# Estruturas Algébricas
*Notas de Aula*

Valdigleis S. Costa
**Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN**
**Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET**
**Departamento de Informática e Matemática Aplicada – DIMAP**

17 de setembro de 2025

Página pessoal do autor https://linus.pagina



---

Este tomo foi escrito com base em uma coleção de notas de aulas do autor, o mesmo foi redigido usando um *template* desenvolvido pelo próprio autor. Este texto foi escrito com o conjunto de macros LaTeX (em sua versão 2) e compilado usado as ferramentas LuaLaTeX e BibTeX, tais ferramentas fornecidas pelas distribuições TeXLive e MacTeX, respectivamente nos sistema operacionais *Unix-like*: Debian e no Mac OS X, para edição foram usados os *softwares* livres de edição textual Vim (versão 0.10.1), além disso, o sistema de controle de versão adotado é o Git (versão 2.34.1).

*Release* compilado em 17 de setembro de 2025 (807 minutos após a meia-noite).

# Sumário

# II Álgebras



# III Categorias

# Parte I

# Fundamentos Básicos

Capítulo 1

# Conjuntos

> *"-Comece pelo começo", disse o Rei de maneira severa,*
> *"-E continue até chegar ao fim, então pare!"*
>
> *Lewis Carroll, Alice no País das Maravilhas.*

## 1.1 Sobre conjuntos e elementos

A ideia de conjunto é provavelmente o conceito mais fundamental compartilhado pelos mais diversos ramos da matemática. O primeiro grande estudioso que apresentou um relativo sucesso na missão de formalizar o conceito de conjunto, foi o matemático alemão George Cantor (1845-1918), em seu seminal trabalho [11]. Cantor apresentou as bases para o que hoje é chamada de teoria ingênua dos conjuntos. A seguir será apresentada uma tradução não literal da definição original de Cantor.

**Definição 1.1** (Formalização por Cantor) Um **conjunto** $A$ é uma **coleção** em uma totalidade $\mathbb{U}$ de **objetos** distintos e bem-definidos $n$ que são parte da nossa percepção ou pensamento, tais objetos são chamados de **elementos** de $A$.

Agora note que a definição apresentada por Cantor distingue conjuntos e elementos como sendo objetos diferentes, e assim, a teoria dos conjuntos de cantor não tem um único objeto fundamental, mas dois, sendo eles, os conjuntos e os elementos. Além disso, a Definição 1.1 possui a exigência sobre dois aspectos da natureza dos elementos em um conjunto, a saber: (1) Os elementos devem ser distintos entre si[1] e (2) eles (os elementos) devem ser bem-definidos.

[1] Em um conjunto não é permitido a repetição de elementos.

A definição de Cantor permite que sejam criados conjuntos com qualquer coisa que o indivíduo racional possa pensar ou perceber pelos seus sentidos. Agora, entretanto, deve-se questionar o que significa dizer que algo é bem-definido? Uma resposta satisfatória para essa perguntar é dizer que algo é bem-definido se esse algo pode ser descrito sem ambiguidades. É claro que qualquer coisa pode ser descrita a partir de suas propriedades, isto é, por suas características (ou atributos). Sendo que essas propriedades sempre podem ser verificadas pelos sentidos no caso de objetos físicos, e sempre se pode pensar e argumentar sobre elas no caso de objetos abstratos. Assim pode-se modificar um pouco a definição de Cantor para a forma apresentada a seguir.

**Definição 1.2** (Definição de Cantor Modificada) Um **conjunto** $A$ é uma **coleção** numa totalidade $\mathbb{U}$ de certos **objetos** $n$ distintos, que satisfazem certas propriedades, tais objetos são chamados de **elementos** de $A$.

Note que a Definição 1.2 permite concluir que um conjunto seja o agrupamento de entidades (os elementos) que satisfazem certas propriedades, ou ainda que, as propriedades definem os conjuntos. Prosseguindo nesse texto serão apresentadas as convenções da **teoria ingênua dos conjuntos** de forma usual, mas com um olhar de computação, isto é, apresentado os aspectos sintáticos e semânticos da teoria.

*Atenção* (Nomenclatura.) É também muito comum em diversos textos, tais como [12] e [40], empregar termos como, **discurso**, **universo** ou **universo de estudo**, em vez de usar o termo **totalidade** encontrado nas Definições 1.1 e 1.2, ao se especificar um conjunto. Neste texto sempre que necessário será adotado o uso de **universo**.

Prosseguindo com este documento, o primeiro passo será a apresentação da teoria dos conjuntos, é interessante notar que nas Definições 1.1 e 1.2, o objeto conjunto foi nomeado de forma arbitrária como $A$ o universo como $\mathbb{U}$ e os elementos como $n$, mas por qual razão foi usado isto? Essa estratégia é usado comumente na matemática, e a ideia por trás é atribuir a um objeto um "apelido", a seguir será formalizado esta ideia de forma mais precisa.

**Definição 1.3** (Rótulo para conjuntos) Palavras (com ou sem indexação) formadas apenas por letras maiúsculas do alfabeto latino serão usadas como rótulos[a] que representam conjuntos.

[a] Aqui o leitor pode entender rótulo por um apelido dado ao conjunto.

A ideia de dar um rótulo ao conjunto se faz necessário visto o grande trabalho de escrita e leitura caso isso não fosse feito. Para ilustar considere a situação de que fosse necessário sempre se referir, por exemplo, ao **conjunto de todas as pessoas que moram em recife, mas que não são brasileiras com mais 40 anos e possuem dois filhos**. Ficar escrevendo sobre esse conjunto, seria altamente desgastante, assim não seria prático, dessa forma, é conveniente o uso de rótulos, isto é, a simbologia matemática, para torna texto e explicações mais dinâmicas. Os exemplos a seguir esboçam bem a ideia do uso de rótulos para designar conjuntos.

*Exemplo* 1.1.1 O conjunto de todas as pessoas que moram em recife, mas que não são brasileiras com mais 40 anos e possuem dois filhos, pode ser denotado simplesmente por $PE_{40}$, ou qualquer outra palavra nos padrões estabelecidos pela Definição 1.3.

*Exemplo* 1.1.2 O conjunto de todos os vizinhos da casa de número 4 pode ser representado por $VIZINHOS_4$, $VIZINHOS_{Casa_4}$, ou simplesmente $V_4$.

*Exemplo* 1.1.3 O Conjunto de todos os primos de Ana pode ser representado por $A_{primos}$, $ANA_p$ ou ainda $A_p$.

Em diversas situações ao se trabalhar com conjuntos, como as apresentadas no capítulo inicial de [40], é necessário descrever um conjunto não por seu apelido (ou nome[2]), mas sim apresentando uma forma que descreva o conjunto de forma precisa e curta, seja listando (geralmente entre chaves e separados por vírgula) os elementos que juntos formam o referido conjunto, ou através da descrição da propriedade que descreve o conjunto, esta forma de representação costuma ser chamada representação compacta, ou como também é chamada *Set builder*[59].

[2] O conjunto vazio, por exemplo, possui uma palavra ou símbolo reservado para ser seu rótulo, sendo este o símbolo $\emptyset$.

*Exemplo* 1.1.4 O conjunto dos números naturais menores que 10 é escrito na notação compacta como $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, Já o conjunto dos naturais menores que 5 e maiores que 3 pode ser escrito usando a notação compacta como $\{x \mid 3 < x < 5\}$.

*Exemplo* 1.1.5 A seguir são apresentados algumas instâncias de conjuntos não numéricos.

(a) $\{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$.

(b) {⚁, ⚂, ⚄}.

(c) {Flamengo, Fluminense, Palmeiras, São Paulo}.

(d) $\{5, a,$ ⚃, $\{\spadesuit, \clubsuit\}\}$.

(e) $\{\text{Valdigleis}, \mathbb{C}, \{\bullet, \bullet\},$ {⚅}}

*Exemplo* 1.1.6 O conjunto de todos inteiros múltiplos de 5 em notação compacta pode ser representado como $\{x \mid x = 5y, \text{ sendo } y \text{ um número inteiro}\}$.

*Exemplo* 1.1.7 O conjunto de números naturais maiores que 2 e menores que 13 pode ser representado como $\{x \mid 3 \leq x \leq 12\}$.

*Atenção*

(Captura de variáveis.) Muitas vezes[a] na notação compacta é necessário o uso de variáveis para descrever um conjunto, essas variáveis usadas tem a função de serem objetos "*dummy*" do conjunto[b]. Assim variáveis à esquerda do símbolo "|" podem ser trocadas por qualquer variável que não ocorre livre no lado direito de "|". Tome como exemplo o conjunto,

$$\{x \mid x = 5 + 2y\}$$

em tal conjunto, a variável $x$ pode ser substituída por outra variável $z$ sem qualquer perda, ficando então com,

$$\{z \mid z = 5 + 2y\}$$

note contudo que não é possível substituir $x$ por $y$, pois ao fazer tal substituição teriamos,

$$\{y \mid y = 5 + 2y\}$$

o que seria absurdo por dois motivos, (1) $y$ não pode ser igual a $5 + 2y$, e (2) o $y$ que era livre no conjunto tornou-se ligado ao conjunto, assim a referência ao $y$ original do lado direito de | não pode ser mais recuperado.

[a] Em especial quando se descreve conjuntos infinitos.
[b] Aqui o termo *dummy* tem sentido similar ao encontrado em teoria das linguagens de programação, ou seja, entidades ou variáveis fictícias.

Para prosseguir, é interessante notar que nos itens "a", "b" e "c" apresentado no Exemplo 1.1.5, os elementos no conjunto têm a mesma natureza (ou tipo), por outro lado, os itens "d" e "e" apresentam a propriedade dos elementos no conjunto serem de tipos diferentes.

No primeiro caso, quando todos os elementos têm o mesmo tipo[3], é dito que o conjunto é **homogêneo**. Já no segundo caso, ou seja, quando os elementos no conjunto possuem tipos diferentes, é dito que o conjunto é **heterogêneo**. A seguir, mais exemplos são apresentados deste conceito.

[3] Tipo aqui pode ser interpretado como uma forma de segmentar os elementos do conjunto em diferentes "espécies", não faz menção a área de matemática chamada teoria dos tipos [47].

*Exemplo* 1.1.8 A seguir alguns conjuntos homogêneos,

(a) $\{10, 20, 30, 40, 50\}$.

(b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(c) $\{a, b, c, d, e\}$.

*Exemplo* 1.1.9 Os conjuntos a seguir são todos heterogêneos,

(a) $\{A, 10, \clubsuit, \bullet\}$.

(b) $\{\text{azul, vermelho, amarelo}, \sqrt{2\pi}\}$.

(c) $\{x, y, z, 1.27, \text{Linux, Darwin, DOS}\}$.

## 1.2 Pertinência, Inclusão e Igualdade

Em matemática ao se apresentar qualquer novo tipo de objeto é importante apresentar as interfaces[4] que são "*executadas*" sobre esse novo tipo de objeto, assim esta seção irá se dedicar a apresentar as três relações fundamentais sobre conjuntos, e algumas delas derivadas.

[4] Aqui interfaces diz respeito aos mecanismos que permitem a interação entre os objetos matemáticos.

A primeira das interfaces para o conceito de conjunto que será aqui expressa é a pertinência, esta sendo representado pelo símbolo $\in$. A pertinência é a interface que funciona provocando a interação entre um elemento do discurso e um conjunto, a seguir é apresentado formalmente o conceito de pertinência.

**Definição 1.4** (Pertinência) Seja $A$ um conjunto definido sobre um discurso $\mathbb{U}$ por uma propriedade $\mathbf{P}$ e seja $x$ um elemento do discurso. Se o elemento $x$ possui (ou satisfaz) a propriedade $\mathbf{P}$, então é dito que $x$ pertence a $A$, denotado por $x \in A$.

Assim note que a Definição 1.4 estabelece que, ao usar a pertinência é sempre escrito uma palavra da linguagem da teoria dos conjuntos tendo esta palavra a forma:

$$\underline{\qquad} \in \underline{\qquad}$$

o espaço em vermelho deve ser ocupado por elemento concreto do discurso ou por um símbolo de variável (um *dummy*) que represente os elementos no discurso. Já o espaço em azul deve ser ocupado por alguma representação de um conjunto, seja o rótulo ou a forma compacta do conjunto.

A relação de pertinência é central para a definição de outras relações dentro da teoria dos conjuntos[5], o que permite enxergar a relação de pertinência como um dos pilares fundamentais da teoria. Um exemplo desta característica fundamental da pertinência no desenvolvimento de outras relações, é seu uso para definir a relação de inclusão apresentada à seguir.

[5] Dual a própria relação de pertinência existe a não pertinência $\notin$, definida formalmente como sendo a negação da relação de pertinência.

**Definição 1.5** (Relação de inclusão) [40] Dado dois conjuntos $A$ e $B$ quaisquer, é dito que $A$ é subconjunto de (ou está incluso[a] em) $B$, denotado por $A \subseteq B$, quando todo $x \in A$ é tal que $x \in B$.

[a] Dualmente a relação de inclusão existe sua negação, isto é, a relação de não inclusão denotada por $\nsubseteq$.

Note que a Definição 1.5 estabelece a escrita,

$$\underline{\qquad} \subseteq \underline{\qquad}$$

onde os espaços em vermelho devem ser preenchidos com rótulos de conjuntos ou com a representação compacta, a seguir são apresentados usos da relação de inclusão.

*Exemplo* 1.2.1 Dado o conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$) tem-se que o conjunto,

$$N = \{x \mid x = 2k \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$$

é claramente um subconjunto de $\mathbb{Z}$, pois todo número par é também um número inteiro.

*Exemplo* 1.2.2 As seguintes relações de inclusão se verificam:

(a) $\{a, e, u\} \subseteq \{a, e, o, i, u\}$.

(b) $\{x \mid x \text{ é uma cidade do PE}\} \subseteq \{x \mid x \text{ é uma cidade do Brasil}\}$.

(c) $\{x \mid x = 2k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$.

(d) $\{\text{Brasil}\} \subseteq \{x \mid x \text{ é um país do continente americano}\}$

É fácil notar que a inclusão estabelece que um conjunto $A$ está incluso em outro conjunto $B$ sempre que $B$ contém todos os elementos de $A$, assim é claro que todo conjunto é subconjunto (ou seja está incluso) de si mesmo. Além disso, existem a possibilidade de $A$ ser subconjunto de $B$, porém, pode acontecer de $B$ conter elementos que não estejam em $A$, nesse cenário é dito que $A$ é um subconjunto próprio de $B$, e isto é expresso pela palavra $A \subset B$.

*Exemplo* 1.2.3 As seguintes relações de inclusão se verificam:

(a) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$.

(b) $\{x \mid x$ é uma cidade do PE$\} \subset \{x \mid x$ é uma cidade do Brasil$\}$.

(c) $\{a, e\} \subset \{a, b, c, d, e, f\}$.

Uma propriedade interessante sobre a inclusão é que o conjunto vazio está incluso, ou seja, é subconjunto, de qualquer outro conjunto existente.

**Teorema 1** Para todo conjunto $A$ tem-se que $\emptyset \subseteq A$.

**Prova** Suponha por absurdo que existe um conjunto $A$ tal que $\emptyset \nsubseteq A$, assim por definição existe pelo menos um $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$, mas isto é um absurdo já que o vazio não possui elementos e, portanto, a afirmação que $\emptyset \nsubseteq A$ é falsa, logo, $\emptyset \subseteq A$ é uma asserção verdadeira para qualquer que seja o $A$. $\square$

*Atenção* É sempre bom lembrar que: se $A \subset B$, então é verdade que $A \subseteq B$. Mas a recíproca não é verdade, basta lembrar que todo conjunto é subconjunto de si próprio, mas não pode ser subconjunto próprio.

Usando a ideia de subconjunto pode-se como apresentado na literatura em obras como [1, 26, 40] introduzir a ideia de igualdade entre conjuntos, esta noção é apresentada formalmente como se segue.

**Definição 1.6** [1] Dois conjuntos $A$ e $B$ são iguais, denotado por $A = B$, se e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

**Teorema 2** (Teorema da igualdade) Sejam $A, B$ e $C$ conjuntos quaisquer. Tem-se que:

1. $A = A$.
2. Se $A = B$, então $B = A$.
3. Se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$.

Agora que foi apresentada a relação fundamental de pertinência, e as relação de inclusão e igualdade dela derivadas, pode-se agora prosseguir com este documento apresentando as operações básicas sobre conjuntos.

## 1.3 Operações sobre conjuntos

A organização com que está seção do documento irá apresentar as operações sobre conjuntos é a apresentada em [41].

**Definição 1.7** (União de conjuntos) Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos quaisquer, a união de $A$ com $B$, denotada por $A \cup B$, corresponde ao seguinte conjunto.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

*Exemplo* 1.3.1 Dados os dois conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2i \text{ para algum } i \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2j + 1 \text{ para algum } j \in \mathbb{N}\}$ tem-se que $A \cup B = \mathbb{N}$.

*Exemplo* 1.3.2 Seja $N = \{1, 2, 3, 6\}$ e $L = \{4, 6\}$ tem-se que $N \cup L = \{1, 4, 6, 3, 2\}$.

Como apontado em [40] alguns livros usam a notação $A + B$ para representar a união, é comum nesse caso não usar a nomenclatura união, em vez disso, é usado o termo soma de conjunto, entretanto, trata-se da mesma operação de união apresentada na definição anterior. Além disso, existe uma outra forma de união, chamada união de disjunta, em que é produzido um novo conjunto que contém copias dos conjuntos bases da união, e em que os elementos do conjunto produzido por essa união apresentam um "codigo[6]" que identifica de qual conjunto base o elemento veio, ainda não é possível formalizar este conceito de união disjunta neste capítulo, entretanto o mesmo será formalizado em capítulos futuros.

[6] Em alguns textos como em [12], é usado o termo chave em vez de código.

**Definição 1.8** (Interseção de conjuntos) Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos quaisquer, a interseção de $A$ com $B$, denotada por $A \cap B$, corresponde ao seguinte conjunto.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

A seguir são apresentados alguns exemplo da operação de interseção de conjuntos.

*Exemplo* 1.3.3 Seja $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$ e $C = \{5\}$ tem-se que:

(a) $A \cap B = \{2, 3\}$.

(b) $A \cap C = \emptyset$.

(c) $B \cap C = \{5\}$.

*Exemplo* 1.3.4 Dado $A_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 2\}$ e $A_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 3\}$ tem-se que $A_1 \cap A_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 6\}$.

Com respeito as propriedades equacionais das operações de união e interseção tem-se como exposto em [41] os seguintes resultados para qualquer três conjuntos $A, B$ e $C$.

| Propriedade | União | Interseção |
|---|---|---|
| $(p_1)$ Idempotência | $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ |
| $(p_2)$ Comutatividade | $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| $(p_3)$ Associatividade | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| $(p_4)$ Distributividade | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| $(p_5)$ Neutralidade | $A \cup \emptyset = A$ | $A \cap \mathbb{U} = A$ |
| $(p_6)$ Absorção | $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$ | $A \cap \emptyset = \emptyset$ |

Tabela 1.1: Tabela das propriedades das operações de união e interseção.

Além das propriedades apresentadas pela Tabela 1.1, a união e a interseção possuem propriedades ligadas a relação de inclusão.

**Teorema 3** Para quaisquer conjuntos $A$ e $B$ tem-se que:

i. $A \subseteq (A \cup B)$.

ii. $(A \cap B) \subseteq A$

**Prova** Direta das Definições 1.5, 1.7 e 1.8. □

A partir da definição de interseção é estabelecido um conceito de extrema valia para a teoria dos conjuntos e suas aplicações, tal conceito é o estado de disjunção entre dois conjuntos.

**Definição 1.9** (Conjuntos disjuntos) Dois conjuntos $A$ e $B$ são ditos disjuntos sempre que $A \cap B = \emptyset$.

*Exemplo* 1.3.5 Seja $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 5\}$ e $C = \{5\}$ tem-se que $A$ e $C$ são disjuntos, por outro lado, $A$ e $B$ não são disjuntos entre si, além disso, $B$ e $C$ também não são disjuntos entre si.

**Definição 1.10** (Complemento de conjuntos) Seja $A \subseteq \mathbb{U}$ para algum discurso $\mathbb{U}$, o complemento de $A$, denotado por $\overline{A}$, corresponde ao seguinte conjunto:

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{U} \mid x \notin A\}$$

*Exemplo* 1.3.6 Dado $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ tem-se então o seguinte complemento $\overline{P} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1 \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$.

*Exemplo* 1.3.7 Dado discurso $\mathbb{U}$ tem-se direto da definição que $\overline{\mathbb{U}} = \emptyset$, e obviamente, $\overline{\emptyset} = \mathbb{U}$.

**Teorema 4** Dado um conjunto $A$ tem-se que:

i. $A \cup \overline{A} = \mathbb{U}$.

ii. $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

iii. $\overline{\overline{A}} = A$.

**Prova** Direta das Definições 1.7, 1.8 e 1.10. □

*Atenção* A propriedade $(iii)$ apresentada no Teorema 4 costuma ser chamada involução, como dito em [40].

Além das propriedades apresentadas no Teorema 4 o complemento também apresenta propriedades ligadas diretamente a união e a interseção, tais propriedades são uma versão conjuntistas das famosas leis De Morgan (ver [12, 42, 41]) muito conhecidas pelos estudiosos da área de lógica, a seguir são apresentadas as leis De Morgan para a linguagem teoria dos conjuntos.

**(DM1) Primeira Lei De Morgan:** $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
**(DM2) Segunda Lei De Morgan:** $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Seguindo com este texto, uma outra importante operação sobre conjuntos é a diferença entre dois conjuntos. A diferença entre conjunto apresenta duas formas, a primeira considerada por muito com a diferença natural [12], já a segunda forma existente, é conhecida por diferença simétrica.

**Definição 1.11** (Diferença de conjuntos) Dado dois conjuntos $A$ e $B$, a diferença de $A$ e $B$, denotado por $A - B$, corresponde ao seguinte conjunto:

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

*Exemplo* 1.3.8 Dado os conjuntos $S = \{a, b, c, d\}$ e $T = \{f, b, g, d\}$ tem-se os seguintes conjuntos de diferença: $S - T = \{a, c\}$ e $T - S = \{f, g\}$.

*Exemplo* 1.3.9 Dado os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^*_+$ tem-se que $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}^*_+ = \mathbb{Z}_-$.

*Exemplo* 1.3.10 Dado $A = \{1, 2, 3, 4\}$ tem-se que $A - \mathbb{N} = \emptyset$ e $A - \mathbb{Z}_- = A$.

**Teorema 5** Para todo $A$ e $B$ tem-se que:

i. $A - B = A \cap \overline{B}$.

ii. Se $B \subset A$ e $A = \mathbb{U}$, então $A - B = \overline{B}$.

**Prova** Dado os conjuntos $A$ e $B$ segue que:

i. Por definição para todo $x \in A - B$ tem-se que $x \in A$ e $x \notin B$, mas isto só é possível se, e somente se, $x \in A$ e $x \in \overline{B}$, e por sua vez, isto só é possível se, e somente se, $x \in A \cap \overline{B}$, portanto, tem-se que $A - B = A \cap \overline{B}$.

ii. Suponha que $B \subset A$, ou seja, todo $x \in B$ e tal que $x \in A$. Agora note que todo $x \in A - B$ é tal que $x \in A$ e $x \notin B$, e portanto, pela Definição 1.11 e pela hipótese de $B \subset A$ é claro que $A - B = \overline{B}$.

□

A seguir são apresentadas duas séries de igualdades notáveis relacionadas a diferença entre conjuntos.

**Teorema 6** Sejam $A$ e $B$ conjuntos sobre um discurso $\mathbb{U}$, tem-se que:

a. $A - \emptyset = A$ e $\emptyset - A = \emptyset$.

b. $A - \mathbb{U} = \emptyset$ e $\mathbb{U} - A = \overline{A}$.

c. $A - A = \emptyset$.

d. $A - \overline{A} = A$.

e. $\overline{(A - B)} = \overline{A} \cup B$.

f. $A - B = \overline{B} - \overline{A}$.

**Prova** Para todas as equações a seguir suponha que $A$ e $B$ são conjuntos sobre um discurso $\mathbb{U}$ assim segue que:

a.

$$\begin{aligned} A - \emptyset &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} A \cap \overline{\emptyset} \\ &= A \cap \mathbb{U} \\ &\overset{Tab.\ 1.1(p_5)}{=} A \end{aligned}$$

e também tem-se que,

$$\begin{aligned} \emptyset - A &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} \emptyset \cap \overline{A} \\ &\overset{Tab.\ 1.1(p_6)}{=} \emptyset \end{aligned}$$

b. A prova tem um raciocínio similar a demonstração do item anterior, assim será deixado como exercício ao leitor.

c. Trivial pela própria Definição 1.11.

d.

$$\begin{aligned} A - \overline{A} &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} A \cap \overline{\overline{A}} \\ &\overset{Teo.\ 4(iii)}{=} A \cap A \\ &\overset{Tab.\ 1.1(p_1)}{=} A \end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned} \overline{(A - B)} &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} \overline{(A \cap \overline{B})} \\ &\overset{\textbf{(DM2)}}{=} \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} \\ &\overset{Teo.\ 4(iii)}{=} \overline{A} \cup B \end{aligned}$$

f.

$$\begin{aligned} A - B &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} A \cap \overline{B} \\ &\overset{Tab.\ 1.1(p_2)}{=} \overline{B} \cap A \\ &\overset{Teo.\ 4(iii)}{=} \overline{B} \cap \overline{\overline{A}} \\ &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} \overline{B} - \overline{A} \end{aligned}$$

E assim a prova está concluída. □

Na demonstração do Teorema 6 apresentada anteriormente, algumas vezes foi escrito o símbolo de $=$ com um texto acima, isso é uma técnica comum na escrita de demonstrações matemáticas, o entendimento que leitor precisa ter é que ao escrever $\overset{\kappa}{=}$ significa que a igualdade segue (ou é garantida) pela propriedade ou resultado $\kappa$. Durante este texto em algumas demonstrações uma escrita similar irá aparecer para outros símbolos além da igualdade, por exemplo, para o símbolo de implicação, que será introduzidos no decorrer deste documento.

**Teorema 7** Sejam $A, B$ e $C$ subconjuntos de um discurso $\mathbb{U}$, tem-se que:

a. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

b. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

c. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.

d. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

e. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

f. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

g. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

h. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.

i. $A - (A - B) = A \cap B$.

j. $(A - B) - B = A - B$.

**Prova** Para todas as equações a seguir suponha que $A, B$ e $C$ são subconjuntos de um universo $\mathbb{U}$ assim segue que:

a.

$$\begin{aligned} (A - B) - C &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \\ &\overset{Tab.\ 1.1(p_3)}{=} A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &\overset{\textbf{(DM1)}}{=} A \cap \overline{(B \cup C)} \\ &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} A - (B \cup C) \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} A - (B - C) &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} A \cap \overline{(B - C)} \\ &\overset{Teo.\ 6(e)}{=} A \cap (\overline{B} \cup C) \\ &\overset{Tab.\ 1.1(p_4)}{=} (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\ &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A - B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

c.

$$
\begin{aligned}
A \cup (B - C) &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} A \cup (B \cap \overline{C}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_4)}{=} (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_2)}{=} (A \cup B) \cap (\overline{C} \cup A) \\
&\overset{Teo.\ 4(iii)}{=} (A \cup B) \cap (\overline{C} \cup \overline{\overline{A}}) \\
&\overset{\textbf{(DM2)}}{=} (A \cup B) \cap \overline{(C \cap \overline{A})} \\
&\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A \cup B) - (C \cap \overline{A}) \\
&\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A \cup B) - (C - A)
\end{aligned}
$$

d.

$$
\begin{aligned}
A \cap (B - C) &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} A \cap (B \cap \overline{C}) \\
&= \emptyset \cup (A \cap (B \cap \overline{C})) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_2)}{=} \emptyset \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_6)}{=} (\emptyset \cap B) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
&\overset{Teo.\ 4(ii)}{=} ((A \cap \overline{A}) \cap B) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_2,p_3)}{=} ((A \cap B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_4)}{=} (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
&\overset{\textbf{(DM2)}}{=} (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\
&\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A \cap B) - (A \cap C)
\end{aligned}
$$

e.

$$
\begin{aligned}
A - (B \cup C) &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} A \cap \overline{(B \cup C)} \\
&\overset{\textbf{(DM1)}}{=} A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_1)}{=} (A \cap A) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_3)}{=} ((A \cap A) \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_2,p_3)}{=} ((A \cap \overline{B}) \cap A) \cap \overline{C} \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_3)}{=} (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) \\
&\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A - B) \cap (A - C)
\end{aligned}
$$

f.

$$
\begin{aligned}
A - (B \cap C) &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} A \cap \overline{(B \cap C)} \\
&\overset{\textbf{(DM2)}}{=} A \cap (\overline{B} \cup \overline{B}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_4)}{=} (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\
&\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A - B) \cup (A - C)
\end{aligned}
$$

g.

$$\begin{aligned}
(A \cup B) - C &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A \cup B) \cap \overline{C} \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_4)}{=} (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) \\
&\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A - C) \cup (B - C)
\end{aligned}$$

h.

$$\begin{aligned}
(A \cap B) - C &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A \cap B) \cap \overline{C} \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_4)}{=} (A \cap B) \cap (\overline{C} \cap \overline{C}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_2,p_3)}{=} (A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C}) \\
&\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A - C) \cap (B - C)
\end{aligned}$$

i.

$$\begin{aligned}
A - (A - B) &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} \\
&\overset{\textbf{(DM2)}}{=} A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_4)}{=} (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{\overline{B}}) \\
&\overset{Teo.\ 4(ii)}{=} \emptyset \cup (A \cap \overline{\overline{B}}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_5)}{=} A \cap \overline{\overline{B}} \\
&\overset{Teo.\ 4(iii)}{=} A \cap B
\end{aligned}$$

j.

$$\begin{aligned}
(A - B) - B &\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A \cap \overline{B}) \cap \overline{B} \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_3)}{=} A \cap (\overline{B} \cap \overline{B}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_1)}{=} A \cap \overline{B} \\
&\overset{Teo.\ 5(i)}{=} A - B
\end{aligned}$$

□

Para prosseguir com esta seção sobre as operações definidas sobre conjuntos será agora apresentada a última operação "clássica", sendo esta a diferença simétrica.

**Definição 1.12** (Diferença simétrica) Dado dois conjuntos $A$ e $B$, a diferença simétrica de $A$ e $B$, denotado por $A \ominus B$, corresponde ao seguinte conjunto:

$$A \ominus B = \{x \mid x \in (A - B) \text{ ou } x \in (B - A)\}$$

Olhando atentamente a definição anterior é fácil notar que o conjunto da diferença simétrica é exatamente a união das possíveis diferenças entre os conjuntos, isto é, a diferença simétrica corresponde a seguinte igualdade: $A \ominus B = (A - B) \cup (B - A)$.

*Exemplo* 1.3.11 Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5, 2\}$ tem-se que $A \ominus B = \{1, 4, 5\}$.

A seguir será apresentada uma série de importantes resultados com respeito a diferença simétrica.

**Teorema 8** Sejam $A$ e $B$ subconjuntos quaisquer de um determinado universo $\mathbb{U}$, tem-se que $A \ominus B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$.

Prova Dado $A$ e $B$ dois subconjuntos quaisquer de um determinado universo $\mathbb{U}$ segue que:

$$
\begin{aligned}
A \ominus B &= (A - B) \cup (B - A) \\
&\overset{Teo.\ 5(i)}{=} (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_4)}{=} (A \cup (B \cap \overline{A})) \cap (\overline{B} \cup (B \cap \overline{A})) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_4)}{=} ((A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})) \cap ((\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) \\
&\overset{Teo.\ 4(i)}{=} ((A \cup B) \cap \mathbb{U}) \cap (\mathbb{U} \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_1,p_5)}{=} (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
&\overset{\textbf{(DM2)}}{=} (A \cup B) \cap \overline{(B \cap A)}
\end{aligned}
$$

□

**Corolario 1** Sejam $A$ e $B$ subconjuntos quaisquer de um determinado discurso $\mathbb{U}$, tem-se que $A \ominus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Prova Pelo Teorema 8 tem-se que $A \ominus B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$, mas pelo Teorema 5 (i) segue que $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) - (A \cap B)$, e portanto, $A \ominus B = (A \cup B) - (A \cap B)$. □

O próximo resultado mostra que a operação de diferença simétrica entre conjunto possui elemento neutro, isto é, existe um conjunto que quando operado com qualquer outro conjunto $A$, o resultado é o próprio conjunto $A$.

**Teorema 9** Para todo $A$ tem-se que $A \ominus \emptyset = A$.

Prova Dado um conjunto $A$ qualquer, trivialmente tem-se a seguinte igualdade $A \ominus \emptyset \overset{Cor.\ 1}{=} (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A$. □

Seguindo com as propriedades que a operação de diferença simétrica possui, o próximo resultado mostra a existência de um elemento que neste texto será chamado de **alternador**, isto é, existe um conjunto que quando operado com qualquer outro conjunto $A$, o resultado é o complemento deste conjunto $A$.

**Teorema 10** Para todo $A$ tem-se que $A \ominus \mathbb{U} = \overline{A}$.

Prova Similar a demonstração do Teorema 9, ficando assim como exercício ao leitor. □

O teorema a seguir mostra que a diferença simétrica entre um conjunto $A$ e seu complementar $\overline{A}$ é exatamente igual a totalidade do universo do discurso em que estes conjuntos estão inseridos.

**Teorema 11** Para todo $A$ tem-se que $A \ominus \overline{A} = \mathbb{U}$.

Prova Dado um conjunto $A$ qualquer e seu complementar $\overline{A}$ tem-se pelo Corolário 1 que $A \ominus \emptyset = (A \cup \overline{A}) - (A \cap \overline{A})$, mas pelo Teorema 4 tem-se que $A \cup \overline{A} = \mathbb{U}$ e $A \cap \overline{A} = \emptyset$, consequentemente, $A \ominus \emptyset = \mathbb{U} - \emptyset$, mas pelo Teorema 6 tem-se que $\mathbb{U} - \emptyset = \mathbb{U}$, e portanto, $A \ominus \overline{A} = \mathbb{U}$. □

Continuando a estudar a diferença simétrica o próximo teorema mostra que a diferença simétrica entre um conjunto $A$ e ele mesmo é exatamente igual ao conjunto vazio.

**Teorema 12** Para todo $A$ tem-se que $A \ominus A = \emptyset$.

**Prova** Dado um conjunto $A$ qualquer tem-se pelo Corolário 1 que vale a seguinte igualdade, $A \ominus A = (A \cup A) - (A \cap A)$. Mas pelas propriedades apresentadas na Tabela 1.1 tem-se que $(A \cup A) = (A \cap A) = A$, logo $A \ominus A = A - A$, mas pelo Teorema 6 tem-se que $A - A = \emptyset$, portanto, $A \ominus A = \emptyset$. $\square$

Anteriormente foi mostrado que a diferença entre conjuntos não era comutativa (Exemplo 1.3.8), o próximo resultado contrasta esse fato com respeito a diferença simétrica.

**Teorema 13** Para todo $A$ e $B$ tem-se que $A \ominus B = B \ominus A$.

**Prova** Dado dois conjuntos $A$ e $B$ tem-se pelo Corolário 1 que vale a seguinte igualdade, $A \ominus B = (A \cup B) - (A \cap B)$, mas pela propriedade de comutatividade de $\cup$ e de $\cap$ (ver Tabela 1.1) tem-se que $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$, logo tem-se que $A \ominus B = (B \cup A) - (B \cap A)$, mas pelo Corolário 1 tem-se que $(B \cup A) - (B \cap A) = B \ominus A$, e portanto, $A \ominus B = B \ominus A$. $\square$

**Teorema 14** Para todo $A, B$ e $C$ tem-se que $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \ominus C)$.

**Prova** A prova deste teorema sai direto da definição de diferença simétrica e assim ficará como exercício ao leitor. $\square$

**Teorema 15** Para todo $A$ e $B$ tem-se que $\overline{(A \ominus B)} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

**Prova** Para todo $A$ e $B$ segue que:

$$
\begin{aligned}
\overline{(A \ominus B)} &\overset{Teo.\ 8}{=} \overline{((A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)})} \\
&\overset{\textbf{(DM2)}}{=} \overline{(A \cup B)} \cup \overline{\overline{(A \cap B)}} \\
&\overset{\textbf{(DM1)}}{=} (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{\overline{(A \cap B)}} \\
&\overset{\textbf{(DM2)}}{=} (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \\
&\overset{\textbf{(DM1)}}{=} (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}) \\
&\overset{Tab.\ 1.1(p_2)}{=} (\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \\
&\overset{Teo.\ 4(iii)}{=} (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})
\end{aligned}
$$

$\square$

## 1.4 Partes e Partições

Para concluir esta breve introdução à teoria ingênua dos conjuntos, nesta seção serão trabalhados dois importantes conceitos, as ideias de partes e partições. Ambos conceitos são conjuntos em que os elementos destes são também conjuntos.

O conceito de partes é de suma importância em diversos ramos da matemática, tais como Topologia[39] e linguagens formais[37, 8]. Já as partições são de interesse tanto teoricos[12, 26] quanto práticos, em especial, na área de agrupamento de dados[13, 22].

**Definição 1.13** (Conjunto das partes) Seja $A$ um conjunto. O conjunto das partes[a] de $A$, é denotada por $\wp(A)$, e corresponde ao seguinte conjunto:

$$\wp(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

[a] Em alguns livros é usado o termo conjunto potência em vez do termo conjunto das partes, nesse caso é usado a notação $2^A$ para denotar o conjunto partes, por exemplo ver [41].

Uma propriedade interessante do conjuntos das partes como dito em [40], é que se $A$ for da forma $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então pode-se mostrar que $\wp(A)$ terá exatamente $2^n$ elementos.

*Exemplo* 1.4.1 Seja $A = \{a, b, c\}$ tem-se que o conjunto das parte de $A$ corresponde ao conjunto $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}, \{a, b, c\}\}$.

*Exemplo* 1.4.2 Dado o conjunto $X = \{1\}$ tem-se que $\wp(X) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

*Exemplo* 1.4.3 Seja $A = \emptyset$ tem-se que $\wp(A) = \{\emptyset\}$.

Além do conjunto das partes, os conjuntos gerados pela ideia da partição de um conjunto é de extrama importância em diversos segmentos do conhecimento, como comentado anteriormente, a seguir é apresentado formalmente a ideia de partições.

**Definição 1.14** (Partição) Seja $A$ um conjunto não vazio, uma partição é um conjunto não vazio de subconjuntos disjuntos de $A$, ou seja, uma partição é da forma $\{x_i \mid x_i \subseteq A\}$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(1) Para todo $y \in A$ tem-se que existe um único $i$ tal que $y \in x_i$ para algum $x_i \subseteq A$.

(2) Para todo $i$ e todo $j$ sempre que $i \neq j$, então $x_i \cap x_j = \emptyset$.

É fácil notar pela Definição 1.14 que partições são conjuntos, além disso, como dito em [41] os elementos em uma partição são chamados de **células**, isto é, dado um conjunto $A$ os subconjuntos na partição de $A$ são vistos como as células que formam o próprio conjunto $A$. O resultado a seguir garante que sempre é possível obter pelo menos uma partição de um conjunto.

**Teorema 16** Se $A$ é um conjunto não vazio, então existe pelo menos uma partição de $A$.

Prova Suponha que o conjunto $A$ seja não vazio, assim defina o conjunto $PT_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$, agora claramente tem-se que $PT_A$ satisfaz todas as condições da Definição 1.14 e, portanto, $PT_A$ é uma partição do conjunto $A$. □

*Atenção* Apesar de não ter um nome específico a partição descrita no Teorema 16, é muito importante como ponto de partida para a construção de partições mais complexas, por esse fato neste documento será chamada de **partição trivial**.

## 1.5 Conjuntos Numéricos e Palavras Reservadas

Como este documento irá utilizar a linguagem da teoria ingênua de conjunto como sendo linguagem básica padrão para o desenvolvimento inicial aqui proposto, é conveninte apresentar ao leitor as palavras reservadas para representar os conjuntos numéricos em tal teoria, a seguir são listas as palavras reservadas básicas.

[7] Lembre-se que aqui neste documento 0 é obrigatoriamente um número natural

(a) $\mathbb{N}$, representa o conjunto dos números naturais[7].

(b) $\mathbb{Z}$, representa o conjunto dos números inteiro.

(c) $\mathbb{Q}$, representa o conjunto dos números racionais.

(d) $\mathbb{I}$, representa o conjunto dos números irracionais.

(e) $\mathbb{R}$, representa o conjunto dos números reais.

(f) $\mathbb{C}$, representa o conjunto dos números Complexos.

Além destes conjuntos básicos, alguns subconjuntos deles também merecem destaque, e por isso tem palavras reservadas para eles.

(a) $\mathbb{Z}^*$, representa o conjuntos números inteiros sem o zero, ou seja, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

(b) $\mathbb{Q}^*$, representa o conjuntos números racionais sem o zero.

(c) $\mathbb{R}^*$, representa o conjuntos números reais sem o zero.

(d) $\mathbb{Z}_-$ e $\mathbb{Z}_+$, representam respectivamente o conjuntos números inteiros menores e maiores que o zero, ou seja, $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$ e $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.

(e) $\mathbb{Q}_-, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, tem significado similar ao item anterior, alterando apenas do conjunto dos inteiros para os racionais e reais respectivamente.

Agora como dito em [12], os símbolos podem ser combinados para representar conjuntos ainda mais especificos, por exemplo, o conjuntos do números reais positivos não nulos, isto é, o conjunto de todos os reais positivos maiores que 0, é representado por $\mathbb{R}^*_+$, que nada mais é, do que uma combinação dos símbolos $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{R}_+$.

## 1.6 Questionário

Incluir em algum momento futuro. . .

# Relações

> *"A matemática preocupa-se apenas com a enumeração e comparação de relações".*
>
> *Carl Friedrich Gauss*

## 2.1 Sobre Relações

A ideia de relação é um conceito frequentemente utilizado, seja no cotidiano das pessoas, seja na matemática [7]. Uma subárea da matemática de extrema importância para a Ciência da Computação, especificamente na área de banco de dados, é a álgebra relacional, que de forma resumida é o estudo das relações entre objetos de um mesmo espaço (conjunto).

Como comentado em [18], no cotidiano do mundo "real" existem diversos tipos de relacionamentos entre as entidades, por exemplo, imagine que duas pessoas, um homem jovem e um(a) garotinho(a) compartilham um ancestral comum, tal como um avô, assim pode-se dizer que os dois apresentam uma relação de parentesco, ou ainda que existe uma relação familiar entre os dois.

No que diz respeito ao universo matemático, a noção de relação entre os objetos é algo onipresente em todos os campos da matemática. Um exemplo clássico de relacionamento que se pode estabelecer entre dois números, $x$ e $y$, é a ideia de dobro, isto é, $x$ e $y$ apresentam um relacionamento de dobro entre si no caso de $y = 2x$ ou $x = 2y$.

Note que de forma subliminar os exemplos anteriores caracterizam as relações de parentesco e dobro através da associação de elementos que juntos apresentavam uma certa propriedade, e nesse sentido uma relação nada mais é do que um conjunto definido sobre uma certa propriedade entre elementos de um espaço. A formalização das relações como sendo um conjunto será construída nas próximas seções.

## 2.2 Pares Ordenados e Produto Cartesiano

Da mesma forma que em [1], neste documento será considerada a definição apresentada a seguir de par ordenado, sendo que tal definição foi apresentada pela primeira vez pelo grande matemático e lógico polonês Kazimierz Kuratowski (1896–1980).

**Definição 2.1** (Par Ordenado) Sejam $x$ e $y$ elementos em um universo do discurso. O par ordenado entre $x$ e $y$, denotado por $(x, y)$, corresponde a seguinte igualdade:

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$$

Dado qualquer par ordenado $(x, y)$ o elemento $x$ é chamado de primeira componente do par ordenado, e o $y$ é chamado de segunda componente do par ordenado. Além disso, como explicado em [40, 41], dois pares ordenados $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ serão ditos iguais, se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Por fim, note que, $(x, y)$ consiste em um conjunto heterogêneo na forma $\{x, \{x, y\}\}$, enquanto, $\{x, y\}$ é outro conjunto, e claramente $\{x, \{x, y\}\} \neq \{x, y\}$.

De posse do conceito de par ordenado é possível definir uma nova operação entre conjuntos, tal operação recebe o nome de produto Cartesiano[1] e será de vital importância para em seguida apresentar as ideias ligadas ao conceito de relações.

[1] O nome produto Cartesiano vém do matemática francês René Descartes (1596–1650) [40].

**Definição 2.2** (Produto Cartesiano) Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos quaisquer, o produto Cartesiano entre $A$ e $B$, denotado por $A \times B$, corresponde ao conjunto de todos os pares ordenados em que a primeira componente é um elemento de $A$ e a segunda componente é um elemento de $B$, ou seja, tem-se que:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

*Exemplo* 2.2.1 Dado os seguintes dois conjuntos $\{a, b, c\}$ e $\{-1, 1\}$ tem-se os seguintes produtos Cartesianos.

(a) $\{a, b, c\} \times \{-1, 1\} = \{(a, 1), (a, -1), (b, -1), (b, 1), (c, -1), (c, 1)\}$.

(b) $\{-1, 1\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (-1, a), (-1, c), (-1, b)\}$.

(c) $\{a, b, c\} \times \{a, b\} = \{(a, a), (a, b), (c, b), (b, a), (b, b), (c, a)\}$.

(d) $\{-1, 1\} \times \{1, -1\} = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$

Uma classe de casos particulares da aplicação do produto Cartesiano e a classe dos Cartesianos chamados de quadrados, no que se segue este documento apresenta formalmente a seguir o conceito de Cartesiano quadrado.

**Definição 2.3** (Cartesiano quadrado) Seja $A$ um conjunto qualquer. O produto Cartesiano quadrado de $A$, denotado por $A^2$, corresponde ao produto Cartesiano de $A$ consigo mesmo, ou seja, tem-se que:

$$A^2 = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$$

*Atenção* É bom ter em mente que $A^2$ é apenas uma forma simplificada ou doce (um açúcar sintático[a]) para escrever $A \times A$.

[a] O conceito de açúcar sintático (em inglês *syntactic sugar*), é uma expressão criada em 1964 por Peter J. Landin (1930–2009) em seus seminais trabalhos [30, 31, 32]. De forma direta um açúcar sintático diz respeito a uma sintaxe dentro da linguagem formal que tem por finalidade tornar suas construções mais fáceis de serem lidas e expressas, ou seja, um açúcar sintático é uma ferramenta para tornar o uso da linguagem mais doce (ou amigável) para o uso dos seres humanos.

*Exemplo* 2.2.2 Os itens (c) e (d) do Exemplo 2.2.1 são produtos Cartesianos quadrados.

**Teorema 17** (Produto Cartesiano - absorção) Dado dois conjuntos $A$ e $B$ tem-se que, $A \times B = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Prova ($\Rightarrow$) Por contrapositiva assuma que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, assim tem-se que existem $x \in A$ e $y \in B$, consequentemente, pela definição de produto cartesiano existe $(x, y) \in A \times B$, assim tem-se que, $A \times B \neq \emptyset$, e portanto, a afirmação: Se $A \times B = \emptyset$, então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ é verdadeira.
($\Leftarrow$) Suponha que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, assim tem-se claramente por vacuidade que $A \times B = \emptyset$. $\square$

**Teorema 18** (Produto Cartesiano - igualdade) Dado dois conjuntos $A$ e $B$ tem-se que, $A \times B = B \times A$ se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ou $A = B$.

**Prova** A prova desta asserção ficará como exercício ao leitor. □

O produto Cartesiano enquanto operação tem a propriedade de preservar a relação de inclusão à direta e à esquerda como pode ser visto a seguir.

**Teorema 19** (Produto Cartesiano - monotonicidade à direita) Dado três conjuntos $A, B$ e $C$ tem-se que, $A \subset B$ se, e somente se, $A \times C \subset B \times C$.

**Prova** ($\Rightarrow$) Suponha que $A \subset B$, logo por definição tem-se que todo $x \in A$ é tal que $x \in B$, e assim é óbvio que para todo $(x, y) \in A \times C$ tem-se que $(x, y) \in B \times C$, e portanto, pela definição de subconjunto tem-se que $A \times C \subseteq B \times C$, mas por hipótese tem-se que existe $x' \in B$ tal que $x' \notin A$, logo existe $(x', y) \in B \times C$ tal que $(x', y) \notin A \times C$, consequentemente, $A \times C \subset B \times C$.
($\Leftarrow$) Assuma que $A \times C \subset B \times C$, logo tem-se que para todo $(x, y) \in A \times C$ tem-se que $(x, y) \in B \times C$, mas note que por definição $(x, y) \in A \times C$ se, e somente se, $x \in A$ e de forma similar tem-se que $(x, y) \in B \times C$ se, e somente se, $x \in B$, dessa forma tem-se que $A \subset B$, além disso, por hipótese existe um $(x', y) \in B \times C$ tal que $(x', y) \notin A \times C$, portanto, é claro que existe $x' \in B$ tal que $x' \notin A$, consequentemente, $A \subset B$. □

**Teorema 20** (Produto Cartesiano - monotonicidade à esquerda) Dado três conjuntos $A, B$ e $C$ tem-se que, $A \subset B$ se, e somente se, $C \times A \subset C \times B$.

**Prova** Similar a demonstração do Teorema 19. □

O próximo resultado mostra que a operação de produto Cartesiano se distribui sobre as operações de união, interseção e diferença.

**Teorema 21** (Leis de Distributividade do Cartesiano) Dado três conjuntos $A, B$ e $C$ tem-se que:

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

(iii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(iv) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(v) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

(vi) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

(vii) $A \times (B \ominus C) = (A \times B) \ominus (A \times C)$.

(vii) $(A \ominus B) \times C = (A \times C) \ominus (B \times C)$.

**Prova** Sejam $A, B$ e $C$ conjuntos tem-se que:

(i)

$$
\begin{aligned}
A \times (B \cap C) &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in (B \cap C)\} \\
&= \{(x, y) \mid x \in (A \cap A), y \in (B \cap C)\} \\
&= \{(x, y) \mid x \in A, x \in A, y \in B, y \in C\} \\
&= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \in A, y \in C\} \\
&= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \cap \{(x, y) \mid x \in A, y \in C\} \\
&= (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}
$$

(ii) Similar ao item anterior.

(iii)

$$
\begin{aligned}
A \times (B \cup C) &= \{(x,y) \mid x \in A, y \in (B \cup C)\} \\
&= \{(x,y) \mid x \in (A \cup A), y \in (B \cup C)\} \\
&= \{(x,y) \mid x \in A \text{ ou } x \in A, y \in B \text{ ou } y \in C\} \\
&= \{(x,y) \mid x \in A, y \in B \text{ ou } x \in A, y \in C\} \\
&= \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\} \cup \{(x,y) \mid x \in A, y \in C\} \\
&= (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}
$$

(iv) Similar ao item anterior.

(v)

$$
\begin{aligned}
A \times (B - C) &= \{(x,y) \mid x \in A, y \in (B - C)\} \\
&= \{(x,y) \mid x \in A \cap A, y \in (B - C)\} \\
&= \{(x,y) \mid x \in A, x \in A, y \in B, y \notin C\} \\
&= \{(x,y) \mid (x,y) \in A \times B, (x,y) \notin (A \times C)\} \\
&= (A \times B) - (A \times C)
\end{aligned}
$$

(vi) Similar ao item anterior.

(vii)

$$
\begin{aligned}
A \times (B \ominus C) &\overset{Cor.\ 1}{=} A \times ((B \cup C) - (B \cap C)) \\
&\overset{Teo.\ 21\text{(v)}}{=} (A \times (B \cup C)) - (A \times (B \cap C)) \\
&\overset{Teo.\ 21\text{(iii)}}{=} ((A \times B) \cup (A \times C)) - (A \times (B \cap C)) \\
&\overset{Teo.\ 21\text{(i)}}{=} ((A \times B) \cup (A \times C)) - ((A \times B) \cap (A \times C)) \\
&\overset{Cor.\ 1}{=} (A \times B) \ominus (A \times C)
\end{aligned}
$$

(viii) Similar ao item anterior.

□

O conceito do produto Cartesiano pode, como explicado em [40, 41], ser estendido a poder operar com mais de dois conjuntos, sendo essa extensão realizada de forma natural apenas aumentando um número de componentes nos elementos do conjunto resultante ao conjunto do produto, ou seja, os elementos deixam de ser simples pares ordenados para serem tuplas ordenadas. A seguir este conceito é formalizado.

**Definição 2.4** (Produto Cartesiano $n$-ário) Dado $n \geq 2$ e sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos quaisquer, o produto Cartesiano $n$-ário, denotado por $A_1 \times \cdots \times A_n$, corresponde ao conjunto formado por todas as tuplas da forma $(a_1, \cdots, a_n)$ tal que para todo $1 \leq i \leq n$ tem-se que $a_i \in A_i$.

Em um produto Cartesiano $n$-ário da forma $A_1 \times \cdots \times A_n$ cada $A_i$ com $1 \leq i \leq n$ é chamado de $i$-ésimo fator do produto. Outra forma comum de denotar o produto Cartesiano $n$-ário muito encontrada na literatura é usando o símbolo do produtório, ou seja, $\prod_{i=1}^{n} A_i$, ou ainda na forma açucarada, $A^n$.

*Exemplo* 2.2.3 Dado os conjuntos $\{-1, 1\}, \{a, b\}$ e $\{0, 1\}$ tem-se os seguintes produtos Cartesianos

$n$-ários:

$$\begin{aligned}\{-1,1\}\times\{a,b\}\times\{0,1\} &= \{(-1,a,0),(-1,a,1),(-1,b,0),(-1,b,1),\\ &\quad (1,a,0),(1,a,1),(1,b,0),(1,b,1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{-1,1\}\times\{-1,1\}\times\{a,b\}\times\{a,b\} &= \{(-1,1,a,a),(-1,1,a,b),\\ &\quad (-1,1,b,a),(-1,1,b,b),\\ &\quad (-1,-1,a,a),(-1,-1,a,b),\\ &\quad (-1,-1,b,a),(-1,-1,b,b),\\ &\quad (1,-1,a,a),(1,-1,a,b),\\ &\quad (1,-1,b,a),(1,-1,b,b),\\ &\quad (1,1,a,a),(1,1,a,b),\\ &\quad (1,1,b,a),(1,1,b,b)\}\end{aligned}$$

*Exemplo* 2.2.4 Dado o conjunto $\{0,1\}$ tem-se que

$$\begin{aligned}\{0,1\}^5 &= \{(0,0,0,0,0),(0,0,0,0,1),(0,0,0,1,0),(0,0,0,1,1),(0,0,1,0,0),\\ &\quad (0,0,1,0,1),(0,0,1,1,0),(0,0,1,1,1),(0,1,0,0,0),(0,1,0,0,1),\\ &\quad (0,1,0,1,0),(0,1,0,1,1),(0,1,1,0,0),(0,1,1,0,1),(0,1,1,1,0),\\ &\quad (1,0,0,0,0),(1,0,0,0,1),(1,0,0,1,0),(1,0,0,1,1),(1,0,1,0,0),\\ &\quad (1,0,1,1,0),(1,0,1,1,1),(1,1,0,0,0),(1,1,0,0,1),(1,1,0,1,0),\\ &\quad (1,1,1,0,0),(1,1,1,0,1),(1,1,1,1,0),(1,1,1,1,1),(0,1,1,1,1),\\ &\quad (1,0,1,0,1),(1,1,0,1,1)\}\end{aligned}$$

*Exemplo* 2.2.5 São produtos Cartesianos $n$-ários:

(a) $\{a,b,c\}^2 = \{(a,a),(c,b),(a,c),(a,b),(c,c,)(b,a),(b,b),(b,c),(c,a)\}$.

(b) $\{0,1\}^2 = \{(1,0),(1,1),(0,1),(0,0)\}$.

(c) $\{1\}^9 = \{(1,1,1,1,1,1,1,1,1)\}$.

(d) $\{a,(1,2)\}^2 = \{(a,a),(a,(1,2)),((1,2),a),((1,2),(1,2))\}$.

(e) $\{a,b\}\times\{0\}^2 = \{(a,(0,0)),(b,(0,0))\}$.

(f) $\{1\}^2\times\{1\} = \{((1,1),1)\}$.

Quando os conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são todos conjuntos finitos, uma estratégia muito utilizada para se obter e também representar o mecanismo de construção das tuplas $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ pertencentes ao produto Cartesiano $n$-ário $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é usando a noção de diagrama de árvore [40, 41].

*Atenção* De forma contrária ao que acontecer nos diagramas de árvores nas área de estrutura de dados [57], linguagens formais [8, 28, 37] e compiladores [3, 14], os diagramas de árvore na teoria dos conjuntos são construídos de forma horizontal no sentido da esquerda para à direita.

Em um diagrama de árvore o número de níveis na árvore é igual ao número de conjuntos envolvidos no Cartesiano mais 2, ou seja, para cada produto Cartesiano $n$-ário, o número de níveis na árvore que gera/representa tal cartesiano é igual a $n+2$.

Dado então os conjuntos no Cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$, o diagrama é construindo por níveis da seguinte forma:

1. O nível inicial da árvore (nível 0) é colocado o símbolo de inicio da árvore (neste documento será usado o $*$ como símbolo inicial).

2. Para todo $1 \leq i \leq n$, cada nível $i$ do diagrama vai ser preenchido pelos elementos

do conjunto $A_i$[1].

3. Por fim, no último nível da árvore (ou nível EPC) estão os elementos do produto Cartesiano em si.

*Exemplo* 2.2.6 Dado os conjuntos $\{-1, 1\}, \{a, b\}$ e $\{-1, 1\}$ tem-se que o produto Cartesiano $\{-1, 1\} \times \{a, b\} \times \{-1, 1\}$ pode ser representado pelo diagrama esboçado na Figura 2.1.

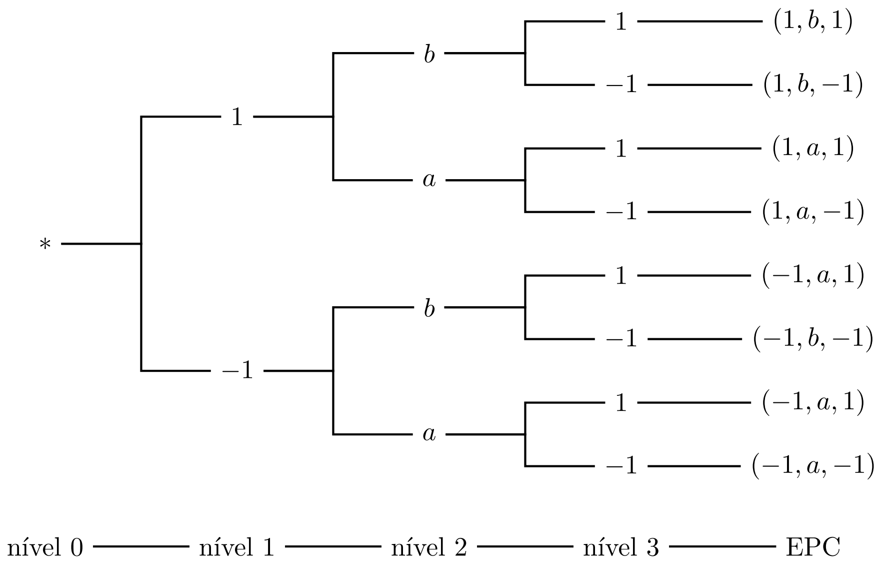



Figura 2.1: Diagrama de árvore para o Cartesiano $\{-1, 1\} \times \{a, b\} \times \{1, -1\}$.

Apesar de ser uma ótima forma prática de representar e visualizar o produto Cartesiano, os diagramas de árvores tendem a não ser adotados com frequência pois seu crescimento se dá em proporções fatoriais, o que torna sua construção facilmente complexa.

## 2.3 Relações

Da mesma forma que foi apresentado em [1], este documento irá nesta seção tratar do conceito de relações binária e suas propriedades. O conceito de relações $n$-ária muito importante na matemática e na teoria de banco de dados não será estudado neste documento.

**Definição 2.5** (Relação binária) Seja $A$ e $B$ dois conjuntos, uma relação $R$ de $A$ em $B$ é qualquer subconjunto de $A \times B$, isto é, $R \subseteq (A \times B)$.

*Atenção* (Açúcar sintático.) Dado $R$ uma relação binária de $A$ em $B$ a sintaxe da teoria dos conjuntos e de pares ordenados permite que seja escrito que $(x, y) \in R$, entretanto, está escrita é geralmente substituída por $x\ R\ y$. E no caso de $(x, y) \notin R$ é escrito simplesmente $x \not R\ y$.

A semântica das palavras $x\ R\ y$ e $x \not R\ y$ podem ser interpretadas respectivamente como: "$x$ está $R$-relacionado (está relacionado por $R$) com $y$" e "$x$ não está $R$-relacionado (não está relacionado por $R$) com $y$". Em algumas obras como [12], é possível ver a sintaxe $x \underrightarrow{R} y$ para designar que $(x, y) \in R$, neste documento o autor irá optar sempre que possível pelo açúcar sintática descrito na Nota 8, e quando não for

[1] Como cada $A_i$ é finito, cada $x \in A_i$ será repetido exatamente $2^{i-1}$ no nível $i$.

possível (ou conveniente) será usado a sintaxe padrão da teoria dos conjuntos e dos pares ordenados.

**Definição 2.6** (Domínio e Imagem) Seja $R$ uma relação de $A$ em $B$, o domínio de $R$, denotado por $dom(R)$, corresponde ao conjunto de todos os elementos de $A$ que são a primeira coordenada de $x \; R \; y$, ou seja,

$$dom(R) = \{x \in A \mid x \; R \; y\}$$

e a imagem de $R$, denotada por $Ima(R)$, corresponde ao conjunto de todos os elementos de $B$ que são a segunda coordenada de $x \; R \; y$, ou seja,

$$Ima(R) = \{y \in B \mid x \; R \; y\}$$

*Exemplo* 2.3.1 Seja $R = \{(a, 1), (b, -1), (c, 1), (b, 1), (c, -1)\}$ uma relação tem-se que $dom(R) = \{a, b, c\}$ e $Ima(R) = \{1, -1\}$.

*Exemplo* 2.3.2 Dado a relação $Q = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 = y\}$ tem-se que $dom(Q) = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N})[\sqrt{y} = x]\}$ e $Ima(Q) = \{y \in \mathbb{N} \mid (\exists x \in \mathbb{N})[x^2 = y]\}$

*Exemplo* 2.3.3 Uma relação binária $R$ famosa é aquela usada para representar o conjunto das frações positivas, tal relação é definida como $F = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in (\mathbb{N} - \{0\})\}$, note que a fração $\frac{1}{12}$ por exemplo corresponde ao elemento $1 \; F \; 12$.

Dada qualquer relação $R$ sempre é possível obter uma nova relação a partir de $R$, essa nova relação recebe o nome de relação inversa ou oposta.

**Definição 2.7** (Relação inversa) Seja $R$ uma relação. A relação inversa (ou oposta) de $R$, denotada por $R^{-1}$, corresponde ao seguinte conjunto:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid x \; R \; y\}$$

*Exemplo* 2.3.4 Considere a relação $R$ do Exemplo 2.3.1, tem-se que a relação inversa de $R$ corresponde ao conjunto $R^{-1} = \{(1, a), (-1, b), (1, c), (-1, c), (1, b)\}$.

*Exemplo* 2.3.5 Dado a relação $P = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b^2\}$ tem-se a inversa de $P$ é exatamente a relação $R = \{(b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b = \sqrt{a}\}$, isto é, $R = P^{-1}$.

Um fato básico para qualquer relação $R$ é que $(R^{-1})^{-1} = R$. Em outras palavras, tal igualdade descreve que a reversa de uma relação, vista como uma operação é sempre involutiva, assim como a negação e o complemento.

**Lema 1** Se $R \subseteq A \times B$, então $R^{-1} \subseteq B \times A$.

**Prova** Suponha que $R \subseteq A \times B$, logo todo $(x, y) \in A$ é tal que $(y, x) \in R^{-1}$, mas de $R \subseteq A \times B$ tem-se que $(x, y) \in A \times B$, consequentemente, por definição $x \in A$ e $y \in B$ e, portanto, $(y, x) \in B \times A$, consequentemente, $R^{-1} \subseteq B \times A$. $\square$

O leitor atento pode notar que o resultado do Lema 1 pode ser estendido para relacionar diretamente duas relações, e isso é feito como se segue.

**Teorema 22** Se $R$ e $S$ são relações tais que $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

**Prova** Similar ao raciocínio da demonstração do Lema 1. $\square$

Uma vez que relações são conjuntos pode-se falar sobre as operações sobre relações, aqui não serão tratadas as operações triviais de união, interseção, complemento e diferença. Para essas operações é recomendável que o leitor retorne para revisar o texto apresentado na Seção 1.3 que trata exatamente de tais operações.

Uma operação natural que surge para as relações é a noção de composição entre duas relações $R_1$ e $R_2$, a ideia da composição é gerar uma terceira relação a partir das relações iniciais. A seguir este documento apresenta formalmente o conceito de composição.

**Definição 2.8** (Composição de relações) Seja $R_1$ uma relação de $A$ em $B$ e seja $R_2$ uma relação de $B$ em $C$, a composição de $R_1$ e $R_2$, denotada por $R_1 \bullet R_2$, corresponde ao seguinte conjunto:

$$R_1 \bullet R_2 = \{(x, z) \mid (\exists y \in B)[x\ R_1\ y \text{ e } y\ R_2\ z]\}$$

**Lema 2** Seja $R_1$ uma relação de $A$ em $B$ e seja $R_2$ uma relação de $B$ em $C$, então tem-se que:

(i) $Dom(R_1 \bullet R_2) \subseteq Dom(R_1)$.

(ii) $Ima(R_1 \bullet R_2) \subseteq Ima(R_2)$.

**Prova** Trivial pela própria Definição 2.8. □

*Exemplo* 2.3.6 Sejam $R = A \times B$ e $Q = B \times C$ tem-se que $R \bullet Q = A \times C$.

*Exemplo* 2.3.7 Dado a relação $R_1 = \{(a, b), (i, b), (o, c), (o, e)\}$ e outra relação $R_2 = \{(b, 1), (b, -1), (c, 3), (d, 4)\}$ tem-se então que a composição de $R_1$ e $R_2$ é exatamente igual a relação $R = \{(a, 1), (a, -1), (i, 1), (i, -1), (o, 3)\}$.

**Teorema 23** (Monotonicidade da Composição de Relações) Seja $R_1$ e $R_2$ relações de $A$ em $B$. Se $R_1 \subseteq R_2$, então para toda relação $R_3$ de $B$ em $C$ tem-se que $(R_1 \bullet R_3) \subseteq (R_2 \bullet R_3)$.

**Prova** Suponha que $R_1$ e $R_2$ são ambas relações de $A$ em $B$ e que $R_1 \subseteq R_2$, agora note que para qualquer relação $R_3$ de $B$ em $C$ tem-se por definição que $(x, z) \in (R_1 \bullet R_3)$ se, e somente se, $(\exists y \in B)[x\ R_1\ y \text{ e } y\ R_3\ z]$, mas uma vez que, $R_1 \subseteq R_2$ é claro que $(\exists y \in B)[x\ R_2\ y \text{ e } y\ R_3\ z]$, e assim $(x, z) \in (R_2 \bullet R_3)$, portanto, $(R_1 \bullet R_3) \subseteq (R_2 \bullet R_3)$, concluindo assim a prova. □

**Corolario 2** Se $R_1, R_2, S_1, S_2$ são relações tais que $R_1 \subseteq R_2$ e $S_1 \subseteq S_2$, então $(R_1 \bullet S_1) \subseteq (R_2 \bullet S_2)$.

**Prova** Suponha que $R_1, R_2, S_1, S_2$ são relações tais que $R_1 \subseteq R_2$ e $S_1 \subseteq S_2$, assim pelo Teorema 23 tem-se que $(R_1 \bullet S_1) \subseteq (R_2 \bullet S_1)$. Agora note que por definição $(x, z) \in (R_2 \bullet S_1)$ se, e somente se, $(\exists y \in Dom(S_1))[x\ R_2\ y \text{ e } y\ S_1\ z]$, mas uma vez que $S_1 \subseteq S_2$ tem-se que $Dom(S_1) \subseteq Dom(S_2)$ e $Ima(S_1) \subseteq Ima(S_2)$ e assim é claro que $(\exists y \in Dom(S_2))[x\ R_2\ y \text{ e } y\ S_2\ z]$, logo $(x, z) \in (R_2 \bullet S_2)$, consequentemente pela definição de subconjunto tem-se que $(R_2 \bullet S_1) \subseteq (R_2 \bullet S_2)$. E portanto, $(R_1 \bullet S_1) \subseteq (R_2 \bullet S_2)$. □

Os próximos resultados estabelecem propriedades algébricas importantes para a operação de composição de relações.

**Teorema 24** Seja $R_1$ uma relação de $A$ em $B$ e seja $R_2$ uma relação de $B$ em $C$ tem-se que $(R_1 \bullet R_2)^{-1} = R_2^{-1} \bullet R_1^{-1}$.

**Prova** Dado $R_1$ uma relação de $A$ em $B$ e seja $R_2$ uma relação de $B$ em $C$ logo,

$$\begin{aligned}
(x,z) \in (R_1 \bullet R_2)^{-1} &\iff (z,x) \in (R_1 \bullet R_2) \\
&\overset{Def.2.8}{\iff} (\exists y \in B)[(z,y) \in R_1 \text{ e } (y,x) \in R_2] \\
&\iff (\exists y \in B)[(y,z) \in R_1^{-1} \text{ e } (x,y) \in R_2^{-1}] \\
&\iff (\exists y \in B)[(x,y) \in R_2^{-1} \text{ e } (y,z) \in R_1^{-1}] \\
&\iff (x,z) \in R_2^{-1} \bullet R_1^{-1}
\end{aligned}$$

e assim pela Definição 1.6 tem-se que $(R_1 \bullet R_2)^{-1} = R_2^{-1} \bullet R_1^{-1}$ o que completa a prova. □

**Teorema 25** Seja $R_1$ uma relação de $A$ em $B$ e seja $R_2$ uma relação de $B$ em $C$ e $R_3$ uma relação de $C$ em $D$ tem-se que $(R_1 \bullet R_2) \bullet R_3 = R_1 \bullet (R_2 \bullet R_3)$.

**Prova** Dado três relações $R_1$ de $A$ em $B$, $R_2$ de $B$ em $C$ e $R_3$ de $C$ em $D$ tem-se por definição que, $(x,z) \in (R_1 \bullet R_2) \bullet R_3$ se, e somente se, existe $w \in C$ tal que $(x,w) \in (R_1 \bullet R_2)$ e $(w,z) \in R_3$, mas isso só é possível se, e somente se, $\exists y \in B$ tal que $(x,y) \in R_1$ e $(y,w) \in R_2$. Mas assim pela Definição 2.8 tem-se que $(y,z) \in R_2 \bullet R_3$, o que irá implicar que $(x,z) \in R_1 \bullet (R_2 \bullet R_3)$ e, portanto, tem-se que $(x,z) \in (R_1 \bullet R_2) \bullet R_3 \iff (x,z) \in R_1 \bullet (R_2 \bullet R_3)$, logo pela Definição 1.6 tem-se que $(R_1 \bullet R_2) \bullet R_3 = R_1 \bullet (R_2 \bullet R_3)$. □

**Teorema 26** Dado duas relações $R_1$ e $R_2$ e $A, B$ e $C$ conjuntos. Se $R_1 \subset A \times B$ e $R_2 \subset B \times C$, então $R_1 \bullet R_2 \subset A \times C$.

**Prova** Suponha que $R_1 \subset A \times B$ e $R_2 \subset B \times C$ logo tem-se que se $(x,y) \in R_1 \bullet R_2$ logo por definição existe $z \in B$ tal que $(x,z) \in R_1$ e $(z,y) \in R_2$, mas assim é claro que $(x,z) \in A \times B$ e $(z,y) \in B \times C$ e, portanto, $(x,y) \in A \times C$. Consequentemente, $R_1 \bullet R_2 \subset A \times C$. □

**Teorema 27** Seja $A, B$ e $C$ conjuntos. Então tem-se que:

(1) Se $A \cap B \neq \emptyset$, então $(A \times B) \bullet (A \times B) = A \times B$.

(2) Se $A \cap B = \emptyset$, então $(A \times B) \bullet (A \times B) = \emptyset$.

(3) Se $B \neq \emptyset$, então $(B \times C) \bullet (A \times B) = A \times C$.

**Prova** Aqui será demonstrado só o fato (1) ficando o (2) e (3) como exercício ao leitor. Dado $A, B$ e $C$ conjuntos, assuma que $A \cap B \neq \emptyset$, agora note que para todo $(x,y) \in (A \times B) \bullet (A \times B)$ tem-se que pelo fato de $A$ e $B$ não serem disjuntos sempre existe um $\exists z \in A \cap B$ tal que $(x,z) \in (A \times B)$ e $(z,y) \in (A \times B)$, portanto, $(x,y) \in A \times B$, logo pela Definição 1.6 tem-se que $(A \times B) \bullet (A \times B) = A \times B$. □

**Teorema 28** Dado duas relações $R_1$ e $R_2$ tem-se que:

(1) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.

(2) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

**Prova** Sejam $R_1$ e $R_2$ duas relações logo,

(1) Tem-se trivialmente que,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} &\iff (y,x) \in (R_1 \cup R_2) \\
&\iff (y,x) \in R_1 \text{ ou } (y,x) \in R_2 \\
&\iff (x,y) \in R_1^{-1} \text{ ou } (x,y) \in R_2^{-1} \\
&\iff (x,y) \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}
\end{aligned}$$

logo pela Definição 1.6 tem-se que $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.

(2) A demonstração é similar ao item anterior.

□

## 2.4 Tipos ou Propriedades das Relações Binárias

Deste ponto em diante todas as relações consideradas até o final deste capítulo serão relações binárias sobre um conjunto não vazio $A$ genérico, ou seja, tem-se que se $R$ for uma relação, então $R \subseteq A \times A$. Dito isto, agora serão apresentados os "tipos", ou na visão de [1], as propriedades que as relações binárias sobre um conjunto podem ser possuir.

**Definição 2.9** (Tipo Identidade) Uma relação $R$ é dita ser uma relação de identidade (ou relação idêntica [1]) sempre que $R$ é igual ao conjunto $\{(x, x) \mid x \in A\}$.

*Exemplo* 2.4.1 Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a relação $M = \{(3, 3), (1, 1), (2, 2), (4, 4)\}$ é uma relação de identidade, já a relação $Q = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4)\}$ não é uma relações de identidade.

*Exemplo* 2.4.2 Dado o conjunto $\mathbb{N}$, a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x - y = 0\}$ é uma relação de identidade, já a relação $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x - y > 0\}$ não é uma relação de identidade pois $(5, 4) \in S$.

Dado que a relação de identidade possui exatamente todos os pares da forma $(x, x)$, é comum chamar esta relação de identidade do conjunto $A$, ou simplesmente identidade de $A$, que costuma também ser denotado por $Id_A$.

**Teorema 29** (Neutralidade da relação de identidade) Se $R$ é uma relação sobre $A$, então as seguintes igualdade são verdadeiras:

(i) $R \bullet Id_A = R$.

(ii) $Id_A \bullet R = R$.

**Prova** (i) Suponha que $R$ é uma relação sobre $A$, assim tem-se que:

$$\begin{aligned} (x, y) \in R \bullet Id_A &\iff (\exists y \in A)[x\ R\ y \text{ e } y\ Id_A\ y] \\ &\iff (x, y) \in R \end{aligned}$$

Portanto, $R \bullet Id_A = R$. (ii) Similar a demonstração do item anterior. □

**Lema 3** Se $A$ é um conjunto não vazio, então $Id_A^{-1} = Id_A$.

**Prova** Trivial pelas Definições 2.7 e 2.9. □

**Definição 2.10** (Tipo Reflexivo) Uma relação $R$ é dita ser reflexiva quando para todo $x \in A$ tem-se que $x\ R\ x$.

Um leitor atento pode perceber que a relação identidade de um conjunto é sempre reflexiva, porém, o oposto não é verdadeiro como exposto no exemplo a seguir.

*Exemplo* 2.4.3 Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$ tem-se que:

(a) $K = \{(a, a), (b, c), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$ é uma relação reflexiva, mas não é a identidade do conjunto $A$.

(a) $M = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ é uma relação reflexiva e é também a relação identidade do conjunto $A$.

Como dito em [1], uma relação $R$ não será reflexiva quando existir pelo menos um $x \in A$ tal que $x \not R\, x$.

*Exemplo* 2.4.4 Dado o conjunto $L = \{0, 0.5, 1\}$ tem-se que o conjunto $Q$ formado pelos elementos $(0, 0), (0, 0.5)$ e $(1, 1)$ não é uma relação reflexiva, pois $0.5 \not R\, 0.5$, ou seja, $(0.5, 0.5) \notin Q$.

O próximo resultado estabelece uma caracterização para as relações serem reflexivas, isto é, tal resultado apresenta as condições suficientes e necessárias para que uma relação seja reflexiva.

**Teorema 30** (Caracterização das Relações Reflexivas) Uma relação $R$ é reflexiva se, e somente se, $Id_A \subset R$.

**Prova** ($\Rightarrow$) Suponha que $R$ seja reflexiva, logo por definição para todo $x \in A$ tem-se que $x\ R\ x$, e portanto, pela Definição 2.9 é claro que $Id_A \subset R$.
($\Leftarrow$) Assuma que $Id_A \subset R$, agora uma vez que para todo $x \in A$ tem-se que $(x, x) \in Id_A$, pela Definição 1.5 segue que $(x, x) \in R$, isto é, tem-se que $x\ R\ x$, e portanto, $R$ é reflexiva. □

**Corolario 3** Uma relação $R$ é reflexiva se, e somente se, $R^{-1}$ é reflexiva.

**Prova** A demonstração é simples e fica como exercício ao leitor. □

**Teorema 31** (Fecho Algébrico das Relações Reflexivas) Se $R_1$ e $R_2$ são relações reflexivas sobre o mesmo conjunto, então $R_1 \cup R_2$ e $R_1 \cap R_2$ são também relações reflexivas.

**Prova** Assuma que $R_1$ e $R_2$ são relações reflexivas sobre um conjunto $A$, assim pelo Teorema 30 tem-se que $Id_A \subset R_1$ e $Id_A \subset R_2$, agora pelo Teorema 3 tem-se a seguinte relação de inclusão:

$$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$$

logo, tem-se que $Id_A \subset R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, consequentemente pelo Teorema 3 tem-se que $R_1 \cup R_2$ é uma relação reflexiva. Agora suponha por absurdo que $Id_A \not\subset (R_1 \cap R_2)$, logo existe $(x, x) \in Id_A$ tal que $(x, x) \notin (R_1 \cap R_2)$, consequentemente pela Definição 1.8 tem-se que $(x, x) \notin R_1$ e $(x, x) \notin R_2$, o que contradiz a hipótese de que $R_1$ e $R_2$ sejam relações reflexivas, isto é, contradiz a hipótese de $Id_A \subset R_1$ e $Id_A \subset R_2$, e portanto, $Id_A \subset (R_1 \cap R_2)$, logo pelo Teorema 30 tem-se que $R_1 \cap R_2$ é também uma relação reflexiva. □

**Teorema 32** Seja $R_1$ uma relação reflexiva sobre um conjunto $A$ e seja $R_2$ um relação qualquer sobre o conjunto $A$, tem-se $R_1 \cup R_2$ é uma relação reflexiva.

**Prova** A demonstração é trivial e ficará como exercício ao leitor. □

**Teorema 33** Se $R$ é uma relação reflexiva, então $R \bullet R^{-1}$ e $R^{-1} \bullet R$ são também relações reflexivas.

**Prova** Assuma que $R$ é uma relação reflexiva sobre um conjunto $A$, assim pelo Corolário 3 tem-se que $R^{-1}$ é uma relação reflexiva. Assim pelo Teorema 30 tem-se que $Id_A \subseteq R$ e $Id_A \subseteq R^{-1}$, consequentemente, pelo Corolário 2 tem-se que $(Id_A \bullet Id_A) \subseteq (R \bullet R^{-1})$ e $(Id_A \bullet Id_A) \subseteq (R^{-1} \bullet R)$, mas pela neutralidade da relação identidade (Teorema 29) tem-se que $Id_A \bullet Id_A = Id_A$, assim tem-se que $Id_A \subseteq (R \bullet R^{-1})$ e $Id_A \subseteq (R^{-1} \bullet R)$, e portanto, $R \bullet R^{-1}$ e $R^{-1} \bullet R$ são relações reflexivas. □

**Teorema 34** Se $R$ é uma relação reflexiva, então as seguintes afirmações são verdadeiras.

(i) $R \subset R \bullet R$.

(ii) $R \bullet R$ é reflexiva.

Prova | A demonstração é simples e fica como exercício ao leitor. $\square$

Um terceiro tipo de relações binárias é o tipo irreflexivo, de um certo ponto de vista, tal tipo de relação pode ser visto como sendo o contraponto do tipo reflexivo.

**Definição 2.11** (Tipo Irreflexivo) Uma relação $R$ é dita ser irreflexiva quando para todo $x \in A$ tem-se que $x \not R\, x$.

*Exemplo* 2.4.5 Seja $P$ o conjunto de todas as pessoas, e seja $R$ a relação "ser vó", tem-se que $R$ é irreflexiva pois é claro que ninguém pode ser vó de si próprio, portanto, para todo $x \in P$ tem-se que $x \not R\, x$.

*Exemplo* 2.4.6 Seja $\mathbb{N}_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$ tem-se que a relação $R$ definida sobre $\mathbb{N}_1$ como sendo $x \not R\, y \iff y = 2x$ é irreflexiva.

Seguindo com a tipagem das relações binárias, a seguir este documento irá apresentar os tipos: simétrico, assimétrico e anti-simétricos.

**Definição 2.12** (Tipo Simétrico) Uma relação $R$ é dita ser simétrica quando para todo $x, y \in A$ se $x\, R\, y$, então $y\, R\, x$.

*Exemplo* 2.4.7 Dado o conjunto $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ o conjunto $\{(x, y) \in A^2 \mid x + y \geq 6\}$ é claramente uma relação simétrica sobre $A$.

*Exemplo* 2.4.8 Sendo $B = \{1, 2, 3, 4\}$ o conjunto $\{(1, 1), (1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 2), (3, 1)\}$ é claramente uma relação simétrica sobre $B$.

Pela Definição 2.12 é fácil notar que uma relação $R$ não será simétrica sempre que existir pelo menos um par $(x, y)$ tal que $x\, R\, y$ mas $y \not R\, x$. O próximo resultado estabelece uma caracterização para as relações simétricas.

**Teorema 35** (Caracterização das Relações Simétricas) Uma relação $R$ será simétrica se, e somente se, $R = R^{-1}$.

Prova | ($\Rightarrow$) Suponha que $R$ é simétrica, logo

$$\begin{aligned} (x, y) \in R &\iff (y, x) \in R \\ &\iff (x, y) \in R^{-1} \end{aligned}$$

portanto, pela Definição 1.6 tem-se que $R = R^{-1}$. ($\Leftarrow$) É trivial e fica como exercício ao leitor. $\square$

**Corolario 4** Se $R$ é simétrica, então $R \bullet R^{-1} = R^{-1} \bullet R$.

Prova | Direto do Teorema 35. $\square$

Agora será mostrado que união e interseção são operações fechadas sobre o conjunto de todas as relações binárias simétricas.

**Teorema 36** Se $R$ e $S$ são relações simétricas, então $R \cup S$ e $R \cap S$ também são simétricas.

Prova | Trivial. $\square$

**Teorema 37** Se $R$ é uma relação qualquer, então $R \bullet R^{-1}$ e $R^{-1} \bullet R$ são ambas simétricas.

Prova Suponha que $R$ é uma relação, assim tem-se que

$$\begin{aligned}(R \bullet R^{-1})^{-1} &\overset{Teo.24}{=} (R^{-1})^{-1} \bullet R^{-1} \\ &= R \bullet R^{-1}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(R^{-1} \bullet R)^{-1} &\overset{Teo.24}{=} R^{-1} \bullet (R^{-1})^{-1} \\ &= R^{-1} \bullet R\end{aligned}$$

assim pelo Teorema 35 tem-se que $R \bullet R^{-1}$ e $R^{-1} \bullet R$ são ambas simétricas. □

**Teorema 38** Se $R$ é uma relação qualquer, então $R \cup R^{-1}$ e $R \cap R^{-1}$ são ambas simétricas.

Prova Suponha que $R$ é uma relação, assim tem-se que

$$\begin{aligned}(R \cup R^{-1})^{-1} &\overset{Teo.28}{=} R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} \\ &= (R^{-1})^{-1} \cup R^{-1} \\ &= R \cup R^{-1}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(R \cap R^{-1})^{-1} &\overset{Teo.28}{=} R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} \\ &= (R^{-1})^{-1} \cap R^{-1} \\ &= R \cap R^{-1}\end{aligned}$$

assim pelo Teorema 35 tem-se que $R \cup R^{-1}$ e $R \cap R^{-1}$ são ambas simétricas. □

**Definição 2.13** (Tipo Assimétrico) Uma relação $R$ é dita ser assimétrica quando para todo $x, y \in A$ se $x \; R \; y$, então $y \not{R} \; x$.

*Exemplo* 2.4.9 Considere que $P$ é a relação de paternidade definida sobre o conjunto dos seres humanos, isto é, $x \; P \; y$ significa que $x$ é pai de $y$, obviamente esta relação é assimétrica pois dado que um indivíduo $x$ é pai de um certo $y$ é impossível que $y$ seja pai de $x$, ou seja, sempre que $x \; R \; y$ será verdade que $y \not{R} \; x$.

*Exemplo* 2.4.10 A relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \mid x - y \leq 0\}$ é uma relação assimétrica

O leitor deve ficar atento ao fato de que uma relação $R$ será dita não ser assimétrica se existir pelo menos um par $(x, y)$ tal que $x \; R \; y$ e também que $x \; R \; y$.

*Exemplo* 2.4.11 Considere $K = \{1, 2, 3, 4\}$ e $T$ a relação binária definida sobre o conjunto $K$ tal que $T = \{(1, 2), (1, 3), (4, 1), (1, 4), (2, 3)\}$. Tem-se claramente que $T$ não é assimétrica pois $4 \; T \; 1$ e $1 \; T \; 4$.

O resultado exposto a seguir mostra que o tipo assimétrico e o tipo irreflexivo estão intimamente ligados entre si.

**Teorema 39** Se $R$ é uma relação assimétrica sobre $A$, então $R$ é uma relação irreflexiva sobre $A$.

Prova Suponha por absurdo que $R$ é uma relação assimétrica sobre $A$ e $R$ não é irreflexiva sobre $A$, logo por $R$ não ser irreflexiva existe $x \in A$ tal que $x \; R \; x$, mas isso não satisfaz a Definição 2.13 e, portanto, isso contradiz a hipótese de que $R$ é uma relação assimétrica sobre $A$, consequentemente se $R$ é assimétrica, então $R$ tem que ser irreflexiva. □

**Definição 2.14** (Tipo Anti-simétrico) Uma relação $R$ é dita ser anti-simétrica quando para todo $x, y \in A$ se $x\ R\ y$ e $y\ R\ x$, então $x = y$.

*Exemplo* 2.4.12 Considerando $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 3), (4, 4), (4, 3)\}$ tem-se que $R$ é claramente anti-simétrica.

*Exemplo* 2.4.13 Dado um conjunto $A$ qualquer a relação de subconjunto $\subseteq$ sobre $\wp(A)$ é uma relação que é anti-simétrica, pois para todo $A, B \in \wp(A)$ quando $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ tem-se por definição que $A = B$.

O leitor deve ter notado que uma relação $R$ sobre um conjunto $A$ não será anti-simétrica se existir pelo menos $x, y \in A$ tais que $x\ R\ y$ e $y\ R\ x$, mas $x \neq y$.

*Exemplo* 2.4.14 Considere que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = (1, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 4)$ obviamente $R$ não é anti-simétrica pois $3\ R\ 2$ e $2\ R\ 3$ mas claramente 2 e 3 são elementos distintos de $A$.

**Teorema 40** (Caracterização das Relações Anti-simétricas) Uma relação $R$ é anti-simétrica sobre $A$ se, e somente se, $R \cap R^{-1} \subset Id_A$.

Prova (⇒) Suponha por absurdo que $R$ é anti-simétrica sobre $A$ e que $R \cap R^{-1} \not\subset Id_A$, logo existe $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ tal que $(x, y) \notin Id_A$, mas pelo fato de que $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ tem-se que $(x, y) \in R$ e $(x, y) \in R^{-1}$ e assim $(y, x) \in R$ e como $R$ é anti-simétrica tem-se que $x = y$, logo $(x, y) \in Id_A$ o que é um absurdo, portanto, se $R$ é anti-simétrica sobre $A$, então tem-se que $R \cap R^{-1} \subset Id_A$. (⇐) Suponha que $R \cap R^{-1} \subset Id_A$, assim seja $x, y \in A$ tal que $x\ R\ y$ e $y\ R\ x$, ou seja, $(x, y) \in R$ e $(x, y) \in R^{-1}$, logo $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ e assim tem-se que $x = y$ e assim $R$ é anti-simétrica. □

**Corolario 5** Uma relação $R$ é anti-simétrica se, e somente se, $R^{-1}$ for anti-simétrica.

Prova Note que,

$$
\begin{aligned}
R \text{ é uma relação anti-simétrica} \quad & \overset{Teo.40}{\iff} \quad R \cap R^{-1} \subset Id_A \\
& \overset{Teo.22}{\iff} \quad (R \cap R^{-1})^{-1} \subset Id_A^{-1} \\
& \overset{Lema\ 3}{\iff} \quad (R \cap R^{-1})^{-1} \subset Id_A \\
& \overset{Teo.28(2)}{\iff} \quad R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} \subset Id_A \\
& \overset{Teo.40}{\iff} \quad R^{-1} \text{ é uma relação anti-simétrica}
\end{aligned}
$$

E isto conclui a prova. □

**Teorema 41** Se $R$ e $S$ são relações anti-simétricas, então $R \cap S$ também é anti-simétrica.

Prova Suponha que $R$ e $S$ são relações anti-simétricas, logo pela Teorema 40 tem-se que $R \cap R^{-1} \subset Id_A$ e $S \cap S^{-1} Id_A$, agora note que,

$$
\begin{aligned}
(R \cap S) \cap (R \cap S)^{-1} \quad & \overset{Teo.28(2)}{=} \quad (R \cap S) \cap (R^{-1} \cap S^{-1}) \\
& \overset{Tab.1.1(p2)\ e\ (p3)}{=} \quad (R \cap R^{-1}) \cap (S \cap S^{-1}) \\
& \overset{Hip.}{\subset} \quad Id_A \cap Id_A \\
& = \quad Id_A
\end{aligned}
$$

Portanto, $(R \cap S) \cap (R \cap S)^{-1} \subset Id_A$ e assim pelo Teorema 40 tem-se que $R \cap S$ é anti-simétrica. □

Continuando a apresentação dos tipos (propriedades) das relações binárias, agora será introduzida o tipo transitivo.

**Definição 2.15** (Tipo Transitivo) Uma relação $R$ é dita ser transitiva quando para todo $x, y, z \in A$ se $x\ R\ y$ e $y\ R\ z$, então $x\ R\ z$.

*Exemplo* 2.4.15 Dado um conjunto não vazio $A$ a relação $\subseteq$ definida sobre $\wp(A)$ é um clássico exemplo de relação transitiva.

*Exemplo* 2.4.16 A relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\exists k \in \mathbb{R})[x = ky]\}$ é uma relação transitiva[a].

[a] A prova disso ficará como exercício ao leitor.

*Exemplo* 2.4.17 A relação “ser ancestral de”, definida sobre o conjunto de todos os seres humanos (vivos e mortos) é uma relação transitiva.

Como muito explicado em [1] uma relação não será transitiva sempre que existirem $x, y, z \in A$ tais que $x\ R\ y$ e $y\ R\ z$ mas $x \not R\ z$.

*Exemplo* 2.4.18 Seja $P = \{1, 2, 3, 4\}$ a relação $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 2), (1, 4)\}$ é transitiva, já a relação $R_2 = \{(1, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ não é transitiva pois $(3, 1), (1, 2) \in R_2$ mas $(3, 2) \notin R_2$.

**Teorema 42** (Caracterização das Relações Transitivas) Uma relação $R$ é transitiva sobre $A$ se, e somente se, $R \bullet R \subset R$.

**Prova** $(\Rightarrow)$ Suponha que $R$ seja transitiva, assim para todo $(x, y), (y, z) \in R$ é tal que $(x, z) \in R$, mas note que $(x, y), (y, z) \in R$ implica que $(x, z) \in R \bullet R$ e, portanto, $R \bullet R \subseteq R$. $(\Leftarrow)$ Assuma que $R \bullet R \subset R$, logo todo $(x, z) \in R \bullet R$ é tal que $(x, z) \in R$, mas note que $(x, z) \in R \bullet R$ implica que existe $y \in A$ tal que $(x, y), (y, z) \in R$ e assim por definição $R$ é transitiva. □

**Corolario 6** Uma relação $R$ é transitiva se, e somente se, $R^{-1}$ é também transitiva.

**Prova** Note que,

$$
\begin{aligned}
R \text{ é uma relação transitiva} &\overset{Teo.42}{\iff} R \bullet R \subset R \\
&\iff (R \bullet R)^{-1} \subset R^{-1} \\
&\overset{Teo.24}{\iff} R^{-1} \bullet R^{-1} \subset R^{-1} \\
&\overset{Teo.42}{\iff} R^{-1} \text{ é uma relação transitiva}
\end{aligned}
$$

E isto conclui a prova. □

**Teorema 43** Se $R$ é transitiva, então $R \bullet R$ é transitiva.

**Prova** Direto do Teorema 42. □

Por fim será agora apresentado o último tipo das relação binárias, sendo este último tipo a contraparte do tipo transitivo.

**Definição 2.16** (Tipo Intransitivo) Uma relação $R$ é dita ser intransitiva quando para todo $x, y, z \in A$ se $x\ R\ y$ e $y\ R\ z$, então $x \not R\ z$.

*Exemplo* 2.4.19 A relação “$x$ é mãe de $y$” definida sobre o conjunto de todas as pessoas (vivas e mortas) é uma relação intransitiva, pois se “Maria é mãe de Julia” e “Julia é mãe de Rebeca” tem-se que “Maria não pode ser mãe de Rebeca”.

O leitor atento pode notar que uma relação $R$ sobre um conjunto não vazio $A$ qualquer, será dita não ser intransitiva quando existir pelo menos três elementos $x, y, z \in A$ tal que $x\ R\ y$ e $y\ R\ z$ e $x \not R\ z$.

## 2.5 Fecho das Relações Binárias

Dado uma relação $R$ e uma propriedade $P$ não satisfeita por $R$, pode-se questionar "É possível fazer $R$ satisfazer $P$?", a resposta para essa pergunta é clara, **não**! Pois $R$, é uma estrutura matemática (uma relação) o que significa que é imutável[2]! O que se pode fazer neste caso, como explicando em [23], é criar uma nova relação $R'$ que seja o fecho-$P$ de $R$, ou seja, essa nova relação é como uma cobertura que fecha $R$ com respeito a propriedade $P$.

A seguir, seguindo a ordem de apresentação vista em [50], este documento irá apresentar de forma direta como é possível fechar as relações com respeito as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade, ou seja, serão definidos os "algoritmos" de fechamento para tais propriedades.

[2] Em matemática os objetos são imutáveis no sentido de que, eles são como são, desde o momento de sua "criação", ou seja, não existe liberdade para mudar de comportamento ou as propriedades dos elementos.

**Definição 2.17** (Fecho de uma relação) Seja $R$ uma relação sobre $A$ e $P$ uma propriedade, a relação $\widehat{R}$ definida sobre $A$ é dita ser o fecho de $R$ com respeito a $P$ sempre que:

1. $\widehat{R}$ possui a propriedade $P$.
2. $R \subseteq \widehat{R}$.
3. Para toda relação $R^*$ que satisfaça as condições (1) e (2) tem-se que $\widehat{R} \subseteq R^*$.

Para fins de interesse de estudantes de computação e também para fins didáticos neste documento serão estudados os métodos de construção dos fechos para propriedades específicas, a saber, as propriedades de reflexividade, transitividade e simetria.

*Atenção* Se $R$ já possui uma certa propriedade $P$, o fecho de $R$ com respeito a esta propriedade $P$ será exatamente o próprio $R$. Nesta situação é dito que $R$ é o ponto fixo de $R$ com respeito a $P$.

**Definição 2.18** Seja $R$ uma relação binária sobre $A$ o fecho reflexivo de $R$, denotado por $ref(R)$, corresponde a seguinte relação:

$$ref(R) = R \cup Id_A$$

*Exemplo* 2.5.1 Seja $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c)\}$ uma relação sobre $A$, o fecho reflexivo desta relação é dado por:

$$\begin{aligned} ref(R) &= R \cup Id_A \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c)\} \cup \{(a, a), (b, b), (c, c)\} \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c), (b, b), (c, c)\} \end{aligned}$$

*Exemplo* 2.5.2 Seja $B = \{0, 1\}$ e $K = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ uma relação sobre $B$, o fecho reflexivo desta relação é dado por:

$$\begin{aligned} ref(K) &= R \cup Id_B \\ &= \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \cup \{(0, 0), (1, 1)\} \\ &= \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\} \end{aligned}$$

*Exemplo* 2.5.3 Dado o conjunto $\mathbb{N}$ e a relação "menor que" definida nos números naturais corresponde ao conjunto,

$$\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists z \in \mathbb{N}_*)[x = y + k]\}$$

e o fecho reflexivo para tal relação é exatamente a relação "menor ou igual que" e corresponde exatamente ao conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists z \in \mathbb{N})[x = y + k]\}$.

**Definição 2.19** Seja $R$ uma relação binária sobre $A$ o fecho simétrico de $R$, denotado por $sim(R)$, corresponde a seguinte relação:

$$sim(R) = R \cup \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

*Exemplo* 2.5.4 Seja $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c)\}$ uma relação sobre $A$, o fecho reflexivo desta relação é dado por:

$$\begin{aligned} sim(R) &= R \cup \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c)\} \cup \{(a, a), (b, a), (c, a), (a, c), (c, b)\} \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c), (b, a), (c, b)\} \end{aligned}$$

*Exemplo* 2.5.5 Se $X$ é o conjunto dos humanos (vivos ou mortos) e $M$ é a relação "pai de", então $sim(M) = \{(x, y) \in X^2 \mid x \text{ é pai de } y \text{ ou } y \text{ é filho de } x\}$.

O próximo fecho apresentado é chamado de fecho transitivo, de um ponto de vista de teoria dos grafos, é exibição direta da propriedade de caminho entre dois pontos $A$ e $B$, sem, entretanto, necessitar informar a existência dos pontos e caminhos intermediários que ligam $A$ e $B$.

**Definição 2.20** Seja $R$ uma relação binária sobre $A$ o fecho transitivo de $R$, denotado por $R^+$, corresponde a seguinte relação:

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$$

em que, $R^1 = R$ e $R^{i+1} = R \bullet R^i$. Em particular, quando $A$ for um conjunto finito a igualdade acima pode ser reescrita como:

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

O fecho transitivo é especialmente importante para diversas áreas que são usualmente de interesse dos cientistas da computação tais como a teoria dos grafos, a lógica e teoria da complexidade. Particularmente o fecho transitivo aparece de forma recorrente nos algoritmos de banco de dados, como dito em [50], pois diversos bancos de dados são construídos desde a década de 70 de forma que seja sempre possível realizar a implementação de fechos transitivos.

*Exemplo* 2.5.6 Para qualquer conjunto $A$ a relação binária $\subseteq$ definida sobre $\wp(A)$ é um clássico exemplo de relação cujo fecho transitivo é igual a ela mesmo.

*Exemplo* 2.5.7 Dado o conjunto $B = \{0, 1\}$ e a relação $T = \{(1, 0), (0, 1)\}$ definida sobre $B$ tem-se que o fecho transitivo de $T$ é dado por,

$$\begin{aligned} T^+ &= \bigcup_{i=1}^{2} T_i \\ &= T_1 \cup T_2 \\ &= T \cup (T \bullet T_1) \\ &= T \cup (T \bullet T) \\ &= \{(1, 0), (0, 1)\} \cup \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 0)\} \\ &= \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 0)\} \end{aligned}$$

*Exemplo* 2.5.8 Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $S = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (2, 3)\}$ uma relação sobre $A$ o fecho transitivo de $R$ é exatamente o conjunto:

$$
\begin{aligned}
S^+ &= \bigcup_{i=1}^{3} S_i \\
&= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \\
&= S \cup (S \bullet S_1) \cup (S \bullet S_2) \\
&= \{(1,2),(2,2),(3,1),(2,3),(1,3),(1,1),(3,3)\}
\end{aligned}
$$

## 2.6 Relações e Grafos

Escrever depois...

## 2.7 Questionário

Escrever depois...

# Equivalência e Ordem

*"O problema do mundo hoje é que as pessoas inteligentes estão cheias de dúvidas, e as pessoas idiotas estão cheias de certezas..."*

*Bertrand Russell*

## 3.1 Introdução

No Capítulo 2 anterior este documento apresentou ao leitor a ideia de relações sobre conjuntos, em especial foram tratadas as relações binários sobre um conjunto dado. Agora nesta seção será apresentada de forma profunda duas classes relações binárias muito importantes, sendo elas as relações de equivalência e de ordem. Como dito em [1, 12], as relações de equivalência ao lado das relações de ordem são de importância central para toda a matemática, além disso, as relações de equivalência também desempenho importantes papéis nas área de mineração de dados [35, 36], aprendizado de máquina [4] e processamento de sinais [34] e imagens [2, 46]. E por sua vez, as relações de ordem também aparecem em diversas áreas de caráter prática tais como processamento de imagens [20, 16], criptografia [24], otimização [29] e etc.

## 3.2 Relações de Equivalência e Espaço Quociente

E interessante começar pela pergunta básica, o que seria uma relação de equivalência? Bem, uma resposta satisfatória para essa pergunta é que uma relação de equivalência pode ser entendida como sendo uma forma de parear os elementos de um conjunto que apresentam similaridade entre si com respeito a uma ou mais propriedades específicas, isto é, uma relação de equivalência junta os elementos em pares pela similaridade, definida por algum critério. A seguir será apresentado de forma precisa o conceito de relação de equivalência.

**Definição 3.1** (Relação de Equivalência) Seja $A$ um conjunto uma relação binária $\equiv$ sobre $A$ é dita ser uma relação de equivalência sempre que $\equiv$ for reflexiva, simétrica e transitiva.

Além da notação $\equiv$ outros símbolos também são comumente encontrados na literatura para representar relações de equivalência, entre, tais símbolos destacam-se $\approx$ e $\sim$.

*Exemplo* 3.2.1 Dado um conjunto $C$ qualquer, a relação de igualdade $(=)$ definida em $C$ é obviamente uma relação de equivalência.

*Exemplo* 3.2.2 Dado o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ a relação $R$ definida por $a\,R\,a$, $a\,R\,b$, $b\,R\,a$, $b\,R\,b$, $c\,R\,c$ e $d\,R\,d$, é claramente uma relação de equivalência.

Os Exemplos 3.2.1 e 3.2.2 permite o leitor perceber uma importante verdade matemática, tal verdade como expressa em [12] pode ser escrita como: "objetos iguais são equivalentes, mas objetos equivalentes nem sempre são iguais".

*Exemplo* 3.2.3 Dado um plano $P$ a relação de paralelismo definido sobre o conjunto de retas de $P$ é uma relação de equivalência, outro exemplo clássico da geometria é a semelhança entre triângulos neste mesmo plano $P$.

*Exemplo* 3.2.4 A relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \mod 5 = y \mod 5\}$ é uma relação de equivalência[a].

[a] A expressão $a \mod 5$ com $a \in \{x, y\}$ diz respeito ao resto da divisão inteira de $a$ por 5.

*Exemplo* 3.2.5 A relação $I = \{(x, y) \in PERS^2 \mid x, y$ possuem a mesma idade$\}$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto de todas as pessoas ($PERS$).

*Exemplo* 3.2.6 Dado o conjunto de todos os times de futebol do Brasil a relação $T$ definida como $x\,T\,y \iff x, y$ nunca foram rebaixados para a segunda divisão, é uma relação de equivalência.

A partir da noção de relação de equivalência é possível como destacado em [1] definir a noção de classes de equivalência.

**Definição 3.2** (Classes de Equivalência) Seja $\equiv$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$, para todo $x \in A$ é definida a classe de equivalência de $x$, denotado por $[x]$, como sendo o conjunto de todos os elementos equivalentes a $x$, simbolicamente tem-se que:

$$[x] = \{y \in A \mid y \equiv x\}$$

Obviamente toda classe de equivalência $[x]$ é um subconjunto do conjunto base. Além disso, obviamente tem-se que $[x] = \emptyset$ se, e somente se, o conjunto base for vazio.

*Exemplo* 3.2.7 Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $0 \equiv 0$, $1 \equiv 1$, $2 \equiv 2$, $3 \equiv 3$, $0 \equiv 2$, $1 \equiv 3$, $2 \equiv 0$, $3 \equiv 1$ tem-se que: $[0] = \{0, 2\}$, $[1] = \{1, 3\}$, $[2] = \{0, 2\}$ e $[3] = \{1, 3\}$.

*Exemplo* 3.2.8 A relação $a \equiv a$, $b \equiv b$, $c \equiv c$, $a \equiv b$, $b \equiv a$ definida sobre o conjunto $\{a, b, c\}$ é uma relação de equivalência e existem as seguintes classes de equivalência $[a] = [b] = \{a, b\}$ e $[c] = \{c\}$.

**Teorema 44** Seja $\equiv$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$ não vazio e sejam $a, b \in A$, tem-se que $a \equiv b$ se, e somente se, $[a] = [b]$.

Prova ($\Rightarrow$) Suponha que $a \equiv b$, assim dado qualquer $x \in [a]$ tem-se que $x \equiv a$, agora pela transitiva de $\equiv$ é claro que $x \equiv b$ e, portanto, $x \in [b]$, logo $[a] \subseteq [b]$ e com raciocínio similar pode-se concluir que $[b] \subseteq [a]$ e assim pela Definição 1.6 tem-se que $[a] = [b]$. ($\Leftarrow$) Suponha que $[a] = [b]$, por $\equiv$ ser reflexiva é claro que $a \equiv a$ e assim $a \in [a]$, mas como $[a] = [b]$ tem-se que $a \in [b]$, e portanto, por definição $a \equiv b$. □

**Teorema 45** Seja $\equiv$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$ não vazio e sejam $a, b \in A$, tem-se que $a \not\equiv b$ se, e somente se, $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Prova ($\Rightarrow$) Suponha por absurdo que $a \not\equiv b$ e $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, logo existe um $x \in A$ tal que $x \in [a] \cap [b]$, mas assim pela Definição 1.8 tem-se que $x \in [a]$ e $x \in [b]$, logo $x \equiv a$ e $y \equiv b$, mas uma vez que $\equiv$ é simétrica tem-se que $a \equiv x$, e como $\equiv$ é transitiva tem-se que $a \equiv b$, o que contradiz a hipótese, caraterizando um absurdo, consequentemente, se $a \not\equiv b$ tem-se então que $[a] \cap [b] = \emptyset$. ($\Leftarrow$) Suponha que $[a] \cap [b] = \emptyset$, como $a \in [a]$ e pela hipótese $a \notin [a] \cap [b]$ tem-se que $a \notin [b]$ e, portanto, $a \not\equiv b$. □

**Definição 3.3** (Espaço Quociente) Seja $A$ um conjunto e $\equiv$ uma relação de equivalência sobre $A$, o espaço quociente de $A$ com respeito (ou módulo) $\equiv$, denotado por $A_{/\equiv}$, é o conjunto de todas as classes de equivalência do conjunto $A$, na linguagem na teoria dos conjuntos tem-se que:

$$A_{/\equiv} = \{[x] \mid x \in A\}$$

*Exemplo* 3.2.9 Seja $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ claramente $R$ é uma relação de equivalência e além disso $[a] = [b] = \{a, b\}$ e $[c] = \{c\}$ assim $A_{/R} = \{[a], [c]\}$.

*Exemplo* 3.2.10 Dado que a relação

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_+ \mid x, y \text{ tem o mesmo resto da divisão por } 2\}$$

é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}_+$ (a prova fica como exercício ao leitor) tem-se claramente que,

$$[0] = \{0, 2, 4, 6, 8, \cdots\}$$

e

$$[1] = \{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$$

ou seja, $[0]$ é o conjunto dos pares positivos e $[1]$ é o conjunto dos impares positivos, assim claramente tem-se que $\mathbb{Z}_{+/P} = \{[0], [1]\}$.

Uma fato importante sobre o espaço quociente de uma relação de equivalência $\equiv$ é que sempre que o conjunto base $A \neq \emptyset$ tem-se que $A_{/\equiv} \neq \emptyset$, e mais do que isso, como mostrado a seguir o espaço quociente é sempre uma partição sobre o conjunto base $A$.

**Teorema 46** Seja $\equiv$ uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio $A$, então $A_{/\equiv}$ é uma partição de $A$.

**Prova** Primeiramente note que como $\equiv$ é uma relação reflexiva tem-se para todo $x \in A$ que $x \in [x]$ e assim claramente $[x] \in A_{/\equiv}$ e $[x] \neq \emptyset$, satisfazendo assim a condição (1) da Definição 1.14. Por outro lado, os Teoremas 44 e 45 mostram que dado $[x], [y] \in A_{/\equiv}$ sempre que $[x] \neq [y]$ tem-se que $[x] \cap [y] = \emptyset$ e, portanto, a condição (2) da Definição 1.14 é satisfeita, desde que as condições (1) e (2) são satisfeita pelo elementos de $A_{/\equiv}$ tem-se que $A_{/\equiv}$ é uma partição de $A$. $\square$

## 3.3 Relações de Ordem

Em algumas situações é interessante que seja possível definir uma hierarquia entre os elementos de um determinado conjunto, de fato, como dito em [1] diversos campos das ciências empíricas, tais como a área da biologia comparada, são dependentes de construções hierárquicas. Dentro da própria ciência da computação diversas áreas (estrutura de dados, classificação de dado e etc.) também utilizam de ordens de hierarquia. Assim é conveniente apresentar o estudo das relações de ordem e das estruturas existentes envolta de tais relações, para isso apresenta-se primeiro as ideias de pré-ordem e ordem estrita.

**Definição 3.4** (Ordem Estrita) Seja $A$ um conjunto, uma relação $\sqsubset$ sobre $A$, é dita ser uma relação de ordem parcial estrita, ou simplesmente ordem estrita, sempre que $\sqsubset$ for irreflexiva e transitiva.

*Exemplo* 3.3.1 A relação $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists k \in \mathbb{N})[k \geq 1 \land y = x + k]\}$ é uma ordem estrita.

*Exemplo* 3.3.2 Dado um conjunto $A$ qualquer a relação de ser subconjunto próprio $(\subset)$ é um ordem estrita sobre o conjunto $\wp(A)$.

*Exemplo* 3.3.3 Dado o conjunto $\{1, 2, 3\}$ a relação $\{(1, 2), (2, 3), (2, 2), (1, 3)\}$ não é uma ordem estrita pois $(2, 2)$ é um par pertencente a relação.

**Definição 3.5** (Pré-ordem) Seja $A$ um conjunto, uma relação $\sqsubseteq$ sobre $A$, é dita ser uma relação de pré-ordem sempre que $\sqsubseteq$ for reflexiva e transitiva.

*Exemplo* 3.3.4 Dado o conjunto $\{a, b, c\}$ a relação $\{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, a), (b, a)\}$ é uma relação de pré-ordem.

*Exemplo* 3.3.5 A relação $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists k \in \mathbb{N})[y = xk]\}$ é uma pré-ordem.

*Exemplo* 3.3.6 A relação $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + y \neq x \text{ e } x + y \neq y\}$ não é uma pré-ordem pois não é reflexiva, basta notar que $(0, 0)$ não pertence a tal relação.

Aumentando as restrições sobre uma pré-ordem, isto é, adicionando mais propriedades a serem exigidas, é construída a noção de ordem parcial, tal conceito é formalizado a seguir.

**Definição 3.6** (Ordem Parcial) Seja $A$ um conjunto, uma relação $\sqsubseteq$ sobre $A$, é dita ser uma relação de ordem parcial sempre que $\sqsubseteq$ for reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Como dito em [1] se $\sqsubseteq$ é uma ordem parcial sobre um conjunto $A$, então tem-se que $\sqsubseteq$ organizar (ou ordena) o conjunto $A$ em uma determinada hierarquia (ou ordem), obviamente um mesmo conjunto pode apresentar diferentes ordenações, ou seja, podem existir diversas ordens parciais sobre $A$.

*Atenção* De forma geral quando $x \sqsubseteq y$ pode ser interpretado como $x$ é anterior ou igual a $y$, entretanto, para o caso especifico das relações de ordem parcial $\leq$ e $\subseteq$ suas semânticas sãos as aquelas que o leitor já conhece, isto é, $x \leq y$ significa $x$ é menor ou igual a $y$ e $X \subseteq Y$ significa que $X$ é subconjunto de $Y$.

Além das duas famosas ordens parciais mencionadas acima, a seguir serão apresentados mais algumas ordens parciais.

*Exemplo* 3.3.7 As seguintes relações são exemplos de ordens parciais:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists k \in \mathbb{N})[y = x + k]\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists k \in \mathbb{N})[y = xk]\}$.

(c) Dado um conjunto $A$ de todas as pessoas da terra a relação $x \; R \; y$ se, e somente se, $x$ tem a mesma altura ou é mais alto que $y$, é uma ordem parcial sobre $A$.

Fique atento e note que a ordem no item $(b)$ do Exemplo 3.3.7 foi anteriormente usado como exemplo de uma pré-ordem, isso ocorre por que toda ordem parcial é uma pré-ordem.

*Exemplo* 3.3.8 Seja $A = \{a, b, c, d\}$ um conjunto a relação $R$ definida como sendo

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (a, c), (a, d)\}$$

é uma ordem parcial sobre $A$.

*Exemplo* 3.3.9 Dado $\{0, 1\}$ e a relação $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ é uma ordem parcial.

*Exemplo* 3.3.10 Dado um conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ a relação $\{(0, 0), (0, 1), (2, 2), (1, 2), (0, 2), (3, 3)\}$ não é uma ordem parcial pois o par $(1, 1)$ não pertence a relação e por definição uma ordem parcial deve ser reflexiva.

A partir da ideia de ordem parcial é possível definir o conceito de comparabilidade como se segue.

**Definição 3.7** (Comparabilidade) Seja $A$ um conjunto não vazio, $\sqsubseteq$ uma ordem parcial sobre $A$ e seja $x, y \in A$, é dito que $x$ e $y$ são comparáveis sempre que $x \sqsubseteq y$ ou $y \sqsubseteq x$.

Como dito em [1, 12] tem-se que a noção de comparabilidade está ligada a ordem em questão, assim pode haver um conjunto $A$ e uma ordem parcial $\sqsubseteq_1$ tal que dois elementos $x$ e $y$ são comparáveis, entretanto, pode haver outra ordem parcial $\sqsubseteq_2$ sobre o mesmo conjunto tal que os elementos $x$ e $y$ não pode ser comparáveis[1].

[1] Em algumas obras é usado a escrita $x \not\sqsubseteq y$ para esboçar que $x$ e $y$ são incomparáveis por uma ordem parcial $\sqsubseteq$.

*Exemplo* 3.3.11 Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ tem-se que $\subseteq$ será obviamente uma ordem parcial sobre $\wp(A)$, agora note que $\{1, 2\} \subseteq A$, portanto, $\{1, 2\}$ e $A$ são comparáveis, por outro lado, $\{1, 2\} \nsubseteq \{1, 3\}$ e $\{1, 3\} \nsubseteq \{1, 2\}$, logo $\{1, 2\}$ e $\{1, 3\}$ são incomparáveis.

*Exemplo* 3.3.12 Dado o conjunto $\mathbb{R}$ e a ordem parcial $\leq$ sobre $\mathbb{R}$ tem-se que todo par de números reais $(x, y)$ é sempre comparável.

Por fim é apresentado a ideia de ordem parcial, pela definição a seguir é fácil para o leitor perceber que toda ordem total é uma ordem parcial, porém, o oposto não é verdade.

**Definição 3.8** (Ordem total) Uma ordem parcial $\sqsubseteq$ sobre um conjunto $A$ é dita ser total quando para todo par de elementos $x, y \in A$ é comparável.

*Exemplo* 3.3.13 São exemplos de ordem totais:

(a) A ordem usual "menor igual" ($\leq$) sobre o conjunto $\mathbb{R}$.

(b) A relação $\{(a_0, a_0), (a_0, a_1), (a_0, a_2), (a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_2)\}$ sobre o conjunto $\{a_0, a_1, a_2\}$.

Nesta seção ao apresentar a ideia de relações de ordem isso era feito pelo estudo da relação em si ficando seu conjunto base em segundo plano e com pouco interesse, agora serão considerados simultaneamente os dois conceitos juntos, ou seja, será agora apresentado o conceito de conjunto parcialmente ordenado.

## 3.4 *Posets* e Diagramas de Hasse

Como dito em [48], os conjuntos parcialmente ordenados ou *posets* (em inglês) têm uma longa história que remonta ao início do século XIX, onde as propriedades da ordenação dos subconjuntos de um conjunto foram investigadas. Embora o matemático Felix Hausdorff[2] (1868-1942) não tenha sido a pessoa que introduziu a ideia de conjunto parcialmente ordenado, foi ele que fez o primeiro estudo sério de uma teoria geral dos posets em seu trabalho [27].

[2] Famoso por seus trabalhos em topologia.

**Definição 3.9** (Poset) Um conjunto parcialmente ordenado ou *poset* é uma estrutura $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ onde $A$ é um conjunto não vazio e $\sqsubseteq$ é uma ordem parcial sobre $A$.

*Exemplo* 3.4.1 São exemplos de conjuntos parcialmente ordenados:

(a) $\langle \wp(A), \subseteq \rangle$.

(b) $\langle C, : \rangle$ onde $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\}$ e $x : y$ se, e somente se, $x$ é um divisor de $y$.

(c) $\langle \mathbb{Z}, \geq \rangle$.

(d) $\langle B, \subseteq \rangle$ onde $B = \{R_1, R_2, \cdots\}$ é o conjunto de todas as relações binárias sobre um conjunto $A$.

Agora como dito em [45], muitas vezes é conveniente utilizar uma representação gráfica para os *posets* que possa evidenciar as relações hierárquicas existentes entre os elementos do conjunto base. Essa representação como dito em [1], é chamada de diagrama de Haase[3]. Vale salientar que tal representação não é para qualquer *poset* apenas os *posets* finitos podem ser representados por tais diagramas de forma completa.

[3] Em homenagem ao matemático alemão Helmut Hasse (1898-1979) que introduziu tais diagramas.

O diagrama de Hasse é um grafo orientado acíclico construído utilizando a relação "$x$ cobre $y$" sempre que $x \sqsubseteq y$, o diagrama é construído para um *poset* $\langle A, \sqsubseteq\rangle$ com $A$ finito usando as seguintes regras:

($r_1$) Para todo $x, y \in A$ se $x \sqsubseteq y$ e não existe um $z$ tal que $x \sqsubseteq z$ e $z \sqsubseteq y$ com $x \neq y$, então o ponto de $x$ aparece inferior no diagrama ao ponto de $y$.

($r_2$) Para todo $x, y \in A$ se $x$ e $y$ satisfazem ($r_1$), então os pontos de $x$ e $y$ são ligados por segmento de reta.

($r_3$) Todos os elementos $x \in A$ devem aparecer no diagrama como um ponto (ou nó).

Para ilustrar a construção de um diagrama de Hasse, considere o *poset* com a seguinte estrutura $\langle\{a, 2, 1, b\}, R\rangle$ onde $R = \{(1,1), (a,a), (1,a), (b,b), (1,b), (2,2), (b,2), (a,2), (1,2)\}$. Agora note que como $(1, a)$ satisfaz a regra ($r_1$), assim o ponto de 1 aparece inferior no diagrama ao ponto de $a$ e o mesmo iriá valer para os casos $(1, b)$, $(a, 2)$ e $(b, 2)$, além disso, note que o 2 aparece relacionado sempre do lado direto da relação com todos os outros elementos do conjunto, logo pode-se estabelecer a seguinte distribuição espacial vista na Figura 3.1.

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ a & & b \\ & 1 & \end{array}$$

Figura 3.1: Distribuição espacial dos pontos para o diagrama de Hasse do *poset* $\langle\{a, 2, 1, b\}, R\rangle$.

Seguindo o desenvolver do diagrama, pode-se executando a regra ($r_2$) ligar todos os pontos no diagrama, afim de, ilustrar as relações entre os elementos, ficando o diagrama na forma apresentada a seguir:

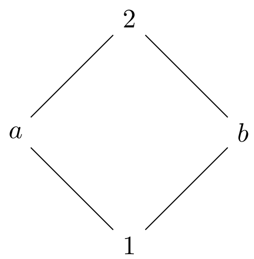



Figura 3.2: Diagrama de Hasse do *poset* $\langle\{a, 2, 1, b\}, R\rangle$.

Como todos os elementos de $\{a, 2, 1, b\}$ já estão no diagrama então não há nada mais a fazer.

*Exemplo* 3.4.2 O *poset* $\langle\{0, 1, c, d\}, Lip\rangle$ onde $Lip = \{(x, y) \mid x \leq y \text{ ou } (x \in \{0, 1\}, y \in \{a, b\})\}$ pode ser representado pelo diagrama a seguir.

*Exemplo* 3.4.3 O *poset* $\langle\wp(\{a, b, c\}), \subseteq\rangle$ pode ser representado pelo dois diagramas a seguir.

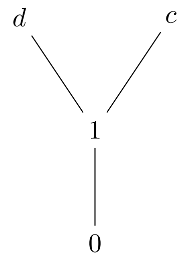
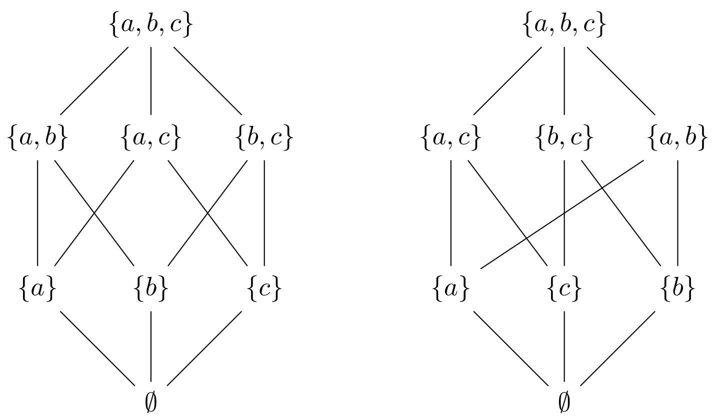



Figura 3.3: Diagrama de Hasse do *poset* $\langle\{0, 1, c, d\}, Lip\rangle$




(a) Representação em forma de cubo.

(b) Representação em forma de quase cubo.

Figura 3.4: Diagramas de Hasse para o *poset* $\langle\wp(\{a, b, c\}), \subseteq\rangle$.

*Exemplo* 3.4.4 O *poset* $\langle\{5, 6, 7, 8, 9\}, \leq\rangle$ é representado pelo diagrama a seguir.

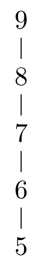



Figura 3.5: Diagrama de Hasse do *poset* $\langle\{5, 6, 7, 8, 9\}, \leq\rangle$

*Posets* cuja ordem é total também são chamados de cadeias (ver [1, 45]) e nesse caso o diagrama será uma linha reta com todos os elementos sobre essa linha, exatamente como no Exemplo 3.4.4. O leitor sem saber já usava esse conceito em seus estudo matemáticos a proferir frases como "a reta real" ou "a reta dos números reais". Agora obviamente dado um diagrama de Hasse sempre é possível recuperar a estrutura do *poset* do mesmo, isto é, recuperar o conjunto base e a relação de ordem parcial que define o *poset*, a seguir são apresentados alguns exemplos disto.

*Exemplo* 3.4.5 Dado o diagrama de Hasse da Figura 3.6 a seguir, dado que 6 está ligado e abaixo de 3 e 2 tem-se que $(6, 3), (6, 2) \in R$ onde $R$ é uma relação, o mesmo vale para os pares $(3, 5), (2, 4), (5, 1)$ e $(4, 1)$. Desse modo tal figura representa o *poset* $\langle A, R\rangle$ em que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $R$ corresponde a relação $\{(6, 3), (6, 2), (3, 5), (2, 4), (5, 1), (4, 1), (6, 5), (6, 4), (6, 1), (2, 1), (5, 1)\} \cup Id_A$.

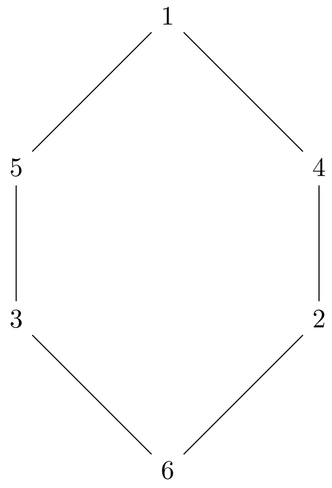



Figura 3.6: Um diagrama de Hasse.

*Exemplo* 3.4.6 Dado o diagrama de Hasse da Figura 3.7 representa o *poset* $\langle B, R_B \rangle$ em que: $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e

$$R_B = Id_B \cup \{(5,1),(6,1),(1,2),(2,3),(2,4)\} \cup \{(5,1),(6,1),(1,2),(2,3),(2,4)\}^+$$

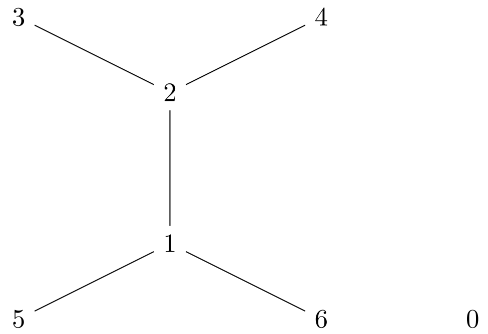



Figura 3.7: Um diagrama de Hasse.

Como dito em [12] um *poset* é uma álgebra relacional ordenado, ou ainda, uma álgebra relacional, e como uma álgebra pode-se estudar: os elementos destacados, suas sub-álgebras (sub-estruturas) ou ainda os mecanismo de extensão da mesma. Na próxima seção este manuscrito irá realizar um estudo sobre os pontos.

## 3.5 Elementos Notáveis de um *Poset*

Como muito bem aprofundado em [12, 45, 48], existem diversos conceitos e aplicações interessantes ligados a ideia de *posets*, assim para ajudar que leitor tenha uma formação sólida na área de teoria dos *posets* é interessante apresentar alguns deste conceitos chaves da teoria, neste seção serão trabalhos os elementos notáveis existes nos *posets* e suas propriedades.

**Definição 3.10** (Máximo e Mínimo de um subconjunto) Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$ o máximo de $X$, denotado por $max(X)$, é um elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ tem-se que $y \sqsubseteq x$. O mínimo de $X$, denotado por $min(X)$, é um elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ tem-se que $x \sqsubseteq y$.

*Exemplo* 3.5.1 Considere o *poset* da Figura 3.2 para o conjunto $X = \{1, 2, a\}$ tem-se que $min(X) = 1$ e $max(X) = 2$.

*Exemplo* 3.5.2 Considere o *poset* da Figura 3.3 para o conjunto $X = \{0, 1\}$ tem-se que $min(X) = 0$ e $max(X) = 1$.

*Exemplo* 3.5.3 Considere o *poset* da Figura 3.4a para o conjunto $X = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$ tem-se que $min(X) = \emptyset$ e $max(X) = \{a, b\}$.

Agora é conveniente ressaltar que tanto máximo quando o mínimo podem vir há não existir, isto é, dado um *poset* $\langle A, \sqsubseteq\rangle$ um subconjunto $X$ de $A$ pode-se de tal forma que ele não contenha máximo e(ou) mínimo.

*Exemplo* 3.5.4 Considere o *poset* ilustrado pela Figura 3.6 o subconjunto $\{3, 2, 5, 4\}$ deste *poset* não apresenta máximo e nem mínimo.

*Exemplo* 3.5.5 Considere o *poset* ilustrado pela Figura 3.7 o subconjunto $\{1, 5, 6\}$ deste *poset* possui máximo mas não possui mínimo.

**Teorema 47** (Unicidade do máximo) Seja $\langle A, \sqsubseteq\rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$. Se existe $x \in X$ tal que $max(X) = x$, então $x$ é único.

**Prova** Dado $\langle A, \sqsubseteq\rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$. Suponha por absurdo que existem $x, x' \in X$ tal que $max(X) = x$ e $max(X) = x'$ com $x \neq x'$, logo por definição para todo $a \in X$ tem-se que $a \sqsubseteq x$ e $a \sqsubseteq x'$, mas desde que $x, x' \in X$ tem-se que $x \sqsubseteq x'$ e $x' \sqsubseteq x$ e, desde que, $\sqsubseteq$ é antissimétrica tem-se que $x = x'$ o que contradiz a hipótese e, portanto, se existe o máximo de $X$ ele é único. □

**Teorema 48** (Unicidade do mínimo) Seja $\langle A, \sqsubseteq\rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$. Se existe $x \in X$ tal que $min(X) = x$, então $x$ é único.

**Prova** Similar a demonstração do Teorema 47. □

**Teorema 49** Seja $\langle A, \sqsubseteq\rangle$ um *poset* e $X, Y \subseteq A$ com $X \subseteq Y$ tem-se que:

(i) Se $max(X) = a$ e $max(Y) = b$, então $a \sqsubseteq b$.

(ii) Se $min(X) = a$ e $min(Y) = b$, então $b \sqsubseteq a$.

**Prova** A demonstração é simples e fica como exercício ao leitor. □

Além da ideia de máximo e mínimo sobre os *posets* também definido a ideia de maximais e minimais.

**Definição 3.11** (Elementos maximais) Seja $\langle A, \sqsubseteq\rangle$ um *poset* um elemento $x \in A$ é dito ser um maximal se para todo $y \in A$ tem-se que se $x \sqsubseteq y$, então $x = y$.

*Exemplo* 3.5.6 Considere o *poset* esboçado pela Figura 3.8 a seguir. Para tal *poset* tem-se que o elemento $g$ é um maximal e também é o máximo do conjunto.

*Exemplo* 3.5.7 Considere o *poset* esboçado pela Figura 3.6. Para tal *poset* tem-se que o elemento 1 é um maximal e também é o máximo do conjunto.

Em algumas situações elementos maximais coincidem com o máximo, entretanto, como mostrado a seguir ser maximal não é garantia de ser o máximo do conjunto.

*Exemplo* 3.5.8 Considere o *poset* esboçado pela Figura 3.9 a seguir. Para tal *poset* tem-se que os elementos 4 e 5 satisfazem a Definição 3.11 logo ambos são maximais do conjunto, porém, ambos são incomparáveis, portanto, nenhum é o máximo do conjunto.

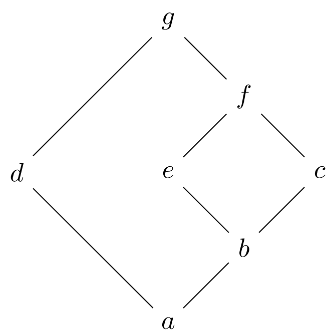



Figura 3.8: Um *poset* representado por um diagrama de Hasse.

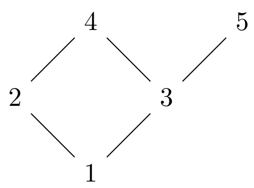



Figura 3.9: Um *poset* representado por um diagrama de Hasse.

De forma dual ao conceito de maximal pode-se definir a ideia de elemento minimal, e isto é feito como se segue.

**Definição 3.12** (Elementos minimais) Seja $\langle A, \sqsubseteq\rangle$ um *poset* um elemento $x \in A$ é dito ser um minimal se para todo $y \in A$ tem-se que se $y \sqsubseteq x$, então $x = y$.

*Exemplo* 3.5.9 Considerando o *poset* da Figura 3.8 tem-se que o elemento $a$ é minimal de tal conjunto e também apresenta a característica de ser o mínimo.

*Exemplo* 3.5.10 Considerando o *poset* da Figura 3.9 tem-se que o elemento 1 é minimal de tal conjunto e também apresenta a característica de ser o mínimo.

*Exemplo* 3.5.11 Considerando o *poset* da Figura 3.7 tem-se que os elementos 5 e 6 são ambos minimais, porém, como são ambos incomparáveis tem-se que nenhum dos dois é o mínimo do conjunto base do *poset*.

*Exemplo* 3.5.12 Considere o *poset* da Figura 3.10 a seguir, tem-se que $g$ e $f$ são elementos maximais e $c, a$ e $b$ são elementos minimais, note que tal *poset* não possui máximo e mínimo.

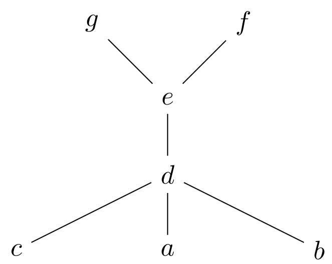



Figura 3.10: Um *poset* representado por um diagrama de Hasse.

**Definição 3.13** (Majorante) Seja $\langle A, \sqsubseteq\rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$, um elemento $x \in A$ é dito ser um majorante (ou cota superior) de $X$ sempre que para todo $y \in X$ tem-se que $y \sqsubseteq x$.

*Exemplo* 3.5.13 Considere o *poset* esboçado na Figura 3.10 e o subconjunto $X = \{e, d, c\}$ tem-se que os elementos $e, f$ e $g$ são todos majorantes de $X$. Já os subconjuntos $Y = \{g, f, e\}$ e $Z = \{g, f, a\}$ não possuem majorantes.

*Exemplo* 3.5.14 Considere o *poset* esboçado na Figura 3.9 e o subconjunto $X = \{2, 3, 5\}$ não possui majorantes, já o conjunto $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ possui o elemento 4 como majorante.

*Exemplo* 3.5.15 Considere o *poset* esboçado na Figura 3.8 e o subconjunto $X = \{d, e, f\}$ tem-se que o elemento $g$ é o majorante de $X$.

Como mencionado em [1] se $x$ é um majorante (ou cota superior) de um conjunto $X$, é dito que $X$ é um conjunto majorado pelo elemento $x$ ou que o conjunto $X$ possui uma cota superior $x$.

**Definição 3.14** (Conjunto dos majorantes) Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$, o conjunto de todos os majorantes de $X$ é denotado por $X_{\uparrow}$.

Como dito em [1, 12, 45] a maior parte dos conceito na teoria dos *posets* tem natureza dual, assim é natural que seja imediatamente apresentadas as definições de minorantes e conjunto dos minorantes.

**Definição 3.15** (Minorante) Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$, um elemento $x \in A$ é dito ser um minorante (ou cota inferior) de $X$ sempre que para todo $y \in X$ tem-se que $x \sqsubseteq y$.

*Exemplo* 3.5.16 Considere o *poset* esboçado na Figura 3.10 e o subconjunto $X = \{e, d, c\}$ tem-se que o elemento $c$ é o minorante de $X$. Já os subconjuntos $Y = \{g, f, e\}$ tem como minorantes os elementos $e, d, c, a$e $b$, por fim, para o conjunto $Z = \{g, f, a\}$ o único minorantes é o elemento $a$.

*Exemplo* 3.5.17 Considere o *poset* esboçado na Figura 3.9 e o subconjunto $X = \{2, 3, 5\}$ tem como minorante o elemento 1, já o conjunto $Y = \{3, 4, 5\}$ possui como minorantes os elementos 1 e 3.

*Exemplo* 3.5.18 Considere o *poset* esboçado na Figura 3.8 e o subconjunto $X = \{d, e, f\}$ tem-se que o elemento $a$ é o único minorante deste conjunto, já para o conjunto $Y = \{g, f\}$ tem-se os elementos $f, e, c, b$ e $a$ como minorantes de $Y$.

**Definição 3.16** (Conjunto dos minorantes) Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$, o conjunto de todos os minorantes de $X$ é denotado por $X_{\downarrow}$.

**Teorema 50** Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subset A$. Se $a \in A$ é um majorante (minorante) de $X$ e $a \in X$, então $a = max(X)$ $(a = min(X))$.

Prova Trivial. □

O próximo resultado estabelece que o conjunto de majorantes e minorantes respeita a monotonicidade da relação de inclusão.

**Teorema 51** Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X, Y \subseteq A$. Se $X \subseteq Y$, então:

(i) $Y_{\uparrow} \subseteq X_{\uparrow}$.

(ii) $Y_{\downarrow} \subseteq X_{\downarrow}$.

Prova A demonstração é simples e ficará como exercício ao leitor. □

**Definição 3.17** (Conjunto limitado) Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$, o conjunto $X$ é dito ser limitado em $A$ sempre que $X$ possui majorantes e minorantes.

*Exemplo* 3.5.19 Considere o *poset* $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ o conjunto $X_{k_1,k_2} = \{x \in \mathbb{N} \mid k_1 < x < k_2\}$ é um conjunto que sempre possuirá majorantes e minorantes (a saber $k_1$ e $k_2$) logo ele é um conjunto limitado em $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.

*Exemplo* 3.5.20 Considere o *poset* $\langle \wp(A), \subseteq \rangle$ onde $A$ é um conjunto qualquer, um conjunto $X \in \wp(A)$ sempre irá possuir minorante e majorante, que como dito em [1] são gerados pela interseção e união respectivamente. Assim qualquer $X \in \wp(A)$ sempre será um conjunto limitado em $\langle \wp(A), \subseteq \rangle$.

*Exemplo* 3.5.21 Considere o *poset* esboçado na Figura 3.10 e o subconjunto $X = \{e, d, c, a, b\}$ tem-se que tal conjunto possui os majorantes $e, g$ e $f$, mas não possui minorantes, assim $X$ não é limitado.

**Teorema 52** Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$. Se $X \neq \emptyset$, então $X \subseteq (X_{\downarrow})_{\uparrow}$.

Prova Dado $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$, suponha que $X \neq \emptyset$, assim para todo $x \in X$ e cada $y \in X_{\downarrow}$ tem-se que $y \sqsubseteq x$, logo $x \in (X_{\downarrow})_{\uparrow}$, portanto, $X \subseteq (X_{\downarrow})_{\uparrow}$. □

**Teorema 53** Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$. Se $X \neq \emptyset$, então $X \subseteq (X_{\uparrow})_{\downarrow}$.

Prova Similar a prova do Teorema 52. □

**Teorema 54** Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$. Se $X \neq \emptyset$, então:

(i) $X_{\uparrow} = ((X_{\uparrow})_{\downarrow})_{\uparrow}$.

(ii) $X \downarrow = ((X_{\downarrow})_{\uparrow})_{\downarrow}$.

Prova Dado $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$. Suponha que $X \neq \emptyset$, assim tem-se que:

(i) Pelo Teorema 53 segue que $X_{\uparrow} \subseteq ((X_{\downarrow})_{\uparrow})_{\downarrow}$, por outro lado, pelo Teorema 52 pode-se concluir que $((X_{\uparrow})_{\downarrow})_{\uparrow} \subseteq X_{\uparrow}$, portanto, pela Definição 1.6 tem-se que $X_{\uparrow} = ((X_{\uparrow})_{\downarrow})_{\uparrow}$.

(ii) Similar ao item anterior.

Completando assim a prova. □

**Teorema 55** Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X, Y \subseteq A$. Se $X, Y \neq \emptyset$, então:

(i) $(X \cup Y)_{\downarrow} = X_{\downarrow} \cap Y_{\downarrow}$.

(ii) $(X \cup Y)_{\uparrow} = X_{\uparrow} \cap Y_{\uparrow}$.

Prova Dado $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$. Suponha que $X \neq \emptyset$, assim tem-se que:

(i) Desde que $X \subseteq X \cup Y$ e $Y \subseteq X \cup Y$ tem-se pelo Teorema 51 que $(X \cup Y)_{\downarrow} \subseteq X_{\downarrow}$ e $(X \cup Y)_{\downarrow} \subseteq Y_{\downarrow}$, consequentemente, $(X \cup Y)_{\downarrow} \subseteq X_{\downarrow} \cap Y_{\downarrow}$. Por outro lado, para todo $x \in X_{\downarrow} \cap Y_{\downarrow}$ tem-se para todo $y \in X$ que $x \leq y$ e para todo $z \in Y$ que $x \leq z$, assim $x \in (X \cup Y)_{\downarrow}$ e assim $(X \cup Y)_{\downarrow} \subseteq X_{\downarrow} \cap Y_{\downarrow}$ e, portanto, pela Definição 1.6 tem-se que $(X \cup Y)_{\downarrow} = X_{\downarrow} \cap Y_{\downarrow}$.

(ii) Similar ao item anterior.

O que termina a prova. □

**Definição 3.18** (Supremo) Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$ o supremo de $X$ (caso exista), denotado por $sup(X)$, é o menor dos majorantes, em notação formal tem-se que $sup(X) = min(X_{\uparrow})$.

Como dito em [1, 12], uma forma de caracterização do supremo é através de suas propriedades inerentes, e isto é feito da seguinte forma, dado um *poset* $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ tem-se que $sup(X) = a$ se, e somente se:

1. $a \in A$.
2. Para todo $x \in X$ tem-se que $x \sqsubseteq a$.
3. Se $a' \in A$ e para todo $x \in X$ tem-se que $x \sqsubseteq a'$, então $a \sqsubseteq a'$.

Note que a propriedade (1) diz que o supremo (caso exista) é sempre um elemento do poset, já a propriedade (2) estabelece que o supremo deve ser um majorante e a propriedade (3) estabelece que o supremo deve ser a menor cota superior, isto é, o mínimo do conjunto dos majorantes.

**Definição 3.19** (Ínfimo) Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X \subseteq A$ o ínfimo de $X$ (caso exista), denotado por $inf(X)$, é o maior dos minorantes, em notação formal tem-se que $sup(X) = max(X_{\downarrow})$.

Dualmente ao supremo como dito em [1, 12], uma forma de caracterização do ínfimo é através de suas propriedades inerentes, e isto é feito da seguinte forma, dado um *poset* $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ tem-se que $inf(X) = a$ se, e somente se:

1. $a \in A$.
2. Para todo $x \in X$ tem-se que $a \sqsubseteq x$.
3. Se $a' \in A$ e para todo $x \in X$ tem-se que $a' \sqsubseteq x$, então $a' \sqsubseteq a$.

Ou seja, a propriedade (1) diz que o ínfimo (caso exista) é sempre um elemento do poset, já a propriedade (2) estabelece que o ínfimo deve ser um minorante e a propriedade (3) estabelece que o ínfimo deve ser a maior cota inferior, isto é, o máximo do conjunto dos minorantes.

*Atenção* Com pode ser visto em [12] e [59], os termos *least upper bound* (menor cota superior) e *join* são sinônimos de supremo, enquanto, que *greatest lower bound* (maior cota inferior) e *meet* são sinônimos de ínfimo.

*Exemplo* 3.5.22 Considere o *poset* representado pela Figura 3.11 a seguir, o subconjunto $X = \{2, 3, 4, 5\}$ é tal que $sup(X) = 7$ e $inf(X) = 2$, por lado, para o subconjunto $Y = \{1, 0, 2, 4\}$ tem-se que $sup(Y) = 3$ mas não existe um ínfimo de tal conjunto. Além disso, pegando o conjunto inteiro do *poset* tem-se que o conjunto possui supremo, a saber 7 mas não possui ínfimo.

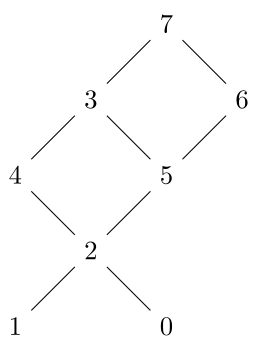



Figura 3.11: Diagrama de Hasse do *poset* do Exemplo 3.5.22.

*Exemplo* 3.5.23 Considerando o *poset* $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ tem-se que o subconjunto $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ não possui supremo pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

**Teorema 56** Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X, Y \subseteq A$. Se $X \subseteq Y$ e além disso $X$ e $Y$ possuem supremo, então $sup(X) \sqsubseteq sup(Y)$.

**Prova** Dado $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X, Y \subseteq A$, assuma $X \subseteq Y$ e que que $X$ e $Y$ possuem supremo, assim pelo Teorema 51(i) tem-se que $Y_{\uparrow} \subseteq X_{\uparrow}$. Mas pelo Teorema 49(ii) tem-se que $min(Y_{\uparrow}) \sqsubseteq min(X_{\uparrow})$, logo $sup(X) \sqsubseteq sup(Y)$. □

**Teorema 57** Seja $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X, Y \subseteq A$. Se $X \subseteq Y$ e além disso $X$ e $Y$ possuem ínfimo, então $inf(Y) \sqsubseteq inf(X)$.

**Prova** Dado $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset* e $X, Y \subseteq A$, assuma $X \subseteq Y$ e que que $X$ e $Y$ possuem supremo, assim pelo Teorema 51(ii) tem-se que $Y_{\uparrow} \subseteq X_{\uparrow}$. Mas pelo Teorema 49(i) tem-se que $max(Y_{\downarrow}) \sqsubseteq max(X_{\downarrow})$, logo $inf(Y) \sqsubseteq inf(X)$. □

**Teorema 58** Se $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ é um *poset*, $X \subseteq A$ com $sup(X_{\downarrow}) = a$ e $a \in A$, então $inf(X) = sup(X_{\downarrow})$.

**Prova** $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ é um *poset*, $X \subseteq A$ com $sup(X_{\downarrow}) = a$ e $a \in A$, agora note que para qualquer que seja $x \in X$ e $y \in X_{\downarrow}$ tem-se que $y \sqsubseteq x$, e assim $x$ é claramente um majorante de $X_{\downarrow}$, ou seja, $x \in (X_{\downarrow})_{\uparrow}$, consequentemente, $a \sqsubseteq y$, uma vez que, $sup(X_{\downarrow}) = a$, assim $a$ é um minorante de $X$, ou seja, $a \in X_{\downarrow}$. Por outro lado, para qualquer $z \in X_{\downarrow}$ tem-se que $z \sqsubseteq a$ e, portanto, $a = inf(X)$. □

**Teorema 59** Se $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ é um *poset*, $X \subseteq A$ com $inf(X_{\downarrow}) = a$ e $a \in A$, então $sup(X) = inf(X_{\uparrow})$.

**Prova** Similar a demonstração do Teorema 58. □

Quando um conjunto $X$ satisfaz o Teorema 58 é dito que ele é inferiormente limitado, e quando ele satisfaz o Teorema 59 é dito que ele é superiormente limitado. Quando ele satisfaz os dois então ele satisfaz a Definição 3.17.

**Teorema 60** Se $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ é um *poset*, então as seguintes asserções são equivalentes:

(1) Todo subconjunto não vazio superiormente limitado de $A$ possui supremo.

(2) Todo subconjunto não vazio inferiormente limitado de $A$ possui ínfimo.

**Prova** Dado $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ um *poset*, tem-se que:
(1) $\Rightarrow$ (2) Assuma que todo subconjunto não vazio superiormente limitado de $A$ possui supremo, agora seja $X \subseteq A$ limitado inferiormente, ou seja, $X_{\downarrow} \neq \emptyset$, agora obviamente cada $x \in X$ é tal que $x$ é um majorante de $X_{\downarrow}$, ou seja, $x \in (X_{\downarrow})_{\uparrow}$ e, portanto, $X_{\downarrow}$ é superiormente limitado, logo pelo Teorema 59 existe o supremo do conjunto $X_{\downarrow}$, consequentemente pelo Teorema 58 existe o ínfimo de $X_{\downarrow}$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Similar ao item anterior. □

## 3.6 Boa Ordenação e Relações Bem Fundadas

Agora que o leitor chegou até este ponto significa que está pronto para a apresentação ligada a ideia de boas ordens e ordem bem fundadas.

**Definição 3.20** (Boa ordem) Uma ordem parcial $\sqsubseteq$ sobre um conjunto $A$ é dita uma boa ordem sempre que para todo subconjunto não vazio $B$ de $A$ é tal que $B$ possui elemento mínimo com respeito a ordem $\sqsubseteq$.

O leitor mais atento pode ter notado que Definição 3.20 oculta o fato de que uma boa ordem é necessariamente um ordem total. Como dito em [42], sempre que $\sqsubseteq$ for uma boa ordem a estrutura $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ será chamada de conjunto bem ordenado.

*Exemplo* 3.6.1 A relação $\leq$ é uma boa ordem com respeito ao conjunto dos números naturais, entretanto, se considerada sobre o conjuntos dos números inteiros ou reais ele não se classifica mais como uma boa ordem.

**Teorema 61** Uma estrutura $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ é um conjunto bem ordenado se, e somente se, todo subconjunto não vazio de $A$ possui elemento mínimo.

Prova ($\Rightarrow$) A ida é trivial pela própria Definição 3.20. ($\Leftarrow$) Assuma que todo subconjunto não vazio de $A$ possui elemento mínimo, assim existe $z = min(A)$ e além disso tem-se que, dado $x, y \in A$ tem-se que $\{x, y\}$ tem menor elemento, ou seja, uma das três possibilidades acontece, $x \sqsubset y, y \sqsubset x$ ou $y = x$, entretanto, isso implica que qualquer dois elementos de $A$ são comparáveis e, portanto, $\sqsubseteq$ é um ordem total é assim $\langle A, \sqsubseteq \rangle$ é um conjunto bem ordenado. $\square$

Note que a volta na demonstração do Teorema 61 estabelece que uma ordem ser total é uma condição necessária para que ela seja uma boa ordem, por outro lado, o exemplo 3.6.1 mostra que nem toda ordem total é de fato uma boa ordem. A seguir é apresentado o princípio da boa ordenação, neste texto não será apresentado sua demonstração, entretanto, é interessante que o leitor saiba que tal princípio foi apresentado pelo grande matemático Ernst Zermelo[4] (1871-1953), e que tal princípio é equivalente ao axioma da escolha [12] (tratado em momentos futuros deste manuscrito).

[4] Zermelo junto com Adolf Abraham Halevi Fraenkel (1891-1965) desenvolveu o sistema formal hoje conhecido como teoria axiomática dos conjuntos.

*Princípio* (Princípio da Boa Ordenação) Sobre qualquer conjunto $A$ é possível definir uma boa ordem $\trianglelefteq$.

Pode-se agora apresentar um enfraquecimento da noção de boa ordem, que terá grande importância quando este manuscrito estiver tratado dos conceitos de indução, estruturas indutivamente geradas e recursão.

**Definição 3.21** (Relação Bem Fundada) Uma relação binária $R$ sobre um conjunto $A$ é dita ser bem fundada, se não existem cadeias descendentes infinitas, em outras palavras, não existem elementos $a_0, a_1, a_2, \dots \in A$ tal que, $\dots \trianglelefteq a_n \trianglelefteq a_{n-1} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq a_2 \trianglelefteq a_1 \trianglelefteq a_0$.

Observe que Definição 3.21 estabelece que a cadeia relacional não pode crescer infinitamente na direção da esquerda da relação, e portanto, deve existir um elemento no conjunto que seria visto com ponto extremo esquerdo da relação. Além disso, ainda pela a Definição 3.21 é notável que uma relação bem fundada pode ser não é transitiva, considere por exemplo a relação sobre os naturais da forma $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x+1\}$, ela atende claramente as condições para ser uma relação bem fundada, entretanto, perceba que ela não é transitiva pois obviamente $0 \; R \; 1, 1 \; R \; 2$ mas $0 \not R \; 2$, portanto, ela é bem fundada mas não é transitiva.

*Exemplo* 3.6.2 Dado o conjunto dos números naturais as relações $<$ e $\leq$ são respectivamente uma relação bem fundada e um uma relação que não é bem fundada.

*Exemplo* 3.6.3 Dado o conjunto dos números inteiros tem-se que a relação $<$ não é bem fundada.

*Exemplo* 3.6.4 Dado o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a relação $\subset$ é uma relação bem fundada sobre $\wp(A)$.

A seguir serão apresentados alguns resultados interessantes sobre as relação bem fundadas, em especial será apresentado uma forma de caracterização das relações bem fundadas.

**Proposição 1** Se $R$ é uma relação bem fundada em $A$, então $R$ é irreflexiva.

Prova Suponha por absurdo que $R$ é uma relação bem fundada sobre um conjunto $A$ e que $R$ é reflexiva, logo para todo $a \in A$ tem-se que $a\ R\ a$ e, portanto, existe uma cadeia infinita da seguinte forma $\cdots\ R\ a\ R\ a\ R \cdots R\ a\ R\ a\ R\ a$ o que contradiz a hipótese de $R$ seja uma relação bem fundada. Consequentemente, se $R$ é uma relação bem fundada, então ela deve ser irreflexiva. □

**Teorema 62** (Teorema de Caracterização) Seja $\trianglelefteq$ uma relação binária sobre $A$. Tem-se que $\trianglelefteq$ é uma relação bem fundada se, e somente se, todo subconjunto não vazio $X$ de $A$ possui elemento minimal[a].

[a] O sentido de minimal aqui extrapola a ideia de minimal em respeito a ordem, visto que $\trianglelefteq$ não é necessariamente um ordem parcial, aqui o sentido de minimal é que: $x \in X$ e não existe um $a \in X$ com $a \trianglelefteq x$

Prova ($\Rightarrow$) Suponha por absurdo que $\trianglelefteq$ é uma relação bem fundada e que existe um subconjunto não vazio $X$ de $A$ que não possui elemento minimal, assim sendo $X = \{a_1, a_2, \cdots\}$ tem-se que $a_1$ em $X$ não é minimal, logo existe $a_2$ em $X$ tal que $a_2 \trianglelefteq a_1$, mas como $a_2$ também não é minimal existe um $a_3$ tal que $a_3 \trianglelefteq a_2$ e assim sucessivamente, consequentemente, existindo uma cadeia infinita a esquerda da forma, $\cdots \trianglelefteq a_3 \trianglelefteq a_2 \trianglelefteq a_1$, mas isso contradiz a hipótese de $\trianglelefteq$ se uma relação bem fundada e, portanto, tem-se que se $\trianglelefteq$ é bem fundada, todo subconjunto não vazio $X$ de $A$ irá possuir (pelo menos um) elemento minimal. ($\Leftarrow$) Suponha por absurdo que $\trianglelefteq$ não é uma relação bem fundada e que todo subconjunto não vazio $X$ de $A$ possui elemento minimal (logo existe $x \in X$ e não existe um $a \in X$ com $a \trianglelefteq x$). Como $\trianglelefteq$ não é bem fundada pode-se assumir que exista uma cadeia infinita a esquerda $\cdots \trianglelefteq a_3 \trianglelefteq a_2 \trianglelefteq a_1$, agora deixe $a_i$ ser o elemento minimal de $X$ logo não pode existir um $a_{i+1}$ tal que $a_{i+1} \trianglelefteq a_i$ o que contradiz a hipótese da existência da cadeia infinita, ou seja, contradiz a hipótese de $\trianglelefteq$ não ser bem fundada, consequentemente, pode-se afirma que, se todo subconjunto não vazio $X$ de $A$ possui elemento minimal, então $\trianglelefteq$ é uma relação bem fundada. □

O próximo resultado revela ao leitor o estreito relacionamento entre a boa ordem e as relações bem fundadas, o resultado mostra que ser boa ordem é condição suficiente para ser uma relação bem fundado, porém ser bem fundada não é suficiente para ser uma boa ordem, ou seja, em um certo sentido as relação bem fundadas são mais exigentes.

**Teorema 63** Seja $\langle A, \trianglelefteq \rangle$ uma álgebra relacional tem-se que:

(i) Se $\trianglelefteq$ é uma boa ordem, então $\trianglelefteq$ é uma relação bem fundada.

(ii) Se $\trianglelefteq$ é uma relação bem fundada e total[a], então $\trianglelefteq$ é uma boa ordem.

[a] A totalidade de uma relação bem fundada $\trianglelefteq$ está associado a ideia que quais $x, y \in A$ são comparáveis por $\trianglelefteq$.

Prova Dado uma álgebra relacional $\langle A, \trianglelefteq \rangle$ tem-se que:

(i) Suponha que $\trianglelefteq$ é uma boa ordem, assim pela Definição 3.20 tem-se que todo subconjunto não vazio de $A$ tem elemento mínimo, como todo elemento mínimo é também um minimal tem-se pelo Teorema 62 que $\trianglelefteq$ é uma relação bem fundada.

(ii) Assuma que $\trianglelefteq$ é uma relação bem fundada e total, logo tem-se que:

   – Por $\trianglelefteq$ ser bem fundada pela Proposição 1 tem-se que $R$ é irreflexiva.
   – Agora pela totalidade de $\trianglelefteq$ tem-se para quaisquer $x, y, z \in A$ tais que $x \trianglelefteq y$ e $y \trianglelefteq z$ tem-se que $x = z$ iria implicar em uma cadeia infinita à esquerda, o que é impossível uma vez que $\trianglelefteq$ é uma relação bem fundada, por outro lado, se $z \trianglelefteq x$ fosse possível novamente seria possível construir

uma cadeia infinita à esquerda o que novamente é um absurdo pelo fato de $\trianglelefteq$ ser bem fundada, logo tem-se que $x \trianglelefteq z$ e, portanto, $\trianglelefteq$ é transitiva.

Pelo fato de $\trianglelefteq$ ser transitiva, irreflexiva e total tem-se que $R$ será uma ordem total estrita. Agora pelo Teorema 62 uma vez que $\trianglelefteq$ é bem fundada tem-se que todo subconjunto não vazio $X$ de $A$ possui elemento minimal $x$, entretanto, em um ordem total todo minimal é mínimo (provar isto fica como exercício), consequentemente, pela Definição 3.20 tem-se que $\trianglelefteq$ é uma boa ordem. □

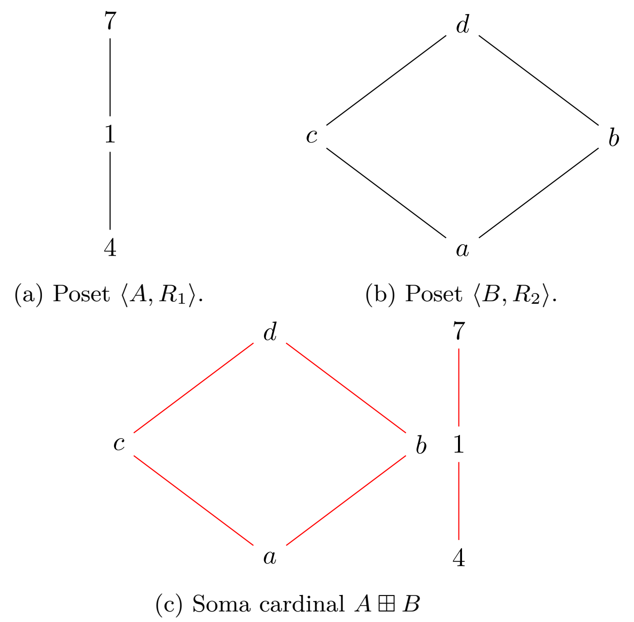
## 3.7 Operações Entre *Posets*, Novas Ordens e Ordem Lexicográfica

Como dito em [45], diversas operações podem ser definidas entre *posets*, além disso, é muito comum dado dois *posets* $\langle A, \sqsubseteq_A\rangle$ e $\langle B, \sqsubseteq_B\rangle$ buscar definir novas ordens parciais sobre os conjuntos $A \cup B$ e $A \times B$ usando como base as ordens pré-existentes $\sqsubseteq_A$ e $\sqsubseteq_B$. Nesta seção serão estudadas operações entre *posets* e também e como construir novas ordens parciais a partir de ordens parciais já existentes.

**Definição 3.22** (Soma Cardinal) Dado dois *posets* $\langle A, \sqsubseteq_A\rangle$ e $\langle B, \sqsubseteq_B\rangle$ tal que $A \cap B = \emptyset$, a soma cardinal destes dois *posets*, denotado por $A \boxplus B$, consiste no *poset* $\langle A \cup B, \sqsubseteq_{\boxplus}\rangle$, onde $x \sqsubseteq_{\boxplus} y$ se, e somente se, $x \sqsubseteq_A y$ ou $x \sqsubseteq_B y$.

Apesar de não estar explicitamente escrito, note que, a Definição 3.22 estabelece que $x \sqsubseteq_{\boxplus} y$ acontece em apenas dois casos específicos, no primeiro caso ($x \sqsubseteq_A y$) tem -se $x, y \in A$, já no segundo caso ($x \sqsubseteq_B y$) obrigatoriamente $x, y \in B$, em qualquer outra situação os elementos $x$ e $y$ pertenceram a conjuntos distintos e nesse cenário eles serão incomparáveis, assim a relação $\sqsubseteq_{\boxplus}$ beira a trivialidade. Claramente o diagrama de Hasse para a ordem $\sqsubseteq_{\boxplus}$ é basicamente um diagrama em que os diagramas das ordens $\sqsubseteq_A$ e $\sqsubseteq_B$ são posto lado a lado, o exemplo a seguir ilustra esta ideia.

*Exemplo* 3.7.1 Considerando os conjuntos $A = \{1, 4, 7\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ ordenados respectivamente pelas ordens $R_1$ e $R_2$ descritas pelos diagramas 3.12a e 3.12b da Figura 3.12, e a soma cardinal de ambos os *posets* é representada pelo diagrama (destacado com linhas vermelhas) 3.12c da Figura 3.12.




(a) Poset $\langle A, R_1\rangle$. (b) Poset $\langle B, R_2\rangle$.



(c) Soma cardinal $A \boxplus B$

Figura 3.12: Dois *Posets* e sua soma cardinal.

Terminar de escrever a seção de operações sobre *Poset* depois!!!!

## 3.8 Questionário

Escrever depois. . .

# Funções

> *"O ego é o pior inimigo do Eu, mas o Eu é o melhor amigo do ego... O ego é um péssimo senhor, mas é um ótimo servidor".*
>
> *Bhagavad Gita*

## 4.1 Conceitos, Definições e Nomenclaturas

Após o conceito importantíssimo de conjunto, o componente mais importante na matemática é provavelmente a noção de função. O autor deste documento não hesita em afirmar que você, leitor, com certeza já teve contato com a ideia de função, seja em seus cursos de nível primário, secundário ou mesmo mais recentemente em seus cursos de cálculo diferencial e integral, estatística ou cursos de física.

Dado este encontro anterior do leitor sobre o assunto, o autor fica confortável em pedir que o leitor faça uma pequena pausa e tente lembrar de seus cursos anteriores e responda para si ao questionamento: **o que é uma função**?

Bem, para muitos físicos, estatísticos e alguns matemáticos (não todos[1]), uma função é vista meramente como sendo um mapeamento (ou transformação) entre os elementos de dois conjuntos [1]. Por outro lado, em obras tais como [19, 39, 40, 41, 50] uma função é vista como uma caso particular de relação entre dois conjuntos, ou seja, em última análise para esse grupo de pessoas uma função é exatamente um conjunto. Já em [55, 59] é apresentado uma visão mais mecanicista da ideia de função, essa visão captura a ideia de função enquanto uma máquina[1] (ou caixa preta) que transforma as entradas (*inputs*) em saídas (*outputs*), essa visão é ilustrada pela Figura 4.1.

[1] Um visão interessante é aquela apontada em [33], que descreve uma função como sendo um objeto com quatro descrições simultâneas: uma algébrica, uma numérica, uma gráfica e uma descritiva (ou em palavras).

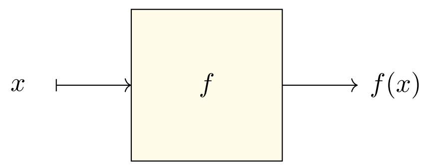



Figura 4.1: Visão de uma função de uma variável enquanto uma máquina (ou caixa preta).

Há também a ideia de função como uma estrutura [23], com componentes bem estabelecidos. Essa visão é capaz (como será mostrado a seguir) de capturar todas as outras ideias de função. Neste documento, a formalização da ideia de função como uma estrutura será apresentada gradualmente, trançando paralelos com as linguagens de programação que possuam um sistema de tipos. Isso será adotado para tornar o

[1] Para cientistas da computação os termos máquina e programa são sinônimos.

texto mais didático e interessante ao leitor de computação, além disso, irá aproximar os tópicos teóricos (as funções) dos tópicos práticos (os programas). Entretanto, essa forma de apresentação não será menos rigorosa que outras fontes bibliográficas. O objetivo deste texto é apresentar da forma mais precisa e detalhada a noção de função, tanto do ponto de vista puramente formal, como do ponto de vista prático (da construção de algoritmos).

Este documento inicia o estudo sobre funções apresentando ao leitor a ideia básica de assinatura de função, isto é, a seguir será apresentado a representação sintática (ou de tipagem) que descreve as funções, ou seja, o componente descritivo como mencionado em [33].

**Definição 4.1** (Assinatura de Função) Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos a assinatura da função de $A$ em $B$ nomeada como $f$, corresponde a palavra da forma $f : A \to B$.

A Definição 4.1 permite facilmente deduzir que em qualquer função existem três elementos básicos, sendo eles: um nome (rótulo ou símbolo funcional), um conjunto de partida e um conjunto de chegada. Por convenção, o nome de uma função deve ser sempre iniciado por caracteres latinos, no caso de usar índices apenas o último caractere do nome deve ser indexado.

*Exemplo* 4.1.1 São exemplos de assinaturas de funções:

(a) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

(b) $sqrt : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) $k_1 : A \times B \to \mathbb{C}$.

(d) $loc_2 : D \to \mathbb{R} \times \{0, 1\}$.

(e) $min : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(f) $BUSCA : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$.

(g) $BUSCA : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \{0, 1\}$.

(h) $mydouble : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

*Atenção* Apesar das assinaturas nos itens (f) e (g) do Exemplo 4.1.1 terem o mesmo nome, elas não são iguais, pois diferem no conjunto de partida, e assim não são a mesma assinatura. Esse tipo de cenário recebe o nome de sobrecarga[a], isto é, o símbolo funcional $BUSCA$ está sobrecarregado para identificar duas funções distintas.

[a] Na literatura sobre linguagens de programação é usado o termo *overload*.

Diversas linguagens de programação tais como C, C++, Haskell e Java (entre outras) apresentam a possibilidade de definir assinaturas de funções. Na linguagem C, por exemplo, as assinaturas de funções que compõem uma biblioteca são geralmente reunidas em um arquivo de *header*, isto é, um arquivo com a extensão ".h", para mais detalhes consulte [21], a seguir é exemplificado um arquivo de *header*.

```
/* Assinaturas */
int reverse(int x);
int mydouble(int x);
unsigned int strlen (char *x);
int strcmp (char *x, char *y);
char *strcpy (char *y, char *x);
```

Figura 4.2: Exemplo de um arquivo .h contendo assinaturas na linguagem C.

Um conceito indiretamente esboçado pela ideia de assinatura de função, é o de

```haskell
-- Assinaturas
mysum :: Int -> Int -> Int
mydouble :: Int -> Int
iseven :: Int -> Bool
factorial :: Int -> Int
```

Figura 4.3: Exemplo de um arquivo com assinaturas na linguagem Haskell.

tipagem da função, sempre que a assinatura é da forma $f : A \to B$ pode-se dizer que $f$ é uma função do tipo "$A$ em $B$", ou mesmo que "$f$ é um tipo seta de $A$ para $B$", a noção de "tipo seta" é uma nomenclatura indiretamente ligado a ideia de teoria dos tipos.

Como dito anteriormente uma função pode ser vista como uma máquina que transforma entradas em saídas, mas note que para que isso aconteça a máquina deve de alguma forma realizar ações sobre a entrada, ou seja, a máquina deve "operar" sobre a entrada. Esse conceito de como a máquina deve operar sobre as entradas é descrito por uma propriedade $P$ que define uma relação de mapeamento[2]

[2] Alguns textos usam a nomenclatura lei de formação, ver por exemplo [12].

**Definição 4.2** (Relação de mapeamento) Dado dois conjuntos $A$ e $B$ e seja $x \in A$ e $y \in B$ a relação de mapeamento definida por uma propriedade $P$ corresponde ao seguinte conjunto

$$\varepsilon = \{(x, y) \mid P\}$$

tal que a propriedade $P$ deve satisfazer a seguinte condição: se os pares $(x, y_1)$, $(x, y_2)$ satisfazem $P$, então obrigatoriamente $y_1 = y_2$.

Note que a Definição 4.2 apenas descreve que para cada entrada (variável) $x$ existirá uma única saída $y$ tal que $x$ e $y$ estão relacionados por uma certa propriedade $P$.

*Exemplo* 4.1.2 São exemplos de relações de mapeamento[3]:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \log_2(x + 1)\}\}$

(b) $\{(w_1 w_2 w_3 \cdots w_m, y) \in E^2 \mid y = w_3 \cdots w_m w_1 w_2\}$ onde $E$ é o conjunto de todas as palavras sobre um determinado alfabeto $\Sigma$ e $w_i$ representa o $i$-ésimo símbolo de uma palavra $w$, com $w_i \in \Sigma$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 14\}$.

(d) $\left\{(x_1, x_2, x_3, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt[x_3]{\frac{1}{2}x_1 + x_2}\right\}$.

Não são exemplos de relações de mapeamento:

(e) $\{(x, y) \in N_P \times I_P\}$ onde $N_P$ é o conjunto de todos os nomes de pessoas e $I_P$ é o conjunto de naturais que representam idades, note que em tal relação é permitido que $(\text{Fátima}, 10), (\text{Fátima}, 55)$ estejam nesse conjunto, portanto, esse conjunto não satisfaz a Definição 4.2.

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x = y^2\}$, note que $(25, 5)$ e $(25, -5)$ pertence a tal conjunto e, portanto, esse conjunto não satisfaz a Definição 4.2.

[3] O item (c) descreve que para qualquer $x$ o $y = 14$, ou seja, para todo $x$ tem-se que o par $(x, 14)$ está na relação, ou seja, o item (c) define em última análise uma **função constante**.

Agora que foram apresentados estes conceitos fundamentais pode-se continuar o desenvolvimento deste texto com a formalização da ideia de função.

**Definição 4.3** (Função) Dado uma assinatura $f : A \to B$ e seja $\varepsilon \subseteq A \times B$ uma relação de mapeamento, a estrutura $\langle f : A \to B, \varepsilon \rangle$ é uma função.

*Exemplo* 4.1.3 São exemplos de funções:

(a) $\langle dob : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 2x\}\rangle$.

(b) $\langle mul : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{N}, \{((x, y), z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = xy\}\rangle$.

(c) $\langle sqroot : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y^2 = x\}\rangle$.

(d) $\langle one : \mathbb{Z}^2 \to \{1\}, \{((x, y), 1) \in \mathbb{Z}^2 \times \{1\} \mid 1 = x + y\}\rangle$.

(e) $\langle sign : \mathbb{R} \to \{0, 1\}, \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\} \mid y = 1$ sempre que $x > 0.5$ e $y = 0$ se $x \leq 0.5\}\rangle$.

De forma similar a apresentação feita em [12] aqui será usado a própria relação de mapeamento para definir as noções de domínio e imagem de uma função.

**Definição 4.4** (Domínio e Imagem de função) Seja $\langle f : A \to B, \varepsilon\rangle$ uma função o domínio e a imagem de $f$, denotados respectivamente por $dom(f)$ e $ima(f)$, corresponde exatamente ao domínio e a imagem de $\varepsilon$, ou seja, $dom(f) = dom(\varepsilon)$ e $ima(f) = ima(\varepsilon)$.

*Exemplo* 4.1.4 Considere a função,

$$\langle k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x - 1\}\rangle$$

tem-se que, $dom(k) = \mathbb{N} - \{0\}$ e $img(k) = \mathbb{N}$, pois claramente $(x, y) \in \varepsilon$ se, e somente se, $(x, y) = (x, x - 1)$, agora obviamente $x - 1 \in \mathbb{N}$ apenas se $x \geq 1$, logo $dom(\varepsilon) = \mathbb{N} - \{0\}$, em contrapartida para qualquer seja $x \in \mathbb{N}$ tem-se que existe um $x + 1 \in \mathbb{N}$, de forma que $(x + 1, x) \in \varepsilon$, consequentemente, $ima(\varepsilon) = \mathbb{N}$.

Agora é comum ao realizar estudos sobre funções, como destacado em [12], não ficar declarando a estrutura da funcional o tempo inteiro (só quando realmente necessário), em vez disso, em geral é descrita a assinatura da função junto com o açúcar sintático (detalhado a seguir), que busca sintetizar todas as informações a cerca da função.

*Atenção* Para qualquer função $\langle f : A \to B, \varepsilon\rangle$, a notação $f(x)$ é um açúcar sintático para dizer que $f$ está recebendo como entrada $x$, se escreve $f(x) = y$ como açúcar sintático da frase: "ao calcular $f$ com entrada $x$ é gerado $y$ como saída", mas para isso é necessário que $(x, y) \in \varepsilon$, ou que $x$ e $y$ sejam símbolos de variáveis. Além disso, quando a relação $\varepsilon$ de uma função descreve $y$ a partir de uma igualdade da forma $y = E$, em que $E$ é uma expressão válida, pode-se em vez de, fazer $f(x) = y$ escreve diretamente $f(x) = E$, e desde que $y = E$ a expressão $f(x) = E$ é um refinamento do açúcar sintático.

*Exemplo* 4.1.5 Usando as ideias do açúcar sintático descrito acima tem-se que:

(a) A função $\langle dob : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 2x\}\rangle$ pode simplesmente ser escrita usando sua assinatura $dob : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e dizendo que $dob(x) = 2x$.

(b) A função $\langle pot : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \{((x, y), z) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{R} \mid z = x^y\}\rangle$ pode simplesmente ser escrita usando sua assinatura $pot : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e dizendo que $pot(x, y) = x^y$.

(c) A função $\langle plus4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x + 4\}\rangle$ pode simplesmente ser escrita usando sua assinatura $plus4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e dizendo que $plus4(x) = x + 4$.

Agora com respeito a implementação prática de funções em linguagens de programação, a expressão $E$ mencionada anteriormente, costuma ser chamada de corpo da função, em linguagens imperativas, como dito em [52, 43], já nas linguagens funcionais como Haskell, não é nomeada de forma especial, continua sendo mencionada apenas com expressão [38, 44].

*Atenção* Deste ponto em diante, quando se for tratar de função abstratamente, sempre que for possível será usado apenas a assinatura para se referir a uma função.

Note que se $f$ é uma função com assinatura $f : A \rightarrow B$, isto é, $f$ é um objeto do tipo seta de $A$ em $B$, e $x$ um objeto do tipo $A$[4] pode-se pensar em uma regra capaz de deduzir o tipo da saída de $f(x)$, tal regra poderia ser escrita como:

$$\frac{x : A \quad f : A \rightarrow B}{f(x) : B}$$

essa regra não é algo novo criado nesse documento, na verdade a mesma, em um certo ponto de vista, é uma versão da famosa regra de *modus ponens*, a existência de tal regra é uma manifestação da profunda conexão que existe entre lógica e computação. Tal conexão é conhecida como isomorfismo de CurryHoward, e é um aspecto fundamental em áreas como teoria dos tipos [47, 58], teoria da prova [47, 56], $\lambda$-cálculo [5, 6, 9] e programação funcional [58, 59], este documento irá se aprofundar no estudo de tal isomorfismo em capítulos futuros, quando se estiver estudando $\lambda$-cálculo.

[4] Em teoria dos tipos [47, 58] se $A$ é um tipo e $x$ é um objeto do tipo $A$ pode-se escrever que $x : A$, isto é algo semelhante a teoria dos conjuntos ao dizer que $x \in A$.

```c
int sqroot(int x){
  unsigned y = 0;
  while(y*y != x){
    y = y + 1;
  }
  return y;
}
```

Figura 4.4: Código da implementação da função no item (c) do Exemplo 4.1.3 escrito na linguagem C.

Agora note que a Definição 4.4 não impõe de forma alguma que todos os elementos do conjunto de partida de uma função estejam no seu domínio, e isso gera situação interessantes tanto do ponto de vista teórico quando do ponto de vista prático, para ilustra essa questão considere o código fonte na linguagem C esboçado na Figura 4.4 que implementa a função (c) do Exemplo 4.1.3 , o que ocorre se tal código receber como entrada um $x$ com valor 3? Bem para um programador com um pouco de experiência nota facilmente que o algoritmo não retorna nada, ficando em *loop* eterno[5]. Para entender essa resposta deve-se atentar aos seguintes fatos:

1. O fato principal é que $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$, ou seja, não existe um $y \in \mathbb{N}$ tal que $y = \sqrt{3}$.

2. A partir do item anterior é claro que não existe um par $(x, y)$ na relação definida pela propriedade $y = \sqrt{x}$ quando $x = 3$.

[5] Um simples teste de mesa pode mostra a verdade dessa afirmação, para saber mais sobre testes de mesa ver [43].

Assim a função *sqrt* definida no item (c) do Exemplo 4.1.3 não pode produzir uma saída para a entrada $x = 3$. Do ponto de vista prático (implementação) o programa esboçado na Figura 4.4 encerra e retorna um $y$ como saída se, e somente se, $y = \sqrt{x} \in \mathbb{N}$, dessa forma pode-se pensar que a noção da divergência (ou *loop* eterno) de programas pode ser usada para modelar a indefinição de funções, isto é, quando um programa *prog* é a implementação de uma função $f$, sempre que *prog* receber uma entrada para a qual $f$ não calcula uma saída o programa *prog* fica em divergência.

Considerando essa pequena discussão pode-se então pensar em separar (ou classificar) as funções, as funções que estão definidas para todas as entradas e as funções que não estão definidas para todas as entradas, essa classificação é formalizada na definição que se segue, tal definição tem uma íntima e importante ligação com a própria teoria da computação [8, 28].

**Definição 4.5** (Funções totais e parciais) Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita ser total sempre que $dom(f) = A$ e será dita parcial sempre que $dom(f) \subseteq A$.

*Exemplo* 4.1.6 Considerando as assinaturas $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tem-se que:

(a) $f(x) = x - 1$ é uma função total.

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ é uma função parcial, visto que $\dfrac{1}{0} \notin \mathbb{N}$.

(c) $h(x) = x^2 + 3$ é uma função total.

(d) $i(x) = x - 5$ é uma função parcial, pois tem-se que $1 - 5 = -4$ e $-4 \notin \mathbb{R}_+$.

Em algumas obras tais como [12], as funções totais também costumam ser chamadas de aplicações, neste documento isto não será feito, aqui será mantido a nomenclatura **função total**. Em texto de teoria da recursão (ou computação) como [49], é comum adotar para as funções parciais a escrita $f(x) = \uparrow$, para denotar que a função $f$ é divergente para entrada $x$, ou seja, para tal entrada a função não tem uma saída, sempre que necessário será usado nessa notação neste documento.

*Exemplo* 4.1.7 Seja $List_{int}$ o conjunto de todas as lista de *int* da linguagem C, tem-se que a função $first_{int}$ que recebe uma lista de *int* e retorna o primeiro elemento da mesma não é uma função total, pois se a mesma receber a lista vazia não há um primeiro elemento a ser retornado e assim a mesma deve entrar em divergência.

Em geral, linguagens de programação não implementam verdadeiramente a função do Exemplo 4.1.7, em geral quando a função implementada as linguagens recebe a lista vazia, ou a função retorna um valor constante qualquer identificado o erro, ou no caso especifico de Java, lança uma exceção.

*Atenção* A assinatura de uma função é determinante para a totalidade da mesma, por exemplo, a função $f$ do Exemplo 4.1.6 com a assinatura $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ passa a ser uma função parcial.

Um ponto interessante que talvez o leitor tenha percebido no Exemplo 4.1.6 é que, para mostrar a parcialidade de uma função basta apresentar um elemento do conjunto de partida para o qual a função em questão não está definida, dessa forma o conjunto de partida é diferente do domínio da função e, portanto, a função é parcial. A seguir é apresentado a definição do espaço de função, um conceito que será importante no decorrer deste documento.

**Definição 4.6** (Conjunto ou Espaço de Funções) Sejam $A$ e $B$ conjuntos, o conjunto ou espaço de todas as funções de $A$ em $B$ é denotado[a] por $B^A$.

[a] Também é encontrado na literatura o uso de $(f : A \to B)$ para denotar o espaço de função [59].

*Atenção* Deste ponto em diante sempre que possível (e não causar ambiguidade) será escrito $f \in B^A$ em vez de escrever a assinatura $f : A \to B$.

Agora que foram estabelecidas as questões de totalidade, parcialidade e espaço das funções, pode-se generalizar a ideia de aplicação de função, e isto é feito introduzido os conceitos de imagem direta e pré-imagem.

**Definição 4.7** (Imagem direta e Pré-imagem) Sejam $A$ e $B$ conjuntos e $f \in B^A$, dado dois conjuntos $S \subseteq dom(f)$ e $T \subseteq ima(f)$, a **imagem direta** de $f$ aplicada a $S$, denotada por $\overrightarrow{f}[S]$, é o conjunto de todos os elementos de $B$ que são gerados a partir da aplicação de $f$ usando os elementos de $S$ como entrada para $f$, ou seja,

$$\overrightarrow{f}[S] = \{b \in B \mid (\exists x \in S)[f(x) = b]\}$$

dualmente a **pré-imagem** de $f$ aplicada a $T$, denotado por $\overleftarrow{f}[T]$, corresponde a um subconjunto do domínio de $f$ necessário para "produzir" $T$ como saída da aplicação de $f$, ou seja,

$$\overleftarrow{f}[T] = \{a \in A \mid (\exists y \in T)[f(a) = y]\}$$

*Exemplo* 4.1.8 Considerando uma função $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definida como $f(x) = 2x$, tem-se então que $\overrightarrow{f}[\{2,4,7\}] = \{14,8,4\}$ e $\overleftarrow{f}[\{22,6,124\}] = \{3,11,62\}$.

*Exemplo* 4.1.9 Seja uma função $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definida como $g(x) = 2x^2 - 1$, dado os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R}_+ \mid 2 < x < 13\}$ tem-se então a imagem direta:

$$\overrightarrow{g}[A] = \{y \in \mathbb{R}_+ \mid -1 < y \leq 7\}$$

e a pré-imagem:

$$\overleftarrow{g}[B] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{7}\right\}$$

da aplicação de $f$.

*Atenção* Agora pela Definição 4.7, é claro que, para qualquer função $f \in B^A$, tem-se que, $\overrightarrow{f}[\emptyset] = \emptyset$ e $\overleftarrow{f}[\emptyset] = \emptyset$.

Agora note que para algum $S \subseteq A$, $S' \subseteq B$ com $S, S' \neq \emptyset$ e $f \in B^A$, é possível que, $\nexists \overrightarrow{f}[S]$, pois para isso (pela Definição 4.7) basta que $S \not\subseteq dom(f)$. Dualmente, pode ser que $\nexists \overleftarrow{f}[S']$, bastando para isso que $S' \not\subseteq ima(f)$[2].

*Exemplo* 4.1.10 Considerando uma função $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definida como $h(x) = 2x + 1$, tem-se então que $\overrightarrow{h}[\{1,7,17,19\}] = \{3,15,35,39\}$, porém note que, $\overleftarrow{h}[\{0,15,5\}] = \nexists$, pois é claro que $h(2) = 5$ e $h(7) = 15$, entrentato, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h(n) = 0$, logo o conjunto $\{0,15,5\}$ não possui pré-imagem.

*Exemplo* 4.1.11 Considere uma função $g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ com

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 5k, k \in \mathbb{Z}_+ \\ 0, & \text{se } x = 5j, j \in \mathbb{Z}_- \end{cases}$$

tem-se para a função $g$ que $\overrightarrow{f}[\{3,7,12,4\}] = \nexists$.

Observe que a Definição 4.7 estabelece que a imagem direta e a pré-imagem são ambas conjuntos, entretanto, a mesma definição permitir enxergar tais conceitos como funções de fato, para isso pasta notar a seguinte sutiliza, enquanto $f \in B^A$, a imagem direta $\overrightarrow{f}$ pode ser vista como uma função do tipo seta das parte de $A$ nas partes de $B$, ou seja, $\overrightarrow{f} \in \wp(B)^{\wp(A)}$. Por outro lado, é claro que a pré-imagem $\overleftarrow{f}$ da função $f$, será uma nova função cujo tipo será seta das parte de $B$ nas partes de $A$, ou seja, $\overleftarrow{f} \in \wp(A)^{\wp(B)}$.

**Proposição 2** Dado conjuntos $A$ e $B$. Se $f \in B^A$ é uma função total, então $\overrightarrow{f} \in \wp(B)^{\wp(A)}$ é uma função total.

Prova Fazer a prova depois. . . □

**Definição 4.8** (Igualdade de funções) Duas funções $f, g \in B^A$ são ditas iguais, denotado por $f = g$, sempre que as seguintes condições são satisfeitas.

($i$) $dom(f) = dom(g)$ e

($ii$) Para todo $x \in dom(f)$ tem-se que $f(x) = g(x)$.

[2] O símbolo $\nexists$ é uma outra forma de escrever $\neg\exists$ (não existe).

**Teorema 64** Se $f, g \in B^A$ e $f = g$, então para todo $S \subseteq dom(f)$ tem-se que $\overrightarrow{f}[E] = \overrightarrow{g}[E]$.

Prova | Direto da definição 4.8. $\square$

Outro aspecto interessante entre funções que é muito apreciado no estudo (e uso) de linguagens de programação e a ideia de compatibilidade entre funções, esse aspecto é muito importante para algumas linguagens de programação (veja alguns detalhes em [15]), a seguir será expresso formalmente tal conceito.

**Definição 4.9** (Compatibilidade de funções) Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos e $h_1, h_2 \in B^A$ duas funções, é dito que $h_1$ e $h_2$ são compatíveis, sempre que as seguintes propriedades forem satisfeitas:

$(i)$ $dom(h_1) \cap dom(h_2) \neq \emptyset$.

$(ii)$ Para todo $S \subseteq (dom(h_1) \cap dom(h_2))$ tem-se que $\overrightarrow{h_1}[S] = \overrightarrow{h_2}[S]$.

Note que a Definição 4.9 estabelece que duas funções são compatíveis quando elas possuem uma faixa de entradas em comum (ou compartilhada), além disso, é exigido que elas produzam a mesma saída para todos os dados nessa faixa compartilhada. Vale ressaltar que em uma visão de máquina, as duas funções produzirem a mesma saída para os dados, não implica que o funcionamento das duas funções sejam iguais.

*Exemplo* 4.1.12 Sejam $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ e $g : \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$ pode-se verificar facilmente que $dom(f) \cap dom(g) = \{1\}$, além disso, é claro que $\overrightarrow{f}[\{1\}] = \{1\} = \overrightarrow{g}[\{1\}]$, portanto, $f$ e $g$ são compatíveis.

*Exemplo* 4.1.13 Não é difícil verificar que as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}_+$,

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \text{ é par} \\ \dfrac{1}{x-3}, & \text{senão} \end{cases}$$

e $h(x) = \dfrac{4x}{2}$, são tais que $dom(g) \cap dom(h) = \mathbb{N} - \{1, 3\}$. Agora note que $\{5\} \subseteq (dom(g) \cap dom(h))$, por fim, perceba que $\overrightarrow{g}[\{5\}] = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ e $\overrightarrow{h}[\{5\}] = \{10\}$ e, obviamente $\left\{\dfrac{1}{2}\right\} \neq \{10\}$, consequentemente $g$ e $h$ não são funções compatíveis.

Um ponto importante sobre compatibilidade de duas funções $f$ e $g$, é o fato que ela (a compatibilidade) só existe na faixa de domínio compartilhada entre duas funções com expresso pela Definição 4.9, entretanto, caso essa faixa coincida como todo o domínio das funções, ou seja, no caso de $dom(f) = dom(g)$ tem-se então que a compatibilidade torna-se exatamente a relação de igualdade entre funções.

## 4.2 Propriedades das Funções

Esta seção irá tratar de apresentar algumas propriedades que as funções podem apresentar, a saber, as funções pode ser injetora, sobrejetoras e bijetoras[3]. Além disso, aqui também será apresentados alguns resultados importantes sobre as funções envolvendo estas propriedades.

**Definição 4.10** (Função injetora) Seja $f \in B^A$, $f$ é dita ser **injetora** sempre que para todo $x_0, x_1 \in dom(f)$, se $x_0 \neq x_1$, então tem-se que $f(x_0) \neq f(x_1)$.

[3]Os termos injetora, sobrejetoras e bijetoras foram cunhados e apresentados pela primeiras vez pelo grupo Bourbaki, como explicado em [**?** ].

Note que a Definição 4.10 diz que, em uma função $f$ o número de elementos distintos de qualquer subconjunto de $dom(f)$ é sempre mantido na $ima(f)$, ou seja, a saída da função é sempre determinística, no sentido de que dois elementos (dados) distintos de entrada sempre irão produz elementos distintos de saída, assim nunca é o caso de não saber que dado geral qual saída, as Figuras 4.5 e 4.6, ilustra[6] essa ideia. Já a função $h$ esboçada pela Figura 4.7 apresenta a característica de que $g(x_2) = g(x_3)$, mas $x_2 \neq x_3$, portanto, $h$ não é injetora, por não ser injetora a função $g$ esboçada pela Figura 4.7 produz não-determinismo, no sentido de que, usando apenas a informação de saída $y_2$, não se pode determinar qual dado de entrada gerou tal saída.

[6] O Esboço de funções através de diagramas está intimamente ligado ao estudo da teoria dos conjuntos feito pelo matemática inglês John Venn (1834-1923), para detalhes veja [12].

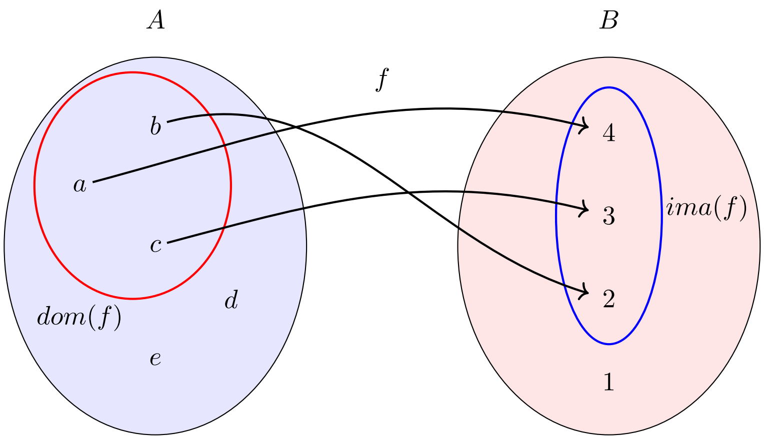



Figura 4.5: Diagrama de uma função $f$ qie é injetora.

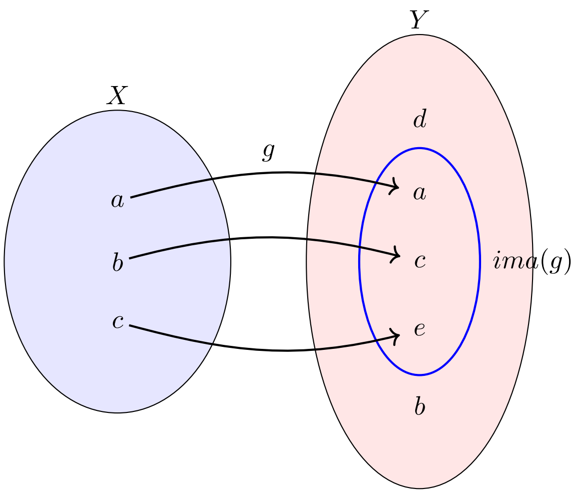



Figura 4.6: Diagrama de uma função injetora $g$.

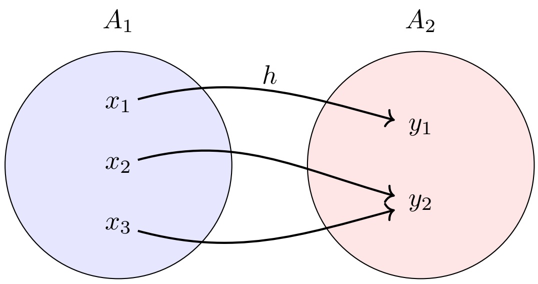



Figura 4.7: Diagrama de uma função $h$, que não é injetora.

O leitor atento pode perceber que a propriedade de injeção, isto é, a propriedade da função ser injetora, não está ligado ao tipo da função, note que as funções esboçadas nas Figuras 4.5 e 4.6 são ambas injetoras, porém, a primeira é parcial, enquanto que a segunda é total, o Exemplo 4.2.1 a seguir apresenta algumas funções injetora.

*Exemplo* 4.2.1 As funções:

($a$) $f(x) = 2x$ com $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

($b$) $g(x) = 3x + 1$ com $g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$.

($c$) A função de Cantor $C(x, y) = \dfrac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + y$ com $C \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

($d$) $Step_k(x) = x + k$ com $k \in \mathbb{Z}_+^*$ e $Step_k \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$.

são todas injetoras. Por outro lado, as funções a seguir não são injetoras.

($e$) $T(x, y) = xy$ com $T \in \mathbb{B}^{\mathbb{B}\times\mathbb{B}}$ e $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

($f$) $C(x, y) = min(x, y)$ com $C \in L^{L\times L}$ e $L = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

($g$) $h(x) = x^2$ com $h \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$.

Pela Definição 4.10 pode-se notar que a propriedade de injeção de uma função $f$ é uma propriedade relacionada diretamente com os "dados" de entrada que a função recebe, isto é, a propriedade de injeção está diretamente ligado ao conjunto $dom(f)$. A próxima propriedade que será apresentada, por sua vez, está relacionada ao dados que a função produz após sua aplicação, a mesma relaciona o dados de saída com o conjunto de chega da assinatura da função.

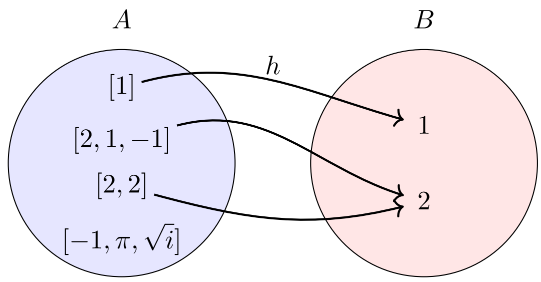



Figura 4.8: Diagrama de uma função $h$ que é sobrejetora.

**Definição 4.11** (Função sobrejetora) Seja $f \in B^A$, $f$ é dita ser **sobrejetora** sempre que para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Outra caracterização para funções sobrejetora apresentada em [39] é que, uma função $f \in B^A$ é sobrejetora sempre que $\overrightarrow{f}[dom(f)] = B$, porém, dizer isso é o mesmo que dizer que, uma função $f \in B^A$ é sobrejetora sempre que $ima(f) = B$, que é outra forma de caracterizar funções sobrejetoras como dito em [12]. Claramente a função descrita na Figura 4.7 e 4.8 são ambas sobrejetoras, enquanto as funções esboçadas nas Figuras 4.5 e 4.6 não são sobrejetoras, são também exemplos de funções sobrejetoras os itens $(d), (e)$ e $(f)$ do Exemplo 4.2.1.

*Exemplo* 4.2.2 As funções,

($a$) $f(x) = 2x$ com $f \in \mathbb{P}^{\mathbb{N}}$.

($b$) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ com $g \in L_0^{\mathbb{N}}$ onde $L_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$.

são funções sobrejetoras. Por outro lado, as funções,

(c) $A(x) = 1 - x$ com $A \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(d) $B(x) = 2x$ com $B \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

não são funções sobrejetoras.

**Definição 4.12** (Função bijetora) Seja $f \in B^A$, $f$ é dita ser **bijetora** sempre que $f$ for injetora e sobrejetora.

As funções bijetoras como dito em [39], também costuma ser chamadas de funções biunívocas ou mapeamento um para um (ou *one-to-one* em inglês [12]). Nos casos em que a bijeção $f \in A^A$ para algum conjunto $A$, a função bijetora $f$ costuma ser chamada de permutação [12] sobre (ou em) $A$.

*Exemplo* 4.2.3 Seja $A$ um conjunto, a função identidade $id_A : A \to A$ construída por $id_A(x) = x$ para todo $x \in A$ é claramente uma bijeção.

*Exemplo* 4.2.4 A função descrita pela Figura 4.9 é claramente uma bijeção, uma vez que é visivelmente uma função de um para um.

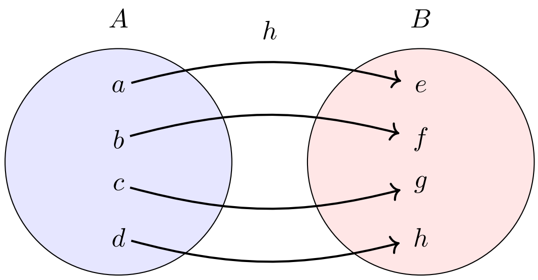



Figura 4.9: Diagrama de uma função $h$ que é bijetora.

*Exemplo* 4.2.5 São bijetoras.

(a) A função $f(x) = 2x + 1$ com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) A função[7] $exp(x)$ com $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

(c) A função $C$ de Cantor, esboçada no item $(c)$ do Exemplo 4.2.1 é uma bijeção.

[7] $exp(x)$ é a forma padrão usada principalmente em linguagens de programação e calculadoras científicas para denotar a função exponencial, que na matemática é escrita como $e^x$ sendo $e$ a constante de Euler para o logaritmo natural, que possui um valor aproximado de 2.71828.

## 4.3 Composição e Função Inversa

Como qualquer outro objeto matemático, também existem operações sobre as funções, isto é, mecanismos que atuam sobre funções para criar novas funções. Dessas operações a mais importante é sem dúvidas a composição de funções.

**Definição 4.13** (Composição de função) Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções, a função composta de $g$ com $f$, denotada por $g \circ f$, é uma função com a assinatura $g \circ f : A \to C$ que atende as seguintes restrições:

- $dom(g \circ f) = \{x \mid x \in dom(f) \land f(x) \in dom(g)\}$ e
- $(\forall x \in dom(g \circ f))[(g \circ f)(x) = g(f(x))]$.

Se as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ forem enxergadas apenas como mapeamentos, a composição das duas funções pode ser vista como sendo uma forma de mapear elementos de $A$ direto em elementos de $C$, sem há necessidade (explícita) de mapear em $B$, como ilustrado na Figura 4.10.

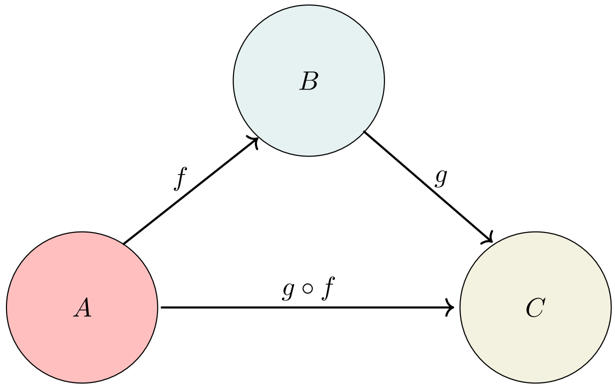



Figura 4.10: Diagrama da composição de uma função $g$ com outra função $f$.

Por outro lado, a composição vista enquanto máquina (ou caixa preto), e na verdade uma máquina "maior", em que, as funções usadas na composição são apenas partes aninhadas sequencialmente, a Figura 4.11 apresenta essa ideia.

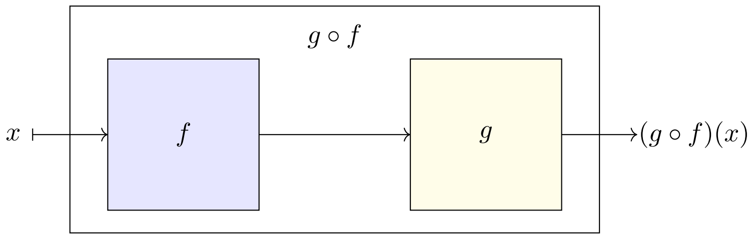



Figura 4.11: Composição $g \circ f$ vista enquanto uma máquina (ou caixa preta).

Agora dado duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, com $A$ e $B$ sendo conjuntos numéricos e $f(x) = E$ e $g(x') = E'$ onde $E$ e $E'$ são expressões válidas, e além disso, a expressão $E$ sendo capaz de descrever os elementos em $dom(g)$, tem-se que $(g \circ f)(x) = E'[E/x']$, onde $E'[E/x']$ será uma nova expressão válida obtida a partir da substituição na expressão $E'$ de todas as ocorrências da variável $x'$ pela expressão $E$.

*Exemplo* 4.3.1 Dado a função de naturais em reais $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, e a função de reais em reais $g(x) = (-x+2)^3 + 4$, tem-se que,

$$\begin{array}{rcl} dom(f) & = & \mathbb{N} \\ dom(g) & = & \mathbb{R} \end{array}$$

além disso, tem-se a composição:

$$(g \circ f)(x) = \Big( -\frac{1}{x+1} + 2 \Big)^3 + 4$$

note agora que

$$\begin{array}{rcl} dom(g \circ f) & = & \{x \mid x \in dom(f) \land f(x) \in dom(g)\} \\ & = & \{x \mid x \in \mathbb{N} \land f(x) \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathbb{N} \end{array}$$

e, portanto, a composição $g \circ f$ é uma construção válida.

*Exemplo* 4.3.2 Dado duas funções $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ sendo que $f_1(x) = -x + 3$ e $f_2(x) = 2x + 1$, tem-se que $dom(f_1) = \mathbb{Z}$ e $dom(f_2) = \mathbb{Z}$ assim tem-se que,

(a) $(f_1 \circ f_2)(x) = -2x + 2$ e

(b) $(f_2 \circ f_1)(x) = -2x + 7$.

note agora que,

$$\begin{aligned} dom(f_1 \circ f_2) &= \{x \mid x \in dom(f_2) \wedge f_2(x) \in dom(f_1)\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge f_1(x) \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned} dom(f_2 \circ f_1) &= \{x \mid x \in dom(f_1) \wedge f_1(x) \in dom(f_2)\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge f_1(x) \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

e, portanto, as composições $f_1 \circ f_2$ e $f_2 \circ f_1$ são ambas construções válidas.

O Exemplo 4.3.2 é interessante pois ele mostra que a composição de funções não é uma operação comutativa, no sentido de igualdade, ou seja, não é sempre que ocorre que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$.

*Exemplo* 4.3.3 Dado duas funções $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e $Id_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $i(x) = -x$ e $j(x) = \sqrt{x}$, tem-se que a composição $Id_{\mathbb{Z}} \circ i$ não é uma composição válida, pois por definição a aplicação para algum $x \in \mathbb{N}$ seria da forma $(Id_{\mathbb{Z}} \circ i)(x) = Id_{\mathbb{Z}}(i(x)) = \sqrt{-x}$, e obviamente, $\sqrt{-x}$ não é uma expressão válida no contexto dos números inteiros. Note que neste exemplo isso ocorre pelo fato de $-x \notin dom(g)$ com $x \in \mathbb{N}$.

*Exemplo* 4.3.4 Dado a função $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$ com $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tem-se que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$, por outro lado, $f \circ g$ não é um composição válida, pois basta notar que $0 \in dom(g)$, mas $g(0) \notin dom(f)$[a].

[a]Este exemplo considera que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ através da ideia de sobrecarga de símbolo, ou seja, todo número natural é sobrecarregado para ser considerado também como número inteiro positivo.

**Proposição 3** A composição de funções é associativa.

**Prova** Considere que $f \in B^A, g \in C^B$ e $h \in D^C$, agora pela Definição 4.13 se a composição entre essas funções existe ela irá satisfazer as seguintes pertinência, $g \circ f \in C^A$ e $h \circ (g \circ f) \in D^A$, por outro lado, $h \circ g \in D^B$ e $(h \circ g) \circ f \in D^A$, ou seja, ambas as composições estão no mesmo espaço funcional. Além disso, tem-se que:

$$\begin{aligned} dom(h \circ (g \circ f)) &\overset{Def.4.13}{=} \{x \mid x \in dom(g \circ f) \wedge (g \circ f)(x) \in dom(h)\} \\ &\overset{Def.4.13}{=} \{x \mid x \in \{y \mid y \in dom(f) \wedge f(y) \in dom(g)\} \\ &\qquad \wedge (g \circ f)(x) \in dom(h)\} \\ &= \{x \mid x \in dom(f) \wedge f(x) \in dom(g) \wedge g(f(x)) \in dom(h)\} \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\begin{aligned} dom((h \circ g) \circ f) &\overset{Def.4.13}{=} \{x \mid x \in dom(f) \wedge f(x) \in dom(h \circ g)\} \\ &\overset{Def.4.13}{=} \{x \mid x \in dom(f) \wedge \\ &\qquad f(x) \in \{y \mid y \in dom(g) \wedge g(y) \in dom(h)\}\} \\ &= \{x \mid x \in dom(f) \wedge f(x) \in dom(g) \wedge g(f(x)) \in dom(h)\} \end{aligned}$$

consequentemente, $dom(h \circ (g \circ f)) = dom((h \circ g) \circ f)$, por fim note que para todo

$x \in dom(f)$ segue que,

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x)\end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

A seguir são apresentados mais alguns resultados sobre a composição de funções.

**Teorema 65** Se $f \in B^A$ é uma função injetora, então existe uma função $g \in A^B$ tal que $(g \circ f)(x) = x$.

**Prova** Suponha que $f \in B^A$ é uma função injetora, agora deixe $y \in B$. Agora defina uma nova função $g \in B^A$ da seguinte forma:

$$g(y) = \begin{cases} x, & \text{se } f(x) = y \\ a, & \text{senão} \end{cases}$$

para algum $x \in dom(f)$ e $a \in A$. Note que se $y \in ima(f)$, então por $f$ ser injetora irá existir $x \in A$ tal que $f(x) = y$, no caso contrário, é claro que o resultado para $g(y)$ será um $a \in A$ predefinido (ou pré-escolhido), de forma que $g$ é claramente uma função total. Agora note que para todo $x \in dom(f)$ é claro pela contrução de $g$ que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$. □

**Teorema 66** Se $f \in B^A$ é uma função sobrejetora, então existe uma função $g \in A^B$ tal que $(f \circ g)(y) = y$.

**Prova** A demonstração fica como exercício ao leitor. □

**Teorema 67** Sejam $f \in B^A$ e $g \in C^B$ duas funções totais, tem-se que:

*i.* Se $f$ e $g$ são injetoras, então $g \circ f$ também é injetora.

*ii.* Se $f$ e $g$ são sobrejetoras, então $g \circ f$ também é sobrejetoras.

**Prova** Dado duas funções totais $f \in B^A$ e $g \in C^B$ tem-se:

*i.* Suponha que $f$ e $g$ são injetoras, desde que $f$ é total tem-se que para todo $a, a' \in A$ que $f(a)$ e $f(a')$ estão definidos, além disso, como por hipótese $f$ é injetora tem-se para $a \neq a'$ que $f(a) \neq f(a')$, agora por definição de $g \circ f$ todo $f(x) \in ima(f)$ é tal que $f(x) \in dom(g)$, logo $f(a), f(a') \in dom(g)$, como por hipótese $g$ é injetora tem-se que $g(f(a)) \neq g(f(a'))$, ou seja, tem-se que $(g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(a')$ e, portanto, $g \circ f$ também é injetora.

*ii.* A demostração desde item ficará com exercício ao leitor.

□

**Corolario 7** Se $f \in B^A$ e $g \in C^B$ são bijetoras, então $g \circ f$ também é bijetora.

**Prova** Direto do Teorema 67. □

**Teorema 68** Dado uma função $f \in B^A$, tem-se que $f \circ id_A = f$ e $id_B \circ f = f$.

Prova Dado uma função qualquer $f \in B^A$ tem-se para todo $x \in dom(f)$ que,

$$(f \circ id_A)(x) = f(id_A(x)) = f(x)$$

ou seja, $f \circ id_A = f$. Por outro lado, considere que para $x \in dom(f)$ tem-se que $f(x) = y$ assim,

$$(id_B \circ f)(x) = id_B(f(x)) = id_B(y) = y = f(x)$$

consequentemente, $id_B \circ f = f$. □

A partir dos conceitos de composição de funções e de funções bijetoras, é possível definir o conceito de inversão para a teoria das funções, ou seja, apresentar o conceito de função inversa. De um ponto de vista operacional, uma função inversa "desfaz" as ações realizadas por uma outra função. A existência da função inversa de funções bijetoras é um corolário direto dos Teoremas 65 e 66 com dito esboçado em [**?** ].

**Definição 4.14** (Função Inversa) Seja $f \in B^A$ uma bijeção, uma função inversa de $f$ é qualquer função $g \in A^B$ tal que $g \circ f = id_{dom(f)}$ e $f \circ g = id_{ima(f)}$, ou seja, para todo $x \in dom(f), y \in ima(f)$ tem-se que $(g \circ f)(x) = x$ e $(f \circ g)(y) = y$.

As igualdades expressas na Definição 4.14 podem ser reescritas como sendo da forma $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$.

*Atenção* Dado uma função $f \in B^A$, na literatura (ver [40, 41]) é comum usar $f^{-1}$ para se referir a função inversa de $f$. Além disso, como discutido em [12] se $f \in B^A$ é uma bijeção sua inversa também será uma bijeção.

*Exemplo* 4.3.5 Para $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ com $f(x) = 3x + 4$ tem-se $f^{-1}(x) = \dfrac{(x-4)}{3}$.

*Exemplo* 4.3.6 Para $f \in ]0,1]^{\mathbb{R}^*_+}$ com $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tem-se $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$.

*Exemplo* 4.3.7 Seja $\mathbb{L}$ o conjunto de todas as listas de números inteiros, a função *doubleend* $\in \mathbb{L}^\mathbb{L}$ que dubplica o último elemento na lista $l$, tem como inversa a função *delatend* $\in \mathbb{L}$ que apaga o último elemento de uma lista.

*Exemplo* 4.3.8 Para $f \in \mathbb{N}^\mathbb{Z}$ com,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{senão} \end{cases}$$

tem-se então que $f^{-1} \in \mathbb{Z}^\mathbb{N}$ sendo da forma,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{se } x \in \mathbb{P} \\ -\dfrac{(x+1)}{2}, & \text{senão} \end{cases}$$

**Teorema 69** Se $f \in B^A$ e $g \in C^B$ são bijetoras, então $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Prova Suponha que $f \in B^A$ e $g \in C^B$ são bijetoras, logo pelo Corolário 7 tem-se que $g \circ f$

também é uma bijeção e dado que $g \circ f \in C^A$ tem-se que $(g \circ f)^{-1} \in A^C$, assim,

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)^{-1} &\overset{Teo.68}{=} (g \circ f)^{-1} \circ id_C \\
&\overset{Def.4.14}{=} (g \circ f)^{-1} \circ (g \circ g^{-1}) \\
&\overset{Prop.3}{=} ((g \circ f)^{-1} \circ g) \circ g^{-1} \\
&\overset{Teo.68}{=} ((g \circ f)^{-1} \circ (g \circ id_B)) \circ g^{-1} \\
&\overset{Def.4.14}{=} ((g \circ f)^{-1} \circ (g \circ (f \circ f^{-1}))) \circ g^{-1} \\
&\overset{Prop.3}{=} ((g \circ f)^{-1} \circ ((g \circ f) \circ f^{-1})) \circ g^{-1} \\
&\overset{Prop.3}{=} (((g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f)) \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\
&\overset{Def.4.14}{=} (id_A \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\
&\overset{Prop.3}{=} id_A \circ (f^{-1} \circ g^{-1})
\end{aligned}
$$

agora desde que $f^{-1} \in A^B$ e $g^{-1} \in B^C$, tem-se que $f^{-1} \circ g^{-1} \in A^C$ e assim pelo Teorema 68 tem-se que $id_A \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = f^{-1} \circ g^{-1}$, o que completa a prova. □

Usando a operação de composição é possível definir uma nova operação no espa das funções, chamada de operação potência, tal operação é formalmente definida a seguir.

**Definição 4.15** (Potência de uma função) Seja $n \in \mathbb{N}$ e $f \in A^A$ é construída a potência $n$ de $f$, como sendo, a função $f^n \in A^A$, construída recursivamente para todo $x \in A$ como:

$$f^0(x) = id_A(x) \tag{4.1}$$
$$f^{n+1}(x) = (f^n \circ f)(x) \tag{4.2}$$

Note que a definição 4.15 permite deduzir que para qualquer que seja $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, tem-se que, $f^{n+1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-vezes}$.

Continuar a escrita da potência depois, fazer exemplos e provar propriedades. . .

## 4.4 Famílias

Halmos em [26] menciona que, ". . . existem diversas ocasiões em que a imagem de uma função é tida como mais importante do que a própria função". Quando este é o caso, a terminologia e a notação, ambas, passam por radicais alterações, que serão introduzidas a seguir.

**Definição 4.16** (Família Indexada) Sejam $I$ e $D$ dois conjuntos não vazios, uma família indexada (ou simplesmente família) por $I$ em $D$, é uma função injetora e total $u : I \to D$.

A Definição 4.16 estabelece o conceito de família (ou como nomeadas em [26] e [12], indexaçõe), a ideia aqui decorre da seguinte forma, existe um conjunto de índices (ou endereços) $I$ e um conjunto de dados $D$, a família $u$ é então uma forma de organizar via uso de índices[8] $i \in I$ os elementos armazendos $d \in D$. Aqui cada $u(i)$ é escrito na verdade como $u_i$, e é chamado de $i$-ésimo elemento da família. Além disso, a família é representado como $(u_i)_{i \in I}$, em vez de simplesmente usar o símbolo $u$.

[8] Ou seja, uma família estabelece o conceito de chave-valor, tão importante dentro das linguagens de programação.

# Parte II

# Álgebras

# Introdução à Álgebra Universal

*"Na matemática, tudo são funções!"*

*Autoria desconhecida.*

## 5.1 Σ-Álgebras

A definição de álgebra que será apresentada mais adiante captura a noção das mais diferentes estruturas algébricas já muito bem conhecidas (e também as menos conhecidas) na literatura, de fato, a definição que será dada mais adiante é tão forte que cunhou todo o novo campo de estudo dentro da matemática, chamado de Álgebra Universal [17]. Um ponto de destaque que vale ser mencionado é que, diversas pesquisas recentes em lógica [51, 54], teoria de funções recursivas [53], teoria de autômatos [25], linguagens de programação e especificações formais, revelaram que todas essas áreas podem tirar de fato muito proveito da ideia de Álgebra Universal.

Embora a definição de álgebra universal seja algo relativamente recente[1], vários matemáticos do final do século 19 já especulavam por algo próximo de nossas ideias modernas, de fato, Whitehead em 1898, e mais tarde por Noether, argumentaram sobre formalizações similares. Antes de formalizar o conceito de o que seria uma álgebra é necessário formalizar algumas ferramentas antes.

[1] Remotando aproximadamente meados dos anos 30 com Birkhoff [10].

**Definição 5.1** ($\Sigma$-assinatura) $\Sigma$ é um conjunto (possivelmente infinito) de símbolos e $arid : \Sigma \to \mathbb{N}$ é uma função total, uma $\Sigma$-assinatura é uma estrutura $\langle \Sigma, arid \rangle$.

A função $arid$ retorna para todo $f \in \Sigma$ sua aridade, ou seja, a quantidade de argumentos que o símbolo $f$ necessita. Em outras palavras, a $\Sigma$-assinatura descreve a sintaxe da linguagem, pois, por exemplo, pegando um $f \in \Sigma$ tal que $arid(f) = 3$, fica implícito a escrita de palavras da forma $f(x, y, z)$ onde $x, y$ e $z$ são também palavras da linguagem.

**Definição 5.2** ($\Sigma$-semântica) Seja $A$ um conjunto não vazio, dado uma $\Sigma$-assinatura $\langle \Sigma, arid \rangle$, a semântica dos símbolos funcionais[2] em $A$ é um conjunto da forma:

$$\Sigma_A = \{f \in \Sigma \mid arid(f) = n \wedge f : A^n \to A \text{ é uma função total}\} \tag{5.1}$$

[2] Em especial quando $n = 0$ tem-se que $A^0 = \{\emptyset\}$, e assim todo $f : A^0 \to A$ pode ser vista como uma função $f(\emptyset) = a$ com $a \in A$.

A Definição 5.2 apresenta a ideia de uma semântica associada de uma $\Sigma$-assinatura com respeito a um conjunto base $A$. Usando uma visão mecância pode-se ver esse conjunto base como sendo os dados usados por uma máquina e os símbolos funcionais

[3] Do ponto de vista formal, pelo teorema da universalidade de Turing [28] e pela tese de Chuch programas e máquinas são entendidas equivalentes [8].

são os programas compilados para serem executados pela máquina[3]. E através dessa visão, podemos arguementar que nem todo símbolo funcional poderá ser interpretado no conjunto base, ou seja, nem todo programa poderá ser compilado para ser executado pela máquina.

*Exemplo* 5.1.1 Dado a $\Sigma$-assinatura $\langle\{S, V\}, arid\rangle$ com $arid(S) = 1$ e $arid(V) = 2$. Agora para os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ tem-se as seguintes interpretações:

(a) Para $\mathbb{N}$ tem-se $S(n) = n + 1$ e $V(m, n) = max(m, n)$.

(b) Para $\mathbb{Z}$ tem-se $S(n) = 1 - n$ e $V(m, n) = -2m + 3n$.

(c) Para $\mathbb{Q}$ tem-se $S\left(\dfrac{m}{n}\right) = m$ e $V$ não é interpretado em $\mathbb{Q}$.

Para algum conjunto $A$, os símbolos funcionais de aridade zero na $\Sigma$-assinatura podem ser visto apenas como apelidos para os elementos em $A$, de fato, isso é algo interessante do ponto de vista de linguagem, pois uma vez que, todo elemento em $A$ é visto como uma função, tem-se (nesta visão) que os funcionais $n$-ários são então funções de alta ordem em que seu argumentos não são meros elementos de $A$, mas sim funções sobre $A$, o que volta para nossa epígrafe inícial "**Na matemática, tudo são funções!**".

**Definição 5.3** ($\Sigma$-álgebra) Uma $\Sigma$-álgebra é uma estrutura $\langle A, \mathcal{F}\rangle$ onde $\mathcal{F} \subseteq \Sigma_A$ é um conjunto finito e não vazio.

Uma vez que $\mathcal{F} = \{f_1, \cdots, f_n\}$ geral é estabelecido a convenção que $arid(f_1) \geq \cdots \geq arid(f_n)$, assim é dito que o tipo da $\Sigma$-álgebra é exatamente a sequência $(arid(f_n))_{i\in\{1,\cdots,n\}}$. E a partir dessa convenção é possível estabelecer uma ordem parcial sobre a classe de todas as $\Sigma$-álgebras como discutido em [17].

*Exemplo* 5.1.2 Considere as $\Sigma$-álgebras formadas pelas interpretações apresentadas no Exemplo 5.1.1, ou seja, as $\Sigma$-álgebras $\langle\mathbb{N}, \{V, S\}\rangle$, $\langle\mathbb{Z}, \{V, S\}\rangle$ e $\langle\mathbb{Q}, \{S\}\rangle$ tem-se que a primeira e a segunda são do tipo $(2, 1)$ e a última é do tipo $(1)$.

*Atenção* É comum como pode ser visto em [10, 17, 12] usar a notação sem as chaves do conjunto $\mathcal{F}$, ou seja, quando $\mathcal{F} = \{f_1, \cdots, f_n\}$ a escrita de uma $\Sigma$-álgebra é da forma $\langle A, f_1, \cdots, f_n\rangle$, em vez de, $\langle A, \{f_1, \cdots, f_n\}\rangle$.

# Parte III

# Categorias

# Referências Bibliográficas


[1] J. M. Abe and N. Papavero. *Teoria Intuitiva dos Conjuntos.* MAKRON *Books*, 1991.

[2] U. R. Acharya, P. S. Bhat, S. S. Iyengar, A. Rao, and S. Dua. Classification of heart rate data using artificial neural network and fuzzy equivalence relation. *Pattern recognition*, 36(1):61–68, 2003.

[3] A. V. AHO, M. S. LAM, R. SETHI, and J. D. ULLMAN. *Compiladores: Princípios, Técnicas e ferramentas.* Editora Pearson, 2 edition, 2007.

[4] A. Bar-Hillel, T. Hertz, N. Shental, and D. Weinshall. Learning distance functions using equivalence relations. In *Proceedings of the 20th international conference on machine learning (ICML-03)*, pages 11–18, 2003.

[5] H. P. Barendregt. *The Lambda Calculus Its Syntax and Semantics.* Elsevier, 1984.

[6] H. P. Barendregt. *Lambda Calculi with Types.* Oxford: Clarendon Press, 1992.

[7] J. M. Barreto, M. Roiseberg, M. A. F. Almeida, and K. Callozos. Fundamentos de matemática aplicada à informática. Disponível em http://www.inf.ufsc.br/~mauro.roisenberg/ine5381/leituras/apostila.pdf, ????–2021.

[8] B. Bedregal, B. M. Acióly, and A. Lyra. *Introdução à Teoria da Computação: Linguagens Formais, Autômatos e Computabilidade.* Editora UnP, Natal, 2010.

[9] K. Bimbó. *Combinatory Logic: Pure, Applied and Typed,.* Chapman and Hall/-CRC, 2019.

[10] S. Burris and H. P. Sankappanavar. *A course in universal algebra.* Springer-Verlag, 1981.

[11] G. Cantor. Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 46(4):481–512, 1895.

[12] J. Carmo, P. Gouveia, and F. M. Dionísio. *Elementos de Matemática Discreta.* College Publications, 2013.

[13] M. E. Celebi. *Partitional clustering algorithms.* Springer, 2014.

[14] K. Cooper and L. Torczon. *Construindo Compiladores*, volume 1. Elsevier Brasil, 2017.

[15] C. I. Corporation. Compatible functions (C only). Acessado em 17 de Julho de 2023 na página https://www.ibm.com/docs/en/zos/2.4.0?topic=definitions-compatible-functions-c-only, 2021.

[16] N. Cressie and J. L. Davidson. Image analysis with partially ordered markov models. *Computational statistics & data analysis*, 29(1):1–26, 1998.

[17] K. Denecke and S. L. Wismath. *Universal algebra and applications in theoretical computer science*. Chapman and Hall/CRC, 2018.

[18] S. S. Epp. *Discrete mathematics with applications*. Wadsworth Publ. Co., 1990.

[19] S. S. Epp. *Discrete Mathematics With Applications*. Cengage learning, 2010.

[20] A. D. S. Farias, V. S. Costa, R. H. Santiago, and B. Bedregal. The image reduction process based on generalized mixture functions. In *2016 Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*, pages 1–6. IEEE, 2016.

[21] P. Feofiloff. *Algoritmos em linguagem C*. Elsevier Brasil, 2009.

[22] X. Z. Fern and C. E. Brodley. Solving cluster ensemble problems by bipartite graph partitioning. In *Proceedings of the twenty-first international conference on Machine learning*, page 36, 2004.

[23] J. L. Gersting. *Fundamentos Matemáticos para Ciência da Computação*. Grupo-Gen LTC, 2021.

[24] D. Giri and P. Srivastava. A cryptographic key assignment scheme for access control in poset ordered hierarchies with enhanced security. *Int. J. Netw. Secur.*, 7(2):223–234, 2008.

[25] R. Gorrieri. The algebra of nondeterministic finite automata. arXiv preprint arXiv:2301.03435, 2023.

[26] P. R. Halmos. *Teoria ingênua dos conjuntos*. Editora Ciência Moderna, 2001.

[27] F. Hausdorff. *Grundzüge der mengenlehre*, volume 7. von Veit, 1914.

[28] J. E. Hopcroft, R. Motwani, and J. D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Pearson Education India, USA, 3ł edition, 2008.

[29] E. Karaman, M. Soyertem, İ. Atasever Güvenç, D. Tozkan, M. Küçük, and Y. Küçük. Partial order relations on family of sets and scalarizations for set optimization. *Positivity*, 22(3):783–802, 2018.

[30] P. J. Landin. The mechanical evaluation of expressions. *The computer journal*, 6(4):308–320, 1964.

[31] P. J. Landin. Correspondence between algol 60 and church's lambda-notation: part i. *Communications of the ACM*, 8(2):89–101, 1965.

[32] P. J. Landin. A correspondence between algol 60 and church's lambda-notations: Part ii. *Communications of the ACM*, 8(3):158–167, 1965.

[33] O. Levin. Discrete mathematics: An open introduction. Digital book: https://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html, 2021.

[34] X. Li, X. Huang, Z. Nie, and Y. Zhang. Equivalent relations between interchannel coupling and antenna polarization coupling in polarization diversity systems. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 55(6):1709–1715, 2007.

[35] T. Y. Lin. Data mining: Granular computing approach. In *Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 24–33. Springer, 1999.

[36] P. Lingras and Y. Yao. Data mining using extensions of the rough set model. *Journal of the American society for information science*, 49(5):415–422, 1998.

[37] P. Linz. *An Introduction to Formal Languages and Automata*. Jones & Bartlett Learning, New York, 2006.

[38] M. Lipovaca. *Learn you a haskell for great good!: a beginner's guide.* no starch press, 2011.

[39] S. Lipschutz. *Topologia Geral.* McGRAW-HILL Do Brasil, LTDA/MEC, 1971. Coleção Schaum.

[40] S. Lipschutz. *Teoria dos Conjuntos.* McGraw-Hill do Brasil - LTDA/MEC, 1978.

[41] S. Lipschutz and M. Lipson. *Matemática Discreta.* Bookman Editora, 2013. Coleção Schaum.

[42] J. P. Martins. *Lógica e Raciocínio.* College Publications, 2014.

[43] M. Medina and C. Ferting. *Algoritmos e Programação: Teoria e Prática.* Novatec Editora, 2006.

[44] A. S. Mena. *Beginning Haskell: A Project-Based Approach.* Apress, 2014.

[45] J. Morgado. *Introdução à Teoria dos Reticulados, Textos de Matemática.* Instituto de Física e Matemática, Recife, 1962.

[46] V. V. Myasnikov. Description of images using a configuration equivalence relation. *Computer Optics*, 42(6):998–1007, 2018.

[47] R. Nederpelt and H. Geuvers. *Type theory and formal proof: an introduction.* Cambridge University Press, 2014.

[48] J. Neggers and H. S. Kim. *Basic posets.* World Scientific, 1998.

[49] C. A. C. Olguím. *A Topological and domain theoretical study of total computable functions.* PhD thesis, Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN, Natal, RN, 2016.

[50] G. O'Regan. *Guide to discrete mathematics.* Springer, 2021.

[51] B. Plotkin. *Universal algebra, algebraic logic, and databases*, volume 272. Springer Science & Business Media, 2012.

[52] Python Software Foundation. Página oficial da linguagem Python. Acessado em 23 de Agosto de 2023 na página https://www.python.org/, 2023.

[53] N. Rajesh. Universal algebra and effectful computation. arXiv preprint arXiv:2504.10314, 2025.

[54] J. Riche. From universal algebra to universal logic. In *First International Congress on Universal Logic, Date: 2005/03/31-2005/04/03, Location: Montreux, Zwitserland*, 2005.

[55] E. R. Scheinerman. *Matemática Discreta - Uma Introdução.* Cengage Learning Editores, terceira edição edition, 2019.

[56] I. Sergey. Programs and proofs: Mechanizing mathematics with dependent types. *Lecture notes with exercises. Available at*, 2014.

[57] J. L. Szwarcfiter and L. Markenzon. *Estruturas de Dados e seus Algoritmos*, volume 2. Livros Tecnicos e Cientificos, 1994.

[58] S. Thompson. *Type theory and functional programming.* Addison Wesley, 1999.

[59] T. Tsouanas. *Matemática Fundacional para Computação.* http://www.tsouanas.org/fmcbook, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2017–2021. Work in progress.