École Centrale Lyon

Méthodes numériques pour les EDP

BE 1 - Différences finies pour les problèmes linéaires

Élèves :
Valentin Messina
Eloi Munoz

Enseignant :
Abdel-Malik Zine
Grégory Vial

3 novembre 2023

1 Équation elliptique en dimension 1

On rappelle le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + xu(x) = f(x) \quad \text{pour } x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

1. L'approximation par différences finies standards (développements de Taylor) du problème conduit à l'équation suivante $\frac{1}{\Delta x^2}\big(-U_{j-1} + (2 + j\Delta x^3)U_j - U_{j+1}\big) = f(x_j)$. Avec les notations de l'énoncé, le système correspondant s'écrit donc $\dfrac{1}{\Delta x^2}AU = B$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} 2+1\Delta x^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+2\Delta x^2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2+3\Delta x^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2+N\Delta x^2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}$$

On peut tracer la solution appprochée pour $N = 1000$.

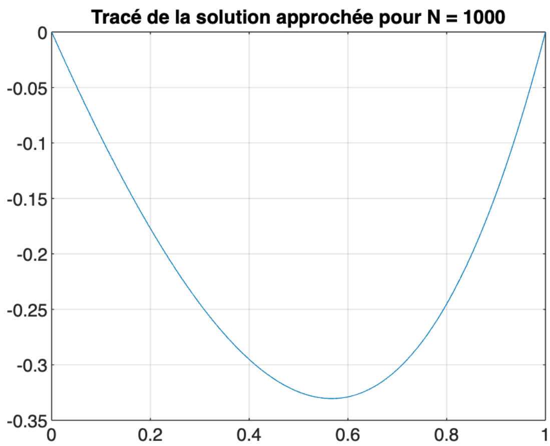
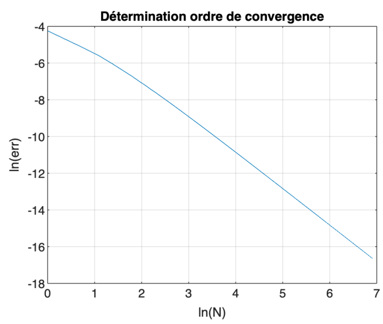


Figure 1 – Solution approchée

2. Pour trouver l'ordre de convergence, on trace $\ln(erreur)$ en fonction de $\ln(N)$. On fait ensuite une régression linéaire pour trouver la pente de cette droite qui est bien environ égale à 2.




```
ordre = 1.9629
```

Figure 2 – Ordre de convergence de la méthode

2 Schémas pour l'équation de la chaleur en dimension1

3. On étudie l'ordre de consistance et on trouve $\theta = 0.5$

4. La matrice carrée L de dimension $N+2$ de discrétisation du laplacien 1D avec conditions de Neumann homogènes est égale à :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. En appliquant le schéma numérique de l'énoncé, il vient $A_\theta U^{n+1} = B_\theta U^n$ avec

$$A_\theta = \frac{1}{\Delta t} I_{N+2} + \frac{\theta}{\Delta x^2} L \qquad B_\theta = \frac{1}{\Delta t} I_{N+2} - \frac{1-\theta}{\Delta x^2} L$$

On le programme avec la condition initiale $u_0(x) = x(1-x)$. On cherche à évaluer sa stabilité asymptotique conditionnelle ou inconditionnelle du schéma selon les valeurs de θ en faisant des tests avec différentes valeurs de Δt et Δx.

On voit que le schéma diverge inconditionnellement pour des valeurs de $\theta < 0.5$.

Le schéma donne des résultats peu probants pour des valeurs de Δt faibles. En prenant Δt et Δx de l'ordre de $1/1000$, on arrive à une convergence.

6. On considère désormais le problème stationnaire :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans }]0,1[\\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

avec $f(x) = (1+\pi^2)\cos(\pi x)$ de solution exacte $u(x) = \cos(\pi x)$. On peut tracer la solution appprochée pour $N = 100$.

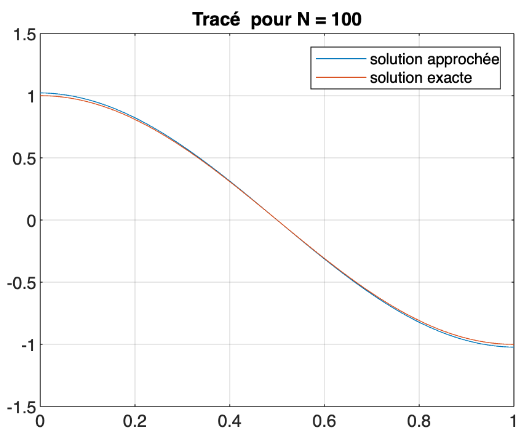
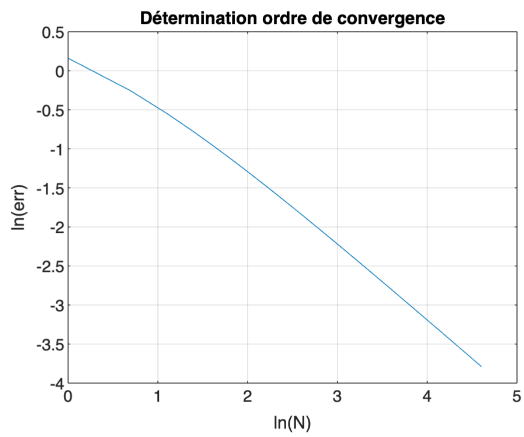


FIGURE 3 – Solution approchée



ordre = 0.9265

FIGURE 4 – Ordre de convergence

Pour trouver l'ordre de convergence, on trace $\ln(erreur)$ en fonction de $\ln(N)$. On fait ensuite une régression linéaire pour trouver la pente de cette droite qui est bien environ égale à 1.

7. On cherche à améliorer l'ordre de convergence en changeant la prise en compte des conditions de Neumann. On développe au premier ordre la condtion aux limites $u'(0) = u'(1) = 0$ ce qui donne $\frac{U_0 - U_{-1}}{\Delta t} = \frac{U_{N+2} - U_{N-1}}{\Delta t} = 0$. Au lieu de prendre $U_0 = U_{-1}$ et $U_{N+2} = U_{N-1}$ comme précdemment, on développe au second ordre. Ainsi,

$$u(0 + \Delta t) = u(0) + hu'(0) + \frac{\Delta t^2}{2} u''(0) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Avec l'approximation du laplacien à 3 points, les condtions aux limites deviennent donc $U_1 = U_{-1}$ et $U_{N+2} = U_N$. On remplace alors la matrice L par L_2 (`lap_neu2.m` sur le code Matlab) et on modifie les valeurs extrêmes du vecteur B pour satisfaire les nouvelles conditions aux limites.

Enfin, pour trouver l'ordre de convergence, on trace $\ln(erreur)$ en fonction de $\ln(N)$. On fait ensuite une régression linéaire pour trouver la pente de cette droite qui est bien environ égale à 2.

3 Décentrement pour l'équation de transport linéaire en dimension 1

8. On considère le problème d'advection à vitesse variable. On a alors, pour chaque schéma, les matrices de discrétisation suivantes :

$$A_{centre} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{\text{gauche}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{droite} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalement, on a : $U_{n+1} = BU_n$ avec $B = (I + \Delta t\,(1 + \sin(\alpha k \Delta t))\,A)$, en remplaçant A par A_{centre}, A_{gauche} ou A_{droite} selon le schéma utilisé.

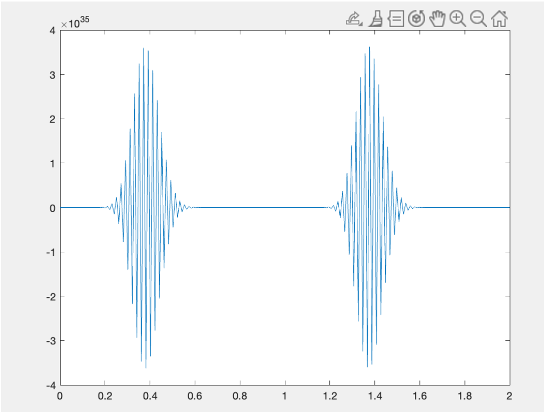


FIGURE 5 – Schéma décentré à droite

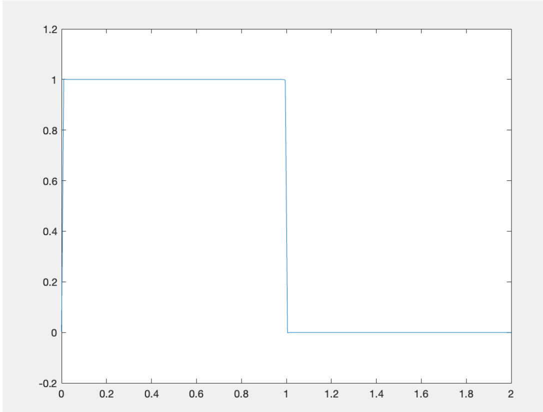


FIGURE 6 – Schéma centré

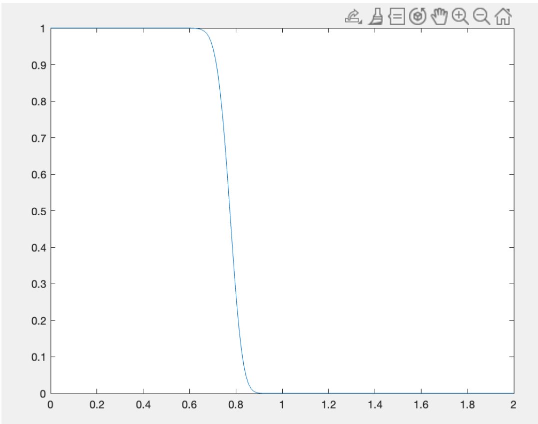


FIGURE 7 – Schéma décentré à gauche

On remarque que le décentrement à gauche est le seul pour lequel le schéma est stable.