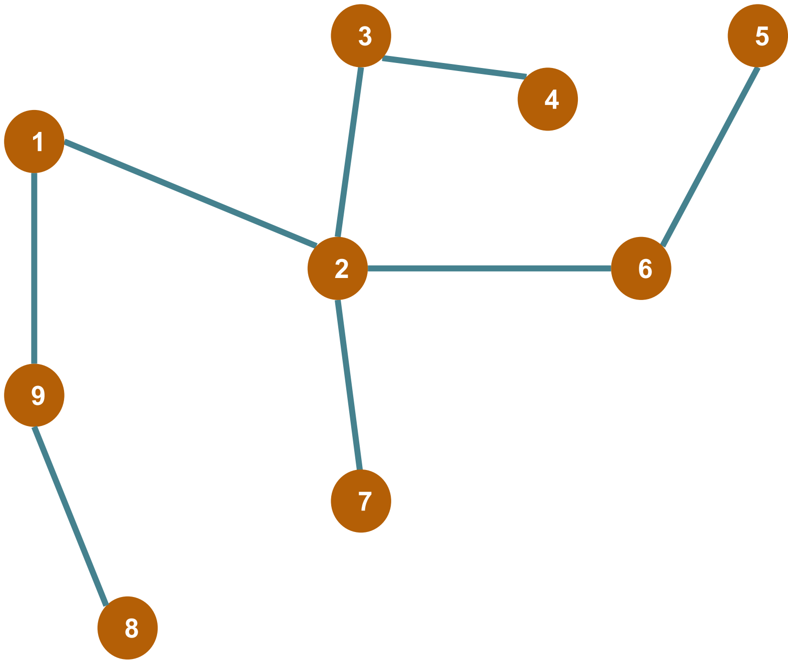
Corolario 2: Sea G un grafo con c c.c. $\Rightarrow m \geq n - c$



Árboles: Repaso

Teorema 2: Equivalencias

1. G es un árbol *(grafo conexo sin circuitos simples)*.
2. G es un grafo sin circuitos simples y $m = n - 1$
3. G es un grafo conexo y $m = n - 1$



1 ⇒ 2) G es un árbol *(grafo conexo sin circuitos simples)*. ⇒ G es un grafo sin circuitos simples y $m = n - 1$

Árboles: Repaso

Demostración (1 ⇒ 2):

(Por Lema 4)

Árboles: Repaso

Demostración (2 ⇒ 3):

Si tiene c c.c. $\Rightarrow m = n - c = n - 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow G$ conexo

Árboles: Repaso

Demostración (3 ⇒ 1):

Si G tiene un circuito simple, G conexo

$\Rightarrow$ *(por Lema 2)* $G\text{-}e$ conexo y $m_{G-e} = n - 2$ (porque $m_G = n - 1$)

¡Absurdo!

G no tiene un circuito simple, G conexo (es un árbol)

Lema 2: Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $e=(v,u) \in E$.

$G - e = (V, E\setminus\{e\})$ es conexo $\Leftrightarrow e \in C$: circuito simple de G.

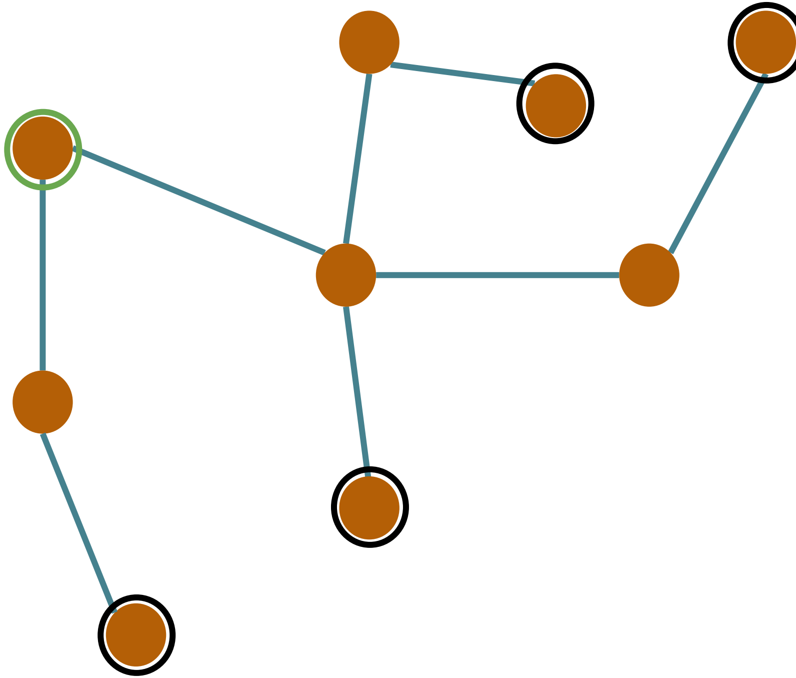
($e=(v,u) \in E$ es puente $\Leftrightarrow e$ no pertenece a un circuito simple de G).

Árboles con raíz (enraizados…)

Raíz: Algún vértice elegido

Hoja: u tq $d(u) = 1$

Árbol enraizado: Árbol con raíz



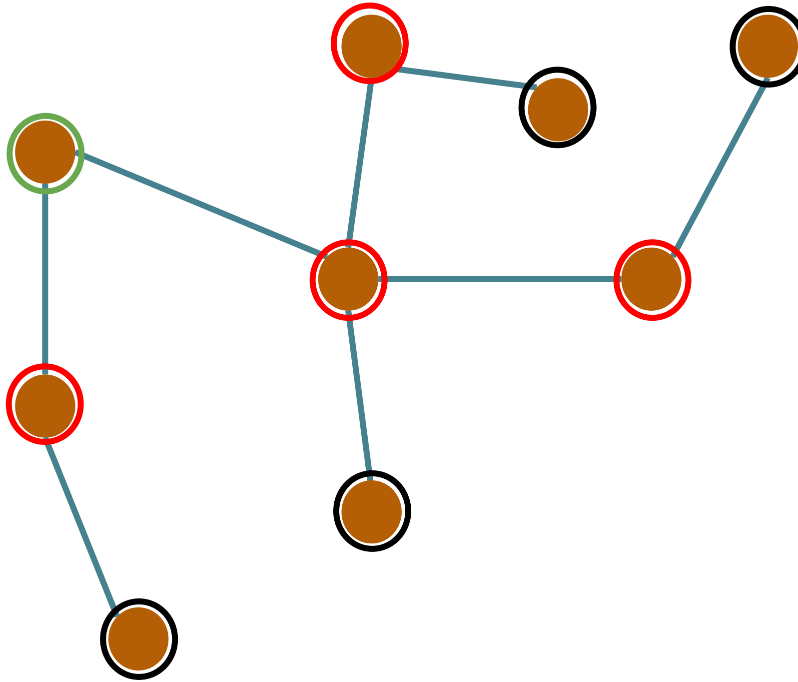
Árboles con raíz (enraizados…)

Raíz: Algún vértice elegido

Hoja: *u* tq $d(u) = 1$

Árbol enraizado: Árbol con raíz

Vértices internos: Ni hojas ni raíces



Árboles con raíz (enraizados…)

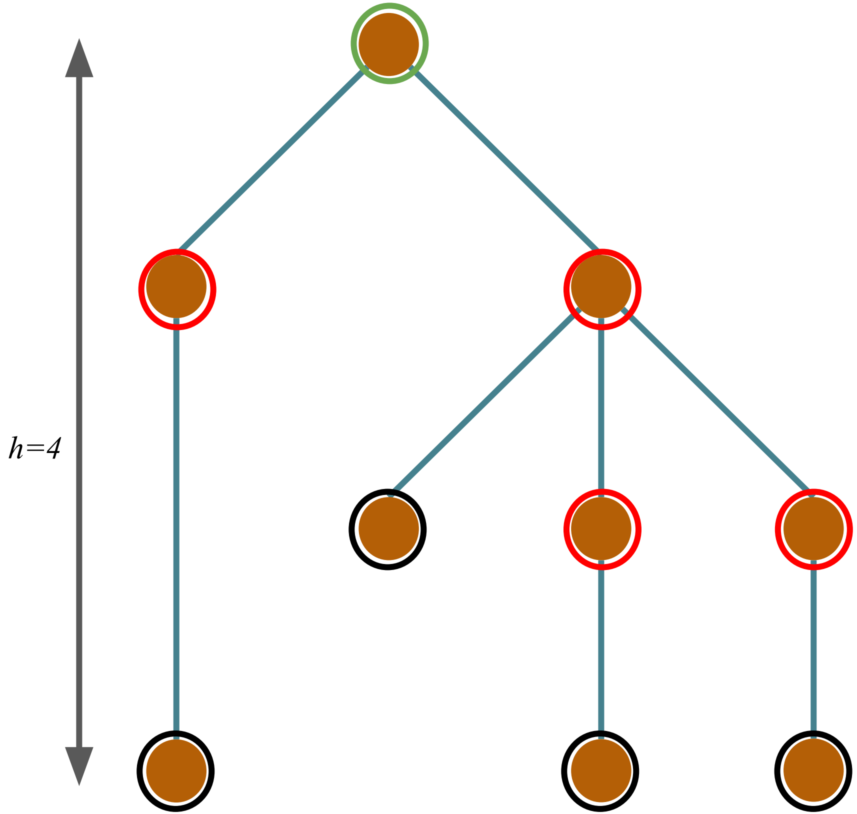
Raíz: Algún vértice elegido

Hoja: u tq $d(u) = 1$

Árbol enraizado: Árbol con raíz

Vértices internos: Ni hojas ni raíces

Altura (h): De la raíz a la hoja más lejana.



Árboles con raíz (enraizados…)

Raíz: Algún vértice elegido

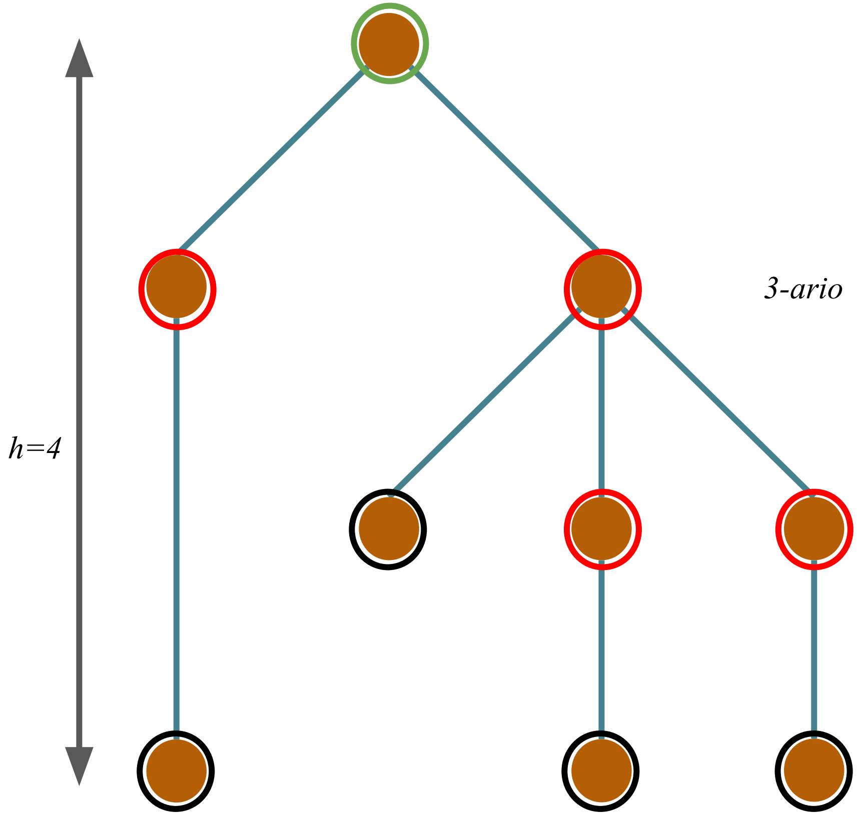
Hoja: *u* tq $d(u) = 1$

Árbol enraizado: Árbol con raíz

Vértices internos: Ni hojas ni raíces

Altura (h): De la raíz a la hoja más lejana.

Árbol m-ario: Donde *m* es el número máximo de hijos un nodo (si todos los vértices *v* tienen $d(v) \leq m + 1$ y la raíz *r* tiene $d(r) \leq m$).



Árboles con raíz (enraizados…)

Raíz: Algún vértice elegido

Hoja: u tq $d(u) = 1$

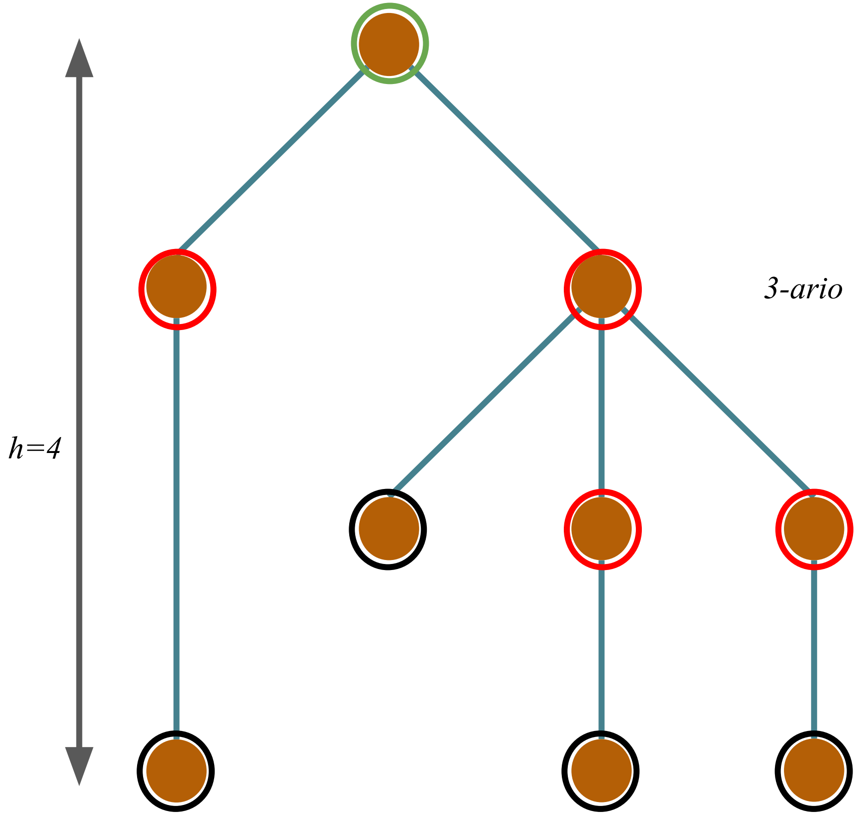
Árbol enraizado: Árbol con raíz

Vértices internos: Ni hojas ni raíces

Altura (h): De la raíz a la hoja más lejana.

Árbol m-ario: Donde m es el número máximo de hijos un nodo (si todos los vértices v tienen $d(v) \leq m + 1$ y la raíz r tiene $d(r) \leq m$).

Nivel: "Altura" de un vértice o distancia a la raíz.



Árboles con raíz (enraizados…)

Raíz: Algún vértice elegido

Hoja: u tq $d(u) = 1$

Árbol enraizado: Árbol con raíz

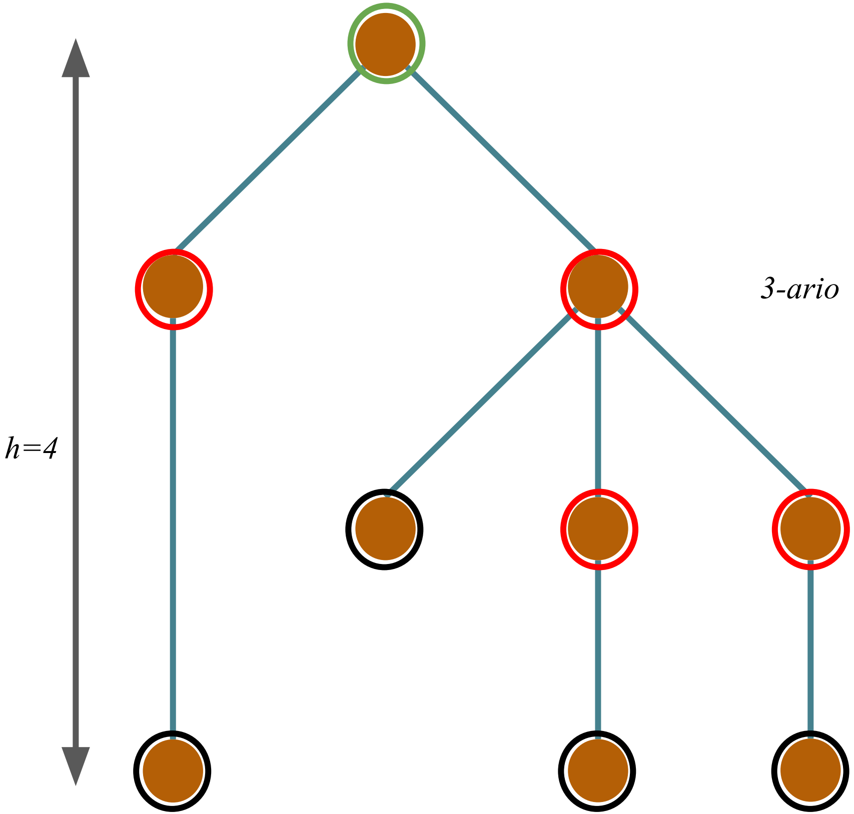
Vértices internos: Ni hojas ni raíces

Altura (h): De la raíz a la hoja más lejana.

Árbol m-ario: Donde m es el número máximo de hijos un nodo (si todos los vértices v tienen $d(v) \leq m + 1$ y la raíz r tiene $d(r) \leq m$).

Nivel: "Altura" de un vértice o distancia a la raíz.

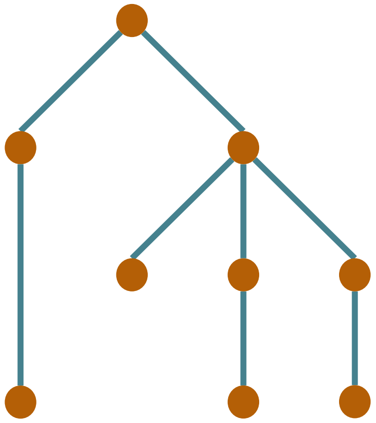
Árbol balanceado: Todas sus hojas están a nivel h (o h-1).



Árboles con raíz (enraizados…)

Teorema 3:

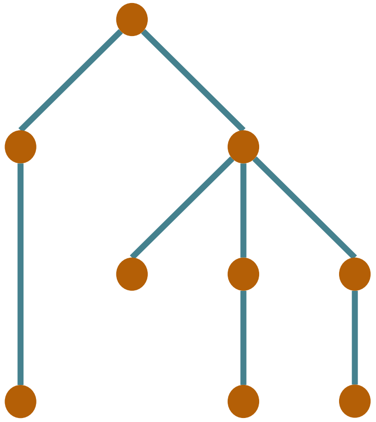
1. T es *m-ario* de altura $h \Rightarrow$ tiene a lo sumo $l=m^h$ hojas
2. T es *m-ario* con l hojas $\Rightarrow$ tiene $h \geq \lceil log_m(l) \rceil$ hojas



T es *m-ario* de altura $h \Rightarrow$ tiene a lo sumo $l = m^h$ hojas

Árboles con raíz (enraizados…)

Demostración (1):



$h=1 \Rightarrow l \leq m = m^1$

$h=2 \Rightarrow l \leq m*m^1 = m^2$

$h=3 \Rightarrow l \leq m*m^2 = m^3$

$h=4 \Rightarrow l \leq m*m^3 = m^4$

$\Rightarrow l \leq m*m^{h-1} = m^h$

Árboles con raíz (enraizados…)

Demostración (2):

$l \leq m^h$

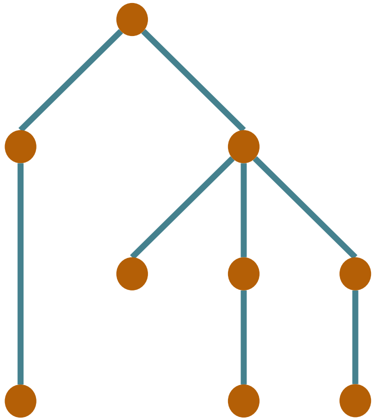
$log(l) \leq log(m^h)$

$log(l) \leq h*log(m)$

$log(l)/log(m) \leq h$

$log_m(l) \leq h$

$\lceil log_m(l) \rceil \leq h$ (por ser entero)



$h=1 \Rightarrow l \leq m = m^1$

$h=2 \Rightarrow l \leq m*m^1 = m^2$

$h=3 \Rightarrow l \leq m*m^2 = m^3$

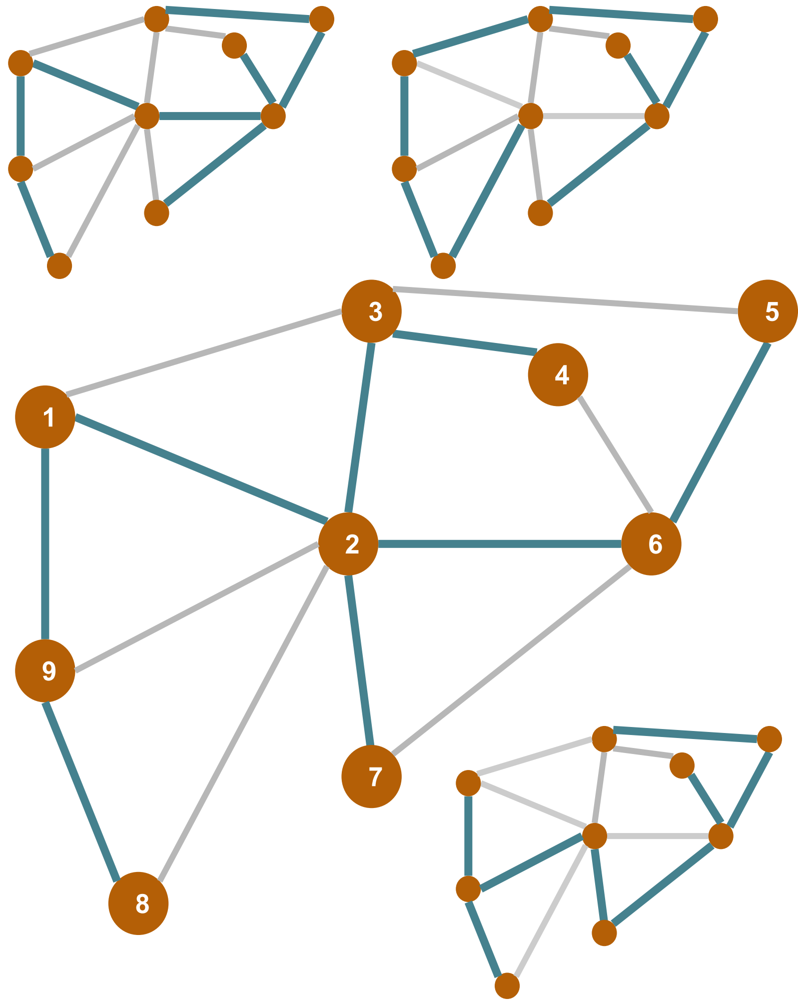
$h=4 \Rightarrow l \leq m*m^3 = m^4$

$\Rightarrow l \leq m*m^{h-1} = m^h$

Árbol Generador (AG)

Definición:

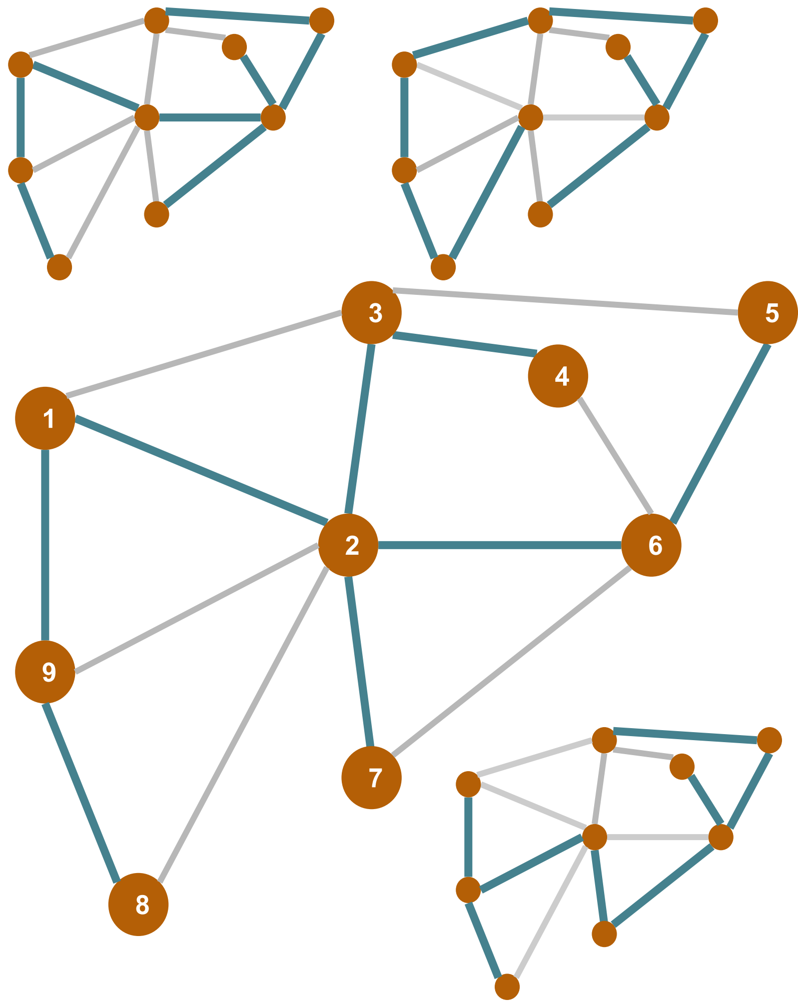
Un árbol generador (AG) de un grafo *G* es un subgrafo que tiene el mismo conjunto de vértices y es un árbol.



Árbol Generador (AG)

Teorema 4:

1. Todo G conexo tiene al menos un AG.
2. Si G conexo tiene un sólo AG entonces es un árbol.
3. $T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E \setminus E_T$ (no está en el árbol) tq $T' = T+e-f = (V, E \cup \{e\} \setminus \{f\})$ con f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$) $\Rightarrow$ T' es otro AG de G.

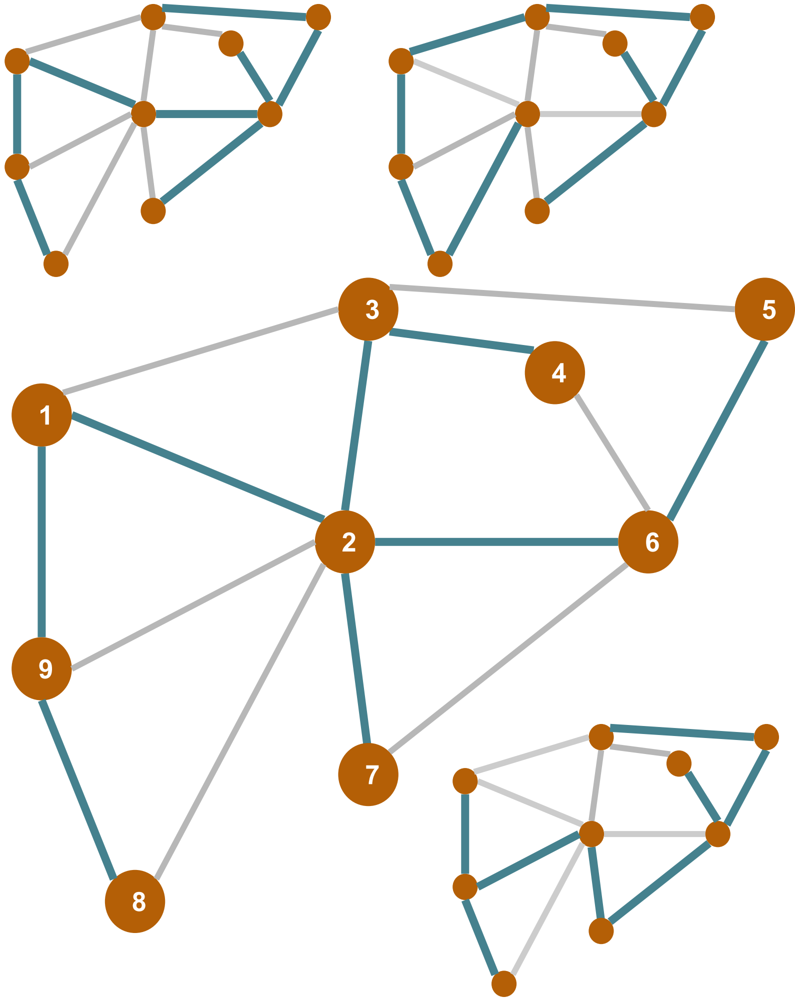


Árbol Generador (AG)

Demostración (1):

Por construcción,

G conexo, ejecuto BFS o DFS y obtengo un AG.



Árbol Generador (AG)

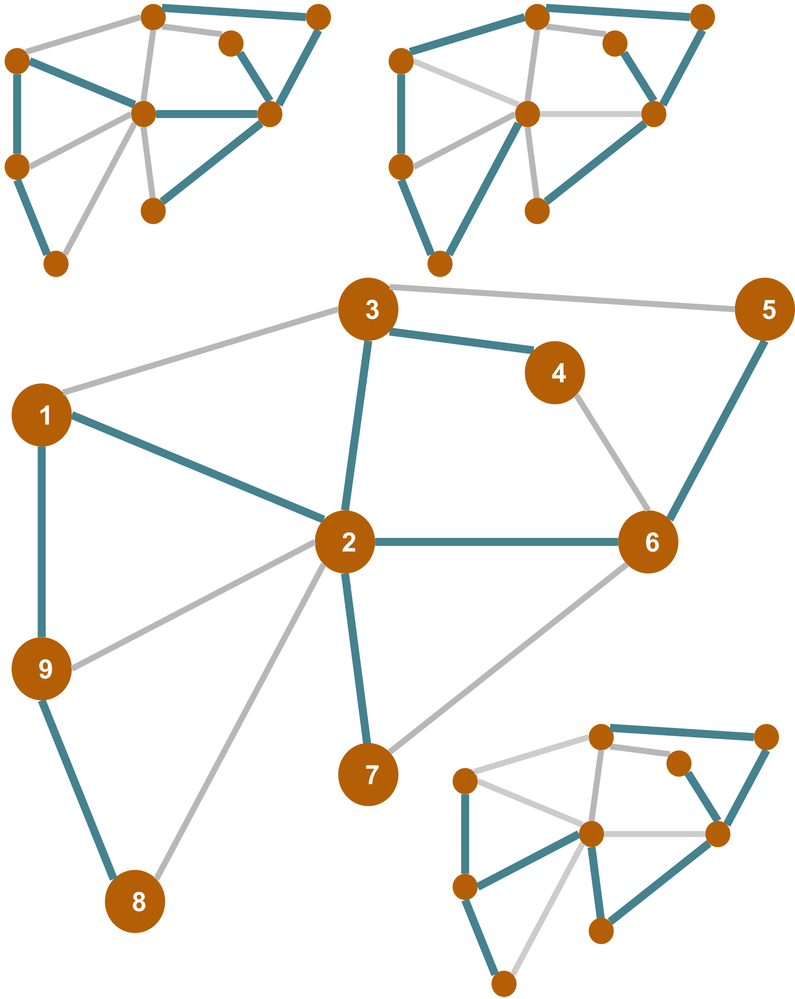
Demostración (2):

Si tuviese dos AG significa que hay dos formas de conectar u y v en G

$\Rightarrow$ hay un circuito

$\Rightarrow$ G no es un árbol.

¡Absurdo!

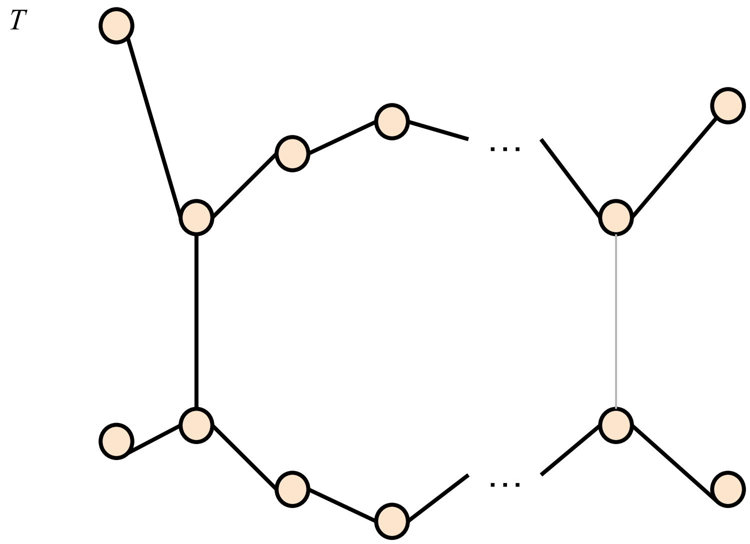


$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E \backslash E_T$ (no está en el árbol) tq $T' = T+e-f = (V, E \cup \{e\} \backslash \{f\})$ con f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$) $\Rightarrow$ T' es otro AG de G.

Árbol Generador (AG)

Demostración (3):

$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$.

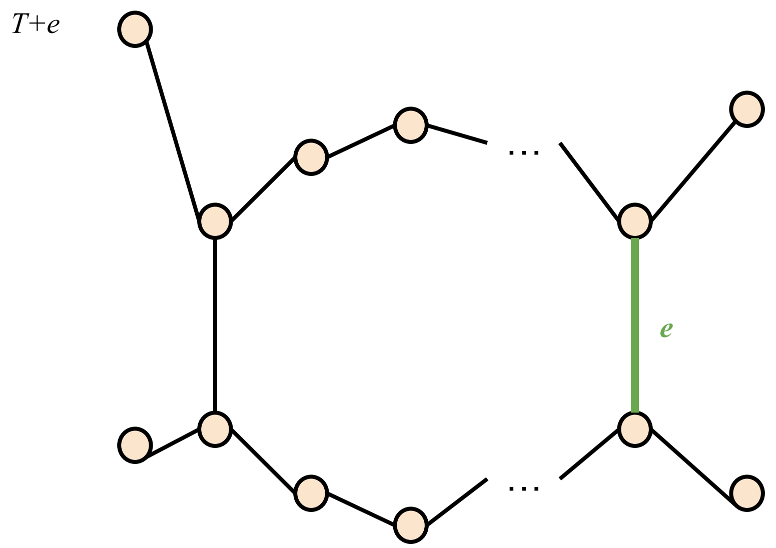


Árbol Generador (AG)

$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E \setminus E_T$ (no está en el árbol) tq $T' = T+e-f = (V, E \cup \{e\} \setminus \{f\})$ con f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$) $\Rightarrow$ T' es otro AG de G.

Demostración (3):

$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E \setminus E_T$ (no está en el árbol)



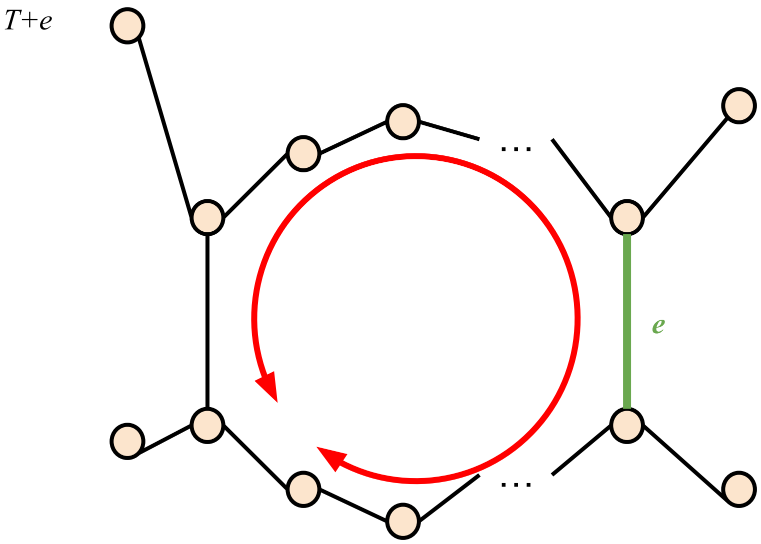
Árboles Generador (AG)

$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E \setminus E_T$ (no está en el árbol) tq $T' = T+e-f = (V, E \cup \{e\} \setminus \{f\})$ con f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$) $\Rightarrow$ T' es otro AG de G.

Demostración (3):

$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E \setminus E_T$ (no está en el árbol).

Por Teorema 1, se forma un único circuito.



$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E\backslash E_T$ (no está en el árbol) tq $T' = T+e-f = (V, E \cup \{e\}\backslash\{f\})$ con f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$) $\Rightarrow$ T' es otro AG de G.

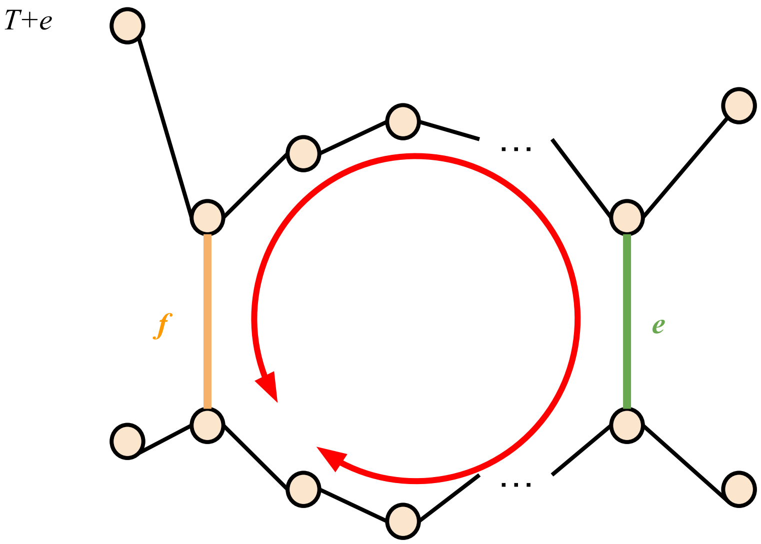
Árbol Generador (AG)

Demostración (3):

$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E\backslash E_T$ (no está en el árbol).

Por Teorema 1, se forma un único circuito.

Sea f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$)



$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E\backslash E_T$ (no está en el árbol) tq $T' = T+e-f = (V, E \cup \{e\}\backslash\{f\})$ con f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$) $\Rightarrow$ T' es otro AG de G.

Árbol Generador (AG)

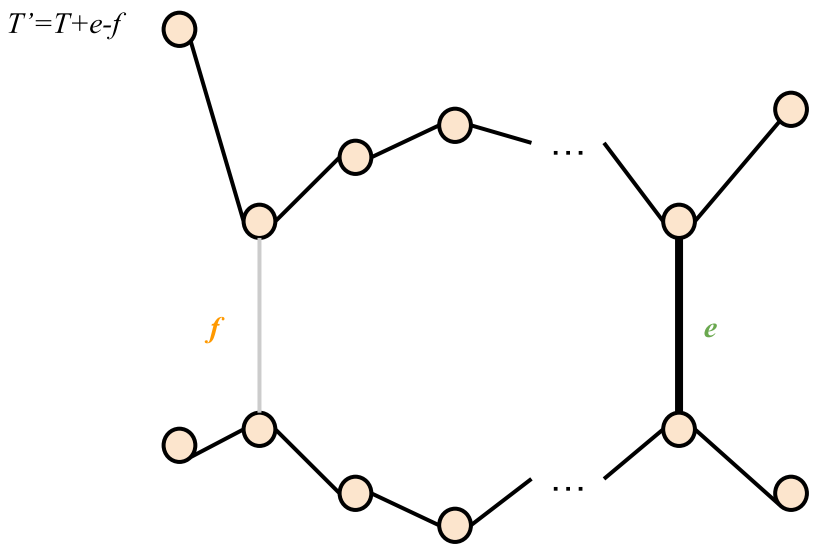
Demostración (3):

$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E\backslash E_T$ (no está en el árbol).

Por Teorema 1, se forma un único circuito.

Sea f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$)

$T' = T+e-f = (V, E \cup \{e\}\backslash\{f\})$



$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E\backslash E_T$ (no está en el árbol) tq $T' = T+e-f = (V, E \cup \{e\}\backslash\{f\})$ con f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$) $\Rightarrow$ T' es otro AG de G.

Árbol Generador (AG)

Demostración (3):

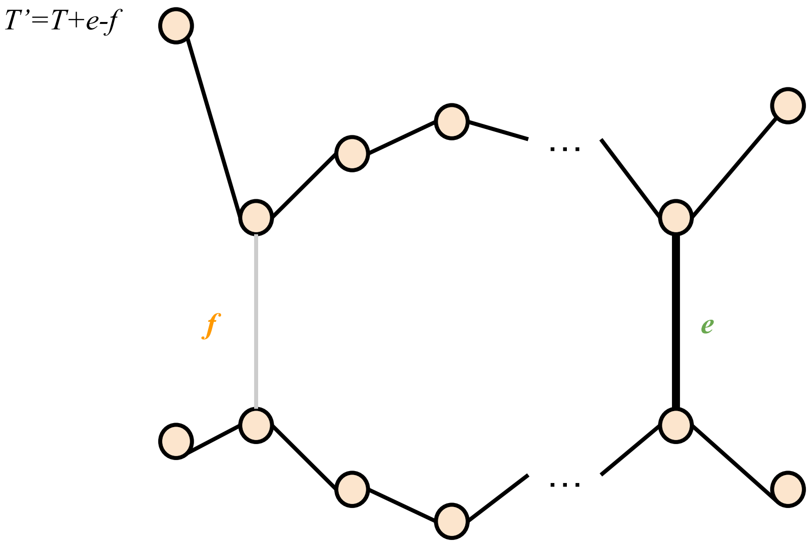
$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E\backslash E_T$ (no está en el árbol).

Por Teorema 1, se forma un único circuito.

Sea f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$)

$T' = T+e-f = (V, E \cup \{e\}\backslash\{f\})$

T' es conexo por Lema 2



Lema 2: Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $e=(v,u) \in E$.

$G - e = (V, E\backslash\{e\})$ es conexo $\Leftrightarrow$ $e \in C$: circuito simple de G.

($e=(v,u) \in E$ es puente $\Leftrightarrow$ e no pertenece a un circuito simple de G).

Árbol Generador (AG)

$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E\setminus E_T$ (no está en el árbol) tq $T' = T+e-f = (V, E \cup \{e\}\setminus\{f\})$ con f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$) $\Rightarrow$ T' es otro AG de G.

Demostración (3):

$T=(V, E_T)$ es AG de $G=(V, E)$. Sea $e=E\setminus E_T$ (no está en el árbol).

Por Teorema 1, se forma un único circuito.

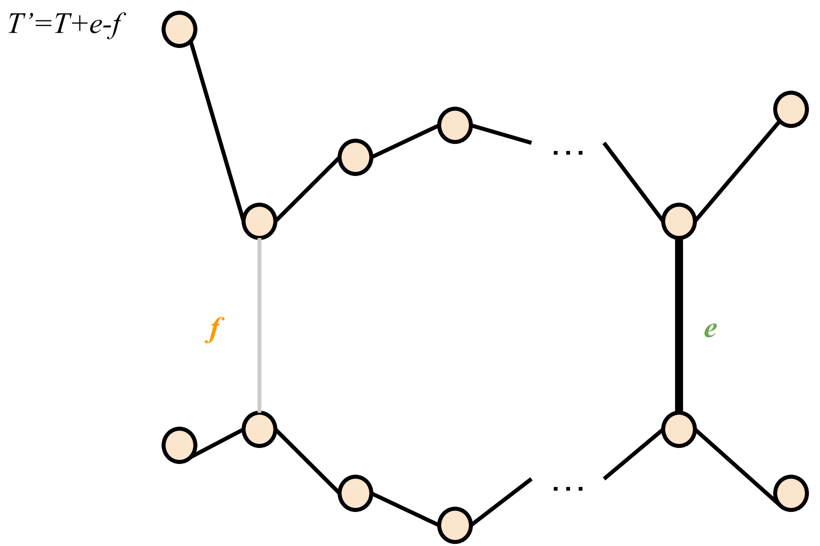
Sea f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de $T+e$)

$T' = T+e-f = (V, E \cup \{e\}\setminus\{f\})$

T' es conexo por Lema 2

T' tiene los mismos vértices que $G \Rightarrow$ es subgrafo generador

T' tiene n-1 aristas $\Rightarrow$ es árbol generador (AG)



Teorema 2: Equivalencias

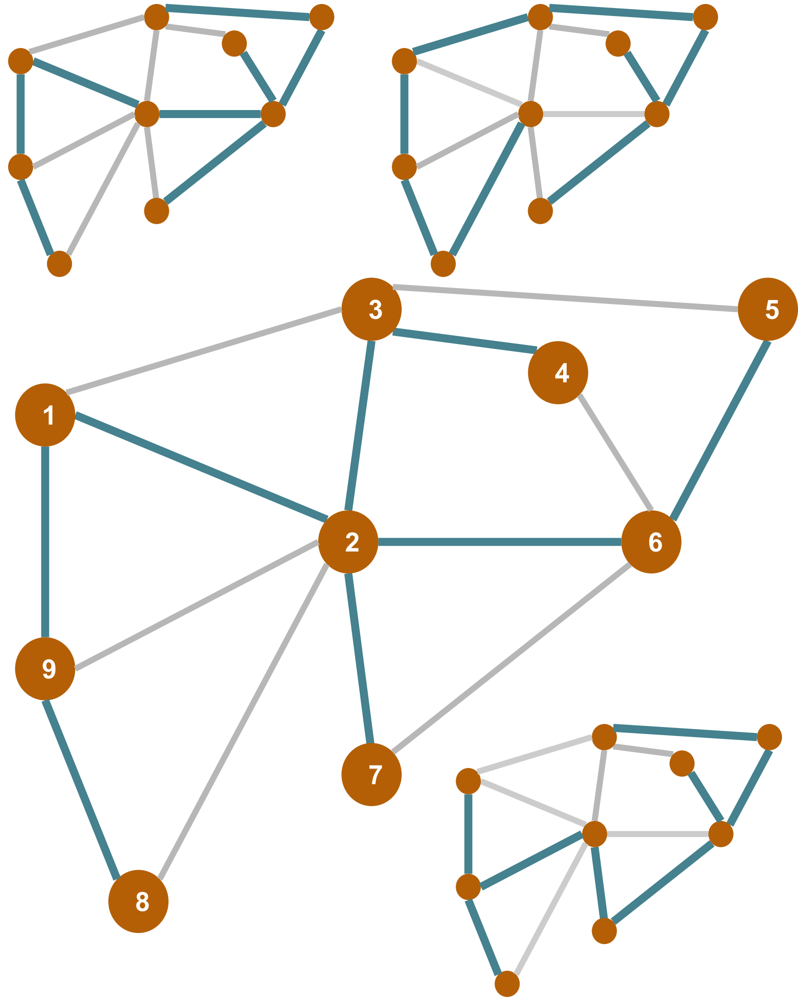
1. G es un árbol *(grafo conexo sin circuitos simples)*.
2. G es un grafo sin circuitos simples y $m = n - 1$
3. G es un grafo conexo y $m = n - 1$

Árbol Generador Mínimo (AGM)

Árbol Generador Mínimo (AGM) = Minimum Spanning Tree (MST).

Dado un grafo $G=(V, E, w)$ con $w: E \longrightarrow R$

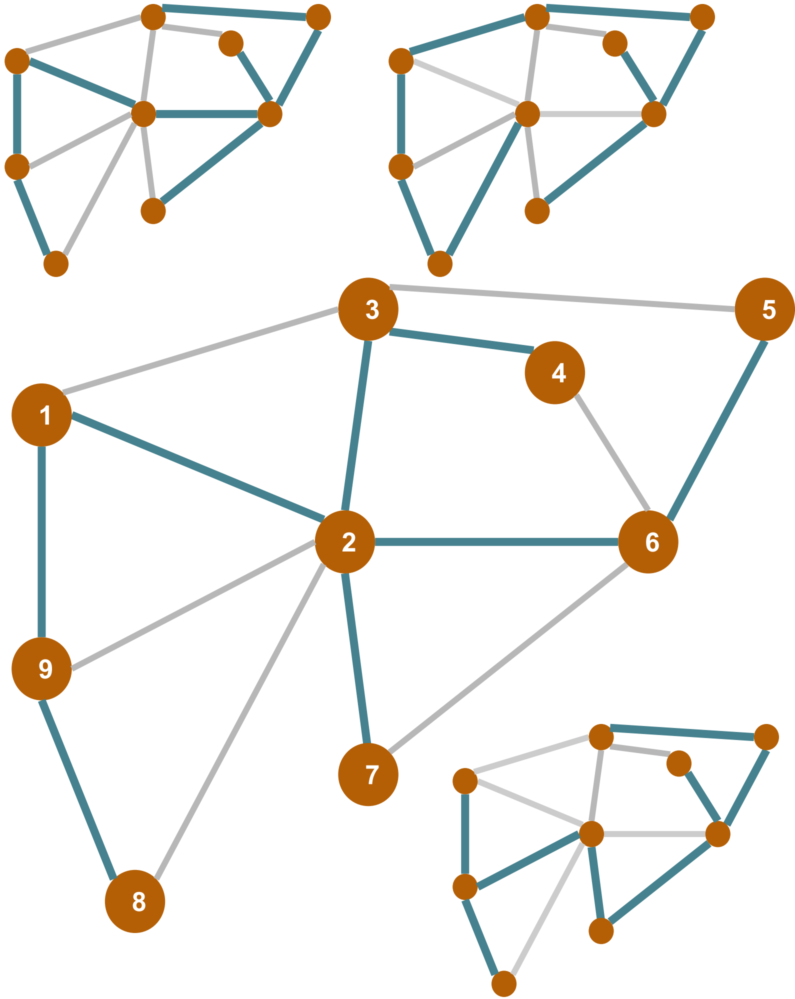
- Costo: $w(T) = \sum_T w(e)$... Como un abuso de notación se usa w tanto para el costo de una arista como de todo el árbol.
- AGM es el AG para el cual $\sum_T w$ es mínima.
- Para los grafos no pesados todo AG es AGM porque $w=1$ $\Rightarrow \sum_T w=m=n-1$
- También puede haber varios AGM.



Árbol Generador Mínimo (AGM)

Prim (1957)

Kruskal (1956)



Algoritmos golosos (CLRS cap. 16)

1. Subestructura óptima.

La solución óptima del problema contiene las soluciones óptimas a los subproblemas.

2. Elección golosa.

En cada paso se busca el óptimo local…

podría no ser el óptimo global

(en general no lo es ⇒ heurísticas)

Algoritmos golosos (CLRS cap. 16)

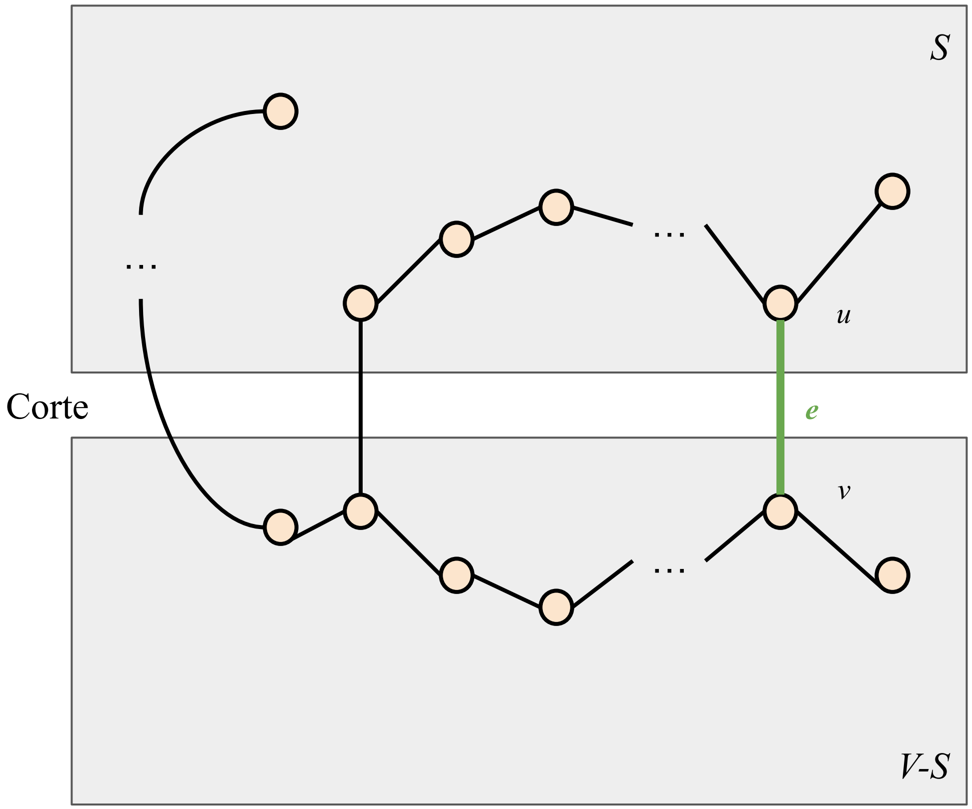
1. Subestructura óptima.

➔ AGM

2. Elección golosa.

➔ Elijo $e=(u,v)$ tq $u \in S$, $v \in V\text{-}S$, y $w(e)$ es el mínimo de las aristas que cruzan el corte.

$\Rightarrow e \in AGM$



Algoritmos golosos (CLRS cap. 16)

Demostración (Elección golosa).

Sea T AGM de G.

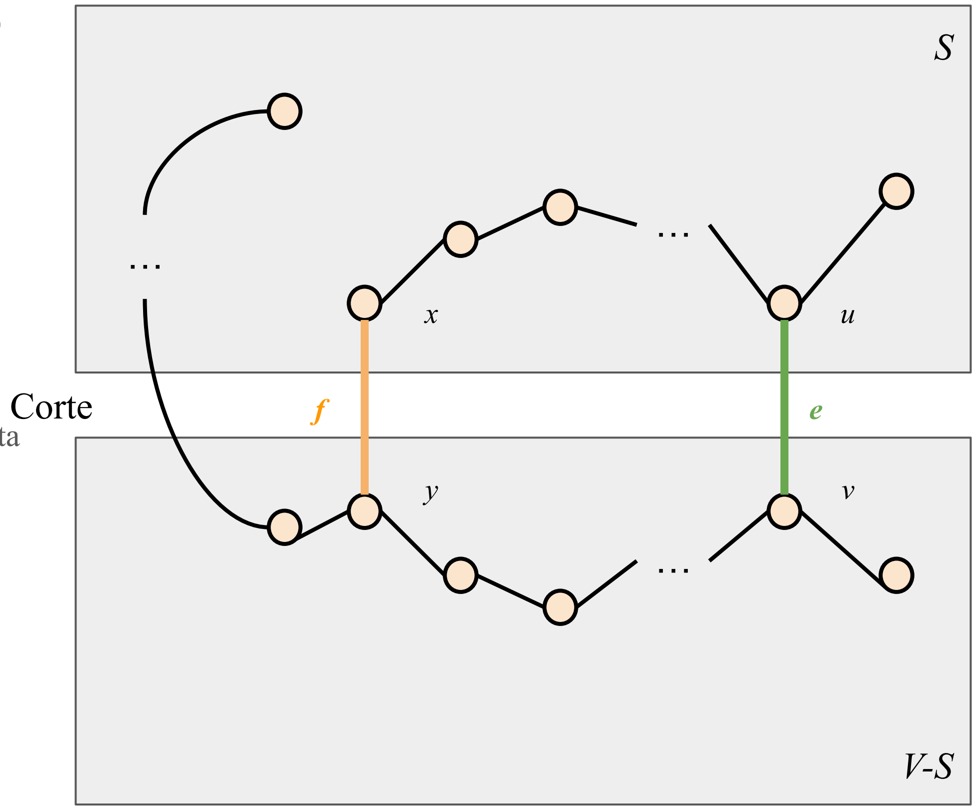
1. Si $e \in T \Rightarrow$ LISTO

2. Si $e \notin T \Rightarrow$

elijo $f=(x,y)$ tq $x \in S$, $y \in V\text{-}S$, y $f \in P_{uv}$ (está en la rama que conecta u con v)

$\Rightarrow T' = T - f + e$ también es AG de G (Teorema 4)

¿T' es AGM?



Algoritmos golosos (CLRS cap. 16)

Demostración (Correctitud).

Sea T AGM de G.

1. Si $e \in T \Rightarrow$ LISTO

2. Si $e \notin T \Rightarrow \ldots \Rightarrow T'$ también es AG de G

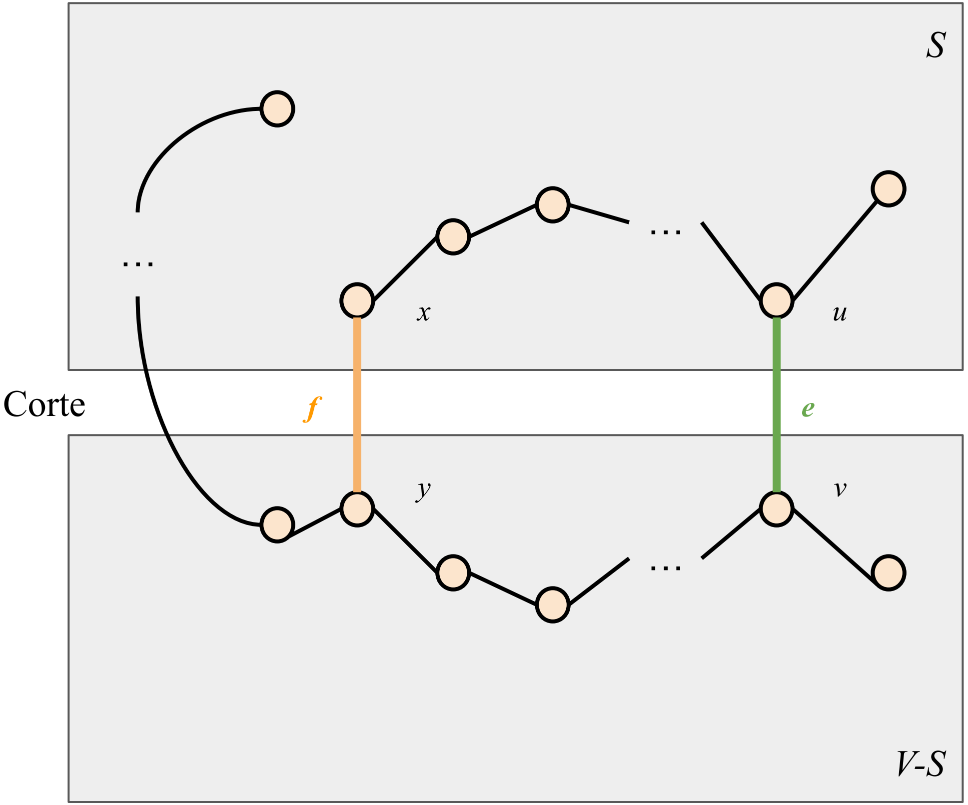
¿T' es AGM?

$w(T') = \sum_{T'} w = \sum_{T} w - w(f) + w(e) = w(T) - w(f) + w(e)$

Como $w(e) \leq w(f)$ (elección golosa)

$w(T') = \sum_{T'} w = \sum_{T} w - w(f) + w(e) = w(T) - w(f) + w(e) \leq w(T)$

$\Rightarrow T'$ es AGM



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

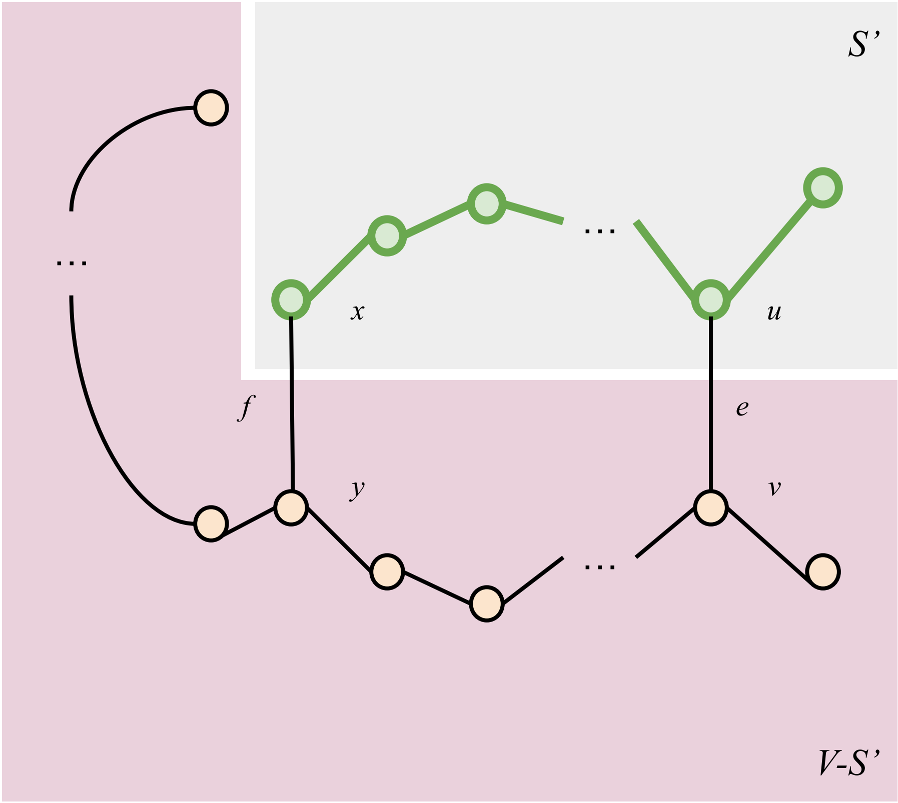
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```

Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

Demostración (Correctitud). (Inducción sobre las iteraciones)

Caso base: $S = [r]$

Hipótesis inductiva: $T_{S'}$ es *AGM* de *S'* (INVARIANTE)



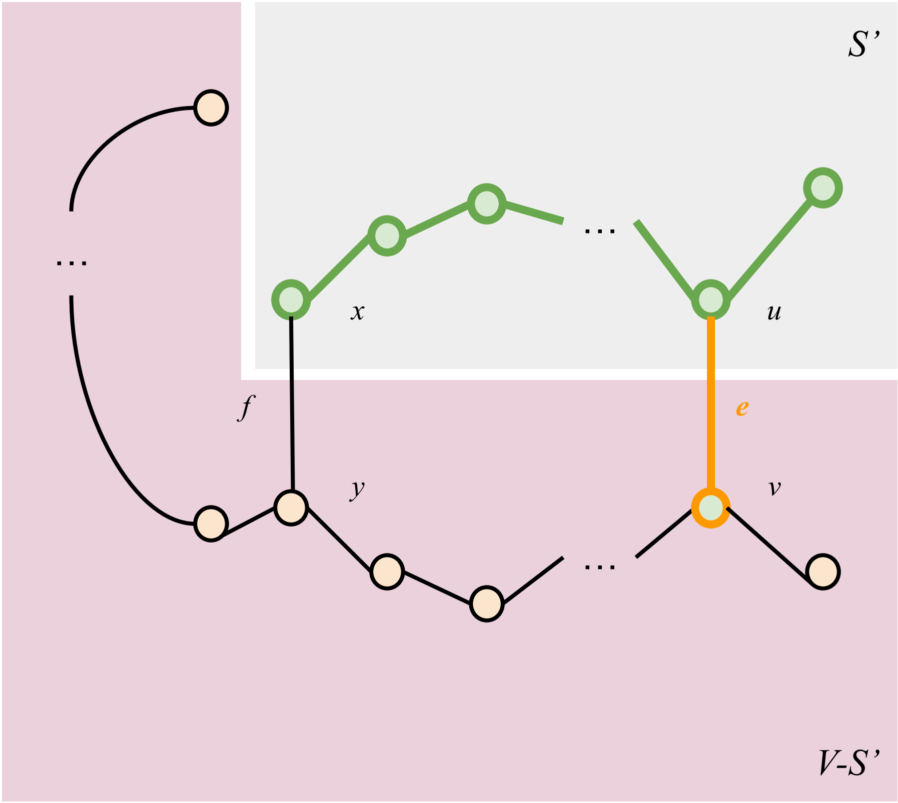
Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

Demostración (Correctitud). (Inducción sobre las iteraciones)

<u>Caso base</u>: $S = [r]$

<u>Hipótesis inductiva</u>: $T_{S'}$ es *AGM* de S' (INVARIANTE)

<u>Paso inductivo</u>: Agrego $e=(u,v)$ tq $u \in S'$, $v \in V\text{-}S'$, y $w(e)$ es el mínimo de las aristas que cruzan el corte.



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

Demostración (Correctitud). (Inducción sobre las iteraciones)

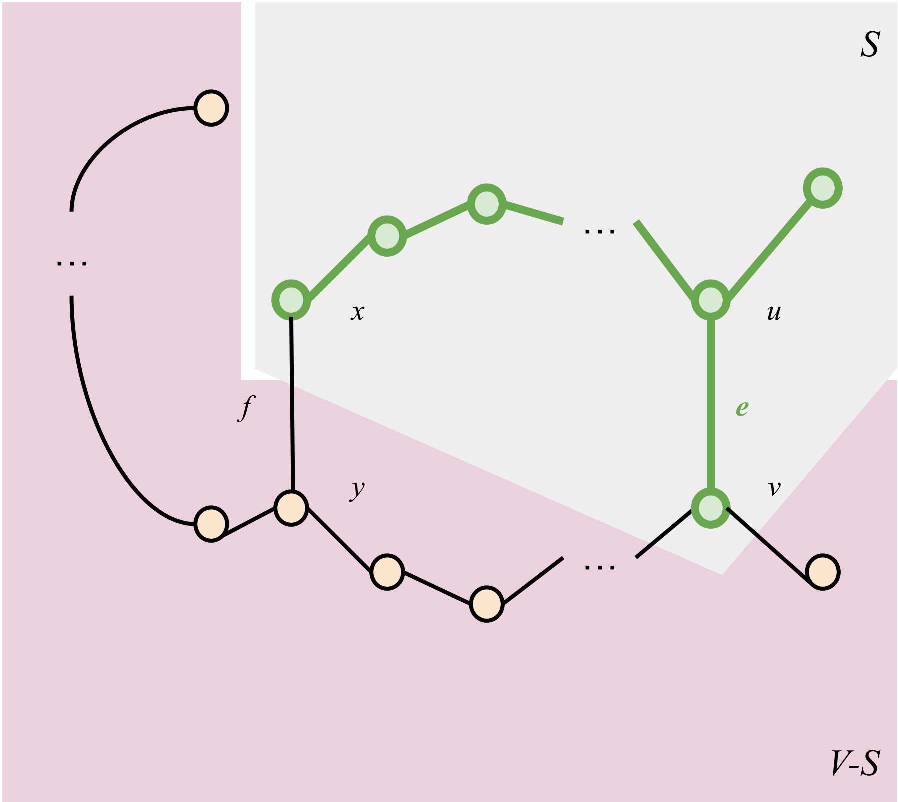
<u>Caso base</u>: $S = [r]$

<u>Hipótesis inductiva</u>: $T_{S'}$ es *AGM* de *S'* (INVARIANTE)

<u>Paso inductivo</u>: Agrego $e=(u,v)$ tq $u \in S$, $v \in V\text{-}S$, y $w(e)$ es el mínimo de las aristas que cruzan el corte.

T_S es *AGM* de *S* por propiedad golosa (demo anterior)

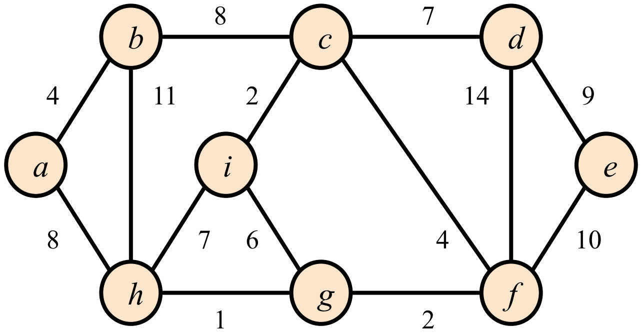
… Hasta completar el grafo.



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

key = {a:0, b:Inf, c:Inf, d:Inf, e:Inf, f:Inf, g:Inf, h:Inf, i:Inf}
parent = {a:None, b:None, c:None, d:None, e:None, e:None, g:None, h:None, i:None}
Q = [a, b, c, d, e, f, g, h, i]

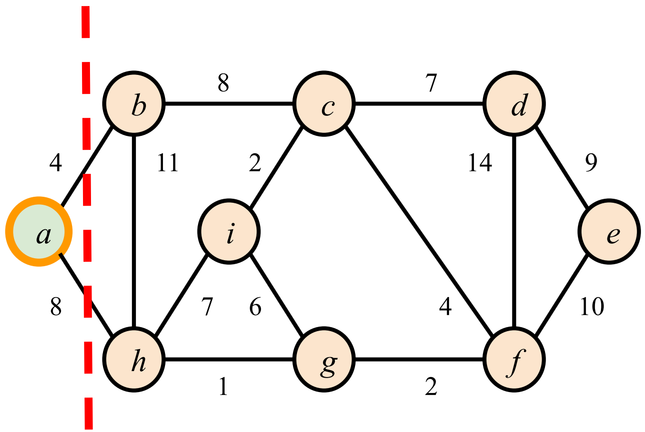
```
PRIM ( r , G ) :
|    for u in V:
|    |    u.key      = Inf
|    |    u.parent   = None
|    r.key = 0
|    Q = 0
|    for u in G.V
|    |    INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|    while Q :
|    |    u = EXTRACT-MIN(Q)
|    |    for v in Adj[u] :
|    |    |    if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|    |    |    |    v.parent = u
|    |    |    |    v.key = w(u,v)
|    |    |    |    DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = a
key = {a:0, b:Inf, c:Inf, d:Inf, e:Inf, f:Inf, g:Inf, h:Inf, i:Inf}
parent = {a:None, b:None, c:None, d:None, e:None, f:None, g:None, h:None, i:None}
Q = [b, c, d, e, f, g, h, i]

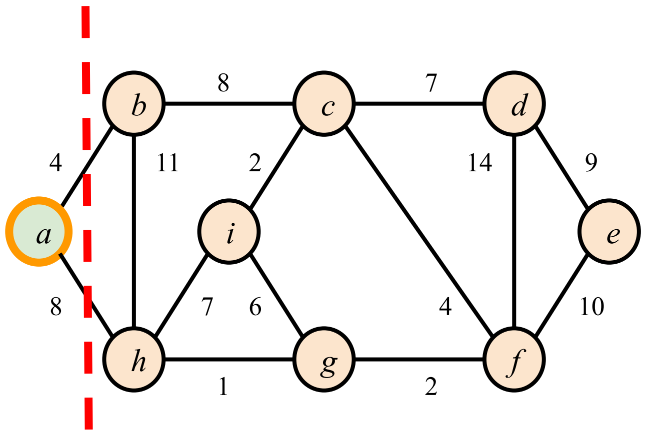
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = a
key = {a:0, b:4, c:Inf, d:Inf, e:Inf, f:Inf, g:Inf, h:8, i:Inf}
parent = {a:None, b:a, c:None, d:None, e:None, f:None, g:None, h:a, i:None}
Q = [b, h, c, d, e, f, g, i]

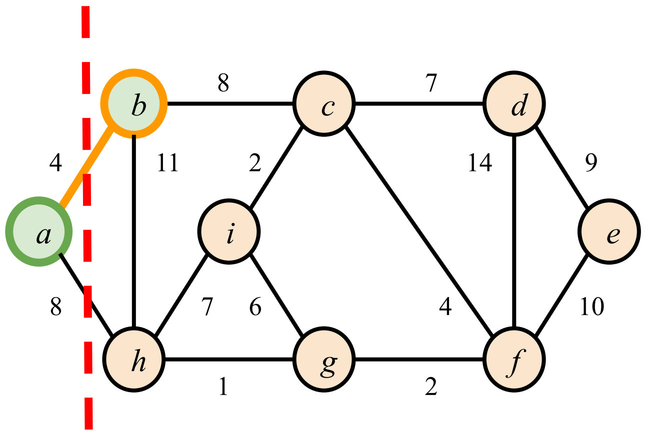
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = b
key = {a:0, b:4, c:Inf, d:Inf, e:Inf, f:Inf, g:Inf, h:8, i:Inf}
parent = {a:None, b:a, c:None, d:None, e:None, f:None, g:None, h:a, i:None}
Q = [h, c, d, e, f, g, i]

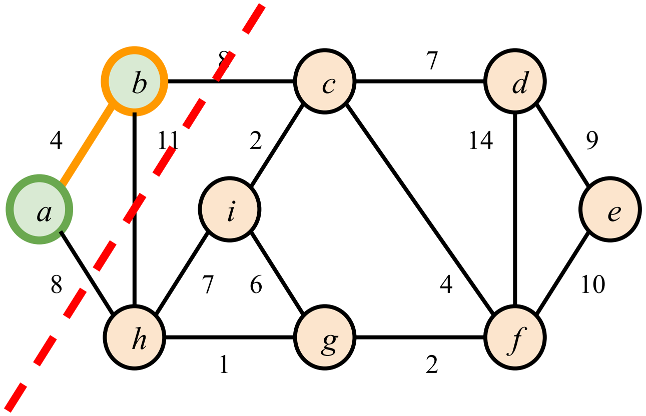
```
PRIM ( r , G ) :
|    for u in V:
|    |    u.key       = Inf
|    |    u.parent    = None
|    r.key = 0
|    Q = 0
|    for u in G.V
|    |    INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|    while Q :
|    |    u = EXTRACT-MIN(Q)
|    |    for v in Adj[u] :
|    |    |    if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|    |    |    |    v.parent = u
|    |    |    |    v.key = w(u,v)
|    |    |    |    DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = b
key = {a:0, b:4, c:8, d:Inf, e:Inf, f:Inf, g:Inf, h:8, i:Inf}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:None, e:None, f:None, g:None, h:a, i:None}
Q = [c, h, d, e, f, g, i]

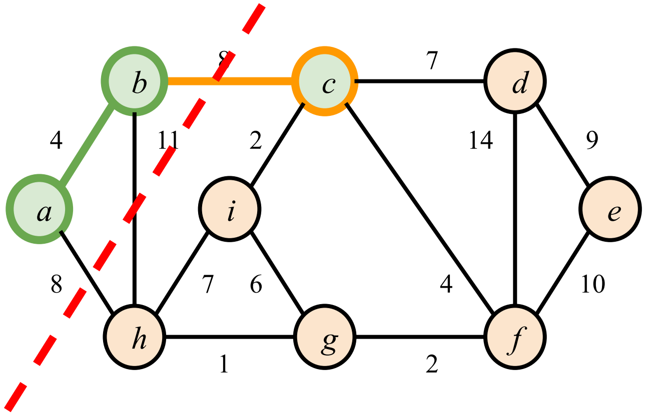
```
Prim ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = c
key = {a:0, b:4, c:8, d:Inf, e:Inf, f:Inf, g:Inf, h:8, i:Inf}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:None, e:None, f:None, g:None, h:a, i:None}
Q = [h, d, e, f, g, i]

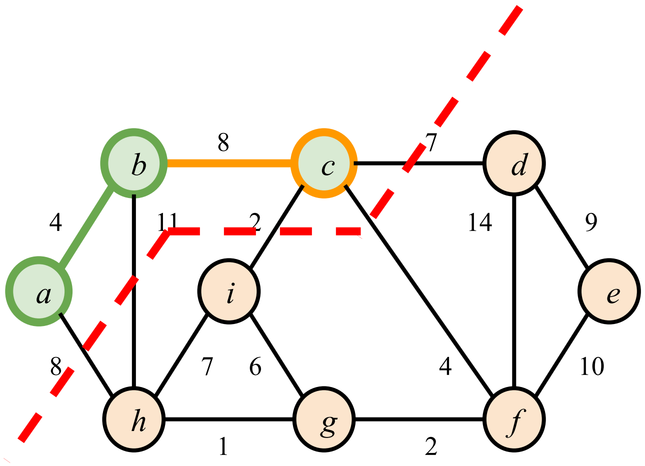
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = c
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:Inf, f:4, g:Inf, h:8, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:None, f:c, g:None, h:a, i:c}
Q = [i, f, d, h, e, g]

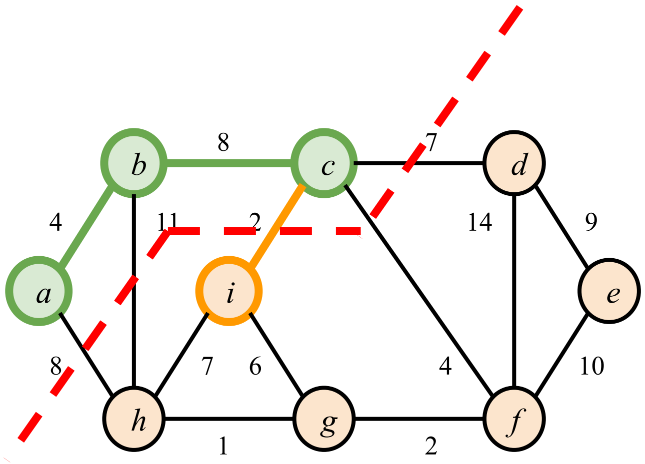
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = i
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:Inf, f:4, g:Inf, h:8, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:None, f:c, g:None, h:a, i:c}
Q = [f, d, h, e, g]

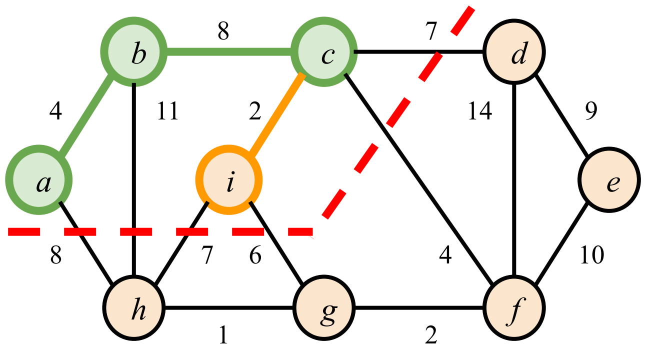
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key        = Inf
|     |     u.parent     = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = i
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:Inf, f:4, g:6, h:7, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:None, f:c, g:i, h:i, i:c}
Q = [f, g, h, d, e]

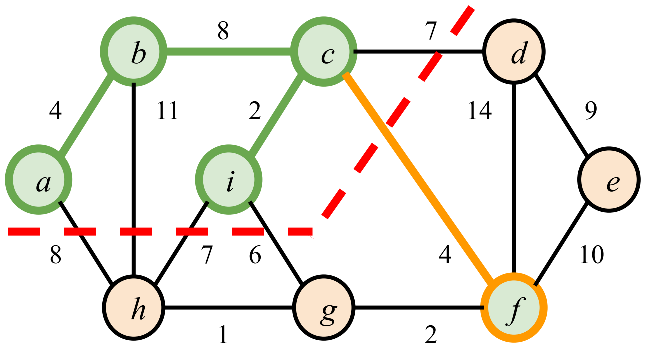
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = f
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:Inf, f:4, g:6, h:7, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:None, f:c, g:i, h:i, i:c}
Q = [g, h, d, e]

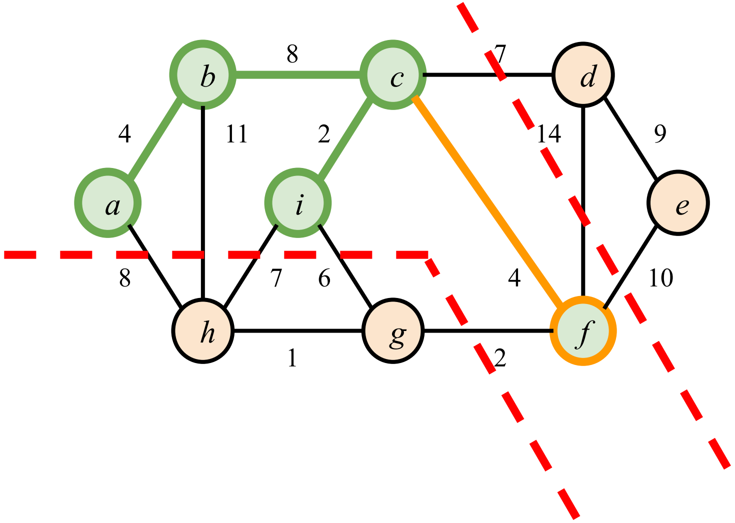
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = f
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:10, f:4, g:2, h:7, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:f, f:c, g:f, h:i, i:c}
Q = [g, h, d, e]

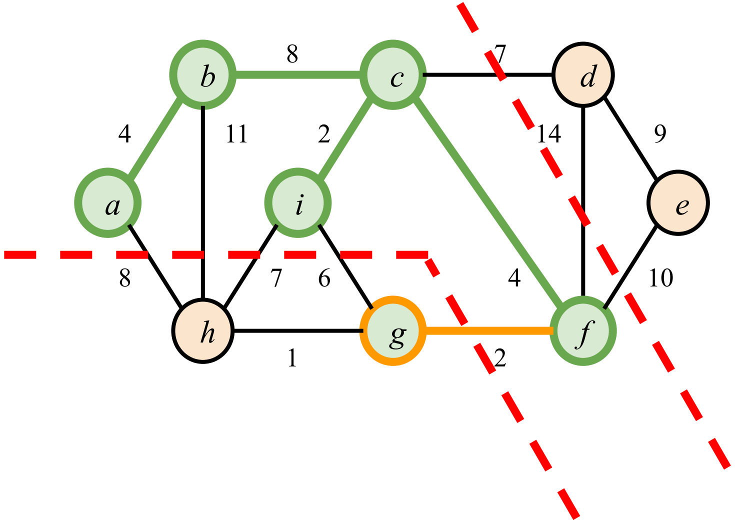
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key        = Inf
|     |     u.parent     = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = g
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:10, f:4, g:2, h:7, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:f, f:c, g:f, h:i, i:c}
Q = [h, d, e]

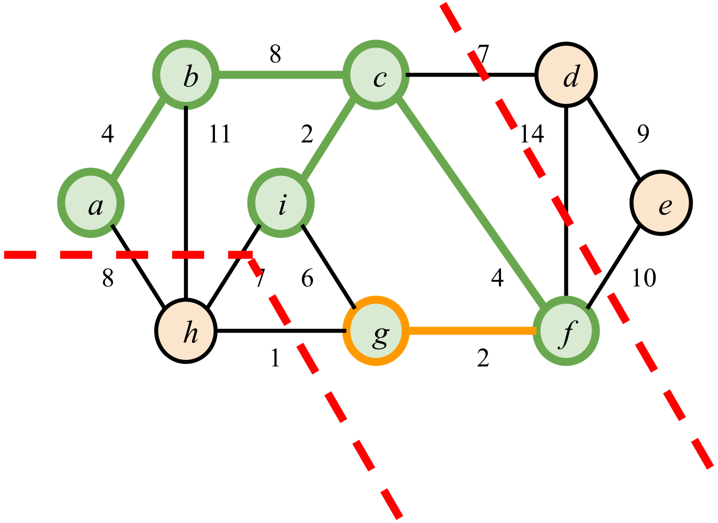
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = g
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:10, f:4, g:2, h:1, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:f, f:c, g:f, h:g, i:c}
Q = [h, d, e]

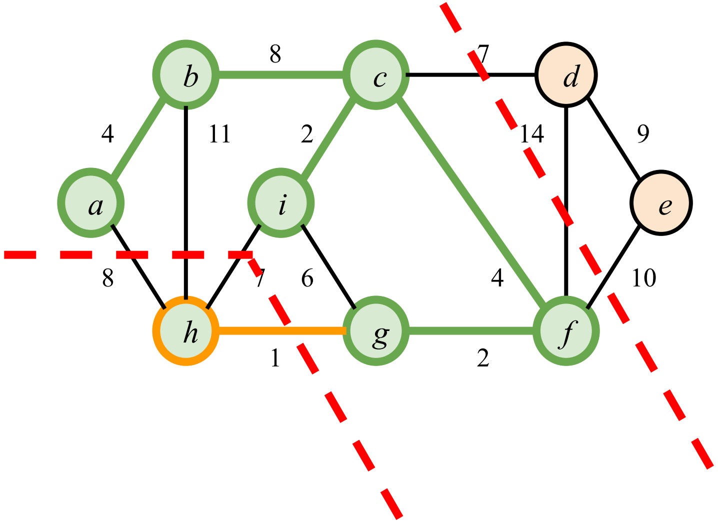
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = h
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:10, f:4, g:2, h:1, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:f, f:c, g:f, h:g, i:c}
Q = [d, e]

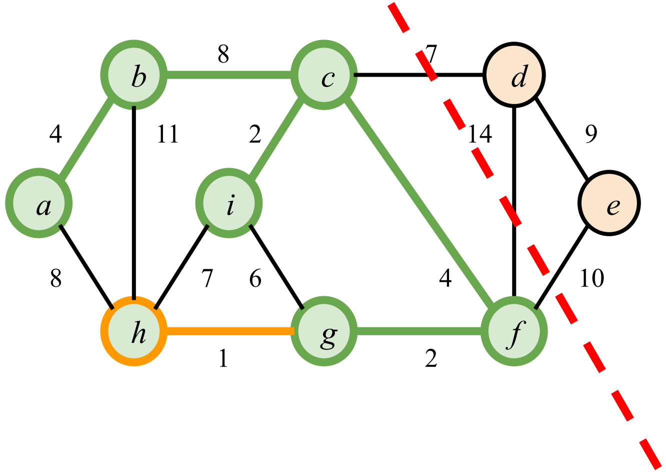
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = h
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:10, f:4, g:2, h:1, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:f, f:c, g:f, h:g, i:c}
Q = [d, e]

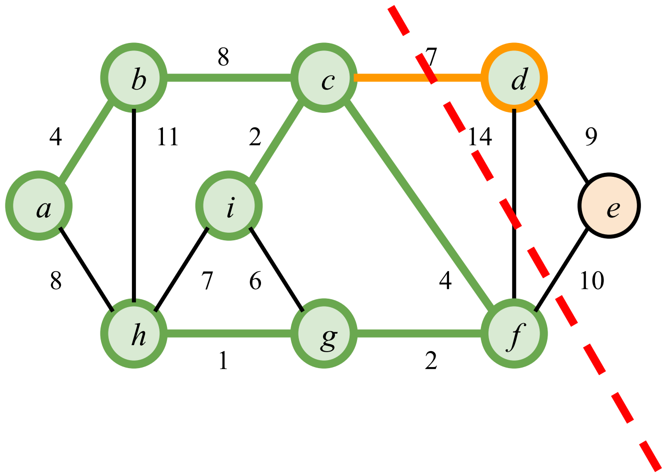
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = d
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:10, f:4, g:2, h:1, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:f, f:c, g:f, h:g, i:c}
Q = [e]

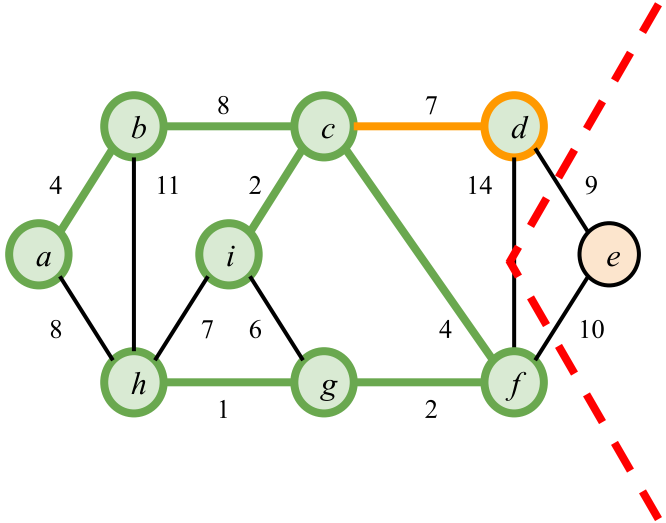
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = d
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:9, f:4, g:2, h:1, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:d, f:c, g:f, h:g, i:c}
Q = [e]

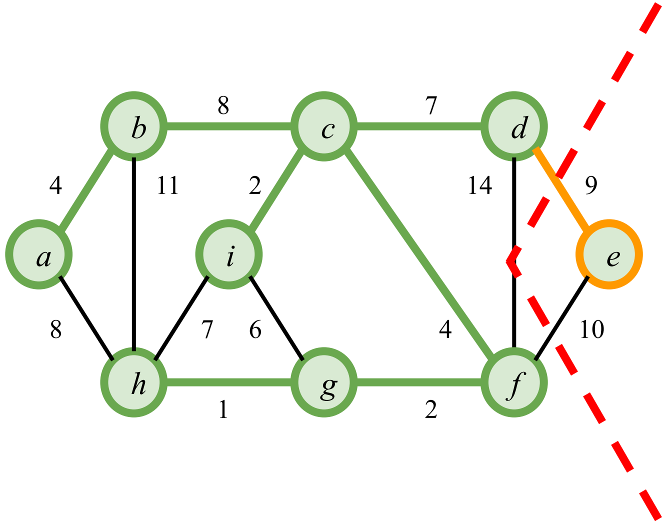
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = e
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:9, f:4, g:2, h:1, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:d, f:c, g:f, h:g, i:c}
Q = []

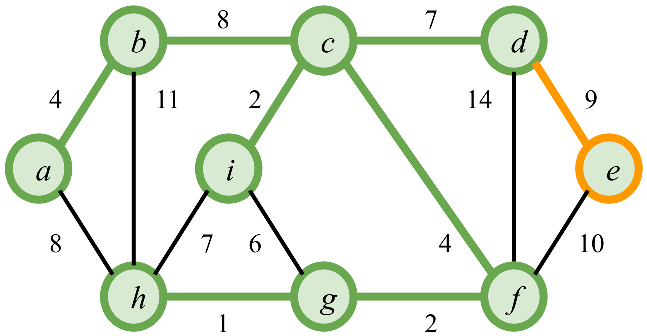
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

u = e
key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:9, f:4, g:2, h:1, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:d, f:c, g:f, h:g, i:c}
Q = []

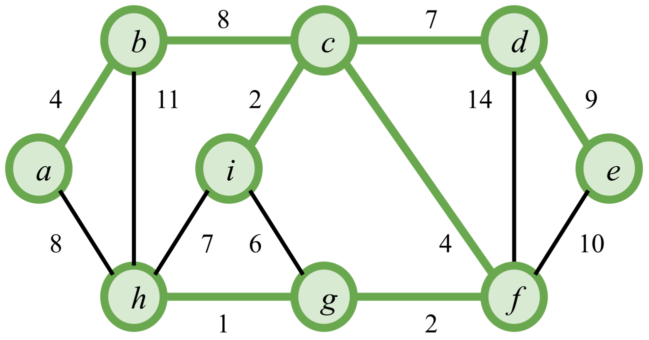
```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

key = {a:0, b:4, c:8, d:7, e:9, f:4, g:2, h:1, i:2}
parent = {a:None, b:a, c:b, d:c, e:d, f:c, g:f, h:g, i:c}
Q = []

```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key       = Inf
|     |     u.parent    = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```



Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key        = Inf
|     |     u.parent     = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```

O(V)

Min-Heap: O(V)

Min-Heap: O(log(V))

*Min-Heap: O(V*log(V))*

*Min-Heap: O(E*log(V))*

Min-Heap: O(log(V))

*Min-Heap: O(V + V*log(V) + E*log(V)) = O(E*log(V))*

Prim (1957; versión CLRS cap. 21)

```
PRIM ( r , G ) :
|     for u in V:
|     |     u.key      = Inf
|     |     u.parent   = None
|     r.key = 0
|     Q = 0
|     for u in G.V
|     |     INSERT(Q,u) # Cola de prioridad (key)
|     while Q :
|     |     u = EXTRACT-MIN(Q)
|     |     for v in Adj[u] :
|     |     |     if (v in Q) AND (w(u,v) < v.key):
|     |     |     |     v.parent = u
|     |     |     |     v.key = w(u,v)
|     |     |     |     DECREASE-KEY(Q, v, w(u,v))
```

O(V)

Fibonacci-Heap: O(1)

Fibonacci-Heap: O(log(V))

*Fibonacci-Heap: O(V*log(V))*

Fibonacci-Heap: O(E)

Fibonacci-Heap: O(1)

*Min-Heap: O(V + V*log(V) + E*log(V)) = O(E*log(V))*

*Fibonacci-Heap: O(V + V*log(V) + E) = O(V*log(V) + E)*

*Grafos ralos E~V : Min-Heap ~ Fibonacci-Heap: O(V*log(V))*

*Grafos densos E~V^2 Fibonacci-Heap: O(V^2), Min-Heap O(V^2 * log(V))*

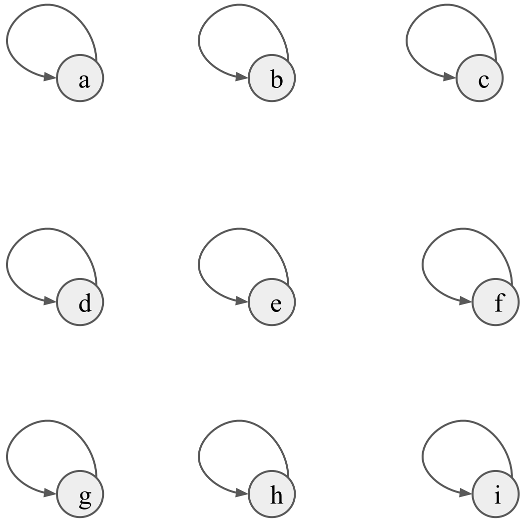
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```

Disjoint-set / Union-Find (CLRS cap. 19)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```

Disjoint-set / Union-Find (CLRS cap. 19)



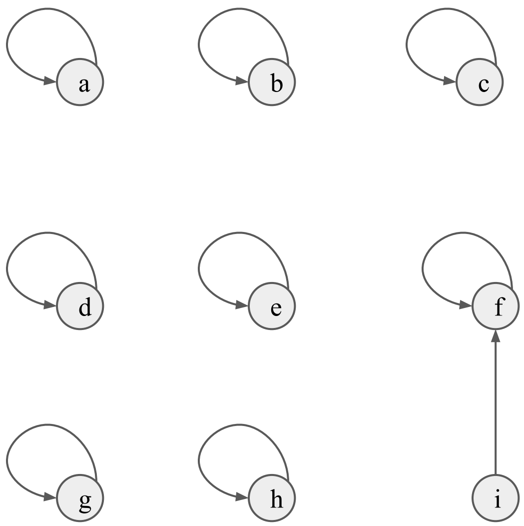
MAKE-SET (x) , crea un SET con un único elemento *x*.

UNION (x, y) , asigna un único representante a ambos SET *Sx* y *Sy*. Puede o no ser uno de los representantes anteriores.

FIND-SET (x) , devuelve el representante de x.

MAKE-SET (x)

Disjoint-set / Union-Find (CLRS cap. 19)



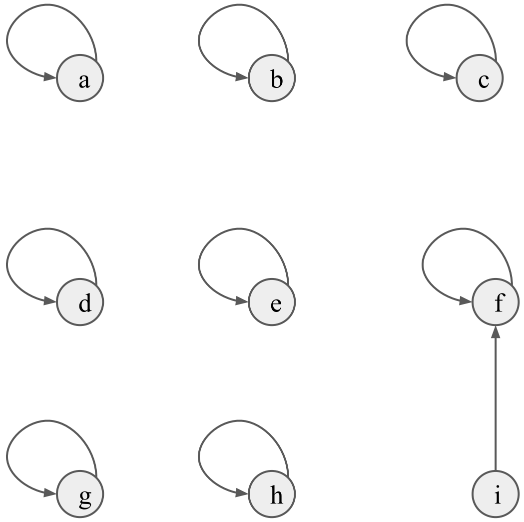
MAKE-SET (x) , crea un SET con un único elemento *x*.

UNION (x, y) , asigna un único representante a ambos SET *Sx* y *Sy*. Puede o no ser uno de los representantes anteriores.

FIND-SET (x) , devuelve el representante de x.

UNION (f, i)

Disjoint-set / Union-Find (CLRS cap. 19)



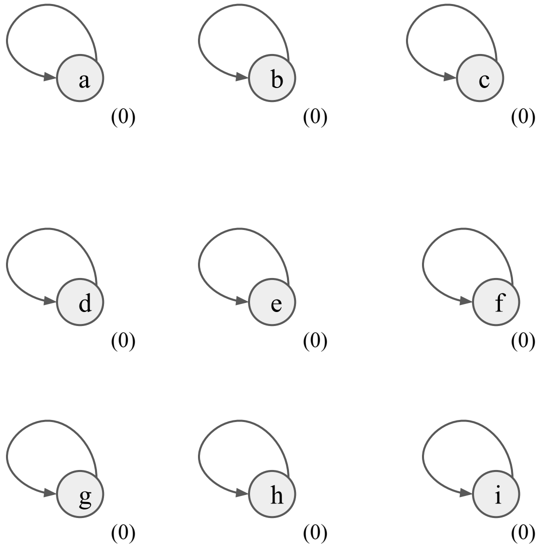
MAKE-SET (x) , crea un SET con un único elemento *x*.

UNION (x, y) , asigna un único representante a ambos SET *Sx* y *Sy*. Puede o no ser uno de los representantes anteriores.

FIND-SET (x) , devuelve el representante de x.

FIND-SET (i) ⟶ f (representante)
FIND-SET (i) == FIND-SET (f) ⟶ VERDADERO
FIND-SET (i) != FIND-SET (e) ⟶ VERDADERO

Disjoint-set Opt. *Union by rank* (CLRS cap. 19)



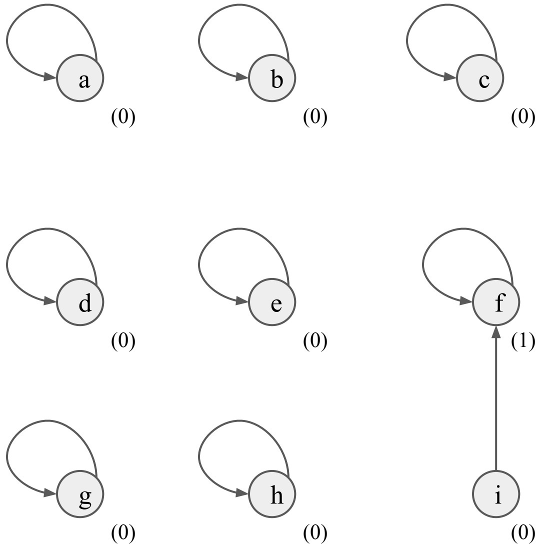
MAKE-SET (x) , crea un SET con un único elemento *x*.

UNION (x, y) , asigna un único representante a ambos SET *Sx* y *Sy*. Puede o no ser uno de los representantes anteriores.

FIND-SET (x) , devuelve el representante de x.

MAKE-SET (x)

Disjoint-set Opt. *Union by rank* (CLRS cap. 19)



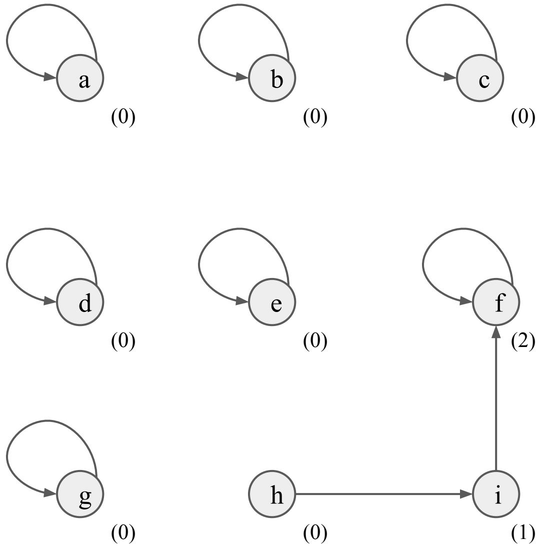
MAKE-SET (x) , crea un SET con un único elemento *x*.

UNION (x, y) , asigna un único representante a ambos SET *Sx* y *Sy*. Puede o no ser uno de los representantes anteriores.

FIND-SET (x) , devuelve el representante de x.

UNION (f, i)

Disjoint-set Opt. *Union by rank* (CLRS cap. 19)



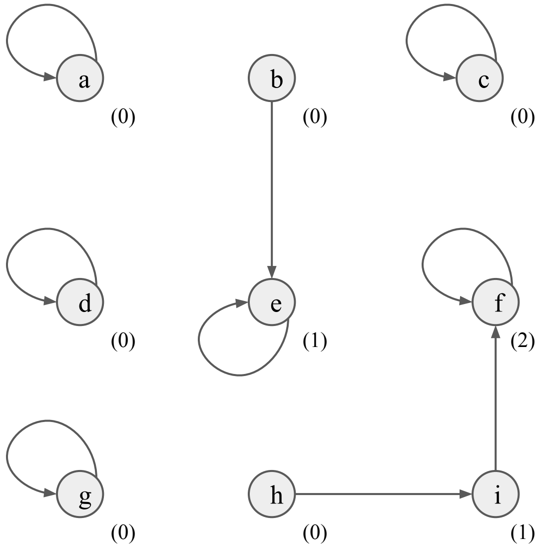
MAKE-SET (x) , crea un SET con un único elemento *x*.

UNION (x, y) , asigna un único representante a ambos SET *Sx* y *Sy*. Puede o no ser uno de los representantes anteriores.

FIND-SET (x) , devuelve el representante de x.

UNION (f, i)
UNION (h, i)

Disjoint-set Opt. *Union by rank* (CLRS cap. 19)



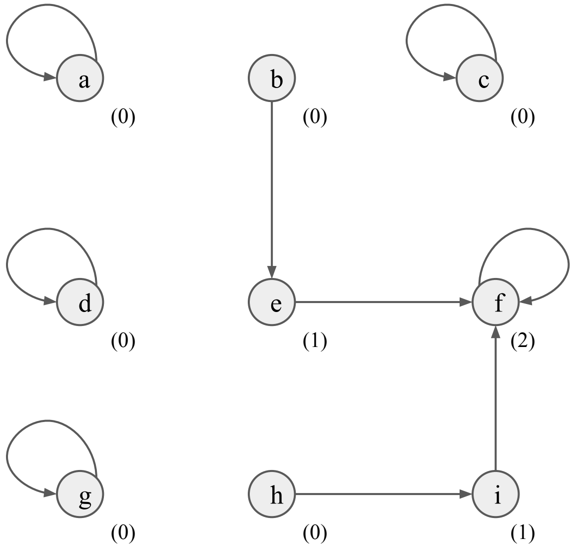
`MAKE-SET ( x )` , crea un SET con un único elemento *x*.

`UNION ( x, y )` , asigna un único representante a ambos SET *Sx* y *Sy*. Puede o no ser uno de los representantes anteriores.

`FIND-SET ( x )` , devuelve el representante de x.

```
UNION ( f, i )
UNION ( h, i )
UNION ( b, e )
```

Disjoint-set Opt. *Union by rank* (CLRS cap. 19)



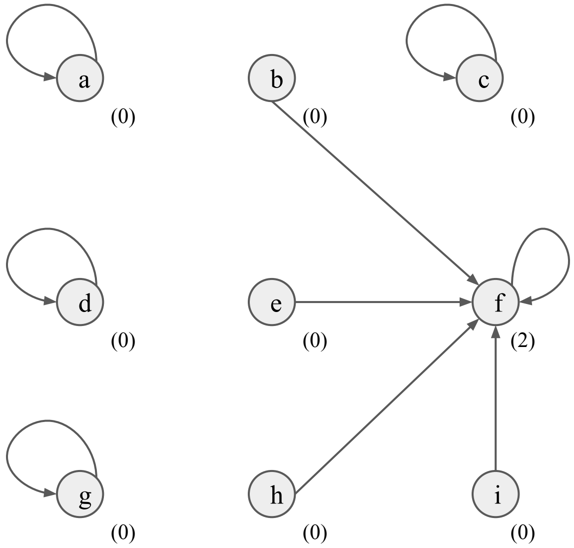
MAKE-SET (x) , crea un SET con un único elemento *x*.

UNION (x, y) , asigna un único representante a ambos SET *Sx* y *Sy*. Puede o no ser uno de los representantes anteriores.

FIND-SET (x) , devuelve el representante de x.

UNION (f, i)
UNION (h, i)
UNION (b, e)
UNION (f, e)

Disjoint-set Opt. *Path Compression* (CLRS cap. 19)



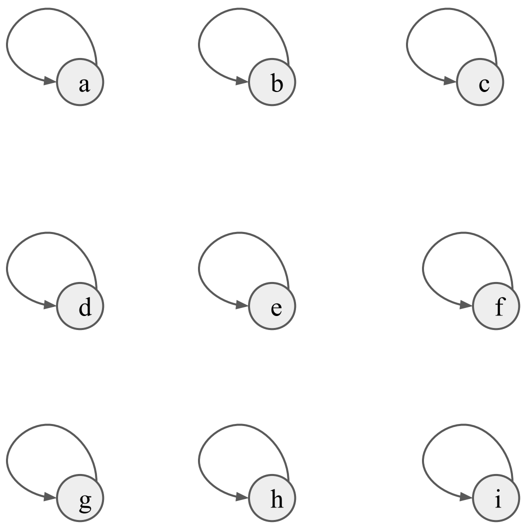
`MAKE-SET ( x ) , crea un SET con un único elemento` *x*.

`UNION ( x, y ) , asigna un único representante a ambos SET` *Sx* `y` *Sy*. `Puede o no ser uno de los representantes anteriores.`

`FIND-SET ( x ) , devuelve el representante de x.`

```
UNION ( f, i )
UNION ( h, i )
UNION ( b, e )
UNION ( f, e )
```

Disjoint-set / Union-Find (CLRS cap. 19)



`MAKE-SET ( x )` , crea un SET con un único elemento *x*.

`UNION ( x, y )` , asigna un único representante a ambos SET *Sx* y *Sy*. Puede o no ser uno de los representantes anteriores.

`FIND-SET ( x )` , devuelve el representante de x.

¿Aplicaciones?

Ciclos,

Conjuntos conexos,

AGM,

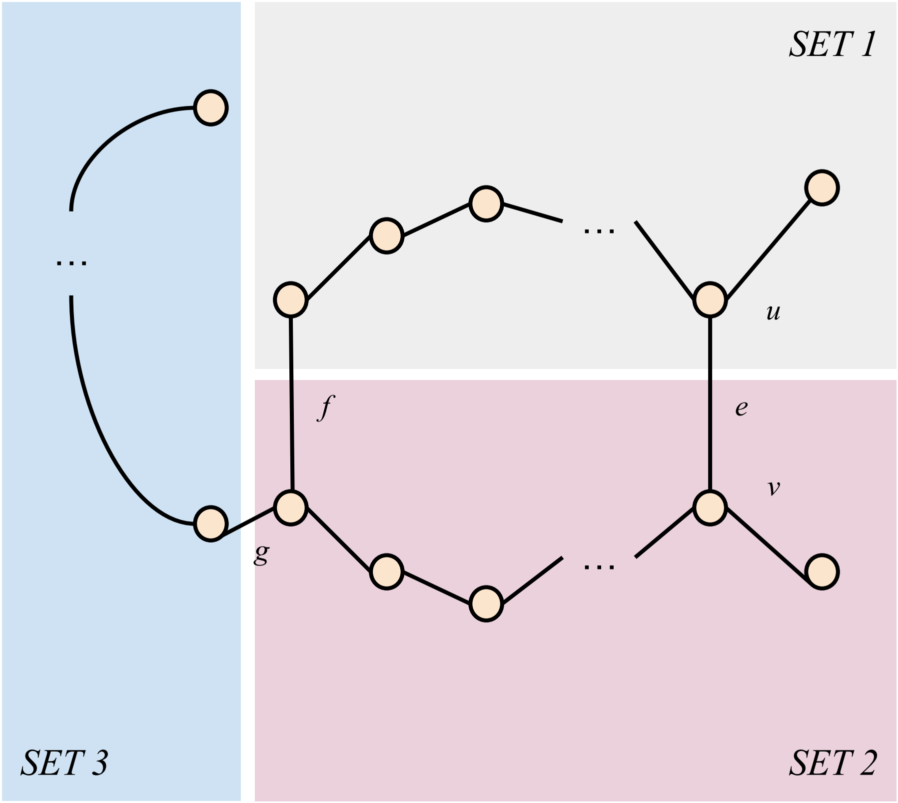
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |    MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |    if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |    |    A = A ∪ {e}
|     |    |    UNION(u,v)
```

Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

DISJOINT-SET me genera muchos conjuntos,

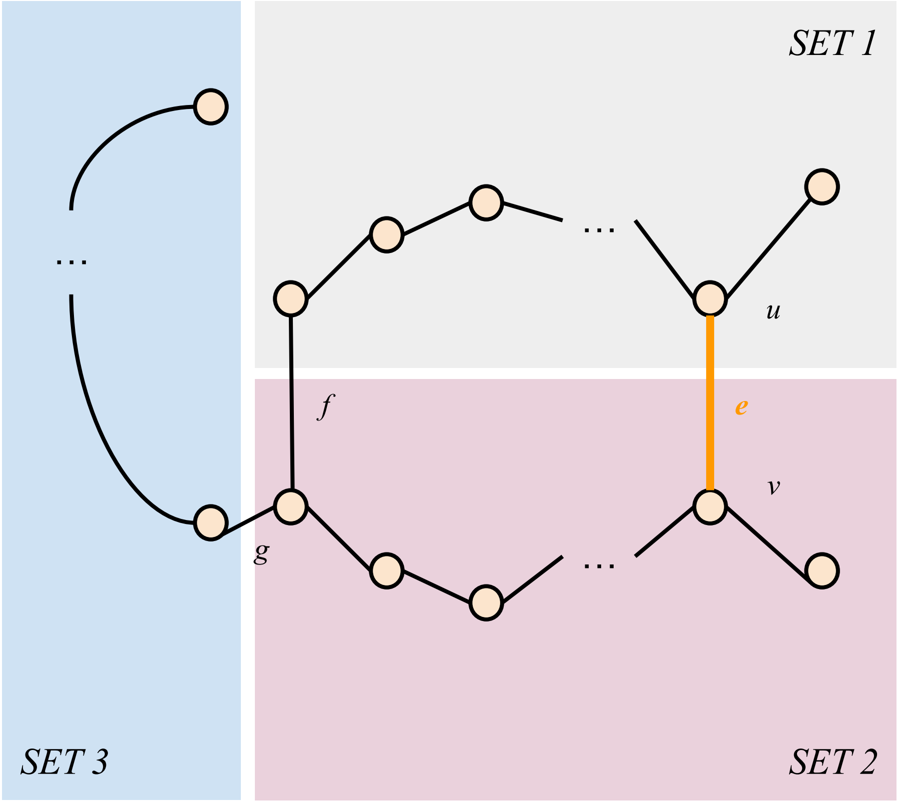
Busco la arista de menor w que una cualquiera dos conjuntos distintos.



Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

DISJOINT-SET me genera muchos conjuntos,

Busco la arista de menor w que una cualquiera dos conjuntos distintos.

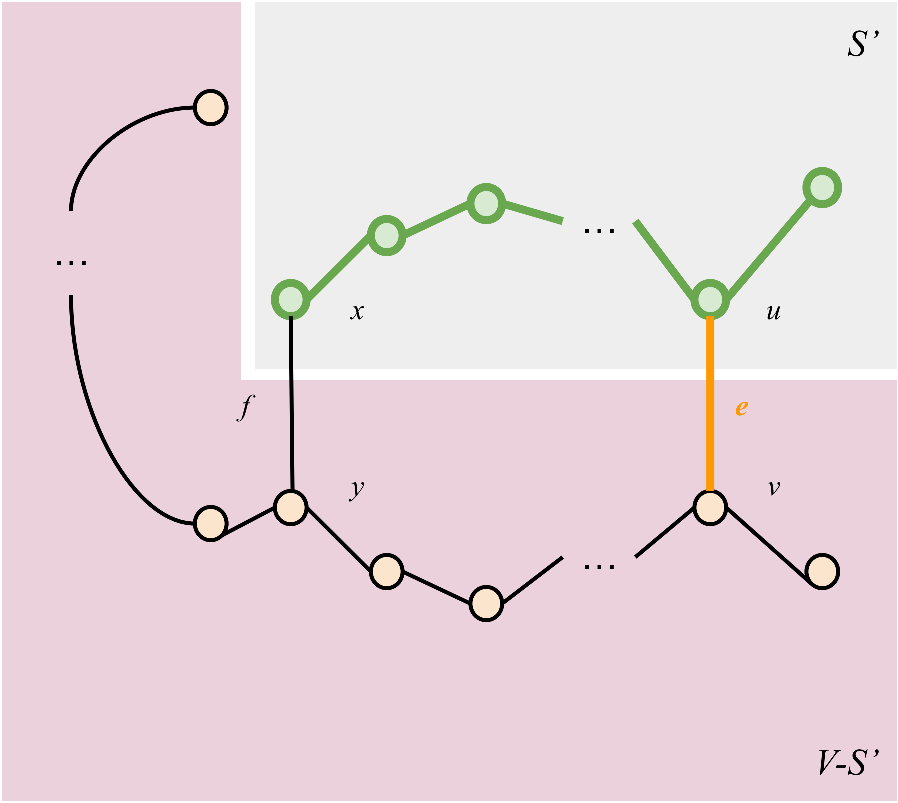


Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

DISJOINT-SET me genera muchos conjuntos,

Busco la arista de menor w que una cualquiera dos conjuntos distintos.

Y sigue la misma idea…



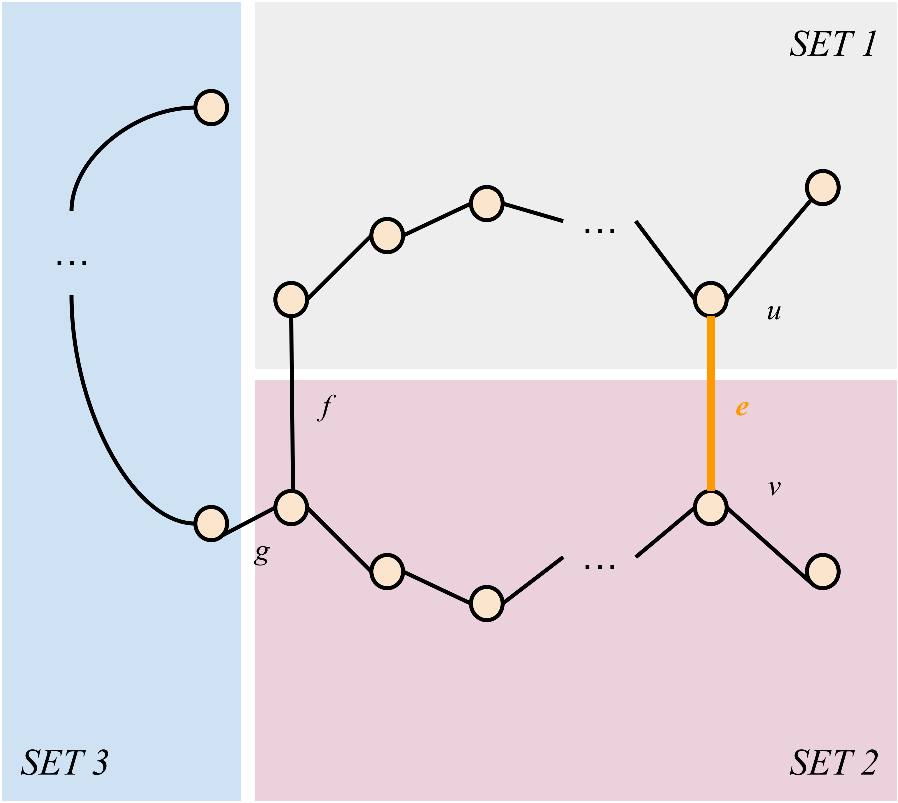
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

Demostración (Correctitud). (Inducción sobre las iteraciones)

Caso base: $S = [s]$

Hipótesis inductiva: $T_{k'}$ es bosque de *AGM* de *G* (INVARIANTE)

Paso inductivo: Agrego *e=(u,v)* y *w(e)* es el mínimo de las aristas que cruzan cualquier corte.



Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

Demostración (Correctitud). (Inducción sobre las iteraciones)

<u>Caso base</u>: $S = [s]$

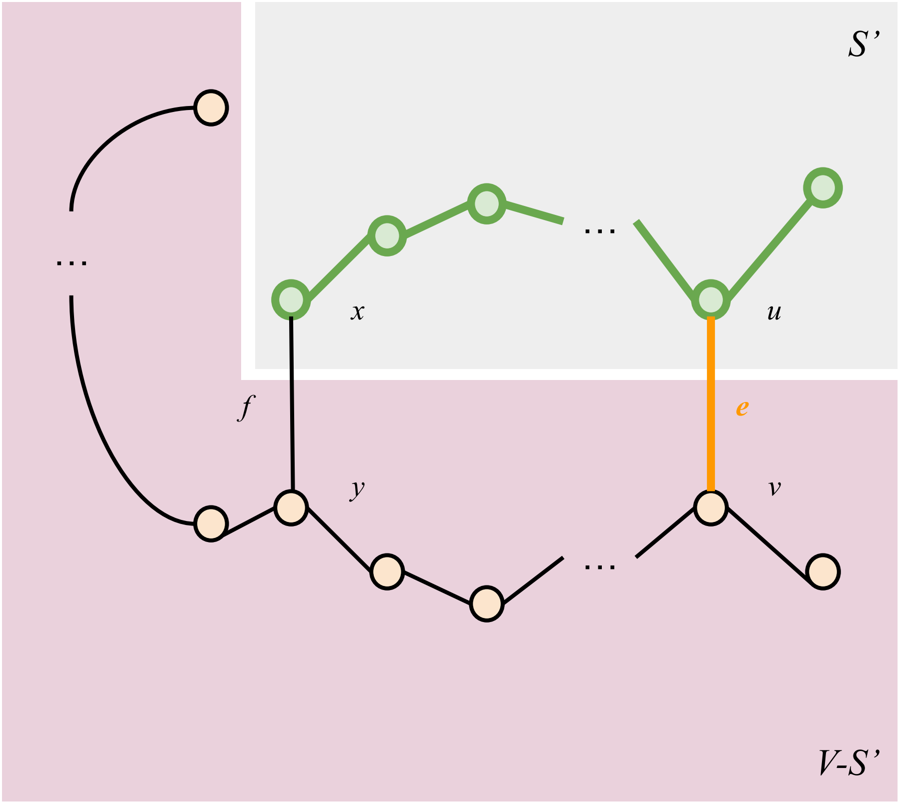
<u>Hipótesis inductiva</u>: $T_{k'}$ es bosque de *AGM* de *G* (INVARIANTE)

<u>Paso inductivo</u>: Agrego $e=(u,v)$ y $w(e)$ es el mínimo de las aristas que cruzan cualquier corte.

Defino S' tq $u \in S'$, y $V\text{-}S'$ tq $v \in V\text{-}S'$

$S = S \cup \{v\}$, $T_S = (V_{S'}, E_{TS'}+e)$

T_S es *AGM* de *S* por propiedad golosa (demo goloso)



Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

Demostración (Correctitud). (Inducción sobre las iteraciones)

Caso base: $S = [s]$

Hipótesis inductiva: $T_{k'}$ es bosque de *AGM* de *G* (INVARIANTE)

Paso inductivo: Agrego $e=(u,v)$ y $w(e)$ es el mínimo de las aristas que cruzan cualquier corte.

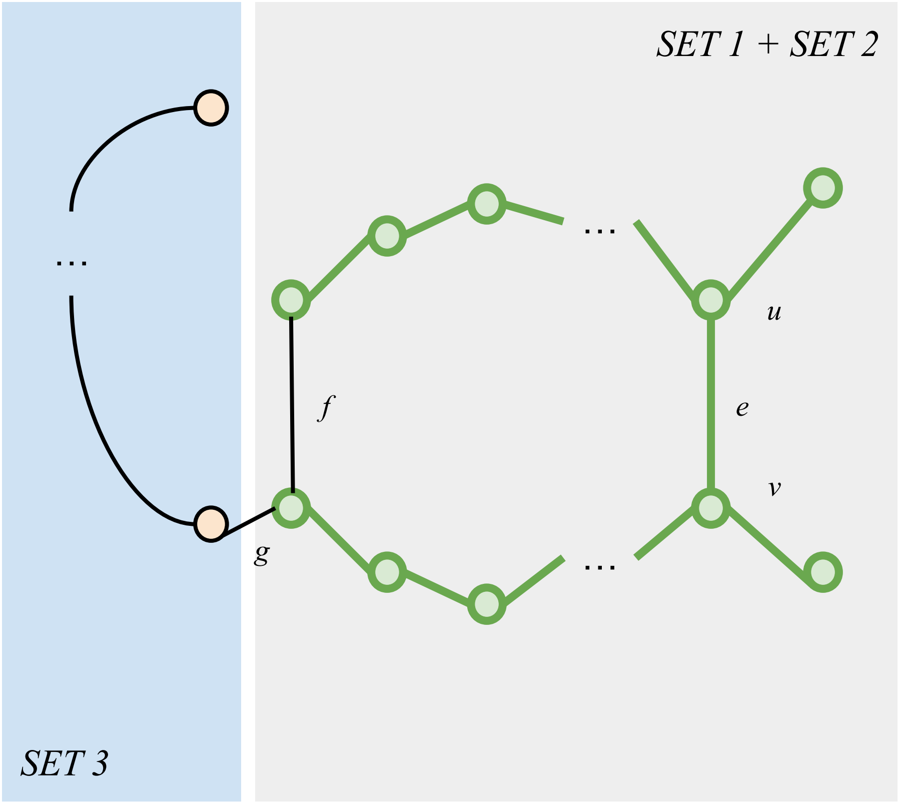
Defino S' tq $u \in S'$, y $V\text{-}S'$ tq $v \in V\text{-}S'$

$S = S \cup \{v\}$

T_S es *AGM* de *S* por propiedad golosa (demo goloso)

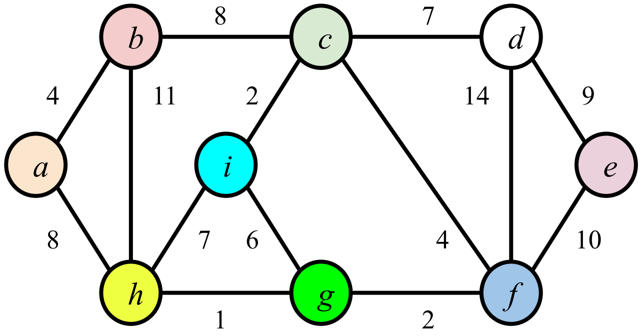
Si $T_{SET\text{-}1} = (V_{SET\text{-}1}, E_{SET\text{-}1})$ era *AGM* de *SET-1* y $T_{SET\text{-}2} = (V_{SET\text{-}2}, E_{SET\text{-}2})$ era *AGM* de *SET-2* $\Rightarrow$

$T = (V_{SET\text{-}1}+V_{SET\text{-}2}, E_{SET\text{-}1}+\{e\}+E_{SET\text{-}2})$ era *AGM*



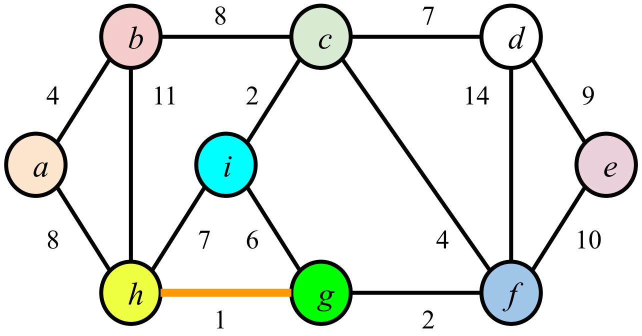
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



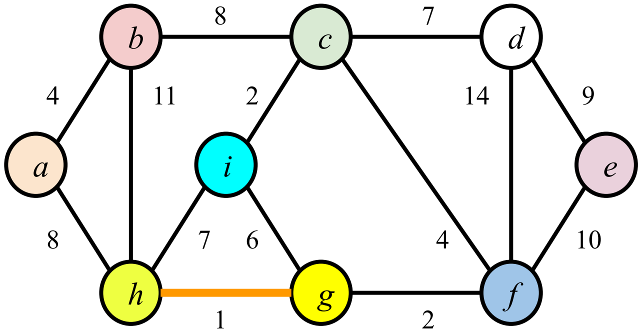
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



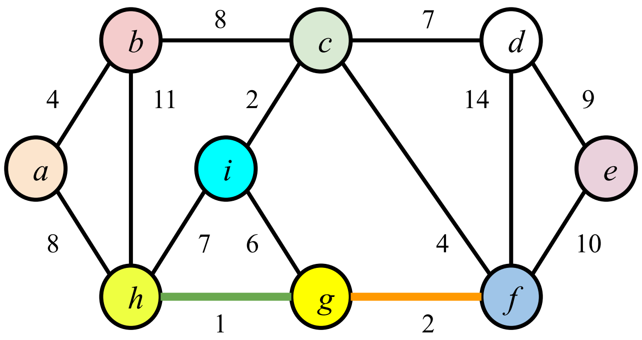
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



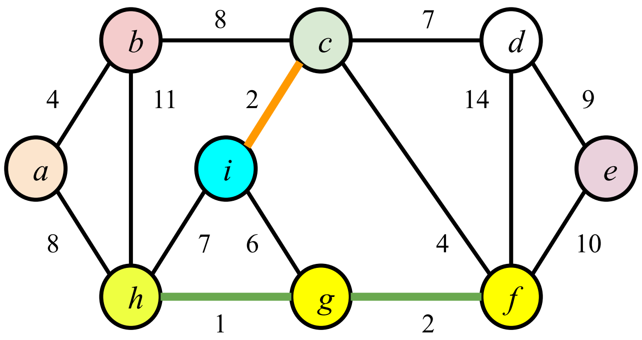
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



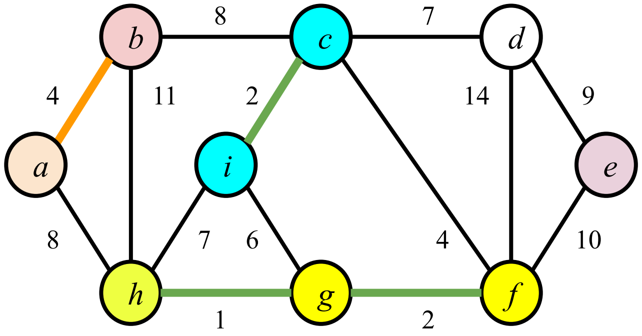
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



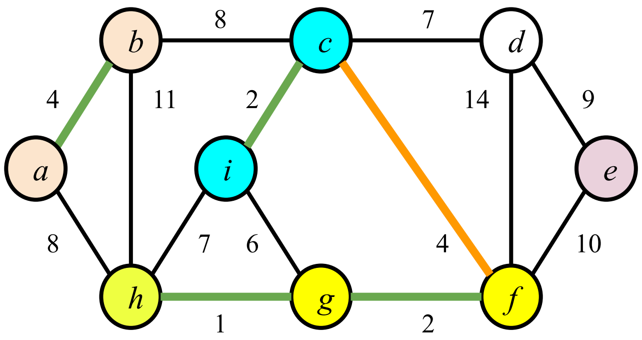
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



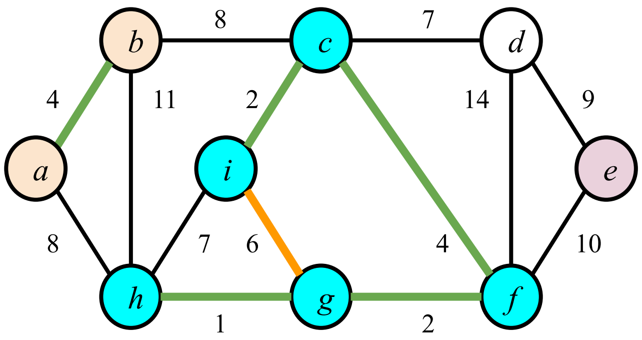
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



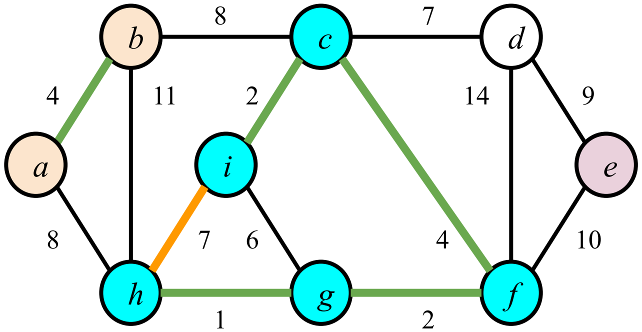
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



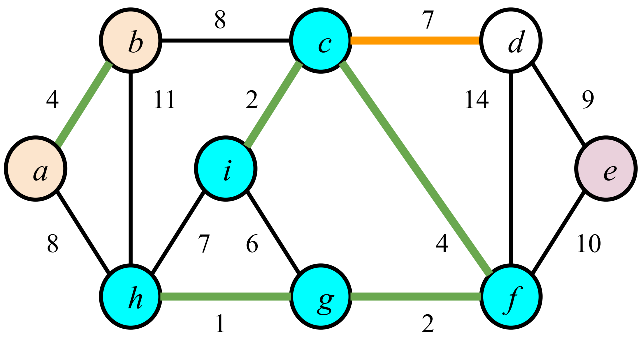
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



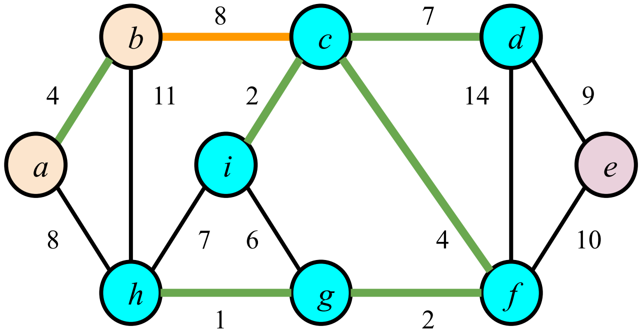
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



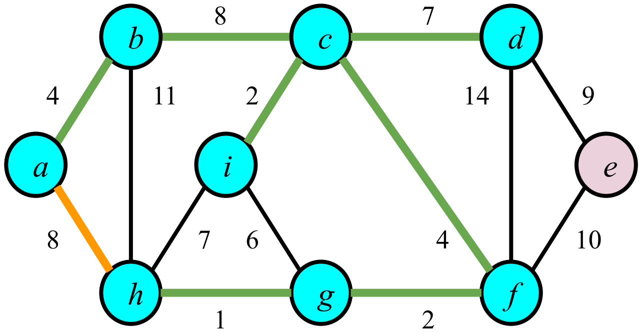
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|    A = ∅
|    for u in G.V:
|    |    MAKE-SET( u )
|    ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|    for e in G.E: # en orden de w
|    |    if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|    |    |    A = A ∪ {e}
|    |    |    UNION(u,v)
```



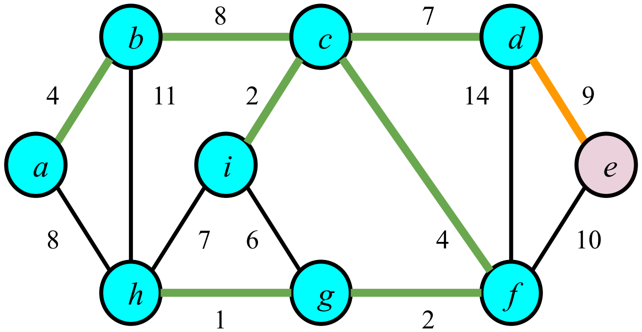
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



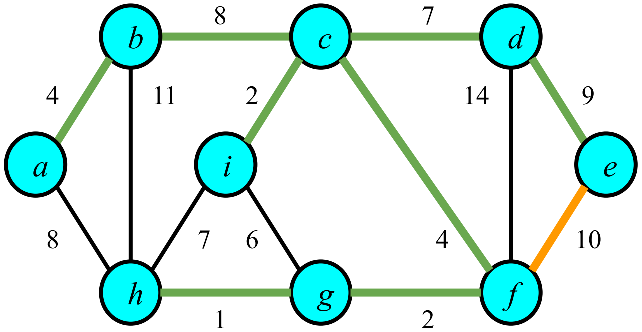
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



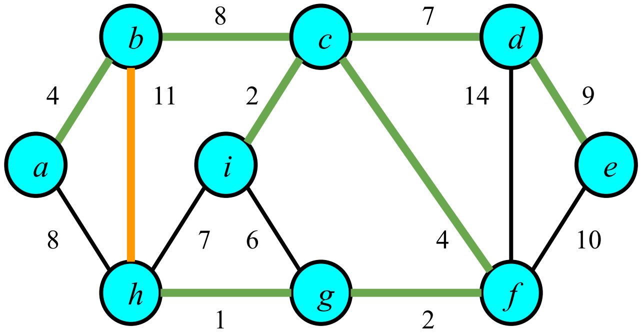
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



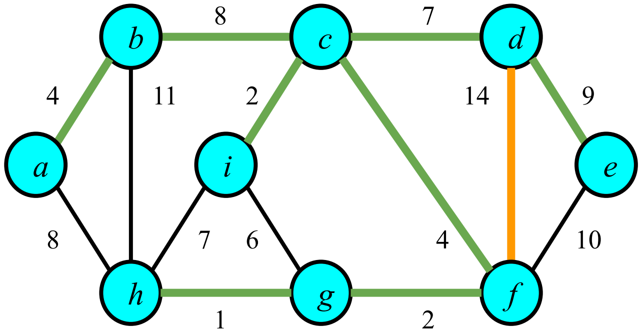
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```



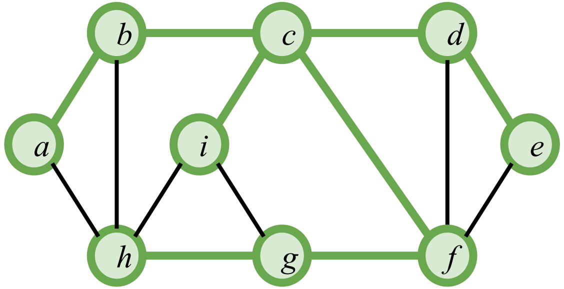
Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

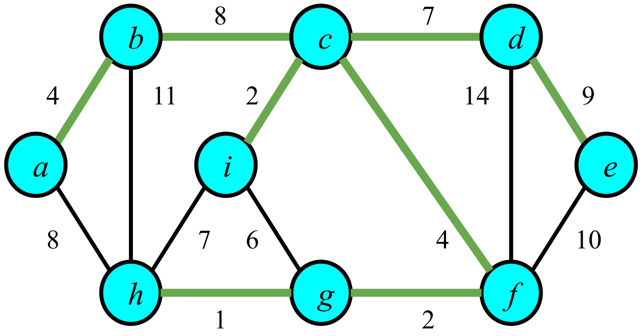
```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```

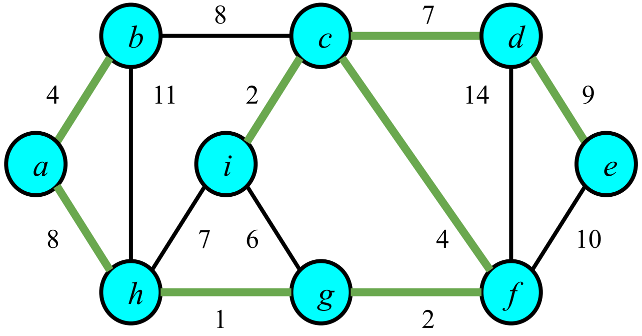


Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = ∅
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)
```







Kruskal (1956; versión CLRS cap. 21)

```
KRUSKAL ( G ) :
|     A = Ø
|     for u in G.V:
|     |     MAKE-SET( u )  O( 1 )
|     ORDENAR E de menor a mayor por w(e)   O( sort(E) )
|     for e in G.E: # en orden de w
|     |     if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v): # para e=(u,v)
|     |     |     A = A ∪ {e}
|     |     |     UNION(u,v)   O( α (V) )
```

$O(V)$

$O(E * \alpha(V))$

$O(V + sort(E) + E * \alpha(V)) \sim O(sort(E) + E * \log(V))$