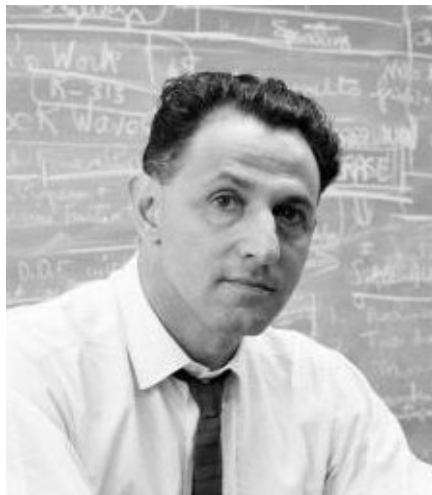


Algoritmos y Estructuras de Datos III

Segundo cuatrimestre 2022

Técnicas de diseño de algoritmos

Programación dinámica



Richard Bellman (1920–1984)

Programación dinámica

I spent the Fall quarter [of 1950] at RAND. My first task was to find a name for multistage decision processes. (...) The 1950s were not good years for mathematical research. We had a very interesting gentleman in Washington named [Charles Ewan] Wilson. He was Secretary of Defense, and he actually had a pathological fear and hatred of the word “research”. (...) Hence, I felt I had to do something to shield Wilson and the Air Force from the fact that I was really doing mathematics inside the RAND Corporation. What title, what name, could I choose? In the first place I was interested in planning, in decision making, in thinking. But planning, is not a good word for various reasons. I decided therefore to use the word “programming”. I wanted to get across the idea that this was dynamic, this was multistage, this was time-varying. I thought, let’s kill two birds with one stone. Let’s take a word that has an absolutely precise meaning, namely dynamic, in the classical physical sense. It also has a very interesting property as an adjective, and that is it’s impossible to use the word dynamic in a pejorative sense. Try thinking of some combination that will possibly give it a pejorative meaning. It’s impossible. Thus, I thought dynamic programming was a good name. It was something not even a Congressman could object to. So I used it as an umbrella for my activities.

—Richard Bellman, Eye of the Hurricane: An Autobiography (1984)

Programación dinámica

- ▶ Al igual que *divide and conquer*, se divide el problema en subproblemas de tamaños menores que se resuelven recursivamente.
- ▶ **Ejemplo.** Cálculo de **coeficientes binomiales**. Si $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$, definimos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- ▶ No es buena idea computar esta definición (¿por qué?).
- ▶ **Teorema.** Si $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$, entonces

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ o } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{si } 0 < k < n \end{cases}$$

Programación dinámica

Tampoco es buena idea implementar un **algoritmo recursivo directo** basado en esta fórmula (¿por qué?).

```
algoritmo combinatorio( $n, k$ )  
  entrada: dos enteros  $n$  y  $k$   
  salida:  $\binom{n}{k}$   
  
  si  $k = 0$  o  $k = n$  hacer  
    retornar 1  
  si no  
     $a := \text{combinatorio}(n - 1, k - 1)$   
     $b := \text{combinatorio}(n - 1, k)$   
    retornar  $a + b$   
fin si
```

Programación dinámica

- ▶ **Superposición de estados:** El árbol de llamadas recursivas resuelve el mismo problema varias veces.
 1. Alternativamente, podemos decir que se realizan muchas veces llamadas a la función recursiva con los mismos parámetros.
- ▶ Un algoritmo de programación dinámica evita estas repeticiones con alguno de estos dos esquemas:
 1. **Enfoque top-down.** Se implementa recursivamente, pero se guarda el resultado de cada llamada recursiva en una estructura de datos (**memoización**). Si una llamada recursiva se repite, se toma el resultado de esta estructura.
 2. **Enfoque bottom-up.** Resolvemos primero los subproblemas más pequeños y guardamos (habitualmente en una tabla) todos los resultados.

Ejemplo: Cálculo de coeficientes binomiales

	0	1	2	3	4	...	$k-1$	k
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
\vdots	\vdots					\ddots		
$k-1$	1						1	
k	1							1
\vdots	\vdots							
$n-1$	1							
n	1							

Ejemplo: Cálculo de coeficientes binomiales

algoritmo *combinatorio*(n, k)

entrada: dos enteros n y k

salida: $\binom{n}{k}$

para $i = 1$ **hasta** n **hacer**

$A[i][0] \leftarrow 1$

fin para

para $j = 0$ **hasta** k **hacer**

$A[j][j] \leftarrow 1$

fin para

para $i = 2$ **hasta** n **hacer**

para $j = 2$ **hasta** $\min(i - 1, k)$ **hacer**

$A[i][j] \leftarrow A[i - 1][j - 1] + A[i - 1][j]$

fin para

fin para

retornar $A[n][k]$

Ejemplo: Cálculo de coeficientes binomiales

- ▶ Función recursiva:
 - ▶ Complejidad $\Omega(\binom{n}{k})$.
- ▶ Programación dinámica (bottom-up):
 - ▶ Complejidad $O(nk)$.
 - ▶ Espacio $\Theta(k)$: sólo necesitamos almacenar la fila anterior de la que estamos calculando.

El problema de la mochila

Datos de entrada:

- ▶ Capacidad $C \in \mathbb{Z}_+$ de la mochila (peso máximo).
- ▶ Cantidad $n \in \mathbb{Z}_+$ de objetos.
- ▶ Peso $p_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ del objeto i , para $i = 1, \dots, n$.
- ▶ Beneficio $b_i \in \mathbb{Z}_+$ del objeto i , para $i = 1, \dots, n$.

Problema: Determinar qué objetos debemos incluir en la mochila sin excedernos del peso máximo C , de modo tal de **maximizar** el beneficio total entre los objetos seleccionados.

El problema de la mochila

- Definimos $m(k, D)$ = valor óptimo del problema con los primeros k objetos y una mochila de capacidad D .
- Podemos representar los valores de este parámetro en una tabla de dos dimensiones:

m	0	1	2	3	4	...	C
0	0	0	0	0	0	...	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
⋮	⋮						
n	0						

$m(k, D)$

$m(n, C)$

El problema de la mochila

- Sea $S^* \subseteq \{1, \dots, k\}$ una solución óptima para la instancia (k, D) .

$$\text{► } m(k, D) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } D = 0 \\ m(k-1, D) & \text{si } k \notin S^* \\ b_k + m(k-1, D - p_k) & \text{si } k \in S^* \end{cases}$$

- Definimos entonces:

1. $m(k, D) := 0$, si $k = 0$.
2. $m(k, D) := m(k-1, D)$, si $k > 0$ y $p_k > D$.
3. $m(k, D) := \max\{m(k-1, D), b_k + m(k-1, D - p_k)\}$, en caso contrario.

- **Teorema.** $m(n, C)$ es el valor óptimo para esta instancia del problema de la mochila.

El problema de la mochila

- Sea $S^* \subseteq \{1, \dots, k\}$ una solución óptima para la instancia (k, D) .

$$\text{► } m(k, D) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } D = 0 \\ m(k-1, D) & \text{si } k \notin S^* \\ b_k + m(k-1, D - p_k) & \text{si } k \in S^* \end{cases}$$

- Definimos entonces:

1. $m(k, D) := 0$, si $k = 0$.
2. $m(k, D) := m(k-1, D)$, si $k > 0$ y $p_k > D$.
3. $m(k, D) := \max\{\underbrace{m(k-1, D)}_{(1)}, \underbrace{b_k + m(k-1, D - p_k)}_{(2)}\}, \dots$

- **Teorema.** $m(n, C)$ es el valor óptimo para esta instancia del problema de la mochila.

El problema de la mochila

- ▶ ¿Cuál es la complejidad computacional de este algoritmo?
 1. Supongamos que la tabla se representa con una matriz en memoria, de modo tal que cada acceso y modificación es $O(1)$.
- ▶ Si debemos completar $(n + 1)(C + 1)$ entradas de la matriz, y cada entrada se completa en $O(1)$, entonces la complejidad del procedimiento completo es $O(nC)$ (?).
- ▶ **Algoritmo pseudopolinomial:** Su tiempo de ejecución está acotado por un polinomio en los **valores numéricos** del input, en lugar de un polinomio en la longitud del input.

El problema de la mochila

- ▶ El cálculo de $m(k, D)$ proporciona el **valor óptimo**, pero no la **solución óptima**.
- ▶ Si necesitamos el conjunto de objetos que realiza el valor óptimo, debemos **reconstruir la solución**.

	...	$D - p_k$...	D	...
⋮					
$k - 1$		$m(k - 1, D - p_k)$...	$m(k - 1, D)$	
k				$m(k, D)$	
⋮					

Ejemplo: El problema del cambio

- ▶ Supongamos que queremos dar el vuelto a un cliente usando el mínimo número de monedas posibles, utilizando monedas de 1, 5, 10 y 25 centavos. Por ejemplo, si el monto es \$0,69, deberemos entregar 8 monedas: 2 monedas de 25 centavos, una de 10 centavos, una de 5 centavos y cuatro de un centavo.
- ▶ **Problema.** Dadas las denominaciones $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}_+$ de monedas (con $a_i > a_{i+1}$ para $i = 1, \dots, k-1$) y un objetivo $t \in \mathbb{Z}_+$, encontrar $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}_+$ tales que

$$t = \sum_{i=1}^k x_i a_i$$

minimizando $x_1 + \dots + x_k$.

Ejemplo: El problema del cambio

- ▶ $f(s)$: Cantidad mínima de monedas para entregar s centavos, para $s = 0, \dots, t$.

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0 \\ \min_{i: a_i \leq s} 1 + f(s - a_i) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- ▶ **Teorema.** $f(s)$ es el valor óptimo del problema del cambio para entregar s centavos.
- ▶ ¿Cómo conviene implementar esta recursión?

Programación dinámica - Subsecuencia común más larga

- ▶ Dada una secuencia A , una **subsecuencia** se obtiene eliminando cero o más símbolos de A .
 1. Por ejemplo, $[4, 7, 2, 3]$ y $[7, 5]$ son subsecuencias de $A = [4, 7, 8, 2, 5, 3]$, pero $[2, 7]$ no lo es.
- ▶ **Problema.** Encontrar la **subsecuencia común mas larga** (scml) de dos secuencias dadas.
- ▶ Es decir, dadas dos secuencias A y B , queremos encontrar la mayor secuencia que es tanto subsecuencia de A como de B .
- ▶ Por ejemplo, si $A = [9, 5, 2, 8, 7, 3, 1, 6, 4]$ y $B = [2, 9, 3, 5, 8, 7, 4, 1, 6]$ las scml es $[9, 5, 8, 7, 1, 6]$.
- ▶ ¿Cómo es un algoritmo de fuerza bruta para este problema?

Programación dinámica - Subsecuencia común más larga

Dadas las dos secuencias $A = [a_1, \dots, a_r]$ y $B = [b_1, \dots, b_s]$, consideremos dos casos:

- ▶ $a_r = b_s$: La scml entre A y B se obtiene colocando al final de la scml entre $[a_1, \dots, a_{r-1}]$ y $[b_1, \dots, b_{s-1}]$ al elemento $a_r (= b_s)$.
- ▶ $a_r \neq b_s$: La scml entre A y B será la más larga entre estas dos opciones:
 1. la scml entre $[a_1, \dots, a_{r-1}]$ y $[b_1, \dots, b_s]$,
 2. la scml entre $[a_1, \dots, a_r]$ y $[b_1, \dots, b_{s-1}]$.

Es decir, calculamos el problema aplicado a $[a_1, \dots, a_{r-1}]$ y $[b_1, \dots, b_s]$ y, por otro lado, el problema aplicado a $[a_1, \dots, a_r]$ y $[b_1, \dots, b_{s-1}]$, y nos quedamos con la más larga de ambas.

Programación dinámica - Subsecuencia común más larga

Esta forma recursiva de resolver el problema ya nos conduce al algoritmo.

Si llamamos $l[i][j]$ a la longitud de la scml entre $[a_1, \dots, a_i]$ y $[b_1, \dots, b_j]$, entonces:

- ▶ $l[0][0] = 0$
- ▶ Para $j = 1, \dots, s$, $l[0][j] = 0$
- ▶ Para $i = 1, \dots, r$, $l[i][0] = 0$
- ▶ Para $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$
 - ▶ si $a_i = b_j$: $l[i][j] = l[i-1][j-1] + 1$
 - ▶ si $a_i \neq b_j$: $l[i][j] = \max\{l[i-1][j], l[i][j-1]\}$

Y la solución del problema será $l[r][s]$.

Programación dinámica - Subsecuencia común más larga

scml(*A*, *B*)

entrada: *A*, *B* secuencias

salida: longitud de la *scml* entre *A* y *B*

$l[0][0] \leftarrow 0$

para $i = 1$ **hasta** r **hacer** $l[i][0] \leftarrow 0$

para $j = 1$ **hasta** s **hacer** $l[0][j] \leftarrow 0$

para $i = 1$ **hasta** r **hacer**

para $j = 1$ **hasta** s **hacer**

si $A[i] = B[j]$

$l[i][j] \leftarrow l[i-1][j-1] + 1$

sino

$l[i][j] \leftarrow \max\{l[i-1][j], l[i][j-1]\}$

fin si

fin para

fin para

retornar $l[r][s]$