Déformations du demi-anneau $(\mathbb{N}, +, \times)$

Valentin MARIE

LMR Reims

28 juin 2023

Intuition

$(\mathbb{N}, +, \times)$ est "l'arithmétique des quantités de $1 \in \mathbb{N}$".

généralisation

"l'arithmétique des quantités de b", pour b un élément arbitraire fixé d'un monoïde $(M, \cdot)$?

informellement

"calculer dans l'exposant de b" :

par exemple, $b^{a+c} = b^{x+y} \Rightarrow a + c \equiv x + y$.

Formalisation

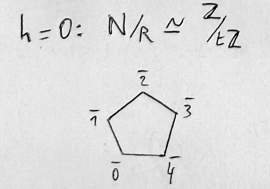
M. (2019, non publié)

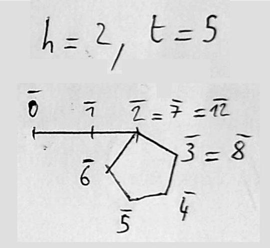
Soient $(M, +, \cdot)$ un $\mathbb{N}$-module, $m \in M$, et R la relation sur $\mathbb{N}$ définie par $kRj \Leftrightarrow k \cdot m = j \cdot m$. Alors $(\mathbb{N}, +, \times) \to (\mathbb{N}/R, +, \times)$ demi-anneau.
Si m n'est pas simplifiable à droite : $\left(\bar{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de période t dès le rang h.

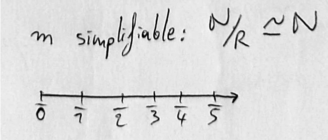
$kRj \Leftrightarrow (k = j < h)$ ou $(k \geq h$ et $j \geq h$ et $k \equiv j[t])$.

$\to$ demi-anneaux $\mathbb{N}_{h,t}$. Ne dépendent que de h et t ! $|\mathbb{N}_{h,t}| = h + t$.

Exemples :







Exemples de $\mathbb{N}$-module

notation additive

$(M, +, \cdot)$ avec $(M, +)$ un monoïde commutatif et la multiplication

$$\cdot\colon \mathbb{N} \times M \to M,\ (n, b) \mapsto n \cdot b = \sum_{k=1}^{n} b.$$

notation multiplicative

$(M, \cdot, \wedge)$ avec $(M, \cdot)$ un monoïde commutatif et l'exponentiation

$$\wedge\colon \mathbb{N} \times M \to M,\ (n, b) \mapsto b^n = \prod_{k=1}^{n} b.$$

exemples pour un rang h non nul

$(M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot, \wedge)$, et $m \in M$ non inversible multiplicativement, i.e. m non premier avec n. Pour $n = 6$:

- $m = 2$: $h = 1,\ t = 2$. (intègre ; 2 est non régulier pour $+$ et $\times$.)
- $m \in \{3, 4\}$: $h = 1,\ t = 1$; $(+, \times) = (\max, \min) =$ (ou, et).

Si $t = 1$: $\exists$ élément absorbant pour $+$.

Références

demi-anneaux

https://fr.wikipedia.org/wiki/Demi-anneau
https://en.wikipedia.org/wiki/Semiring

module sur un demi-anneau

https://en.wikipedia.org/wiki/Module_(mathematics)#Generalizations