Pares Ordenados, Produto Cartesiano e Relações.

CCMP0133 – Aula 08

Prof. Valdigleis S. Costa
valdigleis.costa@univasf.edu.br

07 de junho de 2022

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Ciência da Computação
Campus Salgueiro-PE

Roteiro

Pares Ordenados

O objetivo fundamental

Definição (Par ordenado)

Sejam x *e* y *elementos em um universo do discurso. O par ordenado entre* x *e* y*, denotado por* (x, y)*, corresponde a seguinte igualdade.*

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

O objetivo fundamental

Definição (Par ordenado)

Sejam x e y elementos em um universo do discurso. O par ordenado entre x e y, denotado por (x, y), corresponde a seguinte igualdade.

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Uma questão de interesse:

- Quando dois pares ordenados são igual?

Cartesiano

A definição fundamental

Definição (Produto Cartesiano)

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. O produto Cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, corresponde ao conjunto de todos os pares ordenado onde a primeira componente é um elemento de A e a segunda componente é um elemento de B, em notação formal tem-se que:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

A definição fundamental

Definição (Produto Cartesiano)

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. O produto Cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, corresponde ao conjunto de todos os pares ordenado onde a primeira componente é um elemento de A e a segunda componente é um elemento de B, em notação formal tem-se que:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Como pode ser usado o conceito de cartesiano na matemática e na computação.

Exemplo

Dado os seguintes dois conjuntos $\{a, b, c\}$ e $\{-1, 1\}$ tem-se os seguintes produtos Cartesianos:

(a) $\{a, b, c\} \times \{-1, 1\} = \{(a, 1), (a, -1), (b, -1), (b, 1), (c, -1), (c, 1)\}$.

(b) $\{-1, 1\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (-1, a), (-1, c), (-1, b)\}$.

(c) $\{a, b, c\} \times \{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

(d) $\{-1, 1\} \times \{-1, 1\} = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$.

O quadrado Cartesiano

Definição (Cartesiano quadrado)

Seja A um conjunto qualquer. O produto Cartesiano quadrado de A, denotado por $A \times A$, corresponde ao produto Cartesiano de A consigo mesmo, em notação formal tem-se que:

$$A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$$

Propriedades - (I)

Teorema
Dado dois conjuntos A *e* B *tem-se que,* $A \times B = \emptyset$ *se, e somente se,* $A = \emptyset$ *ou* $B = \emptyset$.

Teorema
Dado dois conjuntos A *e* B *tem-se que,* $A \times B = B \times A$ *se, e somente se,* $A = \emptyset$ *ou* $B = \emptyset$ *ou* $A = B$.

Teorema
Dado três conjuntos A, B *e* C *tem-se que,* $A \subset B$ *se, e somente se,* $A \times C \subset B \times C$.

Teorema
Dado três conjuntos A, B *e* C *tem-se que,* $A \subset B$ *se, e somente se,* $C \times A \subset C \times B$.

Propriedades - (II)

Teorema
Dado três conjuntos A, B e C tem-se que:

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

(iii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(iv) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(v) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

(vi) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

(vii) $A \times (B \ominus C) = (A \times B) \ominus (A \times C)$.

(vii) $(A \ominus B) \times C = (A \times C) \ominus (B \times C)$.

Definição

Dado $n \geq 2$ *e sejam* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *conjuntos quaisquer, o produto Cartesiano n-ário, denotado por* $A_1 \times \cdots \times A_n$*, corresponde ao conjunto formado por todas as tuplas da forma* $(a_1, \cdots, a_n)$ *tal que para todo* $1 \leq i \leq n$ *tem-se que* $a_i \in A_i$*.*

[1] Açúcar sintático é uma expressão criada em 1964 por Peter J. Landin (1930-2009) em seus trabalhos da década de 60. De forma direta um açúcar sintático diz respeito a uma sintaxe dentro da linguagem formal que tem por finalidade tornar suas construções mais fáceis de serem lidas e expressas, ou seja, um açúcar sintático é uma ferramenta para tornar o uso da linguagem "mais doce" (ou amigável) para o uso dos seres humanos.

Definição

Dado $n \geq 2$ e sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos quaisquer, o produto Cartesiano n-ário, denotado por $A_1 \times \cdots \times A_n$, corresponde ao conjunto formado por todas as tuplas da forma $(a_1, \cdots, a_n)$ tal que para todo $1 \leq i \leq n$ tem-se que $a_i \in A_i$.

Açúcar Sintático

No caso de $A_i = A_j$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ e $n \geq$ é comum usar um açúcar sintático[1] (*syntactic sugar* em inglês) para representar o produto Cartesiano n-ário, em vez de usar, $A_1 \times \cdots \times A_n$ ou mesmo $\prod_{i=1}^{n} A_i$, em geral é usado a notação A^n.

[1] Açúcar sintático é uma expressão criada em 1964 por Peter J. Landin (1930-2009) em seus trabalhos da década de 60. De forma direta um açúcar sintático diz respeito a uma sintaxe dentro da linguagem formal que tem por finalidade tornar suas construções mais fáceis de serem lidas e expressas, ou seja, um açúcar sintático é uma ferramenta para tornar o uso da linguagem "mais doce" (ou amigável) para o uso dos seres humanos.

Representação

- Quando os conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são todos conjuntos finitos, uma estratégia muito utilizada para se obter e também representar o mecanismo de construção das tuplas $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ pertencentes ao produto Cartesiano n-ário $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é usando a noção de diagrama de árvore.

Exemplo De diagrama

Dado os conjuntos $\{-1, 1\}, \{a, b\}$ e $\{-1, 1\}$ tem-se que o produto Cartesiano $\{-1, 1\} \times \{a, b\} \times \{-1, 1\}$ pode ser representado pelo diagrama esboçado na Figura ??.

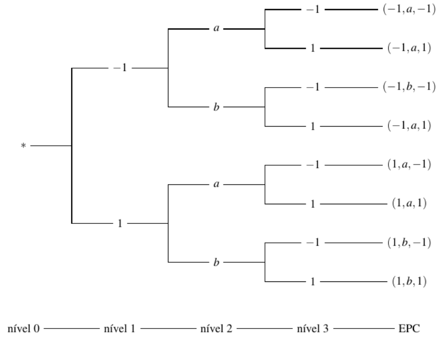

Figura 3.1: Diagrama de árvore para o Cartesiano $\{-1, 1\} \times \{a, b\} \times \{1, -1\}$.

Figura 1: Diagrama de árvore para o Cartesiano $\{-1, 1\} \times \{a, b\} \times \{1, -1\}$.

Relações

Definição (Relação binária)

Seja A e B dois conjuntos, uma relação R de A em B é qualquer subconjunto de $A \times B$, isto é, $R \subseteq (A \times B)$.

Definição (Relação binária)

Seja A e B dois conjuntos, uma relação R de A em B é qualquer subconjunto de $A \times B$, isto é, $R \subseteq (A \times B)$.

Açúcar Sintático

Dado R uma relação binária de A em B a sintaxe da teoria dos conjuntos e de pares ordenados permite que seja escrito que $(x, y) \in R$, entretanto, está escrita é geralmente substituída por $x \; R \; y$. E no caso de $(x, y) \notin R$ é escrito simplesmente $x \not R \; y$.

Definição (Domínio e Imagem)

Seja R *uma relação de* A *em* B, *o domínio de* R, *denotado por* $Dom(R)$, *corresponde ao conjunto de todos os elementos de* A *que são a primeira coordenada de* $x \, R \, y$, *ou seja,*

$$Dom(R) = \{x \in A \mid x \, R \, y\}$$

e a imagem de R, *denotada por* $Ima(R)$, *corresponde ao conjunto de todos os elementos de* B *que são a segunda coordenada de* $x \, R \, y$, *ou seja,*

$$Ima(R) = \{y \in B \mid x \, R \, y\}$$

Definição (Relação inversa)

Seja R uma relação. A relação inversa (ou oposta) de R, denotada por R^{-1}, corresponde ao seguinte conjunto:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid x \, R \, y\}$$

Definição (Composição de relações)

Seja R_1 uma relação de A em B e seja R_2 uma relação de B em C, a composição de R_1 e R_2, denotada por $R_1 \bullet R_2$, corresponde ao seguinte conjunto:

$$R_1 \bullet R_2 = \{(x, z) \mid (\exists y \in B)[x \ R_1 \ y \ e \ y \ R_2 \ z]\}$$

Definição (Composição de relações)

Seja R_1 uma relação de A em B e seja R_2 uma relação de B em C, a composição de R_1 e R_2, denotada por $R_1 \bullet R_2$, corresponde ao seguinte conjunto:

$$R_1 \bullet R_2 = \{(x, z) \mid (\exists y \in B)[x \ R_1 \ y \ e \ y \ R_2 \ z]\}$$

Teorema
Seja R_1 uma relação de A em B e seja R_2 uma relação de B em C, então tem-se que:

(i) $Dom(R_1 \bullet R_2) \subseteq Dom(R_1)$.

(ii) $Ima(R_1 \bullet R_2) \subseteq Ima(R_2)$.

Mais Propriedades

Teorema
Seja R_1 *e* R_2 *relações de* A *em* B. *Se* $R_1 \subseteq R_2$, *então para toda relação* R_3 *de* B *em* C *tem-se que* $(R_1 \bullet R_3) \subseteq (R_2 \bullet R_3)$.

Corolário
Se R_1, R_2, S_1, S_2 *são relações tais que* $R_1 \subseteq R_2$ *e* $S_1 \subseteq S_2$ *com* $Ima(R_1) = Dom(S_1)$ *e* $Ima(R_2) = Dom(S_2)$, *então* $(R_1 \bullet S_1) \subseteq (R_2 \bullet S_2)$.

Teorema
Seja R_1 *uma relação de* A *em* B *e seja* R_2 *uma relação de* B *em* C *tem-se que* $(R_1 \bullet R_2)^{-1} = R_2^{-1} \bullet R_1^{-1}$.

Teorema
Seja R_1 *uma relação de* A *em* B *e seja* R_2 *uma relação de* B *em* C *e* R_3 *uma relação de* C *em* D *tem-se que* $(R_1 \bullet R_2) \bullet R_3 = R_1 \bullet (R_2 \bullet R_3)$.