O que são Autovalores e Autovetores?

Autovalores e autovetores aparecem quando estudamos **transformações lineares** representadas por **matrizes**.

Imagine que você tem uma transformação (como uma rotação, esticamento, reflexão, etc.) aplicada sobre um vetor. Na maioria das vezes, o vetor muda de direção **e** de tamanho. Mas há alguns vetores especiais que **não mudam de direção** – apenas **esticam ou encolhem**. Esses vetores são chamados **autovetores**, e o quanto eles esticam/encolhem é o **autovalor**.

Definição Formal

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Um número λ é **autovalor** de A se existe um vetor não nulo $\vec{v}$ tal que:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Neste caso:

- $\vec{v}$ é um **autovetor** associado ao autovalor λ.
- A matriz **multiplica o vetor**, e o resultado é **o mesmo vetor multiplicado por um número escalar**.

Exemplo Simples

Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vamos aplicar A em dois vetores:

1. Testando $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \vec{v}_1$$

Então $\vec{v}_1$ é um **autovetor** e o **autovalor é** $\lambda = 2$.

---

2. Testando $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \vec{v}_2$$

Aqui, $\vec{v}_2$ é autovetor com **autovalor** $\lambda = 3$.

Exemplo com Matriz 3x3

Vamos considerar a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Queremos encontrar os **autovalores** e **autovetores** dessa matriz.

Passo 1: Encontrar os Autovalores

Autovalores são os valores de λ que satisfazem:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Como A é **triangular**, os autovalores estão na **diagonal**!

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Passo 2: Encontrar os Autovetores

Vamos resolver a equação:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

Para $\lambda = 4$:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo $(A - 4I)\vec{v} = 0$, obtemos:

$$v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad v_1 \text{ livre}$$

Autovetor associado a $\lambda = 4$:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$2v_1 + v_2 = 0, \quad v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1, \quad v_3 = 0$$

Autovetor:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 3$:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo:

$$v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -v_1, \quad v_3 \text{ livre} \Rightarrow v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 \text{ livre}$$

Corrigindo: essa matriz já é diagonal — então os autovetores são **os vetores canônicos**!

Portanto, os autovetores são:

- Para $\lambda = 3$: $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Resumo

| Autovalor λ | Autovetor associado |

|-------------------------|----------------------|

| 4 | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ |

| 2 | $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ |

| 3 | $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ |

Note que, por ser uma matriz **diagonal ou triangular superior**, os autovalores estão na **diagonal** e os autovetores são vetores simples de encontrar.

- **Autovetor**: vetor que **não muda de direção** após a aplicação da matriz.
- **Autovalor**: fator pelo qual o autovetor é **esticado ou encolhido**.
- Equação fundamental: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
