Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 9A : *Suites*

Question de cours :
Théorème des gendarmes.

Exercice 1 :
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$.

Exercice 2 : Irrationalité de e
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites réelles définies pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. On notera e leur limite commune.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$n!u_n < n!\mathrm{e} < n!u_n + \frac{1}{n}$$

3. En déduire que e est irrationel.

Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 9B : *Suites*

Question de cours :
Théorème de la limite montone.

Exercice 1 :
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.

Exercice 2 : Suites de Cauchy
On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout entiers $p, q \geqslant N$, on a :

$$|u_p - u_q| < \varepsilon$$

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. On s'intéresse à la réciproque de la proposition précédente. Soit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 3 : Lemme de Fekete
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite positive telle pour tous entiers m et n, on ait :

$$u_{m+n} \leqslant u_m + u_n$$

Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell = \inf\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

Valentin Messina — Aux Lazaristes - Maths Sup

Colle 9C : *Suites*

Question de cours :
Démontrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1 : Somme harmonique

On définit la suite réelle $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$. En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
2. Montrer que $\left(\dfrac{H_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
3. Montrer que $\big(H_n - \ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner un encadrement d'amplitude $\frac{1}{10}$ de sa limite γ.

Exercice 2 : Théorème de Césaro
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite réelle $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. (Indication : commencer par le cas $\ell = 0$)
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Application : déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)^{k/n}$.