Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 7A : *Espaces vectoriels*

Question de cours :
Soit E, F deux espaces vectoriels, G un sev de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $f(G)$ est un sev de F.

Exercice 1 :
Soit E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $\Phi : (x,y) \mapsto \big(x, y - u(x)\big)$ est un automorphisme de $E \times F$.

Exercice 2 : Noyaux itérés
Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la suite $(\text{Ker } u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
2. Montrer que la suite $(\text{Im } u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
3. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$ ssi $\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0_E\}$.
4. Montrer que $\text{Im } u = \text{Im } u^2$ ssi $E = \text{Ker } u + \text{Im } u$.

Exercice 3 : (Oral X MP)
Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,G)$. Donner une CNS sur f et g pour qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $g = h \circ f$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E,G)$ et $h \in \mathcal{L}(F,G)$. Donner une CNS sur g et h pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $g = h \circ f$.

Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 7B : *Espaces vectoriels*

Question de cours :
Soit E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que f est injective ssi $\text{Ker}(F) = \{0\}$.

Exercice 1 : Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

1. Montrer que $E = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$.
2. Montrer que $u(\text{Im } v) = \text{Im } u$.

Exercice 2 :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On admet que tout sous-espace vectoriel de E et de F admet un supplémentaire.
Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $u = v \circ \Phi$ ssi $\text{Ker } \Phi \subset \text{Ker } u$.

Exercice 3 : (Oral X MP)
Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,G)$. Donner une CNS sur f et g pour qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $g = h \circ f$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E,G)$ et $h \in \mathcal{L}(F,G)$. Donner une CNS sur g et h pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $g = h \circ f$.

Valentin Messina Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 7C : *Espaces vectoriels*

Question de cours :
Montrer que A et B sont en somme directe ssi $A \cap B = \{0\}$. Donner la définiton de deux sous-espaces supplémentaires et donner des méthodes de preuve pour montrer la supplémentarité.

Exercice 1 :
Soit E, F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $\mathrm{Ker}\ v \oplus \mathrm{Im}\ u = F$.

Exercice 2 :
Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles à valeurs réelles, F le sev de E des fonctions 1-périodiques et G le sev de E des fonctions de limite nulle en $+\infty$.

1. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
2. F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3 : (Oral X MP)
Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Donner une CNS sur f et g pour qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $g = h \circ f$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E, G)$ et $h \in \mathcal{L}(F, G)$. Donner une CNS sur g et h pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $g = h \circ f$.