Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Informatica

Benchmark di Sistemi per la Programmazione Bayesiana: Tempo, Accuratezza, Concisione

Relatore:
Chiar.mo Prof.
UGO DAL LAGO

Presentata da:
VALENTINA FERRAIOLI

Sessione II
Anno Accademico 2018/2019

Questa è la Dedica*:*
ognuno può scrivere quello che vuole,
anche nulla . . .

Introduzione

Negli ultimi anni la crescita in campi come l'intelligienza artificiale e Data Science, hanno portato alla necessità di sistemi che fossero in grado di risolvere problemi anche in situazioni in cui non si possiedono tutte le informazioni necessarie per la risoluzione oppure ci si trova in situazioni di incertezza.
Per risolvere questo tipo di problemi ci viene in soccorso la teoria della probabilità. In generale, la probabilità ha lo scopo di quantificare la possibilità che un evento accada oppure no. Tuttavia, si possono distinguere due interpretazioni: quella frequentista, puramente oggettiva, che tiene conto del numero di successi su un totale di esperimenti fatti, e quella bayesiana, che invece applica un approccio soggettivo, associando alla probabilità il grado di fiducia che, chi esegue l'esperimento, ha nel verificarsi di un certo evento, basandosi esclusivamente sulle proprie conoscenze del sistema in esame.
L'utilizzo dell'interpretazione bayesiana insieme all'applicazione del processo di inferenza, prende il nome di bayesian reasoning, ed è esattemente ciò che permetterà di risolvere i problemi in situazioni di incertezza. Permette, infatti, di definire un modello in base alle nostre conoscenze sul quale si potrà applicare il processo di inferenza che genererà probabilità più accurate tenendo conto delle osservazioni. Ciò nonostante, data la dimensione dei problemi con cui si ha la necessità di lavorare, si ha bisogno di strumenti che semplifichino la modellizzazione del problema e rendano l'inferenza automatica. Questi strumenti sono i linguaggi di programmazione probabilistca che estendono linguaggi noti con primitive per la gestione della probabilità e una suite di algoritmi di inferenza. Questi sfruttano un particolare tipo di grafo di tipo DAG (Direct Acyclic Graph) che si presta bene alla rappresentazione dei modelli, chiamato Belief Network. La belief network, permette di rappresentare le dipendenze presenti all'interno di un modello probabilistico e

allo stesso tempo di generare un programma probabilistico attraverso una sua semplice visita.
In questo elaborato approfondiremo e testeremo un linguaggio probabilistico appartenente al paradigma funzionale ed uno di tipo logico, rispettivamente Anglican e Problog, ma se ne possono trovare in tutti i paradigmi di programmazione. Si è deciso di testare le prestazioni di questi due linguaggi in termini di tempo, precisione e concisione su un problema che fosse sufficientemente complesso. Il problema preso in analisi è la risoluzione di una formula 3SAT, viene preso questo problema perché, come già visto, i linguaggi probabilistici sono basati sulle belief network la cui risoluzione è un problema NP-completo, quindi riconducibile al problema 3SAT. [Coo90].
Tuttavia, la risoluzione di una formula 3SAT anche se di grande dimensione, potrebbe risultare banale, per questo si vuole analizzare il comportamento soprattutto in istanze particolari, conosciute come HARD 3SAT, che presentano un rapporto preciso tra numero di variabili e di clausole che compongono la formula. Questo rapporto assicura che la risoluzione della formula sia complessa, perché, se esistono, il numero di assegnamenti che rendono vera la formula é basso, per cui potrebbe essere necessario scansionarli tutti prima di trovarne uno che la renda soddisfacibile. Per eseguire quest'analisi é stato implementato un generatore di formule HARD 3SAT e una funzione che permettesse la conversione della formula nella relativa belief network, per permettere la successiva traduzione in un programma per i due linguaggi. A questo punto, si tiene traccia dei risultati ottenuti per i due programma per poi procedere con l'analisi dettagliata.

Struttura della tesi

- **CAPITOLO 1:** introduzione dei concetti fondamentali della probabilitá, con un focus maggiore sul ragionamento bayesiano e l'inferenza, che ci permette di arrivare a conclusioni piú solide sfruttando le evidenze. Vengono introdotte le Belief Network che permettono di rappresentare un modello probabilistico.

- **CAPITOLO 2:** vengono accennate le caratteristiche principali dei diversi paradigmi di programmazione e viene introdotta la programmazione probabilistica.

Introdotti di due linguaggi di programmazione probabilistica: Anglican, di tipo funzionale e Problog, di tipo logico. Introduzione dei loro costrutti principali.

- **CAPITOLO 3:** descrizione dell'implementazione dell'analisi sulle le prestazioni, su problemi di inferenza complessi, dei linguaggi Anglican e Problog. Analisi dei risultati ottenuti.

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Probabilità Bayesiana

1.1 Probabilità

La probabilità è una misura che permette di quantificare la possibilità che un evento si verifichi oppure no. Ha lo scopo di formulare e studiare modelli matematici che permettano di descrivere il comportamento di un evento, nonostante non si sia in grado di predirlo con totale certezza. Secondo la definizione classica la probabilità di un evento casuale è data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli al presentarsi di tale evento ed il numero totale di casi possibili, supponendo che tutti i possibili casi siano equiprobabili. In termini matematici:

$$P(E) = \frac{n_E}{n} \tag{1.1}$$

dove n_E corrisponde al numero di volte in cui potrebbe verificarsi E ed n è il numero di esperimenti fatti. Tuttavia è possibile riconoscere due diverse interpretazioni della probabilità:

- interpretazione **frequentista**: la probabilità viene definita in modo oggettivo come il rapporto tra il numero di volte in cui si verifica l'evento di interesse ed il numero totale di prove effettuate, per un numero di prove che tende all'infinito. In termini matematici:

$$P(E) = \lim_{x \to \infty} \frac{n_e}{n} \tag{1.2}$$

- interpretazione **bayesiana**: la probabilità viene definita in modo soggettivo, infatti alle ipotesi viene associata una probabilità che indica il grado di fiducia che un individuo ha nel verificarsi di un certo evento, il quale dipende dalle informazioni che ha riguardo l'evento.

Non si può determinare se un approccio sia migliore dell'altro, ma si può notare che entrambe le interpretazioni soddisfano gli assiomi della probabilità: Assumendo che Ω sia l'insieme di casi possibili, che $|\Omega| = n$ sia la sua cardinalità e che E_i, con i=1,2..,n siano gli eventi di Ω, allora:

$$0 \leq P(E_i) \leq 1 \tag{1.3}$$

$$P(\Omega) = 1 \tag{1.4}$$

$$P(\cup_{n\to\infty}^{\infty} E_i) = \Sigma_{n\to\infty}^{\infty} P(E_i) \tag{1.5}$$

La differenza sostanziale tra i due approcci si deve cercare nell'interpretazione che viene assegnata alla probabilità, che inciderà sull'utilizzo e l'importanza assegnata al teorema di Bayes, anch'esso comune nelle due interpretazioni.

In questa sezione verranno analizzate in maniera più approfondita la probabilità e l'inferenza Bayesiana. Per cominciare verranno richiamate alcune definizioni che sono alla base di questa, quali il teorema di Bayes, probabilità condizionata, distribuzione a priori e a posteriori.

1.2 Richiamo definizioni

1.2.1 Distribuzione

Una distribuzione di probabilità è un modello matematico che collega i valori di una variabile alle probabilità che tali valori possano essere osservati.

1.2.2 Modello probabilistico:

Fornisce una descrizione degli eventi che si possono verificare e della probabilità con il quale ci si aspetta si verifichino.

1.2.3 Probabilità congiunta

La probabilità congiunta indica la probabilità che due eventi A e B si verifichino nello stesso momento. Si indica come:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(A) \tag{1.6}$$

Nel caso in cui due eventi siano indipendenti, ovvero conoscere lo stato dell'evento A non ci fornisce alcuna informazione in più sullo stato di B, la probabilità congiunta equivale a:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{1.7}$$

1.2.4 Probabilità condizionata

In teoria della probabilità la probabilità condizionata di un evento A rispetto a un evento B è la probabilità che si verifichi A, sapendo che B si è verificato. Viene indicata come:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1.8}$$

dove $P(B) \neq 0$ e $P(A \cap B)$ indica la probabilità congiunta.

La probabilità condizionata esprime una "correzione" delle aspettative per A, dettata dall'osservazione di B.

1.2.5 Marginalizzazione

Conoscendo la distribuzione congiunta $P(A \cap B)$ è possibile ricavare la distribuzione di $P(X)$ usando la marginalizzazione

$$P(A) = \Sigma_B P(A \cap B)) \tag{1.9}$$

1.2.6 Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes mette in relazione la probabilità condizionata con quella congiunta.

Enunciato: La probabilità a posteriori è uguale alla probabilità a priori per likelihood ratio.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \tag{1.10}$$

dove:

- probabilità a priori: corrisponde a $P(A)$, ovvero alla probabilità che l'evento A si verifichi prima di prendere in considerazione le osservazioni.
- probabilità a posteriori: corrisponde a $P(A|B)$, ovvero alla probabilità che l'evento si verifichi avendo considerato le osservazioni. Può essere considerata un aggiustamento della probabilità a priori.
- funzione di verosomiglianza (likelihood): corrisponde a $P(B|A)$,ovvero alla probabilità che si verifichi un evento, avendo osservato A .

1.3 Probabilistic Reasoning

Il ragionamento probabilistico (o Probabilistic reasoning) combina la nostra conoscenza rispetto ad una situazione con le regole della probabilità. Determina fattori critici che non sono stati analizzati,ai fini di prendere una buona decisione in situazioni di incertezza.Per fare ciò si ha bisogno di definire un modello, di applicare le evidenze possedute sul modello e di trarre delle conclusioni. Utilizzando il probabilistic reasoning è possibile eseguire tre diversi tipi di ragionamento:

- predire eventi futuri: attraverso le osservazioni possedute in questo momento si cerca di predire la probabilità che un evento accada.
- inferire le cause agli effetti: abbiamo un osservazione sul presente e vogliamo definire la probabilità che alcuni eventi si siano verificati.
- imparare da eventi passati per predire in modo migliore eventi futuri: vengono prese tutte le informazioni riguardo situazioni precedenti più quella corrente, verrà fatta inferenza che migliorerà i risultati dell'evento predetto.

Inferenza

Il processo di inferenza permette partendo da un modello di rispondere a domande basate sull'osservazione di alcuni eventi. E' un processo che viene fatto quotidianamente dalla mente umana in situazioni di incertezza, per esempio:
"Attraversando la strada tutti abbiamo fatto ciò: Sei di fretta, quindi invece di arrivare alle prossime strisce pedonali guardi a destra e a sinistra e vedi una macchina ad una distanza sufficiente perchè tu riesca ad attraversare la strada senza essere investito. Quindi tu cammini (e immagino) attraversi la strada illeso".[Las12]

Questo è il tipico processo di inferenza eseguito involontariamente dalla nostra mente. In questo esempio,infatti, non si sa con certezza che la macchina vista non stesse andando troppo veloce da investirci eppure conosciamo un modello, composto anche da esperienze passate, e nel vedere la macchina ad una certa distanza e con una certa velocità , riusciamo a decidere se attraversare la strada senza rischiare di essere investiti.

1.3.1 Bayesian Reasoning

Come per la definizione di probabilità anche il probabilistic reasoning si divide in Bayesian e Frequentist reasoning.
Nella prospettiva bayesiana, abbiamo detto che la probabilità descrive l'incertezza con il quale è possibile prevedere l'esito del fenomeno in questione e che questa incertezza può derivare dall'intrinseca variabilità del processo, ma anche dalla nostra imperfetta conoscenza di esso.
Ora l'idea base è quella di fare inferenza (bayesiana), ossia sviluppare delle previsioni (probabilità a posteriori), su quantità non note, in base all'evidenza disponibile e a un'ipotesi iniziale(probabilità a priori). E' possibile fare tutto ciò utilizzando il teorema di Bayes che viene interpretato come in Figura 1.1:

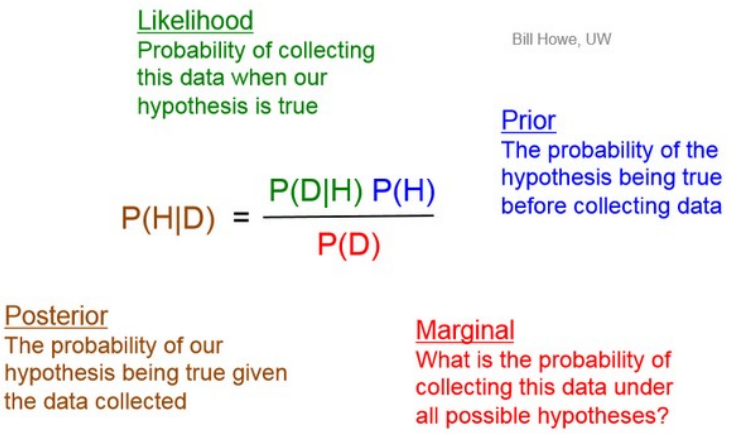


Figura 1.1: Interpretazione del teorema di Bayes nella probabilitá Bayesiana
Fonte:
https://gerardnico.com/_media/statistics/bayes_theorem.jpg

1.3.2 Analisi Bayesiana

L'analisi Bayesiana consiste quindi nel:

- creare un modello di probabilità che rappresenti i dati
- identificare le evidenze
- eseguire l'inferenza

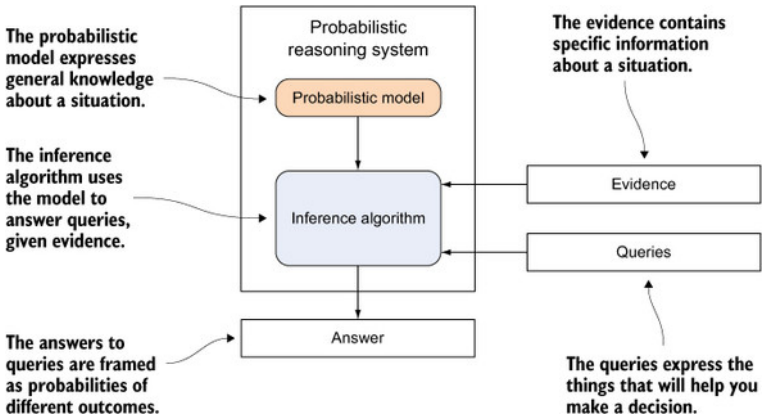


Figura 1.2: Illustrazione del processo di inferenza in termini matematici.
Fonte:https://dpzbhybb2pdcj.cloudfront.net/pfeffer/Figures/01fig03alt.jpg

Esempio 1:

Un giorno Tracey si sveglia è realizza che l'erba del suo giardino è bagnata. Avrà piovuto durante la notte oppure si è dimenticata di spegnere l'irrigatore? Dopodichè si rende conto che anche l'erba del suo vicino è bagnata. Qual è la probabilità che Tracey abbia lasciato l'irrigatore acceso durante la notte?[Bar12]

Modello:

$R \in 0, 1 \rightarrow R$ =1 ha piovuto, 0 altrimenti

$S \in 0, 1 \rightarrow S$ =1 Tracey ha lasciato l'irrigatore acceso, 0 altrimenti

$J \in 0, 1 \rightarrow J$ =1 l'erba di Jack *è* bagnata, 0 altrimenti

$T \in 0, 1 \rightarrow T$ =1 l'erba di Tracey *è* bagnata, 0 altrimenti

Il modello per il problema di Tracey corrisponde alla probabilita congiunta di $P(T, J, R, S)$. Per procedere con la risoluzione è necessario, inoltre, definire il tipo di dipendenza che c'è tra i diversi eventi: $P(T|S, R)$ e $P(J|R)$.

$$P(T, J, R, S) = P(J|S, R)P(J|R)P(R)P(S)$$

Queste relazioni possono essere rappresentate anche in modo grafico attraverso una Bayes Network, che verrà spiegata approfonditamente successivamente.

Dal problema evince che $T = 1$ e $R = 1$. Supponiamo che le probabilità a priori siano: $P(R) = 0.2$ $P(S) = 0.1$ Mentre le altre probabilità corrispondono a:

$$P(J = 1|R = 1) = 1, P(J = 1|R = 0) = 0.2$$

$$P(T = 1|R = 1, S = 0) = 1, P(T = 1|R = 1, S = 1) = 1$$

$$P(T = 1|R = 0, S = 1) = 0.9, p(T = 1|R = 0, S = 0) = 0$$

.

A questo punto si può iniziare ad eseguire l'inferenza andando ad applicare il teorema di Bayes. L'obiettivo è calcolare P(S—T,J). Iniziamo con il calcolare P(S—T) e vediamo come cambiano le due probabilità con l'aggiunta di un'evidenza.

$$\begin{aligned} P(S|T) &= \frac{P(S,T)}{P(T)} = \frac{\Sigma_{J,R}\, P(T,J,R,S)}{\Sigma_{J,R\,,S}\, P(T,J,R,S)} \\ &= \frac{\Sigma_{J,R}\, P(J|R)P(T|R,S)P(R)P(S)}{\Sigma_{J,R\,,S}\, P(J|R)P(T|R,S)P(S)} \\ &= \frac{\Sigma_R P(T|R,S)P(R)P(S)}{\Sigma_{R,S}\, P(T|R,S)P(S)P(R)} = 0.3340 \end{aligned}$$

Si può notare che la probabilità a posteriori è aumentata rispetto a quella a priori, tenendo conto dell'evidenza che T = 1.

Ora andiamo a calcolare $P(S|T,J)$ e vediamo come si comporta la probabilità a posteriori in questo caso.

$$\begin{aligned} P(S|T,J) &= \frac{(S,T,J)}{P(T,J)} = \frac{\Sigma_R P(T,J,R,S)}{\Sigma_{R,S}\, p(T,J,R,S)} \\ &= \frac{\Sigma_R P(J|R)P(T|R,S)P(R)P(S)}{\Sigma_R P(J|R)P(T|R,S)P(R)P(S)} = 0.160 \end{aligned}$$

La probabilità che Tracey abbia lasciato l'irrigatore acceso, data l'evidenza che anche l'erba di Jack è bagnata è inferiore di quella che tiene conto solo dell'erba di Tracey. Questo perchè l'osservazione che l'erba di Jack è bagnata aumenta la probabilità che sia vero che abbia piovuto.

1.4 Belief Network

Come è stato accennato precedentemente è possibile rappresentare un modello probabilistico attraverso una Belief Network(Bayesian Belief Network) che non è altro che un DAG (Direct Acyclic Graph) che è in grado di rappresentare le dipendenze condizionali di un modello.

All'interno della Belief network ogni nodo rappresenta una variabile ed è associato ad una funzione di probabilità,che specifica la probabilità di ogni nodo sulla base delle probabilità dei nodi figli e restituisce la distribuzione di probabilità del nodo. Gli

archi, invece, rappresentano le dipendenze condizionali delle variabili. L'assenza di un cammino tra due nodi implica che le due variabili sono condizionalmente indipendenti. Rappresentare la dipendenza tuttavia non è così immediato, infatti bisognerebbe tenere conto di alcuni pattern, quali:

- $A \rightarrow B \rightarrow C$: viene chiamato "chain ". A primo impatto si potrebbe pensare che il valore di A influenzi C attraverso B, ma non è così. Infatti, è osservabile che condizionando la varibile B =1 il valore di C non varierà indipendentemente dal valore che assume B. Quindi le variabili A e C sono indipendenti.

- $A \leftarrow B \rightarrow C$: viene chiamato "fork". Anche in questo caso abbiamo che A e C sono indipendenti, nonostante sembrerebbero essere correlati attraverso B.

- $A \rightarrow B \leftarrow C$: viene chiamato "collider". A e C sono indipendenti in linea generale, ma condizionando B diventano dipendenti. Più precisamente si ha che A e B sono inversamente proporzionali, quindi un valore alto di A spiega il perchè di un valore basso di C.

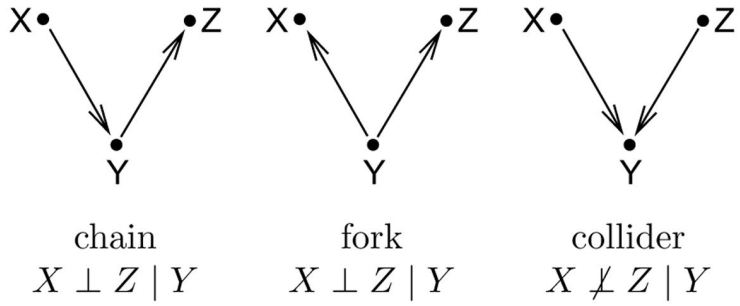


Figura 1.3: Possibili tipi di dipendenza tra variabili in una belief network
Fonte: https://bmcbioinformatics.biomedcentral.com/articles/10.1186/1471-2105-8-S6-S5/figures/3

Successivamente daremo una definizione di Belief Network, che ci permetterà di vedere per quale motivo si prestano così bene al processo di inferenza.

Definizione:

Una belief Network è una distribuzione della forma:

$$P(x_1, ..., x_n) = \Pi_{i=1}^{D}(x_i|Pa(x_1)) \tag{1.11}$$

dove $Pa(x_i)$ equivale alle variabili parenti di x_i.

Si può notare che esse sfruttano la probabilità condizionale del quale dispongono per definizione di belief network. A partire da questa é possibile fare la valutazione della variabile desiderata.
Tuttavia, per fare inferenza si possono utilizzare anche altre tecniche, come ad esempio MCMC, che si presta bene ad inferire su reti di grandi dimensioni.

MCMC

Per descrivere MCMC abbiamo bisogno di introdurre cos'è la catena di Markov.
La catena di markov è un processo stocastico in cui si definisce il valore da assegnare ad una variabile dipendentemente dal valore assunto dalla stessa nell' istante precedente.

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1}|X(t_n) = x_n)$$

Le tecniche MCMC (Markov chain Monte Carlo) costituiscono una classe di algoritmi per il campionamento da distribuzioni di probabilità. Si costruisce una catena di markov che abbia una distribuzione di equilibrio pari alla distribuzione desiderata.

A questo punto simulando un grande numero di passi sulla catena di Markov è possibile prendere il risultato come il valore di campionamento della distribuzione desiderata. Vediamo un esempio di algoritmo appartenente a questa classe: Metropolis-Hastings. Metropolis-Hastings campiona sequenzialmente in modo tale che maggiore è il numero di campioni prodotto, più il valore ottenuto è vicino al valore desiderato. Ad ogni passo l'algoritmo sceglie un possibile valore candidato guardando il precedente, dopodichè questo valore viene accettato rispetta certe proprietà, o rifiutato.

Esempio 2:

Si andrà a rappresentare una belief network per l'Esempio 1 nella Figura 1.4.

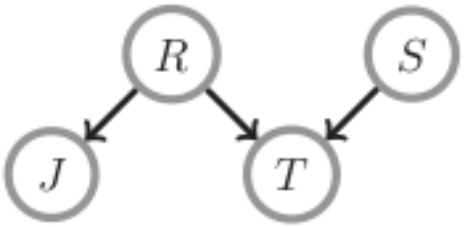


Figura 1.4

Ogni nodo del grafo rappresenta una delle variabili della probabilità congiunta, e le variabili che alimentano altre, come ad esempio R e S , rappresentano le variabili che si trovano alla destra in una probabilità condizionata. E' possibile vedere che vengono anche rispettati i pattern spigati sopra; infatti R e S sono indipendenti e non presentano cammini tra essi, mentre J che è dipendente da R viene raggiunto solo da R e T che dipende da R e S viene raggiunto da entrambi.

Capitolo 2

Probabilistic Programming

Finora si è arrivati alla conclusione che grazie alla probabilità e all'inferenza è possibile ragionare in condizioni di incertezza. Negli ultimi anni c'è stato un grande sviluppo in campi come Artificial Intelligence e Data Science, nei quali si ha bisogno di fare questo tipo di ragionamento , ma soprattutto si ha la necessità di lavorare su modelli di dimensione sempre maggiore. Per semplificare la modellizzazione e rendere l'inferenza automatica in questo tipo di problemi, è stata introdotta la programmazione probabilistica. Per eseguire la programmazione probabilistica è necessario utilizzare dei PPL (Probabilistic programming language), che permettono di esprimere i modelli come programmi e non come costrutti matematici e possiedono una suite di algoritmi di inferenza che potranno essere applicati ai programmi.

Tutti questi programmi nascono come estensioni di linguaggi tradizionali, ad esempio, il linguaggio logico problog, basato su prolog e anglican, linguaggio funzionale che estende Clojoure.

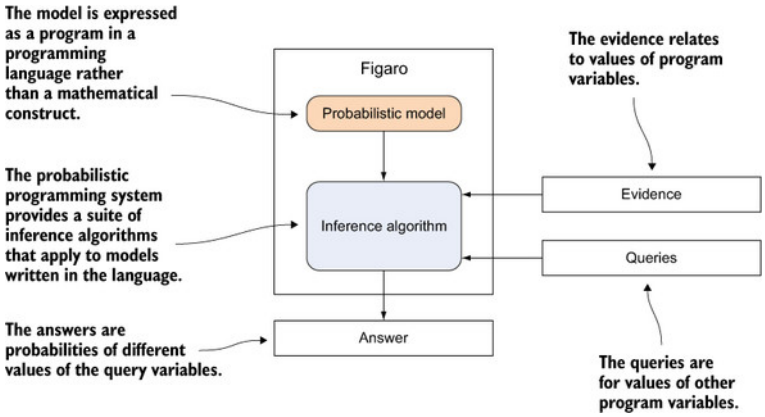


Figura 2.1: Programmazione probabilistica.
Nell'immagine illustrazione del processo di inferenza nella programmazione.
Fonte:https://dpzbhybb2pdcj.cloudfront.net/pfeffer/Figures/01fig07alt.jpg

Lo scopo di questa sezione è quello di approfondire alcuni linguaggi probabilistici; per questo verranno analizzati i paradigmi dal quale nascono e il modo che impiegano per affrontare la programmazione probabilistica.

2.1 Il Paradigma Imperativo

La programmazione imperativa è un paradigma di programmazione in cui il programma consiste in una sequenza di istruzioni (statement) che permettono di arrivare al risultato desiderato.
Gli statement sono il costrutto principale di questo tipo di programmazione perchè permettono di cambiare lo stato di un programma, che potrebbe influire sul flusso di operazioni da eseguire. Questo cambiamento di stato prende il nome di side-effect.
Un tipo particolare di programmazione imperativa è quella procedurale, che prevede la divisione del codice in "blocchi" che possono essere riutilizzati in punti diversi del programma e , inoltre, permette una struttura del programma più naturale.

Esempio:

Viene fornita una possibile implementazione della funzione fattoriale nel linguaggio di programmazione C++.

```
int factorial(int n){
    int result = 1;
    for( ; i < n; (n --){
        result*=n;
    }
    return result;
}
int main(){

    result=factorial(10)

}
```

2.2 Il Paradigma Orientato agli Oggetti

La programmazione ad oggetti è un paradigma di programmazione basato sul concetto di "oggetto". Per poter spiegare questo tipo di paradigma abbiamo bisogno di definire:

- **oggetto:** può essere visto come una capsula che contiene dei dati (attributi) e delle operazioni con cui manipolarli (metodi) e che fornisce un' interfaccia attraverso la quale è possibile accedere all'oggetto.

- **classe:** contiene la dichiarazione degli attributi e dei metodi di un oggetto.

. Un oggetto è, quindi, una particolare istanza della classe. La programmazione ad oggetti fornisce tre meccanismi particolari:

- **incapsulamento:** consiste nella separazione dell'interfaccia di una classe dalla sua implementazione. Questo fa si che un utente possa definire un oggetto ed utilizzarlo senza però conoscerne l'implementazione.

- **ereditarietà:** permette di definire una classe(sottoclasse) a partire da un'altra(superclasse). La sottoclasse eredita attributi e metodi della superclasse, ma può anche definirne nuovi e ridefinire i metodi della superclasse.

- **polimorfismo:** permette di utilizzare lo stesso codice con istanze di classi diverse. E' utile quando la versione del metodo da utilizzare dipende dal valore assunto da una variabile a runtime.

Esempio:

Si mostra una possibile implementazione di un programma che calcoli il fattoriale nel linguaggio object oriented Java. Si vuole definire la classe Math, contenente alcuni valori utili, e il metodo per il calcolo del fattoriale.

```
class Math{
    public:
        float piGreco= 3,14
        int n=10
        int factorial()
}
int Math::factorial(){
    int result = 1;
    for( ; i < this.n; (this.n --){
        result*=this.n;
    }
    return result;
}
```

Questi sono appunto i costrutti fondamentali della programmazione ad oggetti, che la diversificano dalla programmazione di tipo imperativo.

2.3 Il Paradigma Funzionale

La programmazione funzionale è un paradigma di programmazione dichiarativo, in altre parole, viene specificato *cosa* bisogna calcolare, descrivendo la logica di una computazione senza definire *come* deve essere calcolato, ovvero viene omesso l'intero flusso di controllo. In questo tipo di programmazione gli statement vengono sostituiti con delle espressioni e la computazione consiste nella valutazione di queste attraverso la riscrittura. La riscrittura è alla base del paradigma funzionale e consiste nel semplificare ripetutamente un'espressione sino a raggiungere una forma non ulteriormente riducibile. Inoltre, la valutazione di espressioni ha la caratteristica di non richiedere side-effect, non avendo quindi bisogno della nozione di memoria, che invece è necessaria nei linguaggi convenzionali.
Oltre questo la programmazione funzionale dispone di altri elementi caratterizzanti, quali:

- funzioni di ordine superiore: sono funzioni che possono ricevere altre funzioni come parametro o che possono restituire altre funzioni.
- funzioni pure: non hanno side-effects, questo evita le dipendenza di una funzione da altre, consentendo di modificare una funzione senza influire su altre.
- ricorsione: è il costrutto più utilizzato per eseguire dei cicli all'interno della programmazione funzionale.
- trasparenza referenziale: nei linguaggi funzionali non sono presenti assegnamenti, questo permette di essere certi che quando una funzione viene valutata in un certo ambiente verrà ritornato sempre lo stesso valore.

Esempio

Si mostra come è possibile scrivere un programma che calcoli il fattoriale con il linguaggio puramente funzionale Haskell.

```
fact :: Integer -> Integer
fact 0 = 1
fact n | n > 0 = n * fact (n - 1)
```

Confrontando il programma che calcola il fattoriale nei due paradigmi, si puó notare come in quello funzionale viene data solamente la definizione matematica di fattoriale, mentre in quello imperativo vengono esplicitati tutti i passi da eseguire per poter arrivare al calcolo del fattoriale. Da notare, che anche il programma imperativo potrebbe essere riscritto utilizzando la ricorsione, ma si vuole sottolineare come nel paradigma imperativo si ha la possibilità di scegliere mentre in quello funzionale si è costretti ad utilizzarla.

2.4 Il Paradigma Logico

Il paradigma logico, come quello funzionale, fa parte della famiglia dei linguaggi dichiarativi ed è basato sulla logica del prim'ordine.
La nozione alla base di questo paradigma corrisponde ad un' equazione:

$$Algoritmo = logica + controllo$$

Infatti, algoritmi di questo tipo prevedono una netta separazione tra la logica, che definisce "cosa" debba essere fatto ed è implementata dal programmatore, e il controllo, che definisce "come" arrivare alla soluzione. La computazione, di cui se ne occupa il controllo, è vista come deduzione logica, tant' è che viene utilizzata una regola di deduzione per individuare, all'interno dello spazio delle possibili soluzioni, quella che rappresenta la "logica" specificata.
i programmi logici sono composti da:

- **regole**: corrispondono a delle implicazioni e sono della forma:

  $$H :- A_1, ..., A_n.$$

  La parte a sinistra di :- è detta "testa", mentre quella a destra è detta "corpo ". Questa forma si legge: "testa è vera se corpo è vero".
  (Si noti che la regola termina con un punto. e le virgole sono intese come congiunzioni)

- **fatti**: Un singolo termine (anche composto), senza il segno ":-", viene chiamato fatto. I fatti equivalgono a regole senza corpo, che sono considerate automaticamente

vere. Un esempio di fatto è:

$$gatto(tommaso).$$

che implica che Tommaso è un gatto.

Questo genere di programmi sono utilizzati per verificare la correttezza di un programma e per ottimizzare programmi di tipo imperativo, infatti, e possibile passare da un programma logico ad uno imperativo che sia più efficiente applicando delle tecniche di trasformazione.

Esempio

Implementazione del solito programma per il calcolo del fattoriale nel linguaggio di programmazione logica Problog.

```
factorial(0,1).
factorial(1,1).

factorial(N,F) :-
    N>0,
    N1 is N-1,
    factorial(N1,F1),
    F is N * F1.
```

Andando ad analizzare il programma che calcola il fattoriale nel paradigma logica si vede che vengono fatte delle " dichiarazioni" sui fatti noti, come ad esempio, che il fattoriale di O ed 1 è uguale ad 1 e successivamente si richiede di calcolare il fattoriale seguendo la regola che ci dice che bisogna calcolare F1* N dove F1 contiene il valore del fattoriale di n-1.

2.5 Linguaggi per il Probabilistic Programming

Come è stato detto precedentemente, i linguaggi di programmazione probabilistica sono stati introdotti per semplificare la modellizzazione di casi di incertezza e beneficiare

degli algoritmi di inferenza che sono stati messi a disposizione.
Come e' stato detto precedentemente, questi linguaggi sono basati su linguaggi già noti, all'interno del quale vengono introdotte primitive per eseguire programmazione probabilistica. Di linguaggi di questo tipo ne esitono diversi che cercano un compromesso tra efficienza, espressivita' e perspicacia.
Qui verranno analizzati un linguaggio probabilistico di tipo funzionale: Anglican e uno di tipo logico, Problog.

2.5.1 Anglican

Anglican è un PPL integrato in Clojoure che a sua volta è un dialetto del linguaggio di programmazione funzionale Lisp.
Anglican è costituito da alcuni costrutti propri che lo rendono un linguaggio probabilistico e all'interno del quale non vengono riconosciute tutte le funzioni definite in clojure, sebbene sia basato su esso.
Questi costrutti sono:

- `defquery:` E' una macro che abilita il linguaggio anglican all'interno di un modulo clojure. Al suo interno viene rappresentata la probabilità congiunta e si possono trovare i costrutti:
  - `let:` vengono definite le prior probability;
  - `observe:` viene definito il valore delle variabili casuali di cui si è a conoscenza.
  - `valore di ritorno`: valore della distribuzione condizionale della variabile di interesse.
  - sono supportati anche i costrutti clojure `if, when, cond, case, and, or, fn`
- `defm:` permette di definire delle funzioni in anglican all'esterno di defquery e di richiamarle al suo interno
- `sample:` viene usato per "estrarre" un valore dalle distribuzioni associate alle variabili

- `doquery`: usa algoritmi di inferenza per valutare il valore di ritorno richiesto in defquery.

Inoltre, dispone di una vasta gamma di distribuzioni come, ad esempio, quella di Bernoulli, flip, Poisson.[Tol+16]

Dalla belief network al codice:

Riprendendo la belief network dell'Esempio 2 vediamo come sia possibile, a partire da essa, scrivere un programma in anglican che esegua l'inferenza. Un programma anglican inizia all'interno del costrutto defquery in cui è possibile definire il modello probabilistico tramite il costrutto let. Per prima cosa vengono definite le probabilità a priori, che corrispondono alle variabili indipendenti della nostra belief network ,ovvero ai nodi senza archi entranti. Dopodiche' vengono definite le probabilità condizionate, dove la distribuzione di probabilità da associare alle variabili associando dipende dai valori assunti dalle variabili dei nodi entranti.
A questo punto,il modello è stato definito e si puo' procedere con la definizione delle evidenze. Per fare ciò si usa il costrutto observe, nella forma (observe variabile osservazione)" che associa alla variabile il valore di osservazione.
Infine, nel costrutto doquery viene definito l'algoritmo con il quale si vuole fare inferenza sul modello, che può essere del tipo MCMC o Importance Sampling e devono essere specificati il numero di particelle ed il numero di iterazioni da usare all'interno dell'algoritmo. Nel nostro caso useremo un algoritmo MCMC chiamato lmh.

Esempio:

```
(ns bayes-net-raining
  (:require [gorilla-plot.core :as plot]
            [anglican.stat :as s])
  (:use clojure.repl
        [anglican core runtime emit
         [inference :only [collect-by]]]))
```

```
(defquery raining-b-net [t-wet-grass j-wet-grass]
  (let [raining  (sample(flip 0.4))

        sprinkler (sample (flip 0.3))
        jack (cond (= raining true)
                        (flip 0.9)
                   (= raining false)
                        (flip 0.2))

        tracey(cond(and (= raining true)
                        (= sprinkler true))
                        (flip 0.99)
                   (and (= raining false)
                        (= sprinkler false))
                        (flip 0.02)
                   (or  (= raining true)
                        (= sprinkler true))
                        (flip 0.99))]
    (observe tracey t-wet-grass)
    (observe jack j-wet-grass)

    raining))
(->> (doquery :lmh raining-b-net [true false] :number-of-particles 100)
     (take 10000)
     (collect-by :result)
     (s/empirical-distribution)
     (#(plot/bar-chart (keys %) (vals %))))
```

2.5.2 Problog

Problog è un linguaggio probabilistico basato su Prolog, che permette oltre a specificare le relazioni tra i diversi componenti, anche di catturare l'incertezza con il quale essi si possono verificare.
La differenza tra problog e prolog risiede nel tipo di informazione che si vuole ricavare, infatti, mentre in prolog si e' interessati a sapere se una query si verifica o meno in

problog si vuole conoscere la probabilita' con il quale essa si verifica.
Problog permette di:

- calcolare qualsiasi probabilità marginale quando ha a diaposizione delle evidenze.
- Imparare i parametri di un programma problog avendo a disposizione delle informazioni solo parziali
- campionare da un programma problog
- risolvere problemi di decisione

[DKT07]

Dalla belief network al codice:

Come nel caso di anglican vengono codificati prima i nodi indipendenti della belief network, associandogli una probabilità a priori. Queste corrisponderanno a dei fatti nel linguaggio problog.
Successivamente, si definiscono le probabilità condizionate, che rappresenteranno le regole. Dato che dalla belief network, possiamo notare che T e J sono condizionate da R ed S, lo andremo a tradurre in una regola di questo tipo:

$$0.9 :: traceyWetGrass : -raining, sprinkler.$$

Questa vuol dire che P(T)=0.9 se e solo se sono vere sia R che S, infatti il simbolor ", " corrisponde al connettivo logico "AND", mentre " ; " corrisponde al connettivo logico " OR " e " " corrisponde al "NOT".
All'interno del programma problog, a differenza di anglican, non abbiamo bisogno di esplicitare quale algoritmo di inferenza dobbiamo utilizzare, in quanto sarà il compilatore a decidere quale sia il più adatto al caso. Questo perchè, se ricordiamo la composizione di un algoritmo logico(Paragrafo 2.4), rientra nei compiti del controllo.

Esempio:

```
0.4::raining.
0.3::sprinkler.
0.9::jackWetGrass :- raining.
0.9::traceyWetGrass :- raining, sprinkler.
0.7::traceyWetGrass :- \+raining, sprinkler.
0.7::traceyWetGrass :- raining, \+sprinkler.

evidence(traceyWetGrass,false).
evidence(jackWetGrass,true).

query(raining).
query(sprinkler).
```

Capitolo 3

Risultati Sperimentali

3.1 Introduzione al problema

In questo capitolo si è svolta l'analisi delle prestazioni delle tecniche di inferenza di due dei linguaggi di programmazione probabilistica introdotti, Anglican e Problog.
Per eseguire un'analisi delle prestazione è necessario vedere il loro comportamento su istanze di problemi più complesse di quelle viste nel capitolo precedente. Per questo motivo, si è pensato di provare a risolvere il problema decisionale 3SAT, usando delle sue istanze intrinsecamente difficili da risolvere per la loro struttura, dette appunto, HARD 3SAT.
A prima vista sembrerebbe difficile rappresentare una formula 3SAT in un modello probabilistico, ma come vedremo, è possibile trasformare una formula 3SAT in una Belief Network dal quale poi sarà semplice ricavare il modello probabilistico.
Oltre i concetti trattati precedentemente, per la comprensione di questo capitolo è necessario introdurre SAT e 3SAT.

3.1.1 SAT e 3SAT

Con il termine Sat (satisfiability) si indica il problema decisionale che determina se una formula booleana sia soddisfacibile o meno.
Sia F una formula della logica proposizionale del tipo $F = \{(u1 \vee u2 \wedge \neg u3)\}$, F si dice soddisfacibile se è possibile assegnare alle variabili u1,u2,u3 il valore TRUE o FALSE in

modo tale che l'intera formula F risulti TRUE.
Nel nostro problema si farà uso di formule 3Sat, che non sono altro che una caso particolare di Sat, in cui le formule presentano una forma ben precisa.
Sia F una formula 3Sat essa sarà della forma:

$$F = \{c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_n\}$$

con

$$c_i = (u_1 \vee u_2 \vee u_3)$$

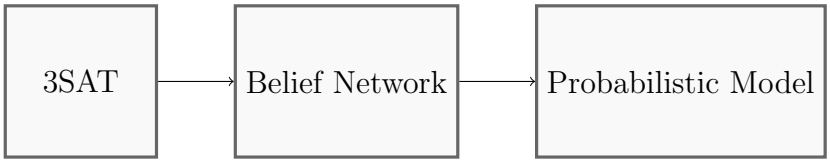
dove c_i è chiamata clausola, mentre u_i è detto letterale ed è associato ad una variabile. Quindi, il letterale u_i è vero se e solo se la variabile u_i a associata è TRUE, invece $\neg u_i$ è vero se e solo se la variabile associata $\neg u_i$ è falsa.

Esempio:

Sia $F = \{(u_1 \vee u_2 \vee u_3) \wedge (\neg u_1 \vee \neg u_2 \vee u_3) \wedge (u_2 \vee \neg u_3 \vee u_4)\}$, un possibile assegnamento di verità per il quale la formula è soddisfacibile potrebbe essere: $u_1 = T$,$u_2 = F$,$u_3 = F$,$u_4 = T$. Per cui diciamo che F è soddisfacibile.

3.2 3SAT Come Belief Network

Per poter analizzare le prestazioni dei nostri linguaggi su un'istanza di 3SAT, abbiamo bisogno di riuscire a descriverla attraverso un modello probabilistico.
Nei capitoli precedenti abbiamo visto come è possibile a partire da una belief network ricavare il relativo modello probabilistico. Questo è un punto che possiamo sfruttare a nostro favore, riducendo il problema iniziale nel creare una belief network che rispecchi la formula. Da qui il modello probabilistico verrà scritto banalmente.

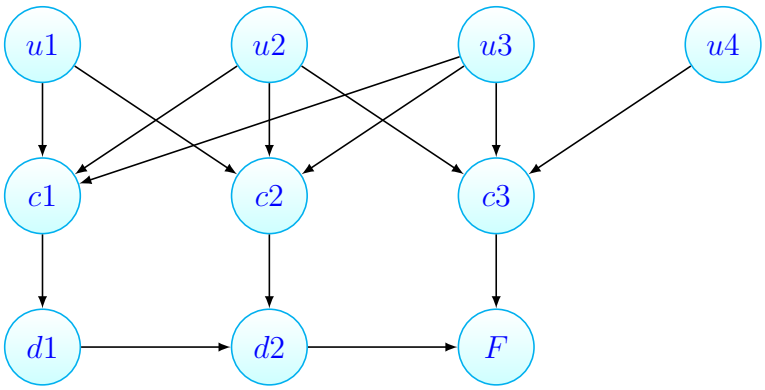


Osservando una formula 3SAT si può vedere che le clausole e la formula sono dipendenti rispettivamente dai letterali e dalle clausole, mentre i letterali sono variabili indipendenti. Ricapitolando, ogni clausola c_i è dipendente dal valore dei letterali da cui è composta, quindi ogni nodo che rappresenta i letterali di c_i dovrà avere un arco uscente verso c_i. La clausola c_i, quindi, sarà TRUE se e solo se il valore di verità di almeno uno dei letterali sarà TRUE. La stessa cosa vale per la formula, dato che il suo valore di verità dipende dal valore di verità di tutte le clausole che la compongono. Per cui ogni nodo c_i dovrà avere un arco uscente verso F che sarà TRUE se e solo se tutte le clausole sono TRUE. Tuttavia per rendere meno complessa la belief network e il modello probabilistico verranno inseriti dei nodi di appoggio (D_i) con il compito di semplificare l'and tra tutte le clausole. Ogni nodo (D_i) possiederà un arco entrante proveniente dal nodo (C_i) ed uno uscente che arriverà nel nodo ($D_i + 1$). L'n-esimo nodo d'appoggio, dove n è uguale alla dimensione della formula, corrisponderà al nodo F. I letterali invece corrispondono alle variabili indipendenti, per cui non avranno alcun arco entrante e saranno TRUE in accordo con la probabilità a priori ad essi associata.[Coo90]

Esempio:

La formula introdotta nell'esempio precedente corrisponderà alla seguente belief network:

$$F = \{(u_1 \vee u_2 \vee u_3) \wedge (\neg u_1 \vee \neg u_2 \vee u_3) \wedge (u_2 \vee \neg u_3 \vee u_4)\}$$



3.3 Hard 3SAT

Abbiamo detto che per eseguire un'analisi delle prestazioni abbiamo bisogno di fare inferenza su problemi complessi.
3SAT puó raggiungere grandi dimensioni, per cui sembrerebbe prestarsi bene al nostro scopo, peró vedremo che per essere veramente di difficile risoluzione, non é sufficiente che queste formule siano enormi, ma devono essere di tipo ben preciso.
Uno studio su formule 3SAT di diversa lunghezza sul quale e' stata applicata la procedura Davis-Putnam, ha dimostrato come il rapporto tra numero di clausole e variabili che compongono la formula giochi un ruolo veramente importante per ottenere formule di difficile risoluzione, che chiameremo HARD 3SAT. La procedura Davis-Putnam, assegna ad ogni chiamata, un valore di veritá alle variabili e se non soddisfano la clausola fa backtracking, sino a che la clausola non viene soddisfatta. Il numero di chiamate alla procedura corrisponde alla complessita' nel trovare un assegnamento che soddisfi la formula 3SAT.
Dallo studio é emerso che formule con poche clausole presentano pochi legami, quindi esistono molti assegnamenti che rendono la formula soddisfacibile ed e' molto probabile che uno di questi assegnamenti venga trovato in poco tempo. Mentre formule con troppe clausole, invece, sono troppo vincolate, per cui e' probabile che all'interno della formula si trovi una clausola e la sua contraddizione; ed appena viene trovata possiamo dire che la formula é insoddisfacibile, si stima che anche questa situazione venga identificata in poco tempo. Diverso é per formule di media lunghezza con un determinato rapporto tra numero di clausole e numero di variabili in quanto il numero di assegnamenti che rendono la formula vera, se esiste é molto basso; per cui é probabile sia necessario scorrere quasi tutti i possibili assegnamenti prima di trovarne uno soddisfacibile. Questo si puó osservare nel grafico della Figura 3.1. Formule 3SAT con un rapporto clausole-variabile di circa 4.3 presenta il maggior numero di chiamate a DP per poter risolvere la formula 3SAT. In quel punto, inoltre, circa il 50% delle é soddisfacibile, mentre con un rapporto inferiore é piú probabile siano soddisfacibili e viceversa. [SML96]

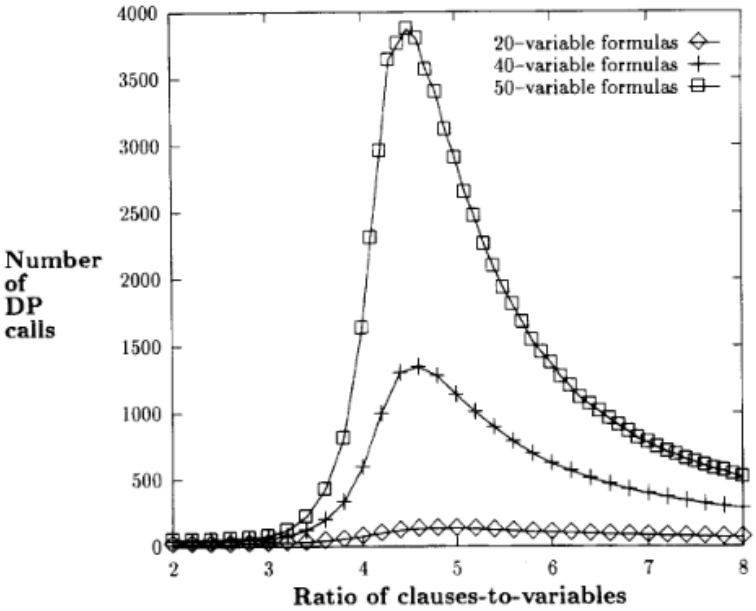


Figura 3.1: Complessitá di risoluzione di una formula 3SAT all'aumentare del rapporto tra numero di variabili e clausole.La complessitá corrisponde al numero di chiamate alla procedura DP.
Fonte: [SML96]

3.4 Implementazione

Una volta spiegati i punti fondamentali è necessario comporli per poter far analizzare le performance dei linguaggi su questo tipo di problemi d'inferenza. Per la creazione delle formule 3SAT, è stata creata una funzione che dato il numero di variabili e il numero di clausole della formula, crea una formula della lunghezza desiderata, questo ci permette di analizzare i risultati su un ampio range di formule, che va dalle piu semplici, a quelle di tipo HARD 3SAT, fino a quelle con una dimensione molto elevata.
La funzione, presi gli input, definisce l'insieme delle variabili e in modo random definisce quali variabili appartengono ad una clausola e ancora in modo casuale se sono negate oppure no.
Successivamente, la formula 3SAT generata viene data in pasto ad un funzione che genera

la relativa belief network come spiegato nel paragrafo precedente. (3.2) A questo punto, attraverso una visita del grafo(belief network) è possibile ricavarsi il modello probabilistico relativo alla formula 3SAT iniziale. Questo verrà poi eseguito come programma standalone e verranno raccolti i risultati riguardanti la precisione del risultato ed il tempo necessario per raggiungerlo. Il programma sarà in grado di dirci se la formula è soddisfacibile oppure no. Se lo è, avremo $P(F) > 0$, altrimenti $P(F) = 0$.

Esempio:

In seguito, viene mostrato come viene tradotta una formula 3SAT nel relativo modello probabilistico in anglican e problog. Abbiamo già visto che è soddisfacibile ed infatti i risultati di anglican e problog sono rispettivamente y= 0.6296999999999472 e y= 0.625 .

Anglican :

```
(defquery anglsat []
 (let [
  u4 (sample(flip 0.5))
  u3 (sample(flip 0.5))
  u2 (sample(flip 0.5))
  u1 (sample(flip 0.5))
  c0 (getPrior u1 u2 u3 true true true)
  c1 (getPrior u1 u2 u3 false false true)
  c2 (getPrior u2 u3 u4 true false true)
  d0(cond(= c0 true)
         (sample(flip 1.0))
         (= c0 false)
         (sample(flip 0.0)))
  d1 (getY d0 c1 )
  y (getY d1 c2 )
]y))
```

Problog:

```
0.5::u4.
0.5::u3.
0.5::u2.
0.5::u1.
1.0::c0:-u1;u2;u3.
1.0::c1:-\+u1;\+u2;u3.
1.0::c2:-u2;\+u3;u4.
1.0::d0:-c0.
1.0::d1:-d0,c1.
1.0::y:-d1,c2.
query(y).
```

In cui le funzioni "getY()" e "getPrior()" sono definite in questo modo:

```
(defm getPrior[u1 u2 u3 val1 val2 val3]
    (let[
        c (cond(or
                  (= u1 val1)
                  (= u2 val2)
                  (= u3 val3))
                  (sample(flip 1.0))
              (and(not= u1 val1)
                  (not= u2 val2)
                  (not= u3 val3))
              (sample(flip 0.0)))]
          c))
```

```
(defm getY[u1 u2]
    (let[
        c (cond(and
                  (= u1 true)
                  (= u2 true))
                  (sample(flip 1.0))
                  (or(= u1 false)
                     (= u2 false))
                  (sample(flip 0.0)))]
        c))
```

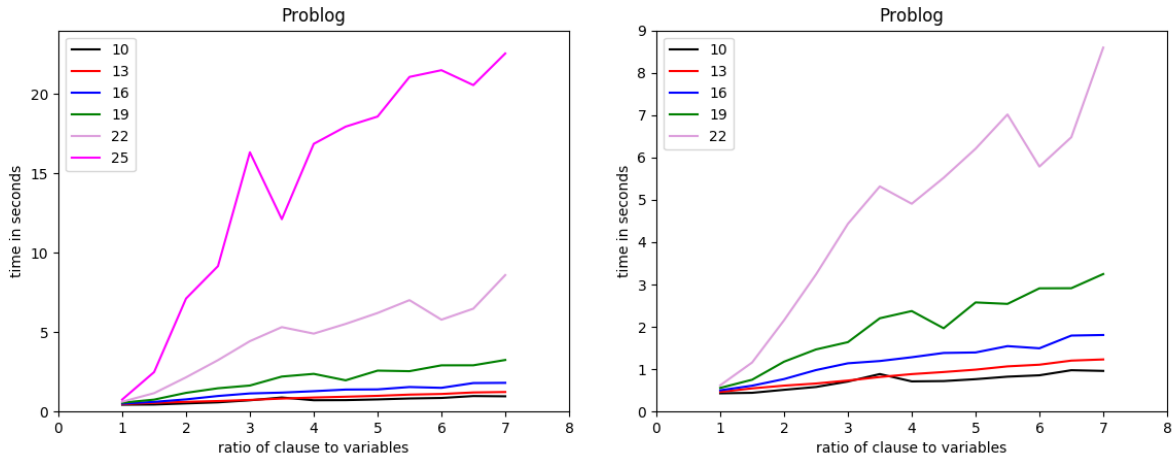
3.5 Risultati

In questo paragrafo verranno fatte delle considerazioni in termini di tempo, precisione e concisione dei due linguaggi.

3.5.1 Tempo

Uno degli aspetti al quale si è interessati è il tempo. In questo paragrafo viene analizzato in modo particolare il tempo necessario, per risolvere la soddisfacibilità di una formula 3SAT, al linguaggio Problog.
Non ci si sofferma troppo su anglican perché ,dopo diversi test con formule di varia lunghezza, si è notato che i risultati in tempo del linguaggio anglican non sono particolarmente interessanti. Infatti, il tempo impiegato da anglican per definire se formule di varia lunghezza sono soddisfacibili è sempre compreso nell'intervallo di tempo {28,80} secondi, anche nel caso di formule HARD 3SAT. Questo fenomeno si verifica perché, come verrà approfondito nel paragrafo riguardante la precisione, anglican è un linguaggio approssimato, per cui per arrivare all'approssimazione della soluzione ha bisogno di un massimo di 80 secondi.
Con problog, invece, la situazione è più interessante. Osservando il grafico in Figura 3.2 si può vedere subito come il tempo impiegato dipenda dalla formula analizzata. La lunghezza delle formule 3SAT che generate dipende, come abbiamo visto, dal numero

di variabili che la compongono e dal rapporto tra esse ed il numero di clausole. Allo stesso modo anche il tempo dipende da queste due. Infatti, all'aumentare del numero di variabili e del rapporto la curva cresce. Questo accade perché per definire l'assegnamento corretto è necessario scansionare un numero sempre maggiore di clausole.



(a) (b)

Figura 3.2: Nella figura (a) è rappresentato il grafico del tempo impegato per la risoluzione di una formula 3SAT. In figura (b) vengono preso un dettaglio del grafico per poter osservare meglio il comportamento delle formule con variabili da 10 a 22.

3.5.2 Precisione

Un'altra caratteristica fondamentale per questo tipo di linguaggi è la precisione del risultato. Si richiede che venga fatta l'analisi di un modello, ma occorre essere certi che il risultato ottenuto sia affidabile. Per eseguire questo tipo di analisi si sono confrontati i risultati di soddisfacibilità prodotti dai linguaggi con quelli di un satSolver, nello specifico, PicoSat[Bie08]. Sono state analizzate anche in questo caso formule con un numero di variabili che va da 10 a 25 e un rapporto tra clausole e variabili compreso tra {1,8}. È emerso che problog è in grado di riconoscere in modo accurato la soddisfacibilità di una formula anche nel caso la probabilità sia estremamente bassa, anche se ne risente in termini di tempo, dato che come si è visto nel paragrafo precedente, il tempo aumenta al crescere della dimensione della formula.

Invece, non si verifica la stessa cosa per anglican. Si è concluso, infatti, che anglican è un linguaggio approssimato, e che sebbene sia possibile aumentare leggermente la precisione giocando con il numero di particelle o iterazioni dell'algoritmo lmh, arrivati ad una certa complessità della formula 3SAT, non è possibile essere certi del risultato ottenuto. Dal confronto tra i risultati di anglican problog ed il sat solver, si è visto che nel caso la formula fosse soddisfacibile,ma con probabilità molto bassa, problog riesce a definire questa probabilità, mentre anglican ritorna che la formula è insoddisfacibile.
A questo punto, si è cercato di definire in maniera più precisa quali fossero i limiti di anglican. Per farlo si è tenuto traccia, anche questa volta, dei risultati ottenuti al crescere del numero di variabili della formula e del loro rapporto con il numero di clausole.
In seguito vengono riportati i risultati osservati:

- 10 variabili: il risultato è affidabile sino ad un rapporto variabili clausole pari a 4.
- 13,16,19,22 variabili: il risultato è affidabile sino ad un rapporto variabili clausole pari a 2.
- 25 variabili: il risultato è affidabile sino ad un rapporto variabili clausole pari a 1.5.

Si può notare quindi che all'aumentare del numero di variabili, si ottengono risultati affidabili per un rapporto sempre inferiore. In aggiunta, si sono testate formule composte da un massimo di 45 variabili, ed un rapporto pari a 1. In questi caso il risultato è sempre stato corretto.

3.5.3 Concisione

La concisione è una caratteristica importante di ogni linguaggio di programmazione. Se un programma è conciso significa che contiene solo i costrutti strettamente necessari per l'esecuzione del programma. Un'ottimo esempio per comprendere meglio si può fare con il costrutto if nel linguaggio c++:

```
a=1                          num = (a < 0) ? 0 : 1
if(a < 0)
  num = 0;
else
  num = 1;
```

Infatti, il costrutto a destra ha esattamente lo stesso significato di quello a sinistra, ma è conciso.

In questo studio si vuole vedere quanto siano concisi i due linguaggi, in relazione alla formula da analizzare. Per fare ciò utilizziamo la regressione lineare, che fornisce un metodo di stima del valore atteso dati i valori di variabili dipendenti e indipendenti. Il valore atteso rappresenta la lunghezza del programma che ci si aspetta ed è rappresentato da una retta, mentre le variabili dipendenti sono rappresentate dalla lunghezza effettiva dei programmi e quelle indipendenti dalla lunghezza della formula 3SAT. Questo permette di mettere in relazione la lunghezza del programma scritto con la lunghezza della formula. Attraverso il coefficiente angolare della retta, ricavata attraverso la regressione lineare, siamo in grado di riconoscere una variabile moltiplicativa (m) che rappresenta il numero di parole necessarie per rappresentare una singolo clausola e una costante (b) che rappresenta il preambolo del programma, ovvero pezzi di codice presenti indipendentemente dalla formula.
In questo caso, osservando il coefficiente angolare delle due rette:

- anglican: $y = 18.18095x + 70.66667$
- problog: $y = 15.8x + 1$

si può notare che il linguaggio problog è più conciso di anglican, in quanto presenta la costante b=1, il che significa che la lunghezza del programma dipende quasi esclusivamente dalla lunghezza della formula.

Inoltre, osservando il grafico di regressione lineare del linguaggio anglican, in Figura 3.3, si può vedere che i valori ottenuti, non distano molto da quelli attesi. La stessa cosa si osserva nel grafico riguardante problog in Figura 3.4, anzi, in questo caso si vede che

i valori ottenuti coincidono perfettamente con la retta. Per cui possiamo concludere che la lunghezza dei programmi in entrambi i linguaggi è proporzionale alla lunghezza della formula.

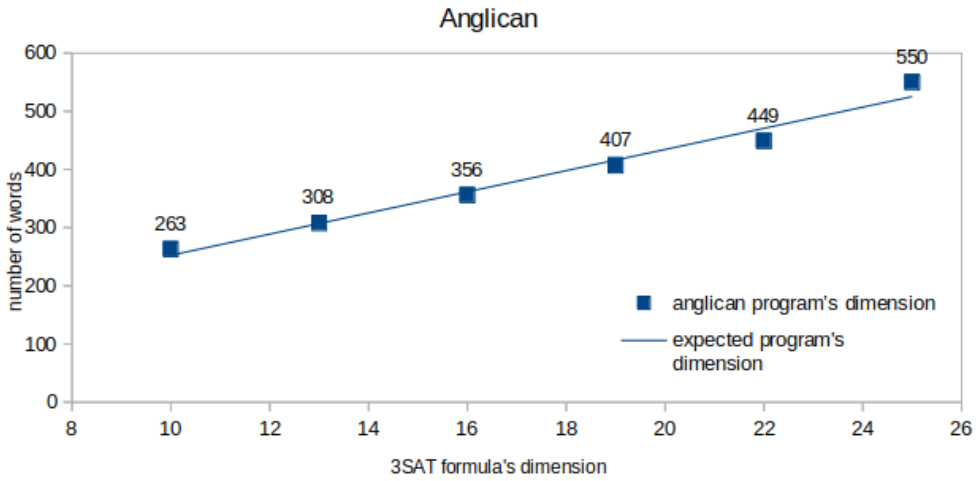


Figura 3.3: retta di regressione lineare $y = 18.18095x + 70.66667$

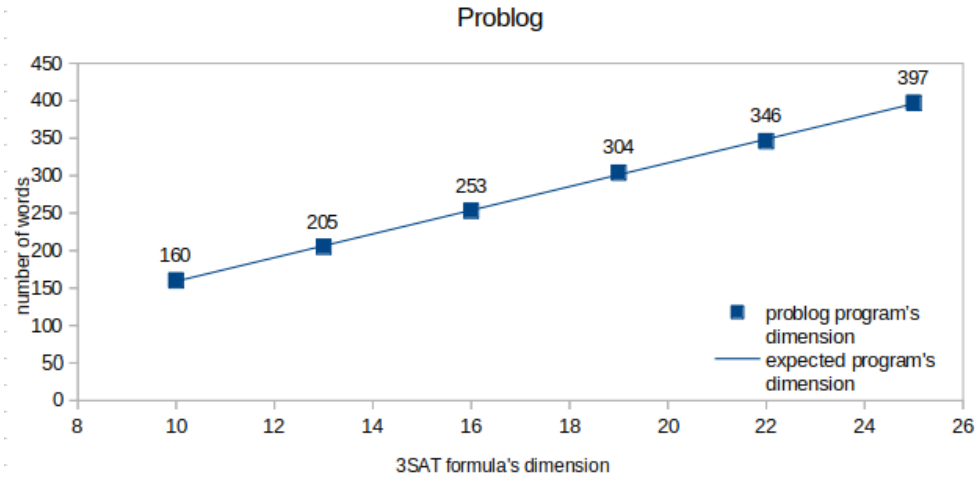


Figura 3.4: retta di regressione lineare $y = 15.8x + 1$

Conclusioni

In questa tesi si sono analizzate le prestazioni di due linguaggi di programmazione probabilistica, Anglican e Problog. Dopo una prima panoramica generale sull'importanza del ragionamento probabilistico e del processo di inferenza per la gestione di problemi quotidiani in situazioni di incertezza, si passa a problemi piú complessi, i quali non si é in grado di risolvere manualmente. Per questo vengono introdotti i linguaggi probabilistici che semplificano la creazione del modello del problema e sono in grado di eseguire il processo di inferenza in modo automatico. Questi linguaggi vengono messi alla prova, richiedendogli di risolvere istanze di problemi intrinsecamente difficili, e tenendo traccia di tempo, precisione e concisione del programma scritto per la risoluzione. Per quanto riguarda i tre aspetti analizzati si é concluso che:

- precisione: i risultati dati da problog é sono estremente precisi, mentre quelli di anglican sono affidabili solo per problemi non particolarmente complessi.

- tempo: anglican fornendo dei risultati approssimati necessita sempre di una quantitá compresa in un certo intervallo, al contrario di problog che ha bisogno di piú tempo al crescere della complessitá.

- concisione:la lunghezza dei programmi per entrambi i linguaggi é proporzionale al problema.

Un possibile sviluppo futuro di questo elaborato potrebbe essere un confronto con altri due linguaggi probabilistici: Gen [Cus+19] ed Hakaru[Nar+16] che oltre a fornire gli algoritmi di inferenza di default permettono anche di personalizzarli. Entrambi permettono di personalizzare la funzione di proposta dei nuovi valori per l'algoritmo

di metropolis-hastings, mentre Gen permette addirittura la scrittura di un proprio algoritmo di inferenza. Un'altra possibile estensione potrebbe consistere nel confrontare i risultati in tempo di problog con quelli di un satSolver che, anche se con ordini di grandezza diversi, permetterebbe di analizzare in modo piú approfondito l'andamento di problog al crescere della formula.

Bibliografia

[Coo90] Gregory F Cooper. «The computational complexity of probabilistic inference using Bayesian belief networks». In: *Artificial intelligence* 42.2-3 (1990), pp. 393–405.

[SML96] Bart Selman, David G Mitchell e Hector J Levesque. «Generating hard satisfiability problems». In: *Artificial intelligence* 81.1-2 (1996), pp. 17–29.

[DKT07] Luc De Raedt, Angelika Kimmig e Hannu Toivonen. «ProbLog: A Probabilistic Prolog and Its Application in Link Discovery.» In: *IJCAI*. Vol. 7. Hyderabad. 2007, pp. 2462–2467.

[Bie08] Armin Biere. «PicoSAT essentials». In: *Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation* 4 (2008), pp. 75–97.

[Bar12] David Barber. *Bayesian Reasoning and Machine Learning*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2012.

[Las12] Daniel Lassiter. «Probabilistic reasoning and statistical inference:An introduction (for linguists and philosophers)». In: *NASSLLI 2012 Bootcamp* (2012). DOI: `https://web.stanford.edu/~danlass/NASSLLI-coursenotes-combined.pdf`.

[Nar+16] Praveen Narayanan et al. «Probabilistic inference by program transformation in Hakaru (system description)». In: *International Symposium on Functional and Logic Programming - 13th International Symposium, FLOPS 2016, Kochi, Japan, March 4-6, 2016, Proceedings*. Springer. 2016, pp. 62–79. DOI: `10.1007/978-3-319-29604-3_5`. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-29604-3_5`.

[Tol+16] David Tolpin et al. «Design and Implementation of Probabilistic Programming Language Anglican». In: *CoRR* abs/1608.05263 (2016). arXiv: 1608.05263. URL: http://arxiv.org/abs/1608.05263.

[PM18] Judea Pearl e Dana Mackenzie. *The Book of Why: The New Science of Cause and Effect*. 1st. New York, NY, USA: Basic Books, Inc., 2018.

[Cus+19] Marco F. Cusumano-Towner et al. «Gen: A General-purpose Probabilistic Programming System with Programmable Inference». In: *Proceedings of the 40th ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation*. PLDI 2019. Phoenix, AZ, USA: ACM, 2019, pp. 221–236. ISBN: 978-1-4503-6712-7. DOI: 10.1145/3314221.3314642. URL: http://doi.acm.org/10.1145/3314221.3314642.