Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 5A : *Fonctions usuelles*

Question de cours : cosh, sinh et tanh : définitions, dérivabilités, graphes et formules de bases.

Exercice 1 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n - 1}\right)$.

Exercice 2 : Soit $x \in [-1, 1]$. Simplifier l'expression suivante :

$$f(x) = \cos\big(\arccos(x) - \arcsin(x)\big) - \sin\big(\arccos(x) - \arcsin(x)\big)$$

Exercice 3 :
Étudier et tracer $f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2}\exp\big(\arcsin(x)\big) \end{array}$

Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 5B : *Fonctions usuelles*

Question de cours : ln : inégalité classique et limites classiques. Démontrer l'inégalité.

Exercice 1 : Résoudre l'équation : $3^x + 4^x = 5^x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Formule de Machin
Démontrer que :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{129}\right)$$

Exercice 3 : Polynômes de Tchebychev
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les fonctions $T_n : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos\big(n\arccos(x)\big) \end{array}$ et $U_n : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin\big(n\arccos(x)\big)}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$

Montrer que T_n et U_n sont des fonctions polynomiales.

Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 5C : *Fonctions usuelles*

Question de cours : exp : inégalité classique et limites classiques. Démontrer l'inégalité.

Exercice 1 : On considère l'application $f : \begin{array}{rcl}]-\pi,\pi[\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(3x)-\sin(2x)}{\sin(x)} \end{array}$

1. Montrer que f admet un prolongement continu g à $]-\pi,\pi[$ et exprimer g (sans fraction).
2. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

Exercice 2 :

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\arctan(p+1)-\arctan(p)$.
2. En déduire la convergence et la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$$

.

Exercice 3 :
Trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la quantité $\sqrt[n]{n}$ soit maximale.