Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

## Colle 15A : *Dimension finie*

**Question de cours :**
Formule de Grassmann.

**Exercice 1 :**
Un polynôme trigonométrique de degré au plus $n$ est une fonction :

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big) \end{array}$$

avec $(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. On définit alors $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus $n$.

1. Montrer que $\mathcal{T}_n$ est un espace vectoriel.
2. Soit $T \in \mathcal{T}_n$. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, les intégrales :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)T(x)\mathrm{d}x \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)T(x)\mathrm{d}x$$

3. Montrer que la famille composée des fonctions $x \mapsto \cos(kx)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et des fonctions $x \mapsto \sin(jx)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$ est une base de $\mathcal{T}_n$. En déduire la dimension de $\mathcal{T}_n$.

**Exercice 2 :**
Montrer qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ne contenant que des applications de signe constant est de dimension au plus 1.

---

Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

## Colle 15B : *Dimension finie*

**Question de cours :**
Théorème de la base incomplète.

**Exercice 1 :**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $u \in L(E)$ nilpotent d'indice $p$ et :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ v & \longmapsto & u \circ v - v \circ u \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v \in L(E)$ :

$$\Phi^n(v) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v \circ u^k$$

2. Montrer que $\Phi$ est nilpotente et donner une majoration de son indice de nilpotence.
3. Soit $a \in L(E)$. Montrer qu'il existe $b \in L(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$.
4. En déduire l'indice de nilpotence de $\Phi$.

**Exercice 2 :**
Soit $a_0 < a_1 < \cdots < a_N$ et $E$ l'espace des fonctions continues sur $[a_0, a_N]$ et affines par morceaux pour la subdivision $a_0 < a_1 < \cdots < a_N$.

1. Montrer que $\dim(E) = N + 1$.
2. Déterminer une base de $E$.

Valentin Messina Aux Lazaristes - Maths Sup

## Colle 15C : *Dimension finie*

**Question de cours :**
L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.

**Exercice 1 :**
Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré $n$. On pose, pour tout $i \in [\![0,n]\!], Q_i(X) = Q(X+i)$.

1. Montrer que la famille $(Q, Q', Q'', \cdots, Q^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout forme linéaire $\varphi$ sur $\mathbb{R}_n[X]$, il existe des scalaires $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$\varphi(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P^{(j)}(0)$$
3. Soit $\varphi$ une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(Q_0) = \cdots = \varphi(Q_n) = 0$. Montrer que $\varphi$ est nulle. (Indice : considérer le polynôme $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j Q^{(j)}$)
4. En déduire que la famille $(Q_0, \cdots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**Exercice 2 :**
Soit $u$ et $v$ deux endormorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie. Montrer que :
$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$$

**Exercice 3 :**
Montrer qu'un sous-espace vectoriel $F$ est stable par un endomorphisme $u$ de rang 1 ssi $\mathrm{Im}(u) \subset F$ ou $F \subset \mathrm{Ker}(u)$.