Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 17A : *Matrices et applications linéaires, Dérivation*

Question de cours :
Formule de Leibniz.

Exercice 1 :
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$. En déduire que pour tout $n \geqslant 2, M^n = 0$.

Exercice 2 :
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $\gamma \in]a,b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\gamma)$$

Exercice 3 :
Donner une formule simple de la dérivée n-ème de $x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$.

Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 17B : *Matrices et applications linéaires, Dérivation*

Question de cours :
Théorème de Rolle.

Exercice 1 :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Interpéter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 2 :
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une subdivision $(x_1, \ldots, x_n)$ de [0,1] vérifiant $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = 1$

Valentin Messina Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 17C : *Matrices et applications linéaires, Dérivation*

Question de cours :
Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

Exercice 1 :
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $z = x - y$ dans $\mathbb{R}^3$ et d la droite d'équation $x = -y = z$.
Trouver la matrice de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{P}$ parallèlement à d.

Exercice 2 :
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que :

$$f(a) = f'(a) \text{ et } f(b) = f'(b)$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.