Lógica Formal: Semântica e Leis De Morgan

CCMP0133 – Aula 04

Prof. Valdigleis S. Costa
`valdigleis.costa@univasf.edu.br`

24 de maio de 2022

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Ciência da Computação
Campus Salgueiro-PE

Roteiro

Um Pouco de Sintaxe e Semântica por Tabelas Verdade

Tabela verdade estendida

Leis De Morgan e Identidades Notáveis

Um Pouco de Sintaxe e Semântica por Tabelas Verdade

O Básico

Definição (Sintaxe)

Seja $\Sigma = \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}, \alpha \in \textit{Alfabeto latino}\} \cup \{\alpha \mid \alpha \in \textit{Alfabeto latino}\}$ *o conjunto dos símbolos proposicionais, a linguagem proposicional* L_{Prop} *é o menor conjunto gerado pelas seguintes regras:*

- *Todo* $\alpha \in \Sigma$ *é tal que* $\alpha \in L_{Prop}$.
- *Se* $\alpha, \beta \in L_{Prop}$, *então* $(\alpha \wedge \beta) \in L_{Prop}$.
- *Se* $\alpha, \beta \in L_{Prop}$, *então* $(\alpha \vee \beta) \in L_{Prop}$.
- *Se* $\alpha, \beta \in L_{Prop}$, *então* $(\alpha \Rightarrow \beta) \in L_{Prop}$.
- *Se* $\alpha \in L_{Prop}$, *então* $(\neg\alpha) \in L_{Prop}$.

O Básico

Definição (Sintaxe)
Seja $\Sigma = \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}, \alpha \in \textit{Alfabeto latino}\} \cup \{\alpha \mid \alpha \in \textit{Alfabeto latino}\}$ *o conjunto dos símbolos proposicionais, a linguagem proposicional* L_{Prop} *é o menor conjunto gerado pelas seguintes regras:*

- *Todo* $\alpha \in \Sigma$ *é tal que* $\alpha \in L_{Prop}$.
- *Se* $\alpha, \beta \in L_{Prop}$, *então* $(\alpha \wedge \beta) \in L_{Prop}$.
- *Se* $\alpha, \beta \in L_{Prop}$, *então* $(\alpha \vee \beta) \in L_{Prop}$.
- *Se* $\alpha, \beta \in L_{Prop}$, *então* $(\alpha \Rightarrow \beta) \in L_{Prop}$.
- *Se* $\alpha \in L_{Prop}$, *então* $(\neg\alpha) \in L_{Prop}$.

Observação: Os parênteses mais externos podem ser removidos sem qualquer problema de representação.

Tabela verdade para o $\wedge$

Dado $P, Q \in \Sigma$ a interpretação de $(P \wedge Q)$ é dada pela tabela verdade a seguir.

$\wedge$	$P = 0$	$P = 1$
$Q = 0$	0	0
$Q = 1$	0	1

Tabela 1: Tabela verdade para a semântica do $\wedge$.

Tabela verdade para o $\vee$

Dado $P, Q \in \Sigma$ a interpretação de $(P \vee Q)$ é dada pela tabela verdade a seguir.

$\vee$	$P = 0$	$P = 1$
$Q = 0$	0	1
$Q = 1$	1	1

Tabela 2: Tabela verdade para a semântica do $\vee$.

Tabela verdade para a $\Rightarrow$

Dado $P, Q \in \Sigma$ a interpretação de $(P \Rightarrow Q)$ é dada pela tabela verdade a seguir.

$\Rightarrow$	$P = 0$	$P = 1$
$Q = 0$	1	0
$Q = 1$	1	1

Tabela 3: Tabela verdade para a semântica da $\Rightarrow$.

Tabela verdade para a $\neg$

Dado $P \in \Sigma$ a interpretação de $\neg(P)$ é dada pela tabela verdade a seguir.

P	$\neg(P)$
0	1
1	0

Tabela 4: Tabela verdade para a semântica da $\neg$.

Bi-implicação como Relação de Equivalência

Definição
Duas palavras $\alpha, \beta \in L_{Prop}$ *são ditas equivalentes semanticamente, denotado por* $\alpha \Leftrightarrow \beta$*, sempre que suas tabelas verdades forem iguais em todos as suas linhas.*

Tabela verdade estendida

O Problema

Como seria a construção das tabelas para as palavras:

- $\neg(Q \land S) \Rightarrow P$
- $P \land (Q \lor R)$
- $(P \Rightarrow (P \land \neg Q)) \lor S$
- $((P_1 \land P_2) \land (P_3 \land (P_4 \land P_5))) \Rightarrow \neg(\neg P_3 \lor (P6 \land P_7))$

Definições Básicas (1)

Definição
Seja $\alpha \in L_{Prop}$ *o conjunto das sub-palavras de* α*, denotado por* Sub_{α}*, é o menor conjunto indutivamente gerado pelas seguintes regras:*

R1. *Se* $\alpha \in \Sigma_s \cup \{\perp\}$*, então* $Sub_{\alpha} = \{\alpha\}$*.*

R2. *Se* $\alpha = \neg\beta$ *com* $\beta \in L_{Prop}$*, então* $\neg\beta, \beta \in Sub_{\alpha}$ *e todo* $\alpha_i \in Sub_{\beta}$ *é tal que* $\alpha_i \in Sub_{\alpha}$*.*

R3. *Se* $\alpha = \beta \bullet \gamma$ *com* $\bullet \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ *e* $\beta, \gamma \in L_{Prop}$*, então* $\beta \bullet \gamma, \beta, \gamma \in Sub_{\alpha}$ *e todo* $\alpha_i \in Sub_{\beta} \cup Sub_{\gamma}$ *é tal que* $\alpha_i \in Sub_{\alpha}$*.*

Exemplo

Determine o conjunto das sub-palavras para as palavras

- $\neg(P \vee Q) \wedge P$.
- $R \wedge (S \Rightarrow (Q \vee T))$.

Definições Básicas (2)

Definição (Átomos)
Todo $\alpha \in L_{Prop}$ *tal que* $\alpha \in \Sigma_s \cup \{\perp\}$ *é chamado de átomo.*

Definições Básicas (2)

Definição (Átomos)
Todo $\alpha \in L_{Prop}$ *tal que* $\alpha \in \Sigma_s \cup \{\perp\}$ *é chamado de átomo.*

Definição (Conjunto dos átomos)
Seja $\alpha \in L_{Prop}$ *o conjunto dos átomos de* α *corresponde ao conjunto*
$Ato_\alpha = Sub_\alpha \cap (\Sigma_s \cup \{\perp\})$.

Exemplo

Dado a palavra $P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee T))$ tem-se:

(a) As sub-palavras de $P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee T))$ formam o conjunto:

Exemplo

Dado a palavra $P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee T))$ tem-se:

(a) As sub-palavras de $P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee T))$ formam o conjunto:

$$\{P, Q, T, \neg Q, P \vee T, \neg Q \Rightarrow (P \vee T), P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee T))\}$$

(b) Os átomos de $P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee T))$ formam o conjunto:

Exemplo

Dado a palavra $P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee T))$ tem-se:

(a) As sub-palavras de $P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee T))$ formam o conjunto:

$$\{P, Q, T, \neg Q, P \vee T, \neg Q \Rightarrow (P \vee T), P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee T))\}$$

(b) Os átomos de $P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee T))$ formam o conjunto:

$$\{P, Q, T\}$$

Dado uma palavra $\alpha \in L_{Prop} - \Sigma$ execute os seguintes passos:

1. Se α possui *n* átomos então nas *n* primeiras colunas distribua os átomos de α.
2. Escolha uma ordem das palavras em $(Sub_\alpha - Ato_\alpha)$ e para cada $\beta \in (Sub_\alpha - Ato_\alpha)$ construa uma nova coluna na tabela e rotule a mesma por β.
3. Preencha a tabela.

Exemplo

Construa as tabelas estendidas para as tabelas:

- $\neg(Q \wedge S) \Rightarrow P$
- $P \wedge (Q \vee R)$
- $(P \Rightarrow (P \wedge \neg Q)) \vee S$

Pontos Sobre as Tabelas Verdade

- Crescimento exponencial das linhas com respeito ao número de símbolos proposicionais.
- Crescimento linear nas colunas referente ao número de sub-palavras.
- Dado o crescimento exponencial se torna rapidamente um algoritmo intratável.
- Não exibe facilmente as propriedades algébricas.

Leis De Morgan e Identidades Notáveis

Leis De Morgan

Definição (Negação da Conjunção)
Seja α *e* β *duas palavras quaisquer de* L_{Prop}*, tem-se que a negação da conjunção de* α *e* β *é semanticamente equivalente a disjunção das negações de* α *e* β*, em símbolos tem-se que:*

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$$

Definição (Negação da Disjunção)
Seja α *e* β *duas palavras quaisquer de* L_{Prop}*, tem-se que a negação da disjunção de* α *e* β *é semanticamente equivalente a conjunção das negações de* α *e* β*, em símbolos tem-se que:*

$$\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

Identidades Notáveis

Dado $\alpha, \beta \in L_{Prop}$

- $\alpha \Rightarrow \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$.
- $\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$.
- $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$.
- $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \vee \alpha$.
- $\neg\alpha \vee \alpha \Leftrightarrow \top$.
- $\neg\alpha \wedge \alpha \Leftrightarrow \perp$.

Observação: os símbolos $\top$ e $\perp$ representam respectivamente a tautologia e o absurdo (ou contradição).