

# Matrices de permutation

Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## 1 Matrices

Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice avec exactement un 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne, et avec des 0 partout ailleurs.

$A$  est alors appelée une **matrice de permutation**.

(Comme le nombre de 1 dans une matrice de permutation est à la fois le nombre de lignes et le nombre de colonnes, une matrice de permutation est carrée.)

On voit que les colonnes de  $A$  forment une famille orthonormale de  $\mathbb{K}^n$ . (Sous-entendu, pour la forme bilinéaire de  $\mathbb{K}^n$  qui admet la base canonique comme base orthonormée; elle est symétrique non dégénérée; c'est un produit scalaire si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .)

Ces calculs sur les colonnes sont les mêmes que pour calculer  ${}^tAA$ . D'où  ${}^tAA = I_n$ . Ainsi,  $A$  est **inversible**, et même **orthogonale**.

**Astuce pratique.** Pour vérifier qu'une matrice  $M$  est orthogonale, il suffit de calculer la partie triangulaire supérieure (ou inférieure) de  ${}^tMM$ , car le produit d'une matrice et de sa transposée est symétrique. Ceci dit, faire directement les produits entre colonnes évite d'avoir à transposer  $M$ .

## 2 Permutations

Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme  $A$  a un seul 1 sur la colonne  $j$ , alors existe un unique  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $a_{i,j} = 1$ . Posons  $\sigma(j) = i$ .

On vient ainsi de définir une application  $\sigma: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme  $i$  est différent pour chaque  $j$ , alors  $\sigma$  est injective, donc bijective, et est dans  $\mathfrak{S}_n$ . On a  $A = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ .  $A$  est appelée la matrice de la permutation  $\sigma$ , on la note  $M_\sigma$ .

## 3 Déterminant

Comme  $\mathfrak{S}_n$  est engendré par les transpositions, alors on peut écrire  $\sigma = \tau_1 \dots \tau_t$  avec des transpositions  $\tau_i$  (pas forcément disjointes), et alors en échangeant les colonnes de  $M_\sigma$  suivant ces transpositions, on finit par permuter les colonnes de  $M_\sigma$  suivant  $\sigma$ ; on obtient ainsi la matrice identité (car la  $j$ -ème colonne de  $M_\sigma$  est le  $\sigma(j)$ -ème vecteur de la base canonique, et on le déplace vers la position  $\sigma(j)$ ). Ce faisant, on a multiplié le déterminant de  $M_\sigma$  par  $-1$  pour chacune des  $t$  transpositions  $\tau_i$ , d'où  $(-1)^t \det(M_\sigma) = \det(I_n) = 1$ . Or,  $(-1)^t = \varepsilon(\tau_1) \dots \varepsilon(\tau_t) = \varepsilon(\tau_1 \dots \tau_t) = \varepsilon(\sigma)$ . D'où  $\varepsilon(\sigma) \det(M_\sigma) = 1$ , puis  $\det(M_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ .

## 4 Endomorphismes

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev tel que  $\dim(E) = n$ .

Soit une base  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de  $E$ .

À partir de  $\sigma$ , on définit  $f_\sigma \in L(E)$  par  $f_\sigma(b_j) = b_{\sigma(j)}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$M_\sigma$  est inversible (cf. partie 1) et  $M_\sigma = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\sigma)$ , donc  $f_\sigma$  est dans  $\text{GL}(E)$ .

Pour tous  $\tau, \sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on a  $f_\tau(f_\sigma(b_j)) = f_\tau(b_{\sigma(j)}) = b_{\tau(\sigma(j))} = b_{(\tau \circ \sigma)(j)} = (f_{\tau \circ \sigma})(b_j)$ .

Donc  $f_\tau \circ f_\sigma = f_{\tau \circ \sigma}$ .

D'où  $M_\tau M_\sigma = M_{\tau \circ \sigma}$ .

## 5 Représentations

Soit  $f: \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \text{GL}(E) \\ \sigma & \longmapsto & f_\sigma \end{array}$ . Alors  $f$  est un morphisme de groupes. Donc  $f$  est une représentation de  $\mathfrak{S}_n$ . En fait, comme la définition de  $f_\sigma$  est  $f_\sigma(b_j) = b_{\sigma(j)}$  (pour tout  $j$ ), on reconnaît que  $f$  est la représentation de permutation de  $\mathfrak{S}_n$  associée à l'action naturelle de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Une représentation matricielle associée à  $f$  est  $\phi: \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \sigma & \longmapsto & M_\sigma \end{array}$  (car  $M_\sigma = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\sigma)$ ).

La restriction de  $\phi$  à son image est un **isomorphisme** de groupes entre les **permutations** (dans  $\mathfrak{S}_n$ ) et les **matrices de permutation** (de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ). Cet isomorphisme peut être considéré comme canonique, au sens où  $\phi$  ne dépend pas du choix de la base  $\mathcal{B}$ , contrairement à  $f$  qui dépend de  $\mathcal{B}$ .

## 6 Actions

Comme  $\text{GL}(E)$  est inclus dans le groupe symétrique  $\mathfrak{S}(E)$  des bijections de  $E$ , alors  $f$  est une action de groupe de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $E$ , fidèle car  $f$  est injective.

Soit  $\psi$  l'isomorphisme d'ev entre  $E$  et  $\mathbb{K}^n$ , qui à un vecteur de  $E$  associe ses coordonnées en base  $\mathcal{B}$ . Alors  $\tilde{f}: \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \text{GL}(\mathbb{K}^n) \\ \sigma & \longmapsto & \psi \circ f_\sigma \circ \psi^{-1} \end{array}$  est bien à valeurs dans  $\text{GL}(\mathbb{K}^n)$ , et est un morphisme de groupes, d'image incluse dans le groupe symétrique  $\mathfrak{S}(\mathbb{K}^n)$ , donc est une action de groupe de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\mathbb{K}^n$ . De plus, elle est équivalente à l'action  $f$  de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $E$ .

En résumé, trois actions de  $\mathfrak{S}_n$  nous intéressent dans ce document :

- pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\sigma \cdot j = \sigma(j)$  (action naturelle),
- pour  $v \in E$ , on note  $\sigma \cdot v = f_\sigma(v)$  (action  $f$ ),
- pour  $x \in \mathbb{K}^n$ , on note  $\sigma \cdot x = M_\sigma \times x$  (action  $\tilde{f}$ ).

## 7 Diagonalisabilité

On sait que les matrices d'une représentation d'un groupe fini sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel sont diagonalisables. Donc pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , les matrices de permutation sont diagonalisables. Mais nous n'avons pas supposé que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Comme  $\mathfrak{S}_n$  est un groupe fini, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\sigma^k = \text{Id}$  (par exemple, l'ordre  $n!$  de  $\mathfrak{S}_n$ , ou plus finement l'ordre de  $\sigma$ ; rappelons que ce dernier peut être plus grand ou plus petit que  $n$  : cf. mail du 24/01/2021 11h39 *Révisons ensemble* 3/32 point 2).

En appliquant le morphisme  $\phi$ , on obtient  $(M_\sigma)^k = I_n$ . Donc  $X^k - 1$  est annulateur de  $M_\sigma$ . D'où, le polynôme minimal  $\mu_\sigma$  de  $M_\sigma$  divise  $X^k - 1$ , et les **valeurs propres** de  $M_\sigma$  sont des **racines  $k$ -èmes de l'unité**.

Supposons que  $\text{car}(\mathbb{K})$  ne divise pas  $k$ . La dérivée de  $X^k - 1$  est  $kX^{k-1}$ , qui est scindé et admet 0 pour seule racine (c'est ici qu'a été utilisée l'hypothèse sur  $\text{car}(\mathbb{K})$ ). Or, 0 n'est pas racine de  $X^k - 1$ . Donc  $X^k - 1$  et sa dérivée n'ont pas de racine commune dans la clôture algébrique de  $\mathbb{K}$ , donc sont premiers entre eux. Ainsi,  $X^k - 1$  est à racines simples. En notant  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  les racines  $k$ -èmes de l'unité dans la clôture algébrique de  $\mathbb{K}$ , alors  $X^k - 1$  est scindé sur  $\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  à racines simples et annulateur de  $M_\sigma$ . D'où,  $M_\sigma$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ .

Si  $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$ , alors est vérifiée l'hypothèse du paragraphe précédent que  $\text{car}(\mathbb{K})$  ne divise pas  $k$  (puisque  $k$  est non nul). En particulier, on retrouve le fait que dans  $\mathbb{C}$ , les matrices de permutation sont diagonalisables (en utilisant le fait que  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos).

## 8 Calcul

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Par linéarité de  $f_\sigma$ , on a 
$$f_\sigma \left( \sum_j \lambda_j \cdot b_j \right) = \sum_j \lambda_j \cdot f_\sigma(b_j) = \sum_j \lambda_j \cdot b_{\sigma(j)}.$$

**Astuce pratique.** Pour calculer  $M_\sigma \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ , il suffit de déplacer la  $j$ -ème composante

vers la composante  $\sigma(j)$ , pour tout  $j$ . Pour déterminer  $\sigma$  à partir de  $M_\sigma$  et réciproquement, il suffit de regarder à qui les vecteurs de la base canonique sont envoyés par l'application  $f_\sigma$  définie en partie 4.

**Attention.** Ci-dessus, par “déplacer la  $j$ -ème composante”, je veux dire remplacer  $b_j$  par  $b_{\sigma(j)}$ , et non remplacer  $\lambda_j$  par  $\lambda_{\sigma(j)}$ . C'est la position du coefficient qu'on transforme suivant  $\sigma$ , et non l'indice du coefficient. En effet, l'indice du coefficient à une position fixée est transformé suivant  $\sigma^{-1}$ . C'est un peu comme visser un bouchon sur une bouteille : du point de vue de la bouteille, c'est le bouchon qui tourne et la bouteille est fixe ; du point de vue du bouchon, le bouchon est fixe et c'est la bouteille qui tourne dans l'autre sens (i.e., le mouvement est relatif au point de vue). Une façon de l'écrire :  $\sum_j \lambda_j b_{\sigma(j)} = \sum_i \lambda_{\sigma^{-1}(i)} b_i$

(en posant  $j = \sigma^{-1}(i)$ ). Autrement dit,  $M_\sigma \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ \lambda_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$ . D'où l'intérêt peut-être de la convention anglo-saxonne, qui définit la matrice de  $\sigma$  comme  $M_{\sigma^{-1}}$  au lieu de  $M_\sigma$ .

**Corollaire.**  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $M_\sigma$  pour la valeur propre 1.

## 9 Cycle : valeur propre 1

Soient  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , et  $\sigma = (t_1 \cdots t_k)$  un  $k$ -cycle de  $\mathfrak{S}_n$ . D'après le corollaire de la partie 8,  $f_\sigma$  admet 1 pour valeur propre. Soit  $\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$  un vecteur propre pour la valeur propre 1. Le support d'un élément de  $\mathfrak{S}_n$  est l'ensemble de ses points non fixes dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , d'où  $\llbracket 1, n \rrbracket = \text{Supp}(\sigma) \sqcup \text{Fix}(\sigma)$ , et  $\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j = f_\sigma \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_{\sigma(j)} = \sum_{j \in \text{Supp}(\sigma)} \lambda_j b_{\sigma(j)} + \sum_{j \in \text{Fix}(\sigma)} \lambda_j b_j$ . Comme  $\sigma(\text{Fix}(\sigma)) = \text{Fix}(\sigma)$ , alors par bijectivité,

$\sigma(\text{Supp}(\sigma)) = \text{Supp}(\sigma) = \{t_1, \dots, t_k\}$ , donc l'équation se simplifie en retirant les vecteurs associés aux points fixes des deux côtés de l'égalité, donc

$$\sum_{j=1}^k \lambda_{t_j} b_{t_j} = \sum_{j=1}^k \lambda_{t_j} b_{\sigma(t_j)} = \sum_{i=1}^k \lambda_{\sigma^{-1}(t_i)} b_{t_i} = \sum_{i=1}^k \lambda_{t_{i-1 \bmod k}} b_{t_i}$$
 (le changement de variable  $\sigma(t_j) = t_i$  est valide car la restriction de  $\sigma$  est une bijection de  $\text{Supp}(\sigma)$  dans  $\text{Supp}(\sigma)$ ).

D'où les équations  $\lambda_{t_i \bmod k} = \lambda_{t_{i-1 \bmod k}}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , puis  $\lambda_{t_1} = \lambda_{t_2} = \dots = \lambda_{t_k}$ . Aussi, il n'y a pas d'équations sur les  $\lambda_j$  tels que  $j \in \text{Fix}(\sigma)$ . Donc le **sous-espace propre** associé à la valeur propre 1 de  $f_\sigma$  est de **dimension**  $1 + \text{Card}(\text{Fix}(\sigma))$ , et il admet la **base**

**de vecteurs propres**  $\left\{ \sum_{j \in \text{Supp}(\sigma)} b_j \right\} \cup \left\{ b_i \mid i \in \text{Fix}(\sigma) \right\}$ . Réciproquement, on vérifie

qu'il s'agit bien de vecteurs propres de  $f_\sigma$  pour la valeur propre 1 à l'aide de l'astuce pratique de la partie 8.

## 10 Cycle : valeur propre différente de 1

Soient  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $\sigma = (t_1 \cdots t_k)$  un  $k$ -cycle de  $\mathfrak{S}_n$ . D'après la partie 7, les valeurs propres de  $f_\sigma$  sont racines  $k$ -èmes de l'unité. Soit  $u \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$  une éventuelle racine  $k$ -ème de l'unité. Comme  $u \cdot u^{k-1} = 1$ , alors  $u$  est inversible dans  $\mathbb{K}$ . Supposons de

plus  $u$  valeur propre. Soit  $\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$  un vecteur propre pour la valeur propre  $u$ . Alors

$$u \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j = f_\sigma \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_{\sigma(j)} = \sum_{j \in \text{Supp}(\sigma)} \lambda_j b_{\sigma(j)} + \sum_{j \in \text{Fix}(\sigma)} \lambda_j b_j .$$

Donc pour tout  $j \in \text{Fix}(\sigma)$ , on a  $u \lambda_j = \lambda_j$ , donc  $0 = (1 - u) \lambda_j$ , et comme  $u \neq 1$ , alors  $\lambda_j = 0$  pour tout  $j \in \text{Fix}(\sigma)$ . Or  $\text{Supp}(\sigma) = \{t_1, \dots, t_k\}$ , donc l'égalité ci-dessus se réécrit  $u \sum_{j=1}^k \lambda_{t_j} b_{t_j} = \sum_{j=1}^k \lambda_{t_j} b_{\sigma(t_j)} = \sum_{i=1}^k \lambda_{\sigma^{-1}(t_i)} b_{t_i} = \sum_{i=1}^k \lambda_{t_{i-1 \bmod k}} b_{t_i}$  (le changement de variable  $\sigma(t_j) = t_i$  est valide car la restriction de  $\sigma$  est une bijection de  $\text{Supp}(\sigma)$  dans  $\text{Supp}(\sigma)$ ).

D'où les équations  $u \lambda_{t_i \bmod k} = \lambda_{t_{i-1 \bmod k}}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , puis  $\lambda_{t_1} = u \lambda_{t_2} = \dots = u^{k-1} \lambda_{t_k}$ . Donc le **sous-espace propre** associé à la valeur propre  $u$  de  $f_\sigma$  est de **dimension** 1. En posant  $\lambda_{t_1} = 1$ , on obtient un **vecteur directeur** de coefficients  $\lambda_{t_i} = u^{1-i}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  et  $\lambda_j = 0$  pour tout point fixe  $j$  de  $\sigma$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Réciproquement, on vérifie que ce vecteur est propre pour la valeur propre  $u$  de  $f_\sigma$  (d'après l'astuce pratique de la partie 8), et  $u$  est donc bien valeur propre de  $f_\sigma$ . Ainsi, toutes les racines  $k$ -èmes de l'unité dans  $\mathbb{K}$  sont valeurs propres de  $f_\sigma$ .

(Que dire dans le cas où  $\text{car}(\mathbb{K})$  divise  $k$  ?) Dans toute la suite du document, on suppose  $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$ . Ainsi,  $\text{car}(\mathbb{K})$  ne divise pas  $k$ . Alors  $X^k - 1$  est à racines simples d'après la partie 7, et est donc le polynôme minimal de  $M_\sigma$  sur un corps de décomposition de  $X^k - 1$ . Or, le polynôme minimal d'une matrice ne dépend pas de l'extension de corps dans laquelle on considère ses coefficients (résultat classique). Donc le **polynôme minimal** de  $M_\sigma$  sur  $\mathbb{K}$  est  $X^k - 1$ . Les **valeurs propres** de  $f_\sigma$  sont exactement les **racines  $k$ -èmes de l'unité** dans  $\mathbb{K}$ . Autrement dit, les **valeurs propres** de  $f_\sigma$  sont exactement les éléments du groupe multiplicatif des inversibles de  $\mathbb{K}$  dont les ordres divisent  $k$ .

**Astuce pratique.** Soit  $u$  une racine  $k$ -ème de l'unité dans  $\mathbb{K} \setminus \{1\}$ . Le sous-espace propre associé à  $u$  est de dimension 1, et pour en trouver un vecteur directeur, on applique itérativement  $M_\sigma$  aux vecteurs de la base canonique du support de  $\sigma$  et on note de côté le coefficient gardé pour chacun, en commençant par 1 puis en divisant à chaque fois par  $u$  le coefficient restant.

## 11 Produit de cycles disjoints

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Il existe  $t \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t$ , où les  $\sigma_i$  sont des cycles à supports disjoints différents de l'identité. (Le cas  $t = 0$  correspond au cas  $\sigma = \text{Id}$ , grâce à la convention du produit vide.)

Comme  $\llbracket 1, n \rrbracket = \left( \bigsqcup_{m=1}^t \text{Supp}(\sigma_m) \right) \bigsqcup \text{Fix}(\sigma)$ , alors on peut permuter les éléments de la base  $\mathcal{B}$ , de sorte qu'on obtient une décomposition de  $E$  en somme directe de sous-

espaces vectoriels :  $E = \left( \bigoplus_{m=1}^t \text{Vect}(b_j \mid j \in \text{Supp}(\sigma_m)) \right) \oplus \text{Vect}(b_i \mid i \in \text{Fix}(\sigma))$ . En plus,

ces  $(t+1)$  sous-espaces sont stables par  $f_\sigma$  ! Pour trouver les vecteurs propres associés à une valeur propre  $\lambda$  de  $f_\sigma$ , on peut donc se ramener à la recherche de vecteurs propres pour la valeur propre  $\lambda$  de la restriction de  $f_\sigma$  à chaque sous-espace. En effet, en notant  $v_m$  les composantes de  $v \in E$  dans ces  $t+1$  sous-espaces (c'est-à-dire,  $v_m = p_m(v)$  où  $p_m$  est la projection associée au  $m$ -ème sous-espace parallèlement à la somme des autres),

on a :  $f_\sigma(v) = \lambda v \iff f_\sigma \left( \sum_{m=1}^{t+1} v_m \right) = \lambda \sum_{m=1}^{t+1} v_m \iff \sum_{m=1}^{t+1} f_\sigma(v_m) = \sum_{m=1}^{t+1} \lambda v_m \iff (\forall m \in \llbracket 1; t+1 \rrbracket) f_\sigma(v_m) = \lambda v_m$ . (On a utilisé la linéarité de  $f_\sigma$ , l'unicité d'écriture liée à une somme directe, et la stabilité des sous-espaces par  $f_\sigma$ ).

Une autre façon de voir qu'on peut se ramener à ce système est d'utiliser le morphisme  $f$  de la partie 5. En effet, on a alors  $f_\sigma = f_{\sigma_1 \dots \sigma_t} = f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_t}$ , et pour tout  $m \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , le sous-espace  $\text{Vect}(b_j \mid j \in \text{Supp}(\sigma_m))$  est inclus dans le sous-espace des points fixes de  $f_{\sigma_q}$ , i.e., le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 de  $f_{\sigma_q}$ , pour tout  $q \in \llbracket 1, t \rrbracket \setminus \{m\}$ .

Comme ces sous-espaces admettent pour bases des sous-bases de la base  $\mathcal{B}$  liée à  $f_\sigma$  dans la partie 4, on obtient que les matrices des restrictions de  $f_\sigma$  dans ces sous-bases sont des matrices de permutation ! On peut donc appliquer les parties 9 et 10 sur les sous-espaces pour trouver des bases de leurs sous-espaces propres. (Pour le dernier sous-espace, pas besoin, car les  $b_i$  tels que  $i \in \text{Fix}(\sigma)$  sont déjà des vecteurs propres pour la valeur propre 1.) Enfin, on fait les réunions de ces bases pour obtenir des bases des sous-espaces propres de  $f_\sigma$ .

Alors, le **sous-espace propre** de  $f_\sigma$  associé à 1 est de **dimension**  $t + \text{Card}(\text{Fix}(\sigma))$ . Si  $u$  est une valeur propre de  $f_\sigma$  différente de 1, alors le **sous-espace propre** de  $f_\sigma$  associé à  $u$  a pour **dimension** le nombre de cycles  $\sigma_i$  dans la décomposition de  $\sigma$  tels que  $f_{\sigma_i}$  admet  $u$  comme valeur propre, i.e. tels que la taille de  $\sigma_i$  est un multiple de l'ordre multiplicatif de  $u$  dans le groupe des inversibles de  $\mathbb{K}$ .

Grâce à la somme directe de sous-espaces stables, on obtient que le polynôme minimal de  $f_\sigma$  est le PPCM des polynômes minimaux des  $\sigma_i$ . En effet,  $\mu_{f_\sigma}(f_\sigma)$  est nul sur  $E$ , donc aussi sur chaque sous-espace, d'où  $\mu_{\sigma_i}$  divise  $\mu_{f_\sigma}$ , puis le PPCM des  $\mu_{\sigma_i}$  divise  $\mu_{f_\sigma}$ . Réciproquement,  $(\text{PPCM}_i(\mu_{\sigma_i}))(f_\sigma) \left( \sum_{m=1}^{t+1} v_m \right) = \sum_{m=1}^{t+1} (\text{PPCM}_i(\mu_{\sigma_i}))(f_\sigma|_{E_m})(v_m) = \sum_{m=1}^{t+1} (Q_m \mu_{\sigma_m})(f_{\sigma_m})(v_m) = \sum_{m=1}^{t+1} (Q_m(f_{\sigma_m}) \circ \mu_{\sigma_m}(f_{\sigma_m}))(v_m) = \sum_{m=1}^{t+1} (Q_m(f_{\sigma_m}) \circ 0)(v_m) = 0$  pour certains polynômes  $Q_m \in \mathbb{K}[X]$ . Donc le PPCM des  $\mu_{\sigma_i}$  est annulateur de  $f_\sigma$ , puis est divisible par  $\mu_{f_\sigma}$ , d'où l'égalité. Donc d'après la partie 10, le **polynôme minimal** de  $f_\sigma$  est le PPCM des  $X^{k_i} - 1$ , où les  $k_i$  sont les tailles des cycles  $\sigma_i$ .

**Astuce pratique.** En résumé, pour trouver des vecteurs propres de  $f_\sigma$ , il suffit à peu près d'appliquer la conclusion de la partie 9 et l'astuce pratique de la partie 10 aux éléments de la décomposition en cycles disjoints de  $\sigma$ , et de compléter avec les vecteurs de la base canonique associés aux points fixes de  $\sigma$ .

## 12 Somme directe de sous-représentations

Soient  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $t \in \mathbb{N}$  tels que  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t$ , où les  $\sigma_i$  sont des cycles à supports disjoints différents de l'identité. Soit  $G$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$  engendré par les  $\sigma_i$ . Alors la restriction  $f|_G$  du morphisme  $f$  de la partie 5 est encore un morphisme, donc encore une représentation. On vérifie que les sous-espaces de la partie 11 sont stables par les  $f_{\sigma_i}$ , donc par tous les  $f_g$  avec  $g \in G$ . Ce sont donc des sous-représentations de  $f|_G$ . Ainsi, la partie 11 donne une décomposition de  $E$  en somme directe de sous-représentations de  $G$ .

Ça semble refléter le fait que  $G$  est isomorphe au produit direct  $\prod_{i=1}^t \langle \sigma_i \rangle$ .

## 13 Exercice

On suppose enfin que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . D'après le théorème de Maschke, la représentation régulière de  $\mathfrak{S}_3$  est somme directe de représentations irréductibles. Ses matrices peuvent ainsi se réduire simultanément sous forme diagonale par blocs, où chaque bloc est une représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_3$ .

Si l'on souhaite déterminer une base de réduction explicite, il est utile de d'abord chercher des vecteurs propres des matrices de la représentation. Cette activité permet de se familiariser par la pratique avec les matrices de permutation.

Comme  $(1\ 2)$  et  $(1\ 2\ 3)$  engendrent  $\mathfrak{S}_3$  et que la représentation étudiée est un morphisme défini sur  $\mathfrak{S}_3$ , il suffirait de travailler sur les matrices de  $L_{(1\ 2)}$  et  $L_{(1\ 2\ 3)}$ , où  $L$  est la représentation régulière de  $\mathfrak{S}_3$  associée à la base  $\mathcal{D} = (d_{\text{Id}}, d_{(1\ 2)}, d_{(2\ 3)}, d_{(1\ 3)}, d_{(1\ 2\ 3)}, d_{(1\ 3\ 2)})$ . (L'ordre des vecteurs de cette base influe sur les coefficients des matrices.) Mais à des fins d'illustration, prenons aussi la matrice de  $L_{(2\ 3)}$ .

$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(L_{(1\ 2)})$	$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(L_{(1\ 2\ 3)})$	$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(L_{(2\ 3)})$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Vérifier que ces trois matrices sont des matrices de permutation.
- Déterminer les permutations dont elles sont les matrices. (Attention, elles ne sont pas dans  $\mathfrak{S}_3$ , mais dans un autre groupe symétrique !) Les écrire comme produits de cycles à supports disjoints.
- Donner la matrice  $M_{(1\ 3\ 2\ 4)}$  de la permutation  $(1\ 3\ 2\ 4) \in \mathfrak{S}_6$ .
- Donner des bases de vecteurs propres de ces quatre matrices. Conseil : pour une difficulté croissante, chercher d'abord les vecteurs propres de chaque matrice pour la

valeur propre 1, puis les vecteurs propres éventuels de chaque matrice pour la valeur propre éventuelle -1, et ainsi de suite pour les éventuelles autres valeurs propres.

## 14 Correction

- Ces trois matrices ont exactement un 1 sur chaque ligne et chaque colonne, et des 0 partout ailleurs, donc ce sont bien des matrices de permutation d'après la partie 1. C'est normal car ce sont des matrices de la représentation régulière, qui est une représentation de permutation.

- Il s'agit de trouver les antécédents de ces matrices par  $\phi$  (section 5), donc dans  $\mathfrak{S}_6$ .

En appliquant l'astuce pratique de la partie 8, on obtient :

$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(L_{(1\ 2)})$  est la matrice de la permutation  $(12)(35)(46) \in \mathfrak{S}_6$ ,

$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(L_{(2\ 3)})$  est la matrice de la permutation  $(13)(26)(45) \in \mathfrak{S}_6$ ,

$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(L_{(1\ 2\ 3)})$  est la matrice de la permutation  $(156)(243) \in \mathfrak{S}_6$ .

En fait, on pouvait aussi déterminer le type de ces permutations (nombres et tailles de leurs cycles disjoints) en raisonnant abstraitement, comme suit. De façon intéressante, on dispose ici de deux morphismes ( $L$  et  $\phi$ ) à valeurs dans un même groupe (les matrices de permutation de taille 6). On peut en profiter et essayer de faire jouer ensemble ces deux morphismes, pour voir si ça fait des étincelles. En plus, ils sont tous deux injectifs (car  $L$  est une représentation régulière : cf. mail du 24/01/2021 16h11 *Révisons ensemble* 3/32 point 3).

Comme un morphisme de groupes injectif préserve l'ordre, alors pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ , on a  $o(\sigma) = o(L_\sigma) = o(\phi^{-1}(L_\sigma))$ . Donc  $\phi^{-1}(L_{(1\ 2)})$  est d'ordre 2 et  $\phi^{-1}(L_{(1\ 2\ 3)})$  est d'ordre 3 (dans  $\mathfrak{S}_6$ ). Comme l'ordre d'un élément du groupe symétrique est le PPCM des ordres des cycles disjoints de sa décomposition, on en déduit que les ordres des cycles disjoints dans les décompositions respectives de  $\phi^{-1}(L_{(1\ 2)})$  et  $\phi^{-1}(L_{(1\ 2\ 3)})$  divisent respectivement 2 et 3, donc sont égaux à respectivement 2 et 3. Ainsi,  $\phi^{-1}(L_{(1\ 2)})$  se décompose en transpositions disjointes et  $\phi^{-1}(L_{(1\ 2\ 3)})$  se décompose en 3-cycles disjoints.

Comme il s'agit de matrices non triviales d'une représentation régulière, les coefficients 1 de ces matrices ne sont pas sur la diagonale. Donc les permutations dans  $\mathfrak{S}_6$  associées à ces matrices n'ont pas de point fixe : leur support est "plein", je veux dire, c'est  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ . Donc  $\phi^{-1}(L_{(1\ 2)})$  se décompose en trois transpositions disjointes et  $\phi^{-1}(L_{(1\ 2\ 3)})$  en deux 3-cycles disjoints. C'est cohérent avec nos résultats.

- En appliquant l'astuce pratique de la partie 8, on obtient

$$M_{(1\ 3\ 2\ 4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- On applique l'astuce pratique de la partie 11. On remarque que les bases de vecteurs propres ci-dessous sont orthogonales pour le produit hermitien standard de  $\mathbb{C}^6$ , ce

qui corrobore le théorème de diagonalisation des matrices normales (cf. Gourdon, *Algèbre*, page 255, section 3.2, corollaire 2 du théorème 3).

$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(L_{(1\ 2\ 3)})$	$1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ j \\ j^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j^2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ j^2 \\ j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$M_{(1\ 3\ 2\ 4)}$	$1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, -1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, i : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -i : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(L_{(1\ 2)})$	$1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, -1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(L_{(2\ 3)})$	$1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, -1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$