Valentin Messina | Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 8A : *Espaces vectoriels*

Question de cours :
Définition de la limite d'une suite. Dans le cas où la limite est finie, prouver l'unicité de la limite.

Exercice 1 :
Soit E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $\Phi : (x, y) \mapsto \big(x, y - u(x)\big)$ est un automorphisme de $E \times F$.

Exercice 2 : Noyaux itérés
Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la suite $(\text{Ker } u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
2. Montrer que la suite $(\text{Im } u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
3. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$ ssi $\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0_E\}$.
4. Montrer que $\text{Im } u = \text{Im } u^2$ ssi $E = \text{Ker } u + \text{Im } u$.

Exercice 3 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que, dans ce cas, $\text{Im } (p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ et $\text{Ker } (p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Valentin Messina | Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 8B : *Espaces vectoriels*

Question de cours :
Démontrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 1 : Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

1. Montrer que $E = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$.
2. Montrer que $u(\text{Im } v) = \text{Im } u$.

Exercice 2 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p, q deux projecteurs de E tels que $\text{Im } p = \text{Im } q$.
Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est un projecteur de même image que p et q.

Exercice 3 :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On admet que tout sous-espace vectoriel de E et de F admet un supplémentaire.
Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u = v \circ \Phi$ ssi $\text{Ker } \Phi \subset \text{Ker } u$.

Valentin Messina | Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 8C : *Espaces vectoriels*

Question de cours :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2. Si λ et μ sont deux réels, montrer que la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell_1 + \mu\ell_2$.

Exercice 1 :
Soit E, F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $\mathrm{Ker}\ v \oplus \mathrm{Im}\ u = F$.

Exercice 2 :
Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles à valeurs réelles, F le sev de E des fonctions 1-périodiques et G le sev de E des fonctions de limite nulle en $+\infty$.

1. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
2. F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p, q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Ker}\ q$.
Soit alors $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur et trouver son image et son noyau.