Estruturas de Dados Básicas II

Valdigleis[1]

[1]Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciência Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemática Aplicada
<valdigleis@dimap.ufrn.br>

20 de março de 2025

Sumário

Sucessão e Recorrência

- É sabido que diversos problemas em ciências da computação são solucionáveis através do uso de listas ou sequências.
- É possível definir uma sequência usando recorrência (recursão)?

Sucessão e Recorrência

- É sabido que diversos problemas em ciências da computação são solucionáveis através do uso de listas ou sequências.
- É possível definir uma sequência usando recorrência (recursão)? **SIM**. . .

Sucessão e Recorrência

- É sabido que diversos problemas em ciências da computação são solucionáveis através do uso de listas ou sequências.
- É possível definir uma sequência usando recorrência (recursão)? **SIM**. . . como?

Sucessão e Recorrência

- É sabido que diversos problemas em ciências da computação são solucionáveis através do uso de listas ou sequências.
- É possível definir uma sequência usando recorrência (recursão)? **SIM**. . . como?

A definição de uma sequência $u : \mathbb{N} \to A$ usando recorrência consiste em uma tarefa de duas partes, a saber:

- Apresentar explicitamente qual(quais) é(são) o(s) elemento(s) inicial(iniciais) u_0 da sequência, ou seja, apresentar o elemento na base da recorrência (condição inicial).

Sucessão e Recorrência

- É sabido que diversos problemas em ciências da computação são solucionáveis através do uso de listas ou sequências.
- É possível definir uma sequência usando recorrência (recursão)? **SIM**. . . como?

A definição de uma sequência $u : \mathbb{N} \to A$ usando recorrência consiste em uma tarefa de duas partes, a saber:

- Apresentar explicitamente qual(quais) é(são) o(s) elemento(s) inicial(iniciais) u_0 da sequência, ou seja, apresentar o elemento na base da recorrência (condição inicial).
- Indicar como se pode obter cada um dos termos da sequência a custa do(s) termo(s) anterior(es).

Exemplos

(a) Defina a sequência de naturais múltiplos de 5.

Exemplos

(a) Defina a sequência de naturais múltiplos de 5.

$$u_0 = 0$$

Exemplos

(a) Defina a sequência de naturais múltiplos de 5.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 5 + u_n \ [\forall n \in \mathbb{N}] \end{aligned}$$

Exemplos

(a) Defina a sequência de naturais múltiplos de 5.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 5 + u_n \; [\forall n \in \mathbb{N}] \end{aligned}$$

(b) A sequência de Lucas é definida como:

Exemplos

(a) Defina a sequência de naturais múltiplos de 5.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 5 + u_n \; [\forall n \in \mathbb{N}] \end{aligned}$$

(b) A sequência de Lucas é definida como:

$$u_1 = 2$$

Exemplos

(a) Defina a sequência de naturais múltiplos de 5.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 5 + u_n \ [\forall n \in \mathbb{N}] \end{aligned}$$

(b) A sequência de Lucas é definida como:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \\ u_2 &= 1 \end{aligned}$$

Exemplos

(a) Defina a sequência de naturais múltiplos de 5.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 5 + u_n \ [\forall n \in \mathbb{N}] \end{aligned}$$

(b) A sequência de Lucas é definida como:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \\ u_2 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n + u_{n-1} \ [\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2] \end{aligned}$$

Prática

- Desafio: Construa a sequência de Collatz usando recorrência.
- A sequência inicia com um $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, os próximos valores da sequência são obtidos da seguinte forma: se o número atual é par o próximo será sua metade, se o número atual é impar então o próximo é 3 vezes o atual adicionado de 1.

Questões Importantes

(a) (CARMO; GOUVEIA; DIONíSIO, 2013) Sempre que V é um conjunto e $T : V \to V$ é uma função total. Para cada $a \in V$, existe uma única sequência $u : \mathbb{N} \to V$ que satisfaz as condições:

$$\begin{aligned} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= T(u_n) \quad [\forall n \in \mathbb{N}] \end{aligned}$$

(b) Qual a problemática da definição de sequências por recorrência?

Método interativo

Método iterativo é uma técnica para resolver relações de recorrência, onde expandimos a recorrência passo a passo, substituindo os termos anteriores até encontrar um padrão ou uma fórmula fechada. Podemos pensar em tal método através do seguinte "algoritmo".

1. Expandir os primeiros termos aplicando a recorrência repetidamente.
2. Identificar um padrão para expressar u_n em função de u_0 ou outro(s) termo(s) da base.
3. Generalizar a expressão para um caso qualquer n. . . ou seja, prove por indução!

Exemplo 01

Considerando a recorrência $u_1 = 1$ e $u_n = 2 + u_{n-1}$, sua resolução por método interativo é dada por:

Exemplo 01

Considerando a recorrência $u_1 = 1$ e $u_n = 2 + u_{n-1}$, sua resolução por método interativo é dada por:

- Passo 1: Expandir os primeiros termos aplicando a recorrência repetidamente.

$$\begin{aligned} u_2 &= 2 + u_1 = 2 + 1 = 3 \\ u_3 &= 2 + u_2 = 2 + 3 = 5 \\ u_4 &= 2 + u_3 = 2 + 5 = 7 \\ u_5 &= 2 + u_4 = 2 + 7 = 9 \end{aligned}$$

- Passo 2: Identificar o padrão, aqui é $u_n = 2n - 1$.
- Passo 3: Generalizar a expressão para um caso qualquer n... vamos lá!!!

- **Base**: Note trivialmente que $u_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1$.
- **Hipotese indutiva**: Suponha que $u_n = 2n - 1$.
- **Passo indutivo**: Observe que:

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2 + u_n \\
&= 2 + 2n - 1 \\
&= 2(n+1) - 1
\end{aligned}
$$

Dica de ouro!!!

O método interativo é particularmente bem-sucedido sempre que a recorrência atende a seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_0 &= b_0 \\ u_n &= a_n u_{n-1} + b_n \end{aligned}$$

quando a_n e b_n são constantes ou expressões envolvendo apenas n, não envolvendo qualquer termo da sequência.

Método cancelamento

Método cancelamento é uma técnica que é uma variação do método interativo, ela consiste em resolver a recorrência como uma soma que se "cancela"parcialmente ao expandir os termos. Podemos pensar em tal método através do seguinte "algoritmo".

1. Expresse a recorrência de forma que envolva uma diferença ou soma de termos.
2. Escreva a soma com os termos anteriores e observe como os termos intermediários se cancelam.
3. Após o cancelamento, resta uma expressão simples que pode ser resolvida para determinar u_n.
4. Generalizar para fórmula fechada.

Exemplo 02

Considerando a recorrência $u_0 = 5$ e $u_n = 5 + u_{n-1}$, sua resolução pelo método do cancelamento é dado por:

Exemplo 02

Considerando a recorrência $u_0 = 5$ e $u_n = 5 + u_{n-1}$, sua resolução pelo método do cancelamento é dado por:

- Passo 1: expressando a recorrência como uma diferença de termos, tem-se $u_n - u_{n-1} = 5$.
- Passo 2: note que,

$$(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) = 5 + 5$$

$$(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_{n-2} - u_{n-3}) = 5 + 5 + 5$$

$$\vdots$$

$$(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_{n-2} - u_{n-3}) + \cdots + (u_1 - u_0) = 5n$$

$$u_n - u_0 = 5n$$

Exemplo 02

Considerando a recorrência $u_0 = 5$ e $u_n = 5 + u_{n-1}$, sua resolução pelo método do cancelamento é dado por:

- Passo 1: expressando a recorrência como uma diferença de termos, tem-se $u_n - u_{n-1} = 5$.
- Passo 2: note que,

$$(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) = 5 + 5$$

$$(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_{n-2} - u_{n-3}) = 5 + 5 + 5$$

$$\vdots$$

$$(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_{n-2} - u_{n-3}) + \cdots + (u_1 - u_0) = 5n$$

$$u_n - u_0 = 5n$$

- Passo 3: Determine u_n, observe que

$u_n = u_0 + 5n = 0 + 5n = 5n$

Exemplo 03

Considerando a recorrência $u_1 = 1$ e $u_n = 2u_{n-1} + 3$, sua resolução pelo método do cancelamento é dado por:

Exemplo 03

Considerando a recorrência $u_1 = 1$ e $u_n = 2u_{n-1} + 3$, sua resolução pelo método do cancelamento é dado por:

- Passo 1: Faça $u_n - 2u_{n-1} = 3$, agora dividindo ambos os lados por 2^n tem-se $\frac{u_n}{2^n} - \frac{2u_{n-1}}{2^n} = \frac{3}{2^n}$, logo $\frac{u_n}{2^n} - \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^n}$.
- Passo 2: note que,

Exemplo 03

Considerando a recorrência $u_1 = 1$ e $u_n = 2u_{n-1} + 3$, sua resolução pelo método do cancelamento é dado por:

- Passo 1: Faça $u_n - 2u_{n-1} = 3$, agora dividindo ambos os lados por 2^n tem-se $\frac{u_n}{2^n} - \frac{2u_{n-1}}{2^n} = \frac{3}{2^n}$, logo $\frac{u_n}{2^n} - \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^n}$.
- Passo 2: note que,

$$\left(\frac{u_n}{2^n} - \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \left(\frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{u_{n-2}}{2^{n-2}}\right) = \frac{3}{2^n} + \frac{3}{2^{n-1}}$$

Exemplo 03

Considerando a recorrência $u_1 = 1$ e $u_n = 2u_{n-1} + 3$, sua resolução pelo método do cancelamento é dado por:

- Passo 1: Faça $u_n - 2u_{n-1} = 3$, agora dividindo ambos os lados por 2^n tem-se $\frac{u_n}{2^n} - \frac{2u_{n-1}}{2^n} = \frac{3}{2^n}$, logo $\frac{u_n}{2^n} - \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^n}$.
- Passo 2: note que,

$$\left(\frac{u_n}{2^n} - \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \left(\frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{u_{n-2}}{2^{n-2}}\right) = \frac{3}{2^n} + \frac{3}{2^{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{u_n}{2^n} - \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \left(\frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{u_{n-2}}{2^{n-2}}\right) + \cdots + \left(\frac{u_2}{2^2} + \frac{u_1}{2^1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{2^k}$$

Exemplo 03 - Continuação

$$\frac{u_n}{2^n} - \frac{u_1}{2^1} = 3\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Exemplo 03 - Continuação

$$\frac{u_n}{2^n} - \frac{u_1}{2^1} = 3\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Assim,

$$\frac{u_n}{2^n} = 2 - \frac{3}{2^n} = 2^{n+1} - 3$$

Exemplo 03 - Continuação

$$\frac{u_n}{2^n} - \frac{u_1}{2^1} = 3\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Assim,

$$\frac{u_n}{2^n} = 2 - \frac{3}{2^n} = 2^{n+1} - 3$$

Agora observe que $u_n = 2^{n+1} - 3$. E por fim, basta generalizar.

Dica de ouro!!!

O método cancelamento possui uma forma geral para as recorrências da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_0 &= b_0 \\ u_n &= a_n u_{n-1} + b_n \quad [\forall n \geq 1] \end{aligned}$$

sendo essa forma geral da pela equação:

$$u_n = b_n + \sum_{i=0}^{n-1} (b_i a_{i+1} \cdots a_n)$$

Método cancelamento

Método cancelamento é uma técnica que é uma variação do método interativo, ela consiste em resolver a recorrência como uma soma que se "cancela"parcialmente ao expandir os termos. Podemos pensar em tal método através do seguinte "algoritmo".

1. Expresse a recorrência de forma que envolva uma diferença ou soma de termos.
2. Escreva a soma com os termos anteriores e observe como os termos intermediários se cancelam.
3. Após o cancelamento, resta uma expressão simples que pode ser resolvida para determinar u_n.
4. Generalizar para fórmula fechada.

Formas de representação

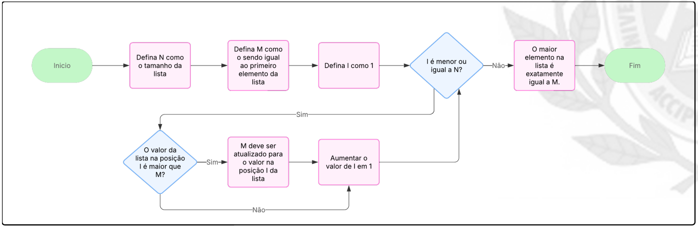
Existem no mínimo duas formas bem difundidas de como representar algoritmos: **Linguagem natural**, **Fluxograma** e **Pseudocódigo**.

- **Linguagem natural**: o Algoritmo é escrito em frases comuns, como uma explicação passo a passo. Por exemplo, *Para encontrar o maior número em uma lista, percorra cada elemento e compare com o maior já encontrado. Se for maior, atualize. No final, o maior número será o resultado.*.

Formas de representação

Existem no mínimo duas formas bem difundidas de como representar algoritmos: **Linguagem natural**, **Fluxograma** e **Pseudocódigo**.

- **Fluxograma**: os algoritmos são representados de forma visual usando diagramas que representam o fluxo de execução do algoritmo.



Sobre os fluxogramas

Os símbolos padronizados usados no fluxograma podem ser compreendidos da seguinte forma:

1. Elipse: indica o ponto inicial e o ponto final do fluxograma.
2. Retângulo: representa uma operação ou ação, como calcular, armazenar um valor ou executar uma tarefa.
3. Paralelogramo: indica operações de entrada (como receber dados do usuário) e saída (mostrar um resultado).
4. Losango: representa um ponto onde o fluxo pode seguir diferentes direções, dependendo de uma condição lógica.

Formas de representação

Existem no mínimo duas formas bem difundidas de como representar algoritmos: **Linguagem natural**, **Fluxograma** e **Pseudocódigo**.

- **Pseudocódigo**: é uma forma estruturada de representar algoritmos utilizando uma mistura de linguagem natural e elementos de linguagens de programação.

Exemplo de Pseudocódigo

Algoritmo 1: Algoritmo para encontrar o maior valor na lista.

Entrada: A lista L de tamanho N

Saída: O maior valor em L

```
início
    i = 1
    M = L[0]
    enquanto i < N faça
        se L[i] > M então
            M = L[i]
        fim
    fim
fim
retorna M
```

Referências

CARMO, J.; GOUVEIA, P.; DIONíSIO, F. M. *Elementos de Matemática Discreta*. [S.l.]: College Publications, 2013.