Valentin Messina Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 3A : *Compléments d'analyse*

Question de cours : Définitions de la parité, périodicité d'une fonction.

Exercice 1 :
Calculer une primitive de $x \mapsto \sqrt{x^2\sqrt{x}+x}$.

Exercice 2 :
On considère la fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
2. Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et que $\forall x \in J$, $0 < (f^{-1})'(x) < 1$.
3. Calculer f^{-1}.

Exercice 3 :
Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.
2. On suppose maintenant que : $\forall x \in [a, b], g(x) < f(x)$. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in [a, b], g(x) + \alpha \leqslant f(x)$.

Valentin Messina Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 3B : *Compléments d'analyse*

Question de cours : Définition d'une fonction dérivable en un point et du nombre dérivé.

Exercice 1 : Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x + 1}}$.

Exercice 2 : fonctions de Lambert
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

1. Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ vers l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.
2. La réciproque de f est désormais notée W. Justifier que W est dérivable sur l'intervalle $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ et que pour tout $x \neq 0$ on a :
$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}$$

Exercice 3 :
Déterminer toutes les fonctions f continues en 0 et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)e^x$.

Valentin Messina Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 3C : *Compléments d'analyse*

Question de cours : Énoncé du théorème d'intégration par parties.

Exercice 1 :
Calculer une primitive de $x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x \sin(x)$.

Exercice 2 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^3 + t$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. On note g la réciproque de f. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g^3(x) + g(x) = x$$

3. Donner l'expression de g'.
4. Tracer g.

Exercice 3 :

1. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.
2. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$. On suppose que f et g commutent, *i.e.* que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.