# Double Pendule

Approche Lagrangienne (Energies)

Valentin Monod

# 1 Configuration du Système

## 1.1 Paramètres

- Masse du premier pendule : $m_1$ [kg]
- Masse du deuxième pendule : $m_2$ [kg]
- Longueur de la première tige : $L_1$ [m]
- Longueur de la deuxième tige : $L_2$ [m]
- Accélération gravitationnelle : $g = 9{,}81$ [m/s]

## 1.2 Coordonnées Généralisées

- $\theta_1$ : angle du premier pendule avec la verticale (positif dans le sens horaire)
- $\theta_2$ : angle du deuxième pendule avec la verticale (positif dans le sens horaire)
- $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ : angle relatif entre les deux tiges

## 1.3 Conversion Angles → Positions Cartésiennes

Position de la masse $m_1$ :

$$x_1 = L_1 \sin(\theta_1) \tag{1}$$
$$y_1 = -L_1 \cos(\theta_1) \tag{2}$$

Position de la masse $m_2$ :

$$x_2 = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2) \tag{3}$$
$$y_2 = -L_1 \cos(\theta_1) - L_2 \cos(\theta_2) \tag{4}$$

# 2 Vitesses

## 2.1 Dérivées des Positions

Vitesse de $m_1$ :

$$\dot{x}_1 = L_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \tag{5}$$
$$\dot{y}_1 = L_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \tag{6}$$

Vitesse de $m_2$ :

$$\dot{x}_2 = L_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + L_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \tag{7}$$
$$\dot{y}_2 = L_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + L_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \tag{8}$$

## 2.2 Normes des Vitesses

Vitesse au carré de $m_1$ :

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = L_1^2\dot{\theta}_1^2 \tag{9}$$

Vitesse au carré de $m_2$ :

$$v_2^2 = L_1^2\dot{\theta}_1^2 + L_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\Delta\theta) \tag{10}$$

# 3 Énergies

## 3.1 Énergie Cinétique

Énergie cinétique de $m_1$ :

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1L_1^2\dot{\theta}_1^2 \tag{11}$$

Énergie cinétique de $m_2$ :

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2 \left[L_1^2\dot{\theta}_1^2 + L_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\Delta\theta)\right] \tag{12}$$

Énergie cinétique totale :

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2L_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\Delta\theta) \tag{13}$$

## 3.2 Énergie Potentielle

Référence : $y = 0$ au niveau du pivot (vers le bas est négatif).

Énergie potentielle de $m_1$ :

$$V_1 = m_1gy_1 = -m_1gL_1 \cos(\theta_1) \tag{14}$$

Énergie potentielle de $m_2$ :

$$V_2 = m_2gy_2 = -m_2g[L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2)] \tag{15}$$

Énergie potentielle totale :

$$V = -(m_1 + m_2)gL_1 \cos(\theta_1) - m_2gL_2 \cos(\theta_2) \tag{16}$$

# 4 Lagrangien

Le Lagrangien est défini comme :

$$\mathcal{L} = T - V \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) =& \frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2L_2^2\dot{\theta}_2^2 \\ &+ m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\Delta\theta) \\ &+ (m_1 + m_2)gL_1\cos(\theta_1) + m_2gL_2\cos(\theta_2)\end{aligned} \tag{18}$$

# 5 Équations d'Euler-Lagrange

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_i} = 0, \quad i = 1, 2 \tag{19}$$

## 5.1 Équation pour $\theta_1$

$$(m_1 + m_2)L_1\ddot{\theta}_1 + m_2L_2\ddot{\theta}_2\cos(\Delta\theta) + m_2L_2\dot{\theta}_2^2\sin(\Delta\theta) + (m_1 + m_2)g\sin(\theta_1) = 0 \tag{20}$$

## 5.2 Équation pour $\theta_2$

$$L_2\ddot{\theta}_2 + L_1\ddot{\theta}_1\cos(\Delta\theta) - L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\Delta\theta) + g\sin(\theta_2) = 0 \tag{21}$$

# 6 Résolution pour les Accélérations

Système linéaire de 2 équations à 2 inconnues $(\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2)$ :

$$\begin{cases}(m_1 + m_2)L_1\ddot{\theta}_1 + m_2L_2\cos(\Delta\theta)\ddot{\theta}_2 = -m_2L_2\dot{\theta}_2^2\sin(\Delta\theta) - (m_1 + m_2)g\sin(\theta_1) \\ L_1\cos(\Delta\theta)\ddot{\theta}_1 + L_2\ddot{\theta}_2 = L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\Delta\theta) - g\sin(\theta_2)\end{cases} \tag{22}$$

## 6.1 Forme Matricielle

$$\begin{bmatrix}(m_1 + m_2)L_1 & m_2L_2\cos(\Delta\theta) \\ L_1\cos(\Delta\theta) & L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-m_2L_2\dot{\theta}_2^2\sin(\Delta\theta) - (m_1 + m_2)g\sin(\theta_1) \\ L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\Delta\theta) - g\sin(\theta_2)\end{bmatrix} \tag{23}$$

## 6.2 Déterminant

$$\Delta = m_1 + m_2\sin^2(\Delta\theta) \tag{24}$$

## 6.3 Solutions Explicites

Par la règle de Cramer :

#### 6.3.1 Accélération angulaire 1 :

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{L_1\Delta}\Big[ - m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\Delta\theta)\cos(\Delta\theta) - m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\Delta\theta) + m_2 g \sin(\theta_2)\cos(\Delta\theta) - (m_1+m_2) g \sin(\theta_1)\Big] \tag{25}$$

#### 6.3.2 Accélération angulaire 2 :

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{(m_1+m_2)}{L_2\Delta}\Big[L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\Delta\theta) + \frac{m_2}{m_1+m_2} L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\Delta\theta)\cos(\Delta\theta) + g \sin(\theta_1)\cos(\Delta\theta) - g\sin(\theta_2)\Big] \tag{26}$$

# 7 Formules Finales pour la Simulation

## 7.1 Variables d'État

$$\text{État}(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{où } \omega_1 = \dot{\theta}_1, \quad \omega_2 = \dot{\theta}_2 \tag{27}$$

## 7.2 Équations Différentielles

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \tag{28}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \tag{29}$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \ddot{\theta}_1(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) \tag{30}$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \ddot{\theta}_2(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) \tag{31}$$

avec :

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2, \quad \Delta = m_1 + m_2 \sin^2(\Delta\theta) \tag{32}$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{L_1\Delta}\Big[ - m_2 L_1 \omega_1^2 \sin(\Delta\theta)\cos(\Delta\theta) - m_2 L_2 \omega_2^2 \sin(\Delta\theta) + m_2 g \sin(\theta_2)\cos(\Delta\theta) - (m_1+m_2) g \sin(\theta_1)\Big] \tag{33}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{L_2\Delta}\Big[(m_1+m_2) L_1 \omega_1^2 \sin(\Delta\theta) + m_2 L_2 \omega_2^2 \sin(\Delta\theta)\cos(\Delta\theta) + (m_1+m_2) g \sin(\theta_1)\cos(\Delta\theta) - (m_1+m_2) g\sin(\theta_2)\Big] \tag{34}$$

# 8 Conservation de l'Énergie

L'énergie mécanique totale doit rester constante :

$$E_{\text{mec}} = T + V = \text{constante} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{mec}} =& \frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 L_2^2\omega_2^2 + m_2 L_1 L_2 \omega_1 \omega_2 \cos(\Delta\theta) \\ & - (m_1 + m_2) g L_1 \cos(\theta_1) - m_2 g L_2 \cos(\theta_2) \end{aligned} \tag{36}$$

# 9 Conversion pour la Visualisation

Pour afficher les positions cartésiennes :

$$x_1 = L_1 \sin(\theta_1) \tag{37}$$

$$y_1 = -L_1 \cos(\theta_1) \tag{38}$$

$$x_2 = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2) \tag{39}$$

$$y_2 = -L_1 \cos(\theta_1) - L_2 \cos(\theta_2) \tag{40}$$