FFHS
Fernfachhochschule Schweiz
Mitglied der SUPSI

Zahlensysteme

Ein-/Anleitung zum Selbststudium

Diese Anleitung schafft die Grundlage für das Verständnis des Umgangs mit Zahlensystemen, deren Umrechnung und wie damit im "Inneren eines Computers" gerechnet werden kann (Adressierung etc.).

Dieses Skript ist eine Adaption basierend auf den Unterlagen von beibringe.de (2015)

Inhalt

A. Zahlensysteme

1. Dezimalsystem (Zehnersystem)

Zeichenvorrat: 10 Ziffern [0 … 9]

Dezimalzahl	5	4	7	9 .	2	6
Stellen #	4	3	2	1	-1	-2
Stellenwert	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}
Potenzwert	5*1000	4*100	7*10	9*1	2/10	6/100
Zahlenwert	5000 +	400 +	70 +	9 +	0.2 +	0.06
	=5'479.26					

2. Dualsystem (Zweiersystem)

Zeichenvorrat: 2 Ziffern [0, 1]

Dualsystem	1	0	1	0	1	1	1 .	1	1
Stellennummer	7	6	5	4	3	2	1	-1	-2
Stellenwert	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
Potenzwert	1*64	0*32	1*16	0*8	1*4	1*2	1*1	1*1/2	1*1/4
Zahlenwert	64 +	0 +	16 +	0 +	4 +	2 +	1 +	0.5 +	0.25
	= 87.75								

3. Hexadezimalsystem (Sechzehnersystem)

Zeichenvorrat: 10 Dezimalziffern [0 … 9] und 6 Buchstaben [A … F]

Stellenwert der Dualzahl	2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^{9}	2^{8}	2^{7}	2^{6}	2^{5}	2^{4}	2^{3}	2^{2}	2^{1}	2^{0}	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
Dualzahl	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0

Hexadezimal-zahl	**3**	**B**	**7**	**E .**	**C**
Stellennummer	**4**	**3**	**2**	**1**	**-1**
Stellenwert	16^{3}	16^{2}	16^{1}	16^{0}	16^{-1}
Potenzwert	**3*4'096**	**11*256**	**7*16**	**14*1**	**12/16**
Zahlenwert	**12'288 +**	**2'816 +**	**112 +**	**14 +**	**0.75**
			=15'230.75		

Grundsätzlich gilt: **Stellenwert vor dem Komma:** $W = B^{n-1}$

Stellenwert nach dem Komma: $W = B^{-n} = 1/B^{n}$

B. Umrechnungsverfahren

4. Dualzahlen ⇨ Dezimalzahlen

$$\mathbf{101110.011_2} = 1*2^5 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^{-2} + 1*2^{-3}$$
$$= 32 + 8 + 4 + 2 + 1/4 + 1/8$$
$$= \mathbf{46.375_{10}}$$

5. Dezimalzahlen ⇨ Dualzahlen

Ganze positive Dezimalzahlen:

$\mathbf{57_{10}}$

57 : 2 = 28	Rest	**1**
28 : 2 = 14	Rest	**0**
14 : 2 = 7	Rest	**0**
7 : 2 = 3	Rest	**1**
3 : 2 = 1	Rest	**1**
1 : 2 = 0	Rest	**1**

Leserichtung

$= \mathbf{111001_2}$

Dezimalzahlen zwischen 1 und 0:

$\mathbf{0.375_{10}}$

0.375 * 2 = **0**.75	→	= 0.75
0.75 * 2 = **1**.5	→	1.5 - 1 = 0.5
0.5 * 2 = **1**.0	→	1.0 - 1 = 0

Leserichtung

$= \mathbf{0.011_2}$

6. Hexadezimalzahlen ⇨ Dezimalzahlen

$\mathbf{AFFE_{16}} = A * 16^3 + F * 16^2 + F * 16^1 + E * 16^0$

$= 10 * 4'096 + 15 * 256 + 15 * 16 + 14 * 1$

$= \mathbf{45'054_{10}}$

7. Dezimalzahlen ⇨ Hexadezimalzahlen

Ganze positive Dezimalzahlen:

$\mathbf{1998_{10}}$

1'998	: 16 = 124	Rest 14	**E**
124	: 16 = 7	Rest 12	**C**
7	: 16 = 0	Rest 7	**7**

$= \mathbf{7CE_{16}}$

↑ **Leserichtung**

Dezimalzahlen zwischen 1 und 0:

$\mathbf{0.575_{10}}$

$0.575 * 16 = \mathbf{9}.2 \longrightarrow 9.2 - 9 = 0.2$

$0.2 * 16 = \mathbf{3}.2 \longrightarrow 3.2 - 3 = 0.2$

$0.2 * 16 = \mathbf{3}.2 \longrightarrow 3.2 - 3 = 0.2$

$= \mathbf{0.93\overline{3}_{16}}$

↓ **Leserichtung**

Dualzahlen ⇔ Hexadezimalzahlen

Dezimalzahl	Dualzahl	Hexadezimalzahl
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

8. Dualzahlen ⇨ Hexadezimalzahlen

0010	1000	1111	1011 .	1000	1110	1000
2	8	F	B .	8	E	8_{16}

9. Hexadezimalzahlen ⇨ Dualzahlen

7	D	A	2	4 .	3	9	C	E_{16}
0111	1101	1010	0010	0100 .	0011	1001	1100	1110

C. Signierte Dualzahlen

10. Darstellung negativer und positiver Dualzahlen

*Bei signierten Dualzahlen wird durch das führende Bit - auch MSB (**M**ost **S**ignificant **B**it) - das Vorzeichen angegeben.*

WICHTIG: *Damit klar ist, was das MSB ist, muss bei signierten Zahlen immer die Anzal der Bits (resp. Stellen) angegeben werden/sein!*

MSB				LSB	
1	0	0	1	1	negativ signierte Dualzahl
0	1	1	0	1	positiv signierte Dualzahl

Beispiel: Vierstellige signierte Dualzahlen

Signierte Dualzahl				MSB als + oder - und zugehörige Dezimalzahl	Zugehörige Zahlengerade des Dezimalsystems
0	1	1	1	+7	+7
0	1	1	0	+6	+6
0	1	0	1	+5	+5
0	1	0	0	+4	+4
0	0	1	1	+3	+3
0	0	1	0	+2	+2
0	0	0	1	+1	+1
0	0	0	0	+0	+0
1	1	1	1	-7	-1
1	1	1	0	-6	-2
1	1	0	1	-5	-3
1	1	0	0	-4	-4
1	0	1	1	-3	-5
1	0	1	0	-2	-6
1	0	0	1	-1	-7
1	0	0	0	-0	-8

Wichtig: *Im Dualsystem kann der Zahlenwert (dezimal) bei signierter Darstellung nicht sofort erkannt werden:*

1. 0 0 1 0 = 2
1 0 1 0 = -6

2. 0 1 1 0 = 6
1 1 1 0 = -2

11. Komplementbildung

Der Begriff "Komplement" lässt sich am einfachsten mit einem bildhaften Vergleich beschreiben: nämlich als "Ergänzung zum Vollen", d.h. ganz nach dem bekannten Spruch: "Ist das Glas denn nun 1/3 voll oder 2/3 leer?". Die Komplementbildung kann man in jedem Zahlensystem anwenden und bedeutet nichts anderes als die Ergänzung jeder Ziffer auf die Ziffer im Zahlensystem mit dem höchsten Wert.

Nehmen wir als Beispiel das Dezimalsystem mit den Ziffern **0 … 9.**
Die Komplementbildung als "Neunerkomplement":

Komplement	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Zählt man zum **Neunerkomplement** noch **+1** dazu, spricht man vom "**Zehnerkomplement"**.

Wozu die Komplementbildung?

Rechner, Computer sind "Addierwerke", d.h. letztendlich sind die mathematischen "Fähigkeiten" eines Rechners auf die Addition reduziert. Eine Subtraktion lässt sich somit nicht trivial umsetzen. Da hilft der Griff in die Tool-Kiste der Mathematik und dieses Tool heisst "Komplement", denn mit Hilfe der Komplementbildung kann die Subtraktion in eine Addition mit negativem Vorzeichen umgewandelt werden. Bspw.:

$$34 - 13 = 34 + (-13) = 21$$

Dezimalzahl		3	4	⇨		3	4
Dezimalzahl	-	1	3				
Neuner-/Zehnerkompliment		8	6	+1	⇨	8 +1	7
34 + (-12)					**(1)**	**2**	**1**

Übertrag

Mit Hilfe dieser Methode (Zehnerkomplement) konnte der Mathematiker Blaise Pascal Mitte des 17. Jh. auf seiner Addiermaschine "*Pascaline"* die Subtraktion realisieren. ;-)

Wie bereits erwähnt: Diese Methode kann auf jedes Zahlensystem angewendet werden und was liegt also näher, als dies im binären Zahlensystem entsprechend umzusetzen. Wir sprechen dann vom Einer- und Zweierkomplement.

Einerkomplement

1.	0	1	0	1	=	5		2.	0	1	1	0	=	6
	1	0	1	0	=	-6			1	0	0	1	=	-7

Durch das Vertauschen der Nullen und Einsen (Einerkomplement) entstehen Zahlen, die (zahlenmässig) um 1 **grösser** sind.

2.	1	1	1	0	=	-2		4.	1	0	0	0	=	-8
	0	0	0	1	=	1			0	1	1	1	=	7

Durch das Vertauschen der Nullen und Einsen (Einerkomplement) entstehen Zahlen, die (zahlenmässig) um 1 **kleiner** sind.

Zweierkomplement

Umwandlung negative in positive und positive in negative Dualzahlen

1. Umwandlung +5 in -5

Zahl		0	1	0	1	5
Einerkomplement		1	0	1	0	-6
+1	+	0	0	0	1	+1
Zweierkomplement		**1**	**0**	**1**	**1**	-5

2. Umwandlung -6 in +6

Zahl		1	0	1	0	-6
Einerkomplement		0	1	0	1	5
+1	+	0	0	0	1	+1
Zweierkomplement		**0**	**1**	**1**	**0**	6

3. Umwandlung 0 in 0 (nicht wundern, dies soll zur Illustration dienen ;-))

Zahl		0	0	0	0	0
Einerkomplement		1	1	1	1	-1
+1	+	0	0	0	1	+1
Zweierkomplement	(1)	**0**	**0**	**0**	**0**	0

➔ **WICHTIG:** **Der <u>Übertrag</u> wird <u>nicht beachtet</u>**,
d.h. wird bei der weiteren Rechnung nicht weiter verwendet!!

D. Arithmetische Operationen mit Dualzahlen

12. Addition

Duales Zahlensystem	Dezimalzahlensystem
0 + 0 = 0	0 + 0 = 0
0 + 1 = 1	0 + 1 = 1
1 + 0 = 1	1 + 0 = 1
1 + 1 = (1)0	1 + 1 = 2

Übertrag)

z.B.:

	Dual		Dezimal
	1 1 0 1		13
+	1 0 0 1		+ 9
	1 1	← Übertrag →	1
	1 0 1 1 0		22

13. Subtraktion mit Hilfe der Zweierkomplement-Addition

Von den arithmetischen Funktionen beherrscht die CPU nur das Addieren. Eine Subtraktion wird als Addition einer negativen Zahl aufgefasst.

Beispiel: **7 - 3**

1. Umwandlung +3 in -3

Zahl	0	0	1	1		3
Einerkomplement	1	1	0	0		-4
+1	+ 0	0	0	1		+1
Zweierkomplement	**1**	**1**	**0**	**1**		-3

2. Subtraktion (durch Addition Zweierkomplement !):

		0	1	1	1	7
+		1	1	0	1	-3
=	(1)	0	1	0	0	= 4

14. Multiplikation

Die Multiplikation im Dezimalsystem kann wie folgt manuell durchgeführt werden:

Bsp.: **17_{10} * 12_{10}** =

		2+1	4	
+	1_{+1}	7		
=	**2**	**0**	**4**	**= 194_{10}**

Die Multiplikation ist – nach obigem Algorithmus - gerade im Binärsystem denkbar einfach und verläuft analog:

Bsp. 17_{10} * 12_{10} =

10001_2 * 01100_2 =

					0	0	0	0	0	
				0	0	0	0	0		
			1	0	0	0	1			
		1	0	0	0	1				
+	0	0	0	0	0					
=	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**= $1100\ 1100_2$**

= $1*2^7 + 1*2^6 + 1*2^3 + 1 * 2^4 = 204_{10}$

E. Aufgaben

Zeigen Sie zu allen Aufgaben auch ***den Rechenweg*** *auf.*

Der Weg ist das Ziel!

1. Rechnen Sie folgende Zahlen in das Dezimalsystem um:

$1100_2 =$

$101010_2 =$

$101_{16} =$

$D2A_{16} =$

$1201_4 =$

$1201_6 =$

2. a) Rechnen Sie folgende Zahlen in das Dualsystem um:

$24_{10} =$

$57_{10} =$

$43_{10} =$

b) Rechnen Sie um ins Hexadezimalsystem

577_{10} =

20641_{10} =

3. **a) Stellen Sie folgende Zahl in einem Zahlensystem mit den drei Zeichen A (Wert 0), B (Wert 1) und C (Wert 2) dar.**

19_{10} =

b) Stellen Sie folgende Dezimalzahlen als <u>signierte</u> Dualzahl (mit 4 Bit = Nibble[1]) dar:

6_{10} =

-6_{10} =

4_{10} =

-4_{10} =

c) Berechnen Sie mit signierten Dualzahlen (4 Bit):

$5 – 2 = 3$