Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

## Colle 2A : *Relations binaires, ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$, applications*

**Question de cours :** Démontrer que toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

**Exercice 1 :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!], a_i \in [1,+\infty[$. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \leqslant 2^{n-1}\left(1+\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$.

**Exercice 2 :**

Soit $f : E \to E$ une application. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f^n$ désigne la composée $n$-ème de $f$ définie par récurrence par $f^0 = Id_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f \circ f^k$. Soit $A \subset E, A_n = f^n(A)$ et $B = \displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

1. Montrer que $B$ est stable par $f$ c'est-à-dire que $f(B) \subset B$.
2. Montrer que $B$ est la plus petite partie de $E$ stable par $f$ et contenant $A$.

**Exercice 3 :**

On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $u \sim v$ si $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p,q \geqslant n, u_p \leqslant v_n$ et $v_q \leqslant u_n$. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

---

Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

## Colle 2B : *Relations binaires, ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$, applications*

**Question de cours :** Définition de la partie entière. Preuve de l'existence et de l'unicité.

**Exercice 1 :**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1$.

**Exercice 2 :**

Soit $f : E \to E$. Montrer que $f$ est injective si, et seulement si, pour toutes parties $A$ et $B$ de $E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

**Exercice 3 :**

Soit $A$ une partie d'un ensemble $E$. On appelle fonction caractéristique, ou fonction indicatrice, de $A$ l'application $\chi_A : E \to \{0,1\}$ définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

Soit $A$ et $B$ deux parties de $E$ et $\chi_A$ et $\chi_B$ leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1 - \chi_A$
2. $\chi_A \chi_B$
3. $\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$

**Exercice 4 :**

Considérons la relation binaire sur $\mathbb{C}$ définie par : $z \vdash z' \iff \exists n \in \mathbb{N}, z' = z^{2^n}$.

1. La relation $\vdash$ est-elle une relation d'ordre ?
2. Reprendre la question précédente en définissant $\vdash$ sur $\mathbb{R}$.

Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

## Colle 2C : *Relations binaires, ensembles* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{N}$*, applications*

**Question de cours :** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$.

**Exercice 1 :**

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $u_k$ le plus grand diviseur impair de $k$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_{n+i} = n^2$.

**Exercice 2 :** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

1. $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

**Exercice 3 : théorème du point fixe de Knaster-Tarsky**

Soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ croissante pour l'inclusion. Montrer qu'il existe une partie $X$ de $E$ qui vérifie $f(X) = X$.