Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 6A : *Équations différentielles*

Question de cours : arctan : définitions, variations, imparité, dérivabilité et graphes.

Exercice 1 :
Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' - y = x + \mathrm{e}^x$.

Exercice 2 :
Résoudre l'équation différentielle : $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ en posant $z(x) = xy$.

Exercice 3 : (Oral X PC)
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{\mathrm{e}}]$.

1. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \alpha f(x+1)$.
2. Si $\alpha = \frac{1}{\mathrm{e}}$, déterminer deux fonctions linéairement indépendantes vérifiant la relation précédente.

Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 6B : *Équations différentielles*

Question de cours : arcsin : définitions, variations, imparité, dérivabilité et graphes.

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' - 3y = 2\mathrm{e}^{3x}$.

Exercice 2 :
Résoudre l'équation différentielle : $(1+\mathrm{e}^x)y'' + 2\mathrm{e}^x y' + (2\mathrm{e}^x + 1)y = x\mathrm{e}^x$ en posant $z(x) = (1+\mathrm{e}^x)y(x)$.

Exercice 3 : (Oral ENS Lyon MP)
Soit l'équation différentielle : $y' = \alpha\sqrt{y} - x$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

1. Discuter de l'existence de solution(s).
2. Trouver une CNS sur α pour qu'il existe a tel que $y(x) = ax^2$ soit solution.
3. On suppose maintenant que $x > 0$. Pour certaines valeurs de α, il y a 2 valeurs de a possibles ($a_1 < a_2$). Si y est solution sur l'intervalle $]0, t[$, montrer que $\dfrac{y(x)}{x^2} \neq a_1$ et $\dfrac{y(x)}{x^2} \neq a_2$.
4. Si y est solution sur $[0, t[$ et telle que pour tout $x > 0$, $\dfrac{y(x)}{x^2} > a_2$, montrer que $y(0) > 0$.

Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 6C : *Équations différentielles*

Question de cours : Énoncé des théorèmes de Cauchy-Lipschitz pour l'ordre 1 et 2.

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 4y' + 4y = x\mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 2 :
Résoudre l'équation différentielle : $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ en posant $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$.

Exercice 3 : (Oral Centrale MP)
Soit l'équation différentielle : $A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = 0$.

1. Si $z(u) = y(\frac{1}{u})$, trouver l'équation différentielle vérifiée par z.
2. Trouver A, B, C tel que $T_n(x) = \cos\big(n\arccos(x)\big)$ soit solution.
3. Trouver l'autre solution.