

Estruturas Algébricas

Notas de Aula

Valdigleis S. Costa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET

Departamento de Informática e Matemática Aplicada – DIMAP

26 de agosto de 2025

Copyright © 2019-2025 Linus van Pelt

Este texto NÃO possui qualquer tipo de vínculo editorial, e não possui fins lucrativos.

Página pessoal do autor <https://linus.pagina>

Este material é licenciado sob a Licença Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada (CC BY-NC-SA 4.0). Você pode obter uma cópia da licença acessando a página:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode.pt>

ou enviando uma carta para Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

Este tomo foi escrito com base em uma coleção de notas de aulas do autor, o mesmo foi redigido usando um *template* desenvolvido pelo próprio autor. Este texto foi escrito com o conjunto de macros L^AT_EX (em sua versão 2) e compilado usando as ferramentas LuaL^AT_EX e BibT_EX, tais ferramentas fornecidas pelas distribuições T_EXLive e MacT_EX, respectivamente nos sistemas operacionais *Unix-like*: **Debian** e no **Mac OS X**, para edição foram usados os *softwares* livres de edição textual **Vim** (versão 0.10.1), além disso, o sistema de controle de versão adotado é o **Git** (versão 2.34.1).

Release compilado em 26 de agosto de 2025 (925 minutos após a meia-noite).

Sumário

I Fundamentos Básicos

1	Conjuntos	3
1.1	Sobre conjuntos e elementos	3
1.2	Pertinência, Inclusão e Igualdade	6
1.3	Operações sobre conjuntos	7
1.4	Partes e Partições	15
1.5	Conjuntos Numéricos e Palavras Reservadas	16
1.6	Questionário	17
2	Relações	19
2.1	Sobre Relações	19
2.2	Pares Ordenados e Produto Cartesiano	19
2.3	Relações	24
2.4	Tipos ou Propriedades das Relações Binárias	28
2.5	Fecho das Relações Binárias	34
2.6	Relações e Grafos	36
2.7	Questionário	36
3	Funções	37
3.1	Conceitos, Definições e Nomenclaturas	37
3.2	Propriedades das Funções	44
3.3	Composição e Função Inversa	47
3.4	Famílias	52

II Estruturas Algébricas

III Categorias

Referências Bibliográficas	58
-----------------------------------	-----------

Parte I

Fundamentos Básicos

Conjuntos

*“-Comece pelo começo”, disse o Rei de maneira severa,
“-E continue até chegar ao fim, então pare!”*

Lewis Carroll, Alice no País das Maravilhas.

1.1 Sobre conjuntos e elementos

A ideia de conjunto é provavelmente o conceito mais fundamental compartilhado pelos mais diversos ramos da matemática. O primeiro grande estudioso que apresentou um relativo sucesso na missão de formalizar o conceito de conjunto, foi o matemático alemão George Cantor (1845-1918), em seu seminal trabalho [8]. Cantor apresentou as bases para o que hoje é chamada de teoria ingênua dos conjuntos. A seguir será apresentada uma tradução não literal da definição original de Cantor.

Definição 1

(Formalização por Cantor) Um **conjunto** A é uma **coleção** em uma totalidade \mathbb{U} de **objetos** distintos e bem-definidos n que são parte da nossa percepção ou pensamento, tais objetos são chamados de **elementos** de A .

Agora note que a definição apresentada por Cantor distingue conjuntos e elementos como sendo objetos diferentes, e assim, a teoria dos conjuntos de Cantor não tem um único objeto fundamental, mas dois, sendo eles, os conjuntos e os elementos. Além disso, a Definição 1 possui a exigência sobre dois aspectos da natureza dos elementos em um conjunto, a saber: (1) Os elementos devem ser distintos entre si¹ e (2) eles (os elementos) devem ser bem-definidos.

A definição de Cantor permite que sejam criados conjuntos com qualquer coisa que o indivíduo racional possa pensar ou perceber pelos seus sentidos. Agora, entretanto, deve-se questionar o que significa dizer que algo é bem-definido? Uma resposta satisfatória para essa pergunta é dizer que algo é bem-definido se esse algo pode ser descrito sem ambiguidades. É claro que qualquer coisa pode ser descrita a partir de suas propriedades, isto é, por suas características (ou atributos). Sendo que essas propriedades sempre podem ser verificadas pelos sentidos no caso de objetos físicos, e sempre se pode pensar e argumentar sobre elas no caso de objetos abstratos. Assim pode-se modificar um pouco a definição de Cantor para a forma apresentada a seguir.

¹ Em um conjunto não é permitido a repetição de elementos.

Definição 2

(Definição de Cantor Modificada) Um **conjunto** A é uma **coleção** numa totalidade \mathbb{U} de certos **objetos** n distintos, que satisfazem certas propriedades, tais objetos são chamados de **elementos** de A .

Note que a Definição 2 permite concluir que um conjunto seja o agrupamento de entidades (os elementos) que satisfazem certas propriedades, ou ainda que, as propriedades definem os conjuntos. Prosseguindo nesse texto serão apresentadas as convenções da **teoria ingênua dos conjuntos** de forma usual, mas com um olhar de computação, isto é, apresentado os aspectos sintáticos e semânticos da teoria.



Atenção

(Nomenclatura.) É também muito comum em diversos textos, tais como [9] e [27], empregar termos como, **discurso**, **universo** ou **universo de estudo**, em vez de usar o termo **totalidade** encontrado nas Definições 1 e 2, ao se especificar um conjunto. Neste texto sempre que necessário será adotado o uso de **universo**.

Prosseguindo com este documento, o primeiro passo será a apresentação da teoria dos conjuntos, é interessante notar que nas Definições 1 e 2, o objeto conjunto foi nomeado de forma arbitrária como A o universo como U e os elementos como n , mas por qual razão foi usado isto? Essa estratégia é usado comumente na matemática, e a ideia por trás é atribuir a um objeto um “apelido”, a seguir será formalizado esta ideia de forma mais precisa.

Definição 3

(Rótulo para conjuntos) Palavras (com ou sem indexação) formadas apenas por letras maiúsculas do alfabeto latino serão usadas como rótulos^a que representam conjuntos.

^aAqui o leitor pode entender rótulo por um apelido dado ao conjunto.

A ideia de dar um rótulo ao conjunto se faz necessário visto o grande trabalho de escrita e leitura caso isso não fosse feito. Para ilustrar considere a situação de que fosse necessário sempre se referir, por exemplo, ao **conjunto de todas as pessoas que moram em recife, mas que não são brasileiras com mais 40 anos e possuem dois filhos**. Ficar escrevendo sobre esse conjunto, seria altamente desgastante, assim não seria prático, dessa forma, é conveniente o uso de rótulos, isto é, a simbologia matemática, para torna texto e explicações mais dinâmicas. Os exemplos a seguir esboçam bem a ideia do uso de rótulos para designar conjuntos.

- Exemplo 1* | O conjunto de todas as pessoas que moram em recife, mas que não são brasileiras com mais 40 anos e possuem dois filhos, pode ser denotado simplesmente por PE_{40} , ou qualquer outra palavra nos padrões estabelecidos pela Definição 3.
- Exemplo 2* | O conjunto de todos os vizinhos da casa de número 4 pode ser representado por $VIZINHOS_4$, $VIZINHOS_{Casa_4}$, ou simplesmente V_4 .
- Exemplo 3* | O Conjunto de todos os primos de Ana pode ser representado por A_{primos} , ANA_p ou ainda A_p .

Em diversas situações ao se trabalhar com conjuntos, como as apresentadas no capítulo inicial de [27], é necessário descrever um conjunto não por seu apelido (ou nome²), mas sim apresentando uma forma que descreva o conjunto de forma precisa e curta, seja listando (geralmente entre chaves e separados por vírgula) os elementos que juntos formam o referido conjunto, ou através da descrição da propriedade que descreve o conjunto, esta forma de representação costuma ser chamada representação compacta, ou como também é chamada *Set builder*[40].

- Exemplo 4* | O conjunto dos números naturais menores que 10 é escrito na notação compacta como $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Já o conjunto dos naturais menores que 5 e maiores que 3 pode ser escrito usando a notação compacta como $\{x \mid 3 < x < 5\}$.
- Exemplo 5* | A seguir são apresentados algumas instâncias de conjuntos não numéricos.
- (a) $\{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$.
- (b) $\{\square, \boxplus, \boxtimes\}$.

² O conjunto vazio, por exemplo, possui uma palavra ou símbolo reservado para ser seu rótulo, sendo este o símbolo \emptyset .


(c) {Flamengo, Fluminense, Palmeiras, São Paulo}.

(d) $\{5, a, \boxplus, \{\spadesuit, \clubsuit\}\}$.

(e) {Valdigleis, \mathbb{C} , $\{\bullet, \bullet\}$, $\{\boxplus\}$ }

Exemplo 6 O conjunto de todos inteiros múltiplos de 5 em notação compacta pode ser representado como $\{x \mid x = 5y, \text{ sendo } y \text{ um número inteiro}\}$.

Exemplo 7 O conjunto de números naturais maiores que 2 e menores que 13 pode ser representado como $\{x \mid 3 \leq x \leq 12\}$.

 **Atenção** (Captura de variáveis.) Muitas vezes^a na notação compacta é necessário o uso de variáveis para descrever um conjunto, essas variáveis usadas tem a função de serem objetos “dummy” do conjunto^b. Assim variáveis à esquerda do símbolo “|” podem ser trocadas por qualquer variável que não ocorre livre no lado direito de “|”. Tome como exemplo o conjunto,

$$\{x \mid x = 5 + 2y\}$$

em tal conjunto, a variável x pode ser substituída por outra variável z sem qualquer perda, ficando então com,

$$\{z \mid z = 5 + 2y\}$$

note contudo que não é possível substituir x por y , pois ao fazer tal substituição teríamos,

$$\{y \mid y = 5 + 2y\}$$

o que seria absurdo por dois motivos, (1) y não pode ser igual a $5 + 2y$, e (2) o y que era livre no conjunto tornou-se ligado ao conjunto, assim a referência ao y original do lado direito de | não pode ser mais recuperado.

^aEm especial quando se descreve conjuntos infinitos.

^bAqui o termo *dummy* tem sentido similar ao encontrado em teoria das linguagens de programação, ou seja, entidades ou variáveis fictícias.

Para prosseguir, é interessante notar que nos itens “a”, “b” e “c” apresentado no Exemplo 5, os elementos no conjunto têm a mesma natureza (ou tipo), por outro lado, os itens “d” e “e” apresentam a propriedade dos elementos no conjunto serem de tipos diferentes.

No primeiro caso, quando todos os elementos têm o mesmo tipo³, é dito que o conjunto é **homogêneo**. Já no segundo caso, ou seja, quando os elementos no conjunto possuem tipos diferentes, é dito que o conjunto é **heterogêneo**. A seguir, mais exemplos são apresentados deste conceito.

Exemplo 8 A seguir alguns conjuntos homogêneos,

(a) {10, 20, 30, 40, 50}.

(b) {1, 2, 3, 4, 5}.

(c) {a, b, c, d, e}.

Exemplo 9 Os conjuntos a seguir são todos heterogêneos,

(a) {A, 10, \clubsuit , \bullet }.

(b) {azul, vermelho, amarelo, $\sqrt{2\pi}$ }.

(c) {x, y, z, 1.27, Linux, Darwin, DOS}.

³ Tipo aqui pode ser interpretado como uma forma de segmentar os elementos do conjunto em diferentes “espécies”, não faz menção a área de matemática chamada teoria dos tipos [32].

1.2 Pertinência, Inclusão e Igualdade

⁴ Aqui interfaces diz respeito aos mecanismos que permitem a interação entre os objetos matemáticos.

Em matemática ao se apresentar qualquer novo tipo de objeto é importante apresentar as interfaces⁴ que são “*executadas*” sobre esse novo tipo de objeto, assim esta seção irá se dedicar a apresentar as três relações fundamentais sobre conjuntos, e algumas delas derivadas.

A primeira das interfaces para o conceito de conjunto que será aqui expressa é a pertinência, esta sendo representado pelo símbolo \in . A pertinência é a interface que funciona provocando a interação entre um elemento do discurso e um conjunto, a seguir é apresentado formalmente o conceito de pertinência.

Definição 4 (Pertinência) Seja A um conjunto definido sobre um discurso \mathbb{U} por uma propriedade \mathbf{P} e seja x um elemento do discurso. Se o elemento x possui (ou satisfaz) a propriedade \mathbf{P} , então é dito que x pertence a A , denotado por $x \in A$.

Assim note que a Definição 4 estabelece que, ao usar a pertinência é sempre escrito uma palavra da linguagem da teoria dos conjuntos tendo esta palavra a forma:

$$\text{_____} \in \text{_____}$$

o espaço em **vermelho** deve ser ocupado por elemento concreto do discurso ou por um símbolo de variável (um *dummy*) que represente os elementos no discurso. Já o espaço em **azul** deve ser ocupado por alguma representação de um conjunto, seja o rótulo ou a forma compacta do conjunto.

A relação de pertinência é central para a definição de outras relações dentro da teoria dos conjuntos⁵, o que permite enxergar a relação de pertinência como um dos pilares fundamentais da teoria. Um exemplo desta característica fundamental da pertinência no desenvolvimento de outras relações, é seu uso para definir a relação de inclusão apresentada à seguir.

⁵ Dual a própria relação de pertinência existe a não pertinência \notin , definida formalmente como sendo a negação da relação de pertinência.

Definição 5 (Relação de inclusão) [27] Dado dois conjuntos A e B quaisquer, é dito que A é subconjunto de (ou está incluso^a em) B , denotado por $A \subseteq B$, quando todo $x \in A$ é tal que $x \in B$.

^aDualmente a relação de inclusão existe sua negação, isto é, a relação de não inclusão denotada por $\not\subseteq$.

Note que a Definição 5 estabelece a escrita,

$$\text{_____} \subseteq \text{_____}$$

onde os espaços em **vermelho** devem ser preenchidos com rótulos de conjuntos ou com a representação compacta, a seguir são apresentados usos da relação de inclusão.

Exemplo 10 Dado o conjunto dos inteiros (\mathbb{Z}) tem-se que o conjunto,

$$N = \{x \mid x = 2k \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$$

é claramente um subconjunto de \mathbb{Z} , pois todo número par é também um número inteiro.

Exemplo 11 As seguintes relações de inclusão se verificam:

(a) $\{a, e, u\} \subseteq \{a, e, o, i, u\}$.

(b) $\{x \mid x \text{ é uma cidade do PE}\} \subseteq \{x \mid x \text{ é uma cidade do Brasil}\}$.

(c) $\{x \mid x = 2k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$.

(d) $\{\text{Brasil}\} \subseteq \{x \mid x \text{ é um país do continente americano}\}$

É fácil notar que a inclusão estabelece que um conjunto A está incluso em outro conjunto B sempre que B contém todos os elementos de A , assim é claro que todo conjunto é subconjunto (ou seja está incluso) de si mesmo. Além disso, existem a possibilidade de A ser subconjunto de B , porém, pode acontecer de B conter elementos que não estejam em A , nesse cenário é dito que A é um subconjunto próprio de B , e isto é expresso pela palavra $A \subset B$.


Exemplo 12 As seguintes relações de inclusão se verificam:

- (a) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$.
- (b) $\{x \mid x \text{ é uma cidade do PE}\} \subset \{x \mid x \text{ é uma cidade do Brasil}\}$.
- (c) $\{a, e\} \subset \{a, b, c, d, e, f\}$.

Uma propriedade interessante sobre a inclusão é que o conjunto vazio está incluso, ou seja, é subconjunto, de qualquer outro conjunto existente.

Teorema 1 Para todo conjunto A tem-se que $\emptyset \subseteq A$.

Prova Suponha por absurdo que existe um conjunto A tal que $\emptyset \not\subseteq A$, assim por definição existe pelo menos um $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$, mas isto é um absurdo já que o vazio não possui elementos e, portanto, a afirmação que $\emptyset \not\subseteq A$ é falsa, logo, $\emptyset \subseteq A$ é uma asserção verdadeira para qualquer que seja o A . \square

 **Atenção** É sempre bom lembrar que: se $A \subset B$, então é verdade que $A \subseteq B$. Mas a recíproca não é verdade, basta lembrar que todo conjunto é subconjunto de si próprio, mas não pode ser subconjunto próprio.

Usando a ideia de subconjunto pode-se como apresentado na literatura em obras como [1, 18, 27] introduzir a ideia de igualdade entre conjuntos, esta noção é apresentada formalmente como se segue.

Definição 6 [1] Dois conjuntos A e B são iguais, denotado por $A = B$, se e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Teorema 2 (Teorema da igualdade) Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Tem-se que:

1. $A = A$.
2. Se $A = B$, então $B = A$.
3. Se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$.

Agora que foi apresentada a relação fundamental de pertinência, e as relação de inclusão e igualdade dela derivadas, pode-se agora prosseguir com este documento apresentando as operações básicas sobre conjuntos.

1.3 Operações sobre conjuntos

A organização com que está seção do documento irá apresentar as operações sobre conjuntos é a apresentada em [28].

Definição 7 (União de conjuntos) Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, a união de A com B , denotada por $A \cup B$, corresponde ao seguinte conjunto.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplo 13 | Dados os dois conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2i \text{ para algum } i \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2j + 1 \text{ para algum } j \in \mathbb{N}\}$ tem-se que $A \cup B = \mathbb{N}$.

Exemplo 14 | Seja $N = \{1, 2, 3, 6\}$ e $L = \{4, 6\}$ tem-se que $N \cup L = \{1, 4, 6, 3, 2\}$.

Como apontado em [27] alguns livros usam a notação $A + B$ para representar a união, é comum nesse caso não usar a nomenclatura união, em vez disso, é usado o termo soma de conjunto, entretanto, trata-se da mesma operação de união apresentada na definição anterior. Além disso, existe uma outra forma de união, chamada união de disjunta, em que é produzido um novo conjunto que contém cópias dos conjuntos bases da união, e em que os elementos do conjunto produzido por essa união apresentam um “código⁶” que identifica de qual conjunto base o elemento veio, ainda não é possível formalizar este conceito de união disjunta neste capítulo, entretanto o mesmo será formalizado em capítulos futuros.

⁶ Em alguns textos como em [9], é usado o termo chave em vez de código.

Definição 8 (Interseção de conjuntos) Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, a interseção de A com B , denotada por $A \cap B$, corresponde ao seguinte conjunto.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

A seguir são apresentados alguns exemplo da operação de interseção de conjuntos.

Exemplo 15 | Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e $C = \{5\}$ tem-se que:

- (a) $A \cap B = \{2, 3\}$.
- (b) $A \cap C = \emptyset$.
- (c) $B \cap C = \{5\}$.

Exemplo 16 | Dado $A_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 2\}$ e $A_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 3\}$ tem-se que $A_1 \cap A_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 6\}$.

Com respeito as propriedades equacionais das operações de união e interseção tem-se como exposto em [28] os seguintes resultados para qualquer três conjuntos A , B e C .

Propriedade	União	Interseção
(p_1) Idempotência	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
(p_2) Comutatividade	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
(p_3) Associatividade	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(p_4) Distributividade	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(p_5) Neutralidade	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \mathbb{U} = A$
(p_6) Absorção	$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$	$A \cap \emptyset = \emptyset$

Tabela 1.1: Tabela das propriedades das operações de união e interseção.

Além das propriedades apresentadas pela Tabela 1.1, a união e a interseção possuem propriedades ligadas a relação de inclusão.

Teorema 3 Para quaisquer conjuntos A e B tem-se que:

- i. $A \subseteq (A \cup B)$.
- ii. $(A \cap B) \subseteq A$

Prova | Direta das Definições 5, 7 e 8. □

A partir da definição de interseção é estabelecido um conceito de extrema valia para a teoria dos conjuntos e suas aplicações, tal conceito é o estado de disjunção entre dois conjuntos.

Definição 9 (Conjuntos disjuntos) Dois conjuntos A e B são ditos disjuntos sempre que $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 17 | Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ e $C = \{5\}$ tem-se que A e C são disjuntos, por outro lado, A e B não são disjuntos entre si, além disso, B e C também não são disjuntos entre si.

Definição 10 (Complemento de conjuntos) Seja $A \subseteq \mathbb{U}$ para algum discurso \mathbb{U} , o complemento de A , denotado por \overline{A} , corresponde ao seguinte conjunto:

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{U} \mid x \notin A\}$$


Exemplo 18 | Dado $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ tem-se então o seguinte complemento $\overline{P} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1 \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemplo 19 | Dado discurso \mathbb{U} tem-se direto da definição que $\overline{\overline{\mathbb{U}}} = \emptyset$, e obviamente, $\overline{\emptyset} = \mathbb{U}$.

Teorema 4 Dado um conjunto A tem-se que:

- i. $A \cup \overline{A} = \mathbb{U}$.
- ii. $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
- iii. $\overline{\overline{A}} = A$.

Prova | Direta das Definições 7, 8 e 10. □

 **Atenção** | A propriedade (iii) apresentada no Teorema 4 costuma ser chamada involução, como dito em [27].

Além das propriedades apresentadas no Teorema 4 o complemento também apresenta propriedades ligadas diretamente a união e a interseção, tais propriedades são uma versão conjuntistas das famosas leis De Morgan (ver [9, 29, 28]) muito conhecidas pelos estudiosos da área de lógica, a seguir são apresentadas as leis De Morgan para a linguagem teoria dos conjuntos.

$$\begin{aligned} \text{(DM1) Primeira Lei De Morgan: } & \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \text{(DM2) Segunda Lei De Morgan: } & \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

Seguindo com este texto, uma outra importante operação sobre conjuntos é a diferença entre dois conjuntos. A diferença entre conjunto apresenta duas formas, a primeira considerada por muito com a diferença natural [9], já a segunda forma existente, é conhecida por diferença simétrica.

Definição 11 (Diferença de conjuntos) Dado dois conjuntos A e B , a diferença de A e B , denotado por $A - B$, corresponde ao seguinte conjunto:

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Exemplo 20 | Dado os conjuntos $S = \{a, b, c, d\}$ e $T = \{f, b, g, d\}$ tem-se os seguintes conjuntos de diferença: $S - T = \{a, c\}$ e $T - S = \{f, g\}$.

Exemplo 21 | Dado os conjuntos \mathbb{Z} e \mathbb{Z}_+^* tem-se que $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}_+^* = \mathbb{Z}_-$.

Exemplo 22 | Dado $A = \{1, 2, 3, 4\}$ tem-se que $A - \mathbb{N} = \emptyset$ e $A - \mathbb{Z}_- = A$.

Teorema 5 Para todo A e B tem-se que:

- i. $A - B = A \cap \overline{B}$.
- ii. Se $B \subset A$ e $A = \mathbb{U}$, então $A - B = \overline{B}$.

Prova | Dado os conjuntos A e B segue que:

- i. Por definição para todo $x \in A - B$ tem-se que $x \in A$ e $x \notin B$, mas isto só é possível se, e somente se, $x \in A$ e $x \in \overline{B}$, e por sua vez, isto só é possível se, e somente se, $x \in A \cap \overline{B}$, portanto, tem-se que $A - B = A \cap \overline{B}$.
- ii. Suponha que $B \subset A$, ou seja, todo $x \in B$ e tal que $x \in A$. Agora note que todo $x \in A - B$ é tal que $x \in A$ e $x \notin B$, e portanto, pela Definição 11 e pela hipótese de $B \subset A$ é claro que $A - B = \overline{B}$.

□

A seguir são apresentadas duas séries de igualdades notáveis relacionadas a diferença entre conjuntos.

Teorema 6 | Sejam A e B conjuntos sobre um discurso \mathbb{U} , tem-se que:

- a. $A - \emptyset = A$ e $\emptyset - A = \emptyset$.
- b. $A - \mathbb{U} = \emptyset$ e $\mathbb{U} - A = \overline{A}$.
- c. $A - A = \emptyset$.
- d. $A - \overline{A} = A$.
- e. $\overline{(A - B)} = \overline{A} \cup B$.
- f. $A - B = \overline{B} - \overline{A}$.

Prova | Para todas as equações a seguir suponha que A e B são conjuntos sobre um discurso \mathbb{U} assim segue que:

a.

$$\begin{aligned} A - \emptyset &\stackrel{\text{Teo. 5(i)}}{=} A \cap \overline{\emptyset} \\ &= A \cap \mathbb{U} \\ &\stackrel{\text{Tab. 1.1(p}_5\text{)}}{=} A \end{aligned}$$

e também tem-se que,

$$\begin{aligned} \emptyset - A &\stackrel{\text{Teo. 5(i)}}{=} \emptyset \cap \overline{A} \\ &\stackrel{\text{Tab. 1.1(p}_6\text{)}}{=} \emptyset \end{aligned}$$

b. A prova tem um raciocínio similar a demonstração do item anterior, assim será deixado como exercício ao leitor.

c. Trivial pela própria Definição 11.

d.

$$\begin{aligned} A - \overline{A} &\stackrel{\text{Teo. 5(i)}}{=} A \cap \overline{\overline{A}} \\ &\stackrel{\text{Teo. 4(iii)}}{=} A \cap A \\ &\stackrel{\text{Tab. 1.1(p}_1\text{)}}{=} A \end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned} \overline{(A - B)} &\stackrel{\text{Teo. 5(i)}}{=} \overline{(A \cap \overline{B})} \\ &\stackrel{\text{(DM2)}}{=} \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} \\ &\stackrel{\text{Teo. 4(iii)}}{=} \overline{A} \cup B \end{aligned}$$

f.

$$\begin{aligned}
 A - B &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} A \cap \overline{B} \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_2)}{=} \overline{B} \cap A \\
 &\stackrel{\text{Teo. 4}(iii)}{=} \overline{B} \cap \overline{\overline{A}} \\
 &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} \overline{B} - \overline{A}
 \end{aligned}$$

E assim a prova está concluída. \square

Na demonstração do Teorema 6 apresentada anteriormente, algumas vezes foi escrito o símbolo de $=$ com um texto acima, isso é uma técnica comum na escrita de demonstrações matemáticas, o entendimento que leitor precisa ter é que ao escrever $\stackrel{\kappa}{=}$ significa que a igualdade segue (ou é garantida) pela propriedade ou resultado κ . Durante este texto em algumas demonstrações uma escrita similar irá aparecer para outros símbolos além da igualdade, por exemplo, para o símbolo de implicação, que será introduzidos no decorrer deste documento.

Teorema 7 Sejam A, B e C subconjuntos de um discurso \mathbb{U} , tem-se que:

- a. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.
- b. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
- c. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.
- d. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.
- e. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
- f. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
- g. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
- h. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.
- i. $A - (A - B) = A \cap B$.
- j. $(A - B) - B = A - B$.

Prova Para todas as equações a seguir suponha que A, B e C são subconjuntos de um universo \mathbb{U} assim segue que:

a.

$$\begin{aligned}
 (A - B) - C &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_3)}{=} A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{(DM1)}}{=} A \cap \overline{(B \cup C)} \\
 &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} A - (B \cup C)
 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
 A - (B - C) &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} A \cap \overline{(B - C)} \\
 &\stackrel{\text{Teo. 6}(e)}{=} A \cap (\overline{B} \cup C) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_4)}{=} (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\
 &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} (A - B) \cup (A \cap C)
 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
 A \cup (B - C) &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} A \cup (B \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_4)}{=} (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_2)}{=} (A \cup B) \cap (\overline{C} \cup A) \\
 &\stackrel{\text{Teo. 4}(iii)}{=} (A \cup B) \cap (\overline{C} \cup \overline{\overline{A}}) \\
 &\stackrel{(\text{DM2})}{=} (A \cup B) \cap \overline{(C \cap \overline{A})} \\
 &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} (A \cup B) - (C \cap \overline{A}) \\
 &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} (A \cup B) - (C - A)
 \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}
 A \cap (B - C) &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} A \cap (B \cap \overline{C}) \\
 &= \emptyset \cup (A \cap (B \cap \overline{C})) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_2)}{=} \emptyset \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_6)}{=} (\emptyset \cap B) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{Teo. 4}(ii)}{=} ((A \cap \overline{A}) \cap B) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_2, p_3)}{=} ((A \cap B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_4)}{=} (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
 &\stackrel{(\text{DM2})}{=} (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\
 &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} (A \cap B) - (A \cap C)
 \end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned}
 A - (B \cup C) &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} A \cap \overline{(B \cup C)} \\
 &\stackrel{(\text{DM1})}{=} A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_1)}{=} (A \cap A) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_3)}{=} ((A \cap A) \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_2, p_3)}{=} ((A \cap \overline{B}) \cap A) \cap \overline{C} \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_3)}{=} (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} (A - B) \cap (A - C)
 \end{aligned}$$

f.

$$\begin{aligned}
 A - (B \cap C) &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} A \cap \overline{(B \cap C)} \\
 &\stackrel{(\text{DM2})}{=} A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_4)}{=} (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{\text{Teo. 5}(i)}{=} (A - B) \cup (A - C)
 \end{aligned}$$

g.

$$\begin{aligned}
 (A \cup B) - C &\stackrel{Teo. 5(i)}{=} (A \cup B) \cap \overline{C} \\
 &\stackrel{Tab. 1.1(p_4)}{=} (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{Teo. 5(i)}{=} (A - C) \cup (B - C)
 \end{aligned}$$

h.

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) - C &\stackrel{Teo. 5(i)}{=} (A \cap B) \cap \overline{C} \\
 &\stackrel{Tab. 1.1(p_4)}{=} (A \cap B) \cap (\overline{C} \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{Tab. 1.1(p_2, p_3)}{=} (A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C}) \\
 &\stackrel{Teo. 5(i)}{=} (A - C) \cap (B - C)
 \end{aligned}$$

i.

$$\begin{aligned}
 A - (A - B) &\stackrel{Teo. 5(i)}{=} A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} \\
 &\stackrel{(DM2)}{=} A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \\
 &\stackrel{Tab. 1.1(p_4)}{=} (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{\overline{B}}) \\
 &\stackrel{Teo. 4(ii)}{=} \emptyset \cup (A \cap \overline{\overline{B}}) \\
 &\stackrel{Tab. 1.1(p_5)}{=} A \cap \overline{\overline{B}} \\
 &\stackrel{Teo. 4(iii)}{=} A \cap B
 \end{aligned}$$

j.

$$\begin{aligned}
 (A - B) - B &\stackrel{Teo. 5(i)}{=} (A \cap \overline{B}) \cap \overline{B} \\
 &\stackrel{Tab. 1.1(p_3)}{=} A \cap (\overline{B} \cap \overline{B}) \\
 &\stackrel{Tab. 1.1(p_1)}{=} A \cap \overline{B} \\
 &\stackrel{Teo. 5(i)}{=} A - B
 \end{aligned}$$

□

Para prosseguir com esta seção sobre as operações definidas sobre conjuntos será agora apresentada a última operação “clássica”, sendo esta a diferença simétrica.

Definição 12 (Diferença simétrica) Dado dois conjuntos A e B , a diferença simétrica de A e B , denotado por $A \ominus B$, corresponde ao seguinte conjunto:

$$A \ominus B = \{x \mid x \in (A - B) \text{ ou } x \in (B - A)\}$$

Olhando atentamente a definição anterior é fácil notar que o conjunto da diferença simétrica é exatamente a união das possíveis diferenças entre os conjuntos, isto é, a diferença simétrica corresponde a seguinte igualdade: $A \ominus B = (A - B) \cup (B - A)$.

Exemplo 23 | Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5, 2\}$ tem-se que $A \ominus B = \{1, 4, 5\}$.

A seguir será apresentada uma série de importantes resultados com respeito a diferença simétrica.

Teorema 8 Sejam A e B subconjuntos quaisquer de um determinado universo \mathbb{U} , tem-se que $A \ominus B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.

Prova Dado A e B dois subconjuntos quaisquer de um determinado universo \mathbb{U} segue que:

$$\begin{aligned}
 A \ominus B &= (A - B) \cup (B - A) \\
 &\stackrel{\text{Teo. 5(i)}}{=} (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_4)}{=} (A \cup (B \cap \overline{A})) \cap (\overline{B} \cup (B \cap \overline{A})) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_4)}{=} ((A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})) \cap ((\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) \\
 &\stackrel{\text{Teo. 4(i)}}{=} ((A \cup B) \cap \mathbb{U}) \cap (\mathbb{U} \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) \\
 &\stackrel{\text{Tab. 1.1}(p_1, p_5)}{=} (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
 &\stackrel{(\text{DM2})}{=} (A \cup B) \cap \overline{(B \cap A)}
 \end{aligned}$$

□

Corolário 1 Sejam A e B subconjuntos quaisquer de um determinado discurso \mathbb{U} , tem-se que $A \ominus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Prova Pelo Teorema 8 tem-se que $A \ominus B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$, mas pelo Teorema 5 (i) segue que $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) - (A \cap B)$, e portanto, $A \ominus B = (A \cup B) - (A \cap B)$. □

O próximo resultado mostra que a operação de diferença simétrica entre conjunto possui elemento neutro, isto é, existe um conjunto que quando operado com qualquer outro conjunto A , o resultado é o próprio conjunto A .

Teorema 9 Para todo A tem-se que $A \ominus \emptyset = A$.

Prova Dado um conjunto A qualquer, trivialmente tem-se a seguinte igualdade $A \ominus \emptyset \stackrel{\text{Cor. 1}}{=} (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A$. □

Seguindo com as propriedades que a operação de diferença simétrica possui, o próximo resultado mostra a existência de um elemento que neste texto será chamado de **alternador**, isto é, existe um conjunto que quando operado com qualquer outro conjunto A , o resultado é o complemento deste conjunto A .

Teorema 10 Para todo A tem-se que $A \ominus \mathbb{U} = \overline{A}$.

Prova Similar a demonstração do Teorema 9, ficando assim como exercício ao leitor. □

O teorema a seguir mostra que a diferença simétrica entre um conjunto A e seu complementar \overline{A} é exatamente igual a totalidade do universo do discurso em que estes conjuntos estão inseridos.

Teorema 11 Para todo A tem-se que $A \ominus \overline{A} = \mathbb{U}$.

Prova Dado um conjunto A qualquer e seu complementar \overline{A} tem-se pelo Corolário 1 que $A \ominus \emptyset = (A \cup \overline{A}) - (A \cap \overline{A})$, mas pelo Teorema 4 tem-se que $A \cup \overline{A} = \mathbb{U}$ e $A \cap \overline{A} = \emptyset$, consequentemente, $A \ominus \emptyset = \mathbb{U} - \emptyset$, mas pelo Teorema 6 tem-se que $\mathbb{U} - \emptyset = \mathbb{U}$, e portanto, $A \ominus \overline{A} = \mathbb{U}$. □

Continuando a estudar a diferença simétrica o próximo teorema mostra que a diferença simétrica entre um conjunto A e ele mesmo é exatamente igual ao conjunto vazio.

Teorema 12 Para todo A tem-se que $A \ominus A = \emptyset$.

Prova Dado um conjunto A qualquer tem-se pelo Corolário 1 que vale a seguinte igualdade, $A \ominus A = (A \cup A) - (A \cap A)$. Mas pelas propriedades apresentadas na Tabela 1.1 tem-se que $(A \cup A) = (A \cap A) = A$, logo $A \ominus A = A - A$, mas pelo Teorema 6 tem-se que $A - A = \emptyset$, portanto, $A \ominus A = \emptyset$. \square

Anteriormente foi mostrado que a diferença entre conjuntos não era comutativa (Exemplo 20), o próximo resultado contrasta esse fato com respeito a diferença simétrica.

Teorema 13 Para todo A e B tem-se que $A \ominus B = B \ominus A$.

Prova Dado dois conjuntos A e B tem-se pelo Corolário 1 que vale a seguinte igualdade, $A \ominus B = (A \cup B) - (A \cap B)$, mas pela propriedade de comutatividade de \cup e de \cap (ver Tabela 1.1) tem-se que $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$, logo tem-se que $A \ominus B = (B \cup A) - (B \cap A)$, mas pelo Corolário 1 tem-se que $(B \cup A) - (B \cap A) = B \ominus A$, e portanto, $A \ominus B = B \ominus A$. \square

Teorema 14 Para todo A, B e C tem-se que $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \ominus C)$.

Prova A prova deste teorema sai direto da definição de diferença simétrica e assim ficará como exercício ao leitor. \square

Teorema 15 Para todo A e B tem-se que $\overline{(A \ominus B)} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Prova Para todo A e B segue que:

$$\begin{aligned}
 \overline{(A \ominus B)} &\stackrel{Teo. 8}{=} \overline{((A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)})} \\
 &\stackrel{(DM2)}{=} \overline{(A \cup B)} \cup \overline{\overline{(A \cap B)}} \\
 &\stackrel{(DM1)}{=} (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{\overline{(A \cap B)}} \\
 &\stackrel{(DM2)}{=} (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{(A \cap B)} \\
 &\stackrel{(DM1)}{=} (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}) \\
 &\stackrel{Tab. 1.1(p_2)}{=} (\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \\
 &\stackrel{Teo. 4(iii)}{=} (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})
 \end{aligned}$$

\square

1.4 Partes e Partições

Para concluir esta breve introdução à teoria ingênua dos conjuntos, nesta seção serão trabalhados dois importantes conceitos, as ideias de partes e partições. Ambos conceitos são conjuntos em que os elementos destes são também conjuntos.

O conceito de partes é de suma importância em diversos ramos da matemática, tais como Topologia[26] e linguagens formais[24, 6]. Já as partições são de interesse tanto teóricos[9, 18] quanto práticos, em especial, na área de agrupamento de dados[10, 16].

Definição 13 (Conjunto das partes) Seja A um conjunto. O conjunto das partes^a de A , é denotada por $\wp(A)$, e corresponde ao seguinte conjunto:

$$\wp(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

^aEm alguns livros é usado o termo conjunto potência em vez do termo conjunto das partes, nesse caso é usado a notação 2^A para denotar o conjunto partes, por exemplo ver [28].

Uma propriedade interessante do conjuntos das partes como dito em [27], é que se A for da forma $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então pode-se mostrar que $\wp(A)$ terá exatamente 2^n elementos.

Exemplo 24 | Seja $A = \{a, b, c\}$ tem-se que o conjunto das parte de A corresponde ao conjunto $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}, \{a, b, c\}\}$.

Exemplo 25 | Dado o conjunto $X = \{1\}$ tem-se que $\wp(X) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

Exemplo 26 | Seja $A = \emptyset$ tem-se que $\wp(A) = \{\emptyset\}$.

Além do conjunto das partes, os conjuntos gerados pela ideia da partição de um conjunto é de extrema importância em diversos segmentos do conhecimento, como comentado anteriormente, a seguir é apresentado formalmente a ideia de partições.

Definição 14 (Partição) Seja A um conjunto não vazio, uma partição é um conjunto não vazio de subconjuntos disjuntos de A , ou seja, uma partição é da forma $\{x_i \mid x_i \subseteq A\}$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

- (1) Para todo $y \in A$ tem-se que existe um único i tal que $y \in x_i$ para algum $x_i \subseteq A$.
- (2) Para todo i e todo j sempre que $i \neq j$, então $x_i \cap x_j = \emptyset$.

É fácil notar pela Definição 14 que partições são conjuntos, além disso, como dito em [28] os elementos em uma partição são chamados de **células**, isto é, dado um conjunto A os subconjuntos na partição de A são vistos como as células que formam o próprio conjunto A . O resultado a seguir garante que sempre é possível obter pelo menos uma partição de um conjunto.

Teorema 16 Se A é um conjunto não vazio, então existe pelo menos uma partição de A .

Prova | Suponha que o conjunto A seja não vazio, assim defina o conjunto $PT_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$, agora claramente tem-se que PT_A satisfaz todas as condições da Definição 14 e, portanto, PT_A é uma partição do conjunto A . \square



Atenção

Apesar de não ter um nome específico a partição descrita no Teorema 16, é muito importante como ponto de partida para a construção de partições mais complexas, por esse fato neste documento será chamada de **partição trivial**.

1.5 Conjuntos Numéricos e Palavras Reservadas

Como este documento irá utilizar a linguagem da teoria ingênua de conjunto como sendo linguagem básica padrão para o desenvolvimento inicial aqui proposto, é conveniente apresentar ao leitor as palavras reservadas para representar os conjuntos numéricos em tal teoria, a seguir são listas as palavras reservadas básicas.

- (a) \mathbb{N} , representa o conjunto dos números naturais⁷.
- (b) \mathbb{Z} , representa o conjunto dos números inteiro.
- (c) \mathbb{Q} , representa o conjunto dos números racionais.
- (d) \mathbb{I} , representa o conjunto dos números irracionais.
- (e) \mathbb{R} , representa o conjunto dos números reais.
- (f) \mathbb{C} , representa o conjunto dos números Complexos.

Além destes conjuntos básicos, alguns subconjuntos deles também merecem destaque, e por isso tem palavras reservadas para eles.

⁷ Lembre-se que aqui neste documento 0 é obrigatoriamente um número natural

- (a) \mathbb{Z}^* , representa o conjuntos números inteiros sem o zero, ou seja, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.
- (b) \mathbb{Q}^* , representa o conjuntos números racionais sem o zero.
- (c) \mathbb{R}^* , representa o conjuntos números reais sem o zero.
- (d) \mathbb{Z}_- e \mathbb{Z}_+ , representam respectivamente o conjuntos números inteiros menores e maiores que o zero, ou seja, $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$ e $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.
- (e) $\mathbb{Q}_-, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, tem significado similar ao item anterior, alterando apenas do conjunto dos inteiros para os racionais e reais respectivamente.

Agora como dito em [9], os símbolos podem ser combinados para representar conjuntos ainda mais específicos, por exemplo, o conjuntos do números reais positivos não nulos, isto é, o conjunto de todos os reais positivos maiores que 0, é representado por \mathbb{R}_+^* , que nada mais é, do que uma combinação dos símbolos \mathbb{R}^* e \mathbb{R}_+ .

1.6 Questionário

Incluir em algum momento futuro. . .

Relações

“A matemática preocupa-se apenas com a enumeração e comparação de relações”.

Carl Friedrich Gauss

2.1 Sobre Relações

A ideia de relação é um conceito frequentemente utilizado, seja no cotidiano das pessoas, seja na matemática [5]. Uma subárea da matemática de extrema importância para a Ciência da Computação, especificamente na área de banco de dados, é a álgebra relacional, que de forma resumida é o estudo das relações entre objetos de um mesmo espaço (conjunto).

Como comentado em [13], no cotidiano do mundo “real” existem diversos tipos de relacionamentos entre as entidades, por exemplo, imagine que duas pessoas, um homem jovem e um(a) garotinho(a) compartilham um ancestral comum, tal como um avô, assim pode-se dizer que os dois apresentam uma relação de parentesco, ou ainda que existe uma relação familiar entre os dois.

No que diz respeito ao universo matemático, a noção de relação entre os objetos é algo onipresente em todos os campos da matemática. Um exemplo clássico de relacionamento que se pode estabelecer entre dois números, x e y , é a ideia de dobro, isto é, x e y apresentam um relacionamento de dobro entre si no caso de $y = 2x$ ou $x = 2y$.

Note que de forma subliminar os exemplos anteriores caracterizam as relações de parentesco e dobro através da associação de elementos que juntos apresentavam uma certa propriedade, e nesse sentido uma relação nada mais é do que um conjunto definido sobre uma certa propriedade entre elementos de um espaço. A formalização das relações como sendo um conjunto será construída nas próximas seções.

2.2 Pares Ordenados e Produto Cartesiano

Da mesma forma que em [1], neste documento será considerada a definição apresentada a seguir de par ordenado, sendo que tal definição foi apresentada pela primeira vez pelo grande matemático e lógico polonês Kazimierz Kuratowski (1896–1980).

Definição 15

(Par Ordenado) Sejam x e y elementos em um universo do discurso. O par ordenado entre x e y , denotado por (x, y) , corresponde a seguinte igualdade:

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$$

Dado qualquer par ordenado (x, y) o elemento x é chamado de primeira componente do par ordenado, e o y é chamado de segunda componente do par ordenado. Além disso, como explicado em [27, 28], dois pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) serão ditos iguais, se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Por fim, note que, (x, y) consiste em um conjunto heterogêneo na forma $\{x, \{x, y\}\}$, enquanto, $\{x, y\}$ é outro conjunto, e claramente $\{x, \{x, y\}\} \neq \{x, y\}$.

De posse do conceito de par ordenado é possível definir uma nova operação entre conjuntos, tal operação recebe o nome de produto Cartesiano¹ e será de vital importância para em seguida apresentar as ideias ligadas ao conceito de relações.

¹ O nome produto Cartesiano vem do matemática francês René Descartes (1596–1650).

Definição 16

(Produto Cartesiano) Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, o produto Cartesiano entre A e B , denotado por $A \times B$, corresponde ao conjunto de todos os pares ordenados em que a primeira componente é um elemento de A e a segunda componente é um elemento de B , ou seja, tem-se que:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Exemplo 27

Dado os seguintes dois conjuntos $\{a, b, c\}$ e $\{-1, 1\}$ tem-se os seguintes produtos Cartesianos.

(a) $\{a, b, c\} \times \{-1, 1\} = \{(a, 1), (a, -1), (b, -1), (b, 1), (c, -1), (c, 1)\}$.

(b) $\{-1, 1\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (-1, a), (-1, b), (-1, c)\}$.

(c) $\{a, b, c\} \times \{a, b\} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\}$.

(d) $\{-1, 1\} \times \{1, -1\} = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$

Uma classe de casos particulares da aplicação do produto Cartesiano e a classe dos Cartesianos chamados de quadrados, no que se segue este documento apresenta formalmente a seguir o conceito de Cartesiano quadrado.

Definição 17

(Cartesiano quadrado) Seja A um conjunto qualquer. O produto Cartesiano quadrado de A , denotado por A^2 , corresponde ao produto Cartesiano de A consigo mesmo, ou seja, tem-se que:

$$A^2 = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$$



Atenção

É bom ter em mente que A^2 é apenas uma forma simplificada ou doce (um açúcar sintático^a) para escrever $A \times A$.

^aO conceito de açúcar sintático (em inglês *syntactic sugar*), é uma expressão criada em 1964 por Peter J. Landin (1930–2009) em seus seminais trabalhos [20, 21, 22]. De forma direta um açúcar sintático diz respeito a uma sintaxe dentro da linguagem formal que tem por finalidade tornar suas construções mais fáceis de serem lidas e expressas, ou seja, um açúcar sintático é uma ferramenta para tornar o uso da linguagem mais doce (ou amigável) para o uso dos seres humanos.

Exemplo 28

Os itens (c) e (d) do Exemplo 27 são produtos Cartesianos quadrados.

Teorema 17

(Produto Cartesiano - absorção) Dado dois conjuntos A e B tem-se que, $A \times B = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Prova

(\Rightarrow) Por contrapositiva assumamos que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, assim tem-se que existem $x \in A$ e $y \in B$, consequentemente, pela definição de produto cartesiano existe $(x, y) \in A \times B$, assim tem-se que, $A \times B \neq \emptyset$, e portanto, a afirmação: Se $A \times B = \emptyset$, então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ é verdadeira.

(\Leftarrow) Suponha que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, assim tem-se claramente por vacuidade que $A \times B = \emptyset$. \square

Teorema 18 (Produto Cartesiano - igualdade) Dado dois conjuntos A e B tem-se que, $A \times B = B \times A$ se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ou $A = B$.

Prova | A prova desta asserção ficará como exercício ao leitor. \square

O produto Cartesiano enquanto operação tem a propriedade de preservar a relação de inclusão à direita e à esquerda como pode ser visto a seguir.

Teorema 19 (Produto Cartesiano - monotonicidade à direita) Dado três conjuntos A, B e C tem-se que, $A \subset B$ se, e somente se, $A \times C \subset B \times C$.

Prova | (\Rightarrow) Suponha que $A \subset B$, logo por definição tem-se que todo $x \in A$ é tal que $x \in B$, e assim é óbvio que para todo $(x, y) \in A \times C$ tem-se que $(x, y) \in B \times C$, e portanto, pela definição de subconjunto tem-se que $A \times C \subseteq B \times C$, mas por hipótese tem-se que existe $x' \in B$ tal que $x' \notin A$, logo existe $(x', y) \in B \times C$ tal que $(x', y) \notin A \times C$, consequentemente, $A \times C \subset B \times C$.
 (\Leftarrow) Assuma que $A \times C \subset B \times C$, logo tem-se que para todo $(x, y) \in A \times C$ tem-se que $(x, y) \in B \times C$, mas note que por definição $(x, y) \in A \times C$ se, e somente se, $x \in A$ e de forma similar tem-se que $(x, y) \in B \times C$ se, e somente se, $x \in B$, dessa forma tem-se que $A \subset B$, além disso, por hipótese existe um $(x', y) \in B \times C$ tal que $(x', y) \notin A \times C$, portanto, é claro que existe $x' \in B$ tal que $x' \notin A$, consequentemente, $A \subset B$. \square

Teorema 20 (Produto Cartesiano - monotonicidade à esquerda) Dado três conjuntos A, B e C tem-se que, $A \subset B$ se, e somente se, $C \times A \subset C \times B$.

Prova | Similar a demonstração do Teorema 19. \square

O próximo resultado mostra que a operação de produto Cartesiano se distribui sobre as operações de união, interseção e diferença.

Teorema 21 (Leis de Distributividade do Cartesiano) Dado três conjuntos A, B e C tem-se que:

- (i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
- (ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
- (iii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
- (iv) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
- (v) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
- (vi) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.
- (vii) $A \times (B \ominus C) = (A \times B) \ominus (A \times C)$.
- (viii) $(A \ominus B) \times C = (A \times C) \ominus (B \times C)$.

Prova | Sejam A, B e C conjuntos tem-se que:

(i)

$$\begin{aligned}
 A \times (B \cap C) &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in (B \cap C)\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y \in C\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A, x \in A, y \in B, y \in C\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \in A, y \in C\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \cap \{(x, y) \mid x \in A, y \in C\} \\
 &= (A \times B) \cap (A \times C)
 \end{aligned}$$

(ii) Similar ao item anterior.

(iii)

$$\begin{aligned}
 A \times (B \cup C) &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in (B \cup C)\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in (A \cup A), y \in (B \cup C)\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A \text{ ou } x \in A, y \in B \text{ ou } y \in C\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ ou } x \in A, y \in C\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \cup \{(x, y) \mid x \in A, y \in C\} \\
 &= (A \times B) \cup (A \times C)
 \end{aligned}$$

(iv) Similar ao item anterior.

(v)

$$\begin{aligned}
 A \times (B - C) &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in (B - C)\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A \cap A, y \in (B - C)\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A, x \in A, y \in B, y \notin C\} \\
 &= \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B, (x, y) \notin (A \times C)\} \\
 &= (A \times B) - (A \times C)
 \end{aligned}$$

(vi) Similar ao item anterior.

(vii)

$$\begin{aligned}
 A \times (B \ominus C) &\stackrel{\text{Cor. 1}}{=} A \times ((B \cup C) - (B \cap C)) \\
 &\stackrel{\text{Teo. 21(v)}}{=} (A \times (B \cup C)) - (A \times (B \cap C)) \\
 &\stackrel{\text{Teo. 21(iii)}}{=} ((A \times B) \cup (A \times C)) - (A \times (B \cap C)) \\
 &\stackrel{\text{Teo. 21(i)}}{=} ((A \times B) \cup (A \times C)) - ((A \times B) \cap (A \times C)) \\
 &\stackrel{\text{Cor. 1}}{=} (A \times B) \ominus (A \times C)
 \end{aligned}$$

(viii) Similar ao item anterior.

□

O conceito do produto Cartesiano pode, como explicado em [27, 28], ser estendido a poder operar com mais de dois conjuntos, sendo essa extensão realizada de forma natural apenas aumentando um número de componentes nos elementos do conjunto resultante ao conjunto do produto, ou seja, os elementos deixam de ser simples pares ordenados para serem tuplas ordenadas. A seguir este conceito é formalizado.

Definição 18

(Produto Cartesiano n -ário) Dado $n \geq 2$ e sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos quaisquer, o produto Cartesiano n -ário, denotado por $A_1 \times \dots \times A_n$, corresponde ao conjunto formado por todas as tuplas da forma (a_1, \dots, a_n) tal que para todo $1 \leq i \leq n$ tem-se que $a_i \in A_i$.

Em um produto Cartesiano n -ário da forma $A_1 \times \dots \times A_n$ cada A_i com $1 \leq i \leq n$ é chamado de i -ésimo fator do produto. Outra forma comum de denotar o produto Cartesiano n -ário muito encontrada na literatura é usando o símbolo do produtório, ou seja, $\prod_{i=1}^n A_i$, ou ainda na forma açucarada, A^n .

Exemplo 29 | Dado os conjuntos $\{-1, 1\}$, $\{a, b\}$ e $\{0, 1\}$ tem-se os seguintes produtos Cartesianos

n -ários:

$$\{-1, 1\} \times \{a, b\} \times \{0, 1\} = \{(-1, a, 0), (-1, a, 1), (-1, b, 0), (-1, b, 1), (1, a, 0), (1, a, 1), (1, b, 0), (1, b, 1)\}$$

$$\begin{aligned} \{-1, 1\} \times \{-1, 1\} \times \{a, b\} \times \{a, b\} = & \{(-1, 1, a, a), (-1, 1, a, b), \\ & (-1, 1, b, a), (-1, 1, b, b), \\ & (-1, -1, a, a), (-1, -1, a, b), \\ & (-1, -1, b, a), (-1, -1, b, b), \\ & (1, -1, a, a), (1, -1, a, b), \\ & (1, -1, b, a), (1, -1, b, b), \\ & (1, 1, a, a), (1, 1, a, b), \\ & (1, 1, b, a), (1, 1, b, b)\} \end{aligned}$$

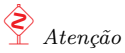
Exemplo 30 Dado o conjunto $\{0, 1\}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \{0, 1\}^5 = & \{(0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 0), \\ & (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1), \\ & (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 0), \\ & (1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 0), \\ & (1, 0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 0), \\ & (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), \\ & (1, 0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Exemplo 31 São produtos Cartesianos n -ários:

- (a) $\{a, b, c\}^2 = \{(a, a), (c, b), (a, c), (a, b), (c, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a)\}$.
- (b) $\{0, 1\}^2 = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 0)\}$.
- (c) $\{1\}^9 = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$.
- (d) $\{a, (1, 2)\}^2 = \{(a, a), (a, (1, 2)), ((1, 2), a), ((1, 2), (1, 2))\}$.
- (e) $\{a, b\} \times \{0\}^2 = \{(a, (0, 0)), (b, (0, 0))\}$.
- (f) $\{1\}^2 \times \{1\} = \{((1, 1), 1)\}$.

Quando os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n são todos conjuntos finitos, uma estratégia muito utilizada para se obter e também representar o mecanismo de construção das tuplas (a_1, a_2, \dots, a_n) pertencentes ao produto Cartesiano n -ário $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ é usando a noção de diagrama de árvore [27, 28].



De forma contrária ao que acontecer nos diagramas de árvores na área de estrutura de dados [38], linguagens formais [6, 19, 24] e compiladores [2, 11], os diagramas de árvore na teoria dos conjuntos são construídos de forma horizontal no sentido da esquerda para à direita.

Em um diagrama de árvore o número de níveis na árvore é igual ao número de conjuntos envolvidos no Cartesiano mais 2, ou seja, para cada produto Cartesiano n -ário, o número de níveis na árvore que gera/representa tal cartesiano é igual a $n + 2$.

Dado então os conjuntos no Cartesiano $A_1 \times \dots \times A_n$, o diagrama é construindo por níveis da seguinte forma:

1. O nível inicial da árvore (nível 0) é colocado o símbolo de início da árvore (neste documento será usado o $*$ como símbolo inicial).
2. Para todo $1 \leq i \leq n$, cada nível i do diagrama vai ser preenchido pelos elementos

do conjunto A_i ¹.

3. Por fim, no último nível da árvore (ou nível EPC) estão os elementos do produto Cartesiano em si.

Exemplo 32 Dado os conjuntos $\{-1, 1\}$, $\{a, b\}$ e $\{-1, 1\}$ tem-se que o produto Cartesiano $\{-1, 1\} \times \{a, b\} \times \{-1, 1\}$ pode ser representado pelo diagrama esboçado na Figura 2.1.

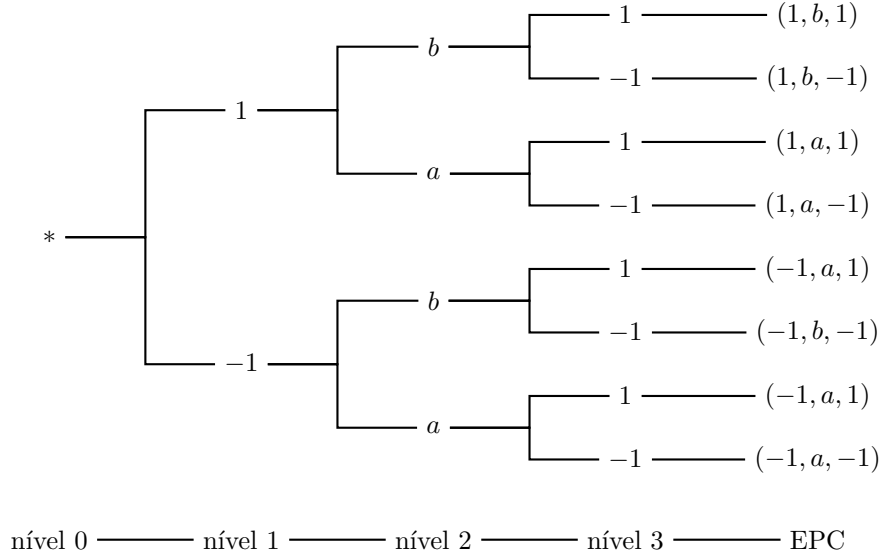


Figura 2.1: Diagrama de árvore para o Cartesiano $\{-1, 1\} \times \{a, b\} \times \{1, -1\}$.

Apesar de ser uma ótima forma prática de representar e visualizar o produto Cartesiano, os diagramas de árvores tendem a não ser adotados com frequência pois seu crescimento se dá em proporções fatoriais, o que torna sua construção facilmente complexa.

2.3 Relações

Da mesma forma que foi apresentado em [1], este documento irá nesta seção tratar do conceito de relações binária e suas propriedades. O conceito de relações n -ária muito importante na matemática e na teoria de banco de dados não será estudado neste documento.

Definição 19 (Relação binária) Seja A e B dois conjuntos, uma relação R de A em B é qualquer subconjunto de $A \times B$, isto é, $R \subseteq (A \times B)$.



Atenção

(Açúcar sintático.) Dado R uma relação binária de A em B a sintaxe da teoria dos conjuntos e de pares ordenados permite que seja escrito que $(x, y) \in R$, entretanto, está escrita é geralmente substituída por $x R y$. E no caso de $(x, y) \notin R$ é escrito simplesmente $x \not R y$.

A semântica das palavras $x R y$ e $x \not R y$ podem ser interpretadas respectivamente como: “ x está R -relacionado (está relacionado por R) com y ” e “ x não está R -relacionado (não está relacionado por R) com y ”. Em algumas obras como [9], é possível ver a sintaxe $x \underline{R} y$ para designar que $(x, y) \in R$, neste documento o autor irá optar sempre que possível pelo açúcar sintática descrito na Nota 8, e quando não for

¹Como cada A_i é finito, cada $x \in A_i$ será repetido exatamente 2^{i-1} no nível i .

possível (ou conveniente) será usado a sintaxe padrão da teoria dos conjuntos e dos pares ordenados.

Definição 20

(Domínio e Imagem) Seja R uma relação de A em B , o domínio de R , denotado por $\text{dom}(R)$, corresponde ao conjunto de todos os elementos de A que são a primeira coordenada de $x R y$, ou seja,

$$\text{dom}(R) = \{x \in A \mid x R y\}$$

e a imagem de R , denotada por $\text{Ima}(R)$, corresponde ao conjunto de todos os elementos de B que são a segunda coordenada de $x R y$, ou seja,

$$\text{Ima}(R) = \{y \in B \mid x R y\}$$

Exemplo 33 | Seja $R = \{(a, 1), (b, -1), (c, 1), (b, 1), (c, -1)\}$ uma relação tem-se que $\text{dom}(R) = \{a, b, c\}$ e $\text{Ima}(R) = \{1, -1\}$.

Exemplo 34 | Dado a relação $Q = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 = y\}$ tem-se que $\text{dom}(Q) = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N})[\sqrt{y} = x]\}$ e $\text{Ima}(Q) = \{y \in \mathbb{N} \mid (\exists x \in \mathbb{N})[x^2 = y]\}$

Exemplo 35 | Uma relação binária R famosa é aquela usada para representar o conjunto das frações positivas, tal relação é definida como $F = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in (\mathbb{N} - \{0\})\}$, note que a fração $\frac{1}{12}$ por exemplo corresponde ao elemento $1 F 12$.

Dada qualquer relação R sempre é possível obter uma nova relação a partir de R , essa nova relação recebe o nome de relação inversa ou oposta.

Definição 21

(Relação inversa) Seja R uma relação. A relação inversa (ou oposta) de R , denotada por R^{-1} , corresponde ao seguinte conjunto:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid x R y\}$$

Exemplo 36 | Considere a relação R do Exemplo 33, tem-se que a relação inversa de R corresponde ao conjunto $R^{-1} = \{(1, a), (-1, b), (1, c), (-1, c), (1, b)\}$.

Exemplo 37 | Dado a relação $P = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b^2\}$ tem-se a inversa de P é exatamente a relação $R = \{(b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b = \sqrt{a}\}$, isto é, $R = P^{-1}$.

Um fato básico para qualquer relação R é que $(R^{-1})^{-1} = R$. Em outras palavras, tal igualdade descreve que a reversa de uma relação, vista como uma operação é sempre involutiva, assim como a negação e o complemento.

Lema 1

Se $R \subseteq A \times B$, então $R^{-1} \subseteq B \times A$.

Prova

Suponha que $R \subseteq A \times B$, logo todo $(x, y) \in A$ é tal que $(y, x) \in R^{-1}$, mas de $R \subseteq A \times B$ tem-se que $(x, y) \in A \times B$, consequentemente, por definição $x \in A$ e $y \in B$ e, portanto, $(y, x) \in B \times A$, consequentemente, $R^{-1} \subseteq B \times A$. \square

O leitor atento pode notar que o resultado do Lema 1 pode ser estendido para relacionar diretamente duas relações, e isso é feito como se segue.

Teorema 22

Se R e S são relações tais que $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

Prova

Similar ao raciocínio da demonstração do Lema 1. \square

Uma vez que relações são conjuntos pode-se falar sobre as operações sobre relações, aqui não serão tratadas as operações triviais de união, interseção, complemento e diferença. Para essas operações é recomendável que o leitor retorne para revisar o

texto apresentado na Seção 1.3 que trata exatamente de tais operações.

Uma operação natural que surge para as relações é a noção de composição entre duas relações R_1 e R_2 , a ideia da composição é gerar uma terceira relação a partir das relações iniciais. A seguir este documento apresenta formalmente o conceito de composição.

Definição 22 (Composição de relações) Seja R_1 uma relação de A em B e seja R_2 uma relação de B em C , a composição de R_1 e R_2 , denotada por $R_1 \bullet R_2$, corresponde ao seguinte conjunto:

$$R_1 \bullet R_2 = \{(x, z) \mid (\exists y \in B)[x R_1 y \text{ e } y R_2 z]\}$$

Lema 2 Seja R_1 uma relação de A em B e seja R_2 uma relação de B em C , então tem-se que:

- (i) $Dom(R_1 \bullet R_2) \subseteq Dom(R_1)$.
- (ii) $Ima(R_1 \bullet R_2) \subseteq Ima(R_2)$.

Prova Trivial pela própria Definição 22. □

Exemplo 38 | Sejam $R = A \times B$ e $Q = B \times C$ tem-se que $R \bullet Q = A \times C$.

Exemplo 39 | Dado a relação $R_1 = \{(a, b), (i, b), (o, c), (o, e)\}$ e outra relação $R_2 = \{(b, 1), (b, -1), (c, 3), (d, 4)\}$ tem-se então que a composição de R_1 e R_2 é exatamente igual a relação $R = \{(a, 1), (a, -1), (i, 1), (i, -1), (o, 3)\}$.

Teorema 23 (Monotonicidade da Composição de Relações) Seja R_1 e R_2 relações de A em B . Se $R_1 \subseteq R_2$, então para toda relação R_3 de B em C tem-se que $(R_1 \bullet R_3) \subseteq (R_2 \bullet R_3)$.

Prova Suponha que R_1 e R_2 são ambas relações de A em B e que $R_1 \subseteq R_2$, agora note que para qualquer relação R_3 de B em C tem-se por definição que $(x, z) \in (R_1 \bullet R_3)$ se, e somente se, $(\exists y \in B)[x R_1 y \text{ e } y R_3 z]$, mas uma vez que, $R_1 \subseteq R_2$ é claro que $(\exists y \in B)[x R_2 y \text{ e } y R_3 z]$, e assim $(x, z) \in (R_2 \bullet R_3)$, portanto, $(R_1 \bullet R_3) \subseteq (R_2 \bullet R_3)$, concluindo assim a prova. □

Corolário 2 Se R_1, R_2, S_1, S_2 são relações tais que $R_1 \subseteq R_2$ e $S_1 \subseteq S_2$, então $(R_1 \bullet S_1) \subseteq (R_2 \bullet S_2)$.

Prova Suponha que R_1, R_2, S_1, S_2 são relações tais que $R_1 \subseteq R_2$ e $S_1 \subseteq S_2$, assim pelo Teorema 23 tem-se que $(R_1 \bullet S_1) \subseteq (R_2 \bullet S_1)$. Agora note que por definição $(x, z) \in (R_2 \bullet S_1)$ se, e somente se, $(\exists y \in Dom(S_1))[x R_2 y \text{ e } y S_1 z]$, mas uma vez que $S_1 \subseteq S_2$ tem-se que $Dom(S_1) \subseteq Dom(S_2)$ e $Ima(S_1) \subseteq Ima(S_2)$ e assim é claro que $(\exists y \in Dom(S_2))[x R_2 y \text{ e } y S_2 z]$, logo $(x, z) \in (R_2 \bullet S_2)$, consequentemente pela definição de subconjunto tem-se que $(R_2 \bullet S_1) \subseteq (R_2 \bullet S_2)$. E portanto, $(R_1 \bullet S_1) \subseteq (R_2 \bullet S_2)$. □

Os próximos resultados estabelecem propriedades algébricas importantes para a operação de composição de relações.

Teorema 24 Seja R_1 uma relação de A em B e seja R_2 uma relação de B em C tem-se que $(R_1 \bullet R_2)^{-1} = R_2^{-1} \bullet R_1^{-1}$.

Prova Dado R_1 uma relação de A em B e seja R_2 uma relação de B em C logo,

$$\begin{aligned}
 (x, z) \in (R_1 \bullet R_2)^{-1} &\iff (z, x) \in (R_1 \bullet R_2) \\
 &\stackrel{Def. 22}{\iff} (\exists y \in B)[(z, y) \in R_1 \text{ e } (y, x) \in R_2] \\
 &\iff (\exists y \in B)[(y, z) \in R_1^{-1} \text{ e } (x, y) \in R_2^{-1}] \\
 &\iff (\exists y \in B)[(x, y) \in R_2^{-1} \text{ e } (y, z) \in R_1^{-1}] \\
 &\iff (x, z) \in R_2^{-1} \bullet R_1^{-1}
 \end{aligned}$$

e assim pela Definição 6 tem-se que $(R_1 \bullet R_2)^{-1} = R_2^{-1} \bullet R_1^{-1}$ o que completa a prova. \square

Teorema 25 Seja R_1 uma relação de A em B e seja R_2 uma relação de B em C e R_3 uma relação de C em D tem-se que $(R_1 \bullet R_2) \bullet R_3 = R_1 \bullet (R_2 \bullet R_3)$.

Prova Dado três relações R_1 de A em B , R_2 de B em C e R_3 de C em D tem-se por definição que, $(x, z) \in (R_1 \bullet R_2) \bullet R_3$ se, e somente se, existe $w \in C$ tal que $(x, w) \in (R_1 \bullet R_2)$ e $(w, z) \in R_3$, mas isso só é possível se, e somente se, $\exists y \in B$ tal que $(x, y) \in R_1$ e $(y, w) \in R_2$. Mas assim pela Definição 22 tem-se que $(y, z) \in R_2 \bullet R_3$, o que irá implicar que $(x, z) \in R_1 \bullet (R_2 \bullet R_3)$ e, portanto, tem-se que $(x, z) \in (R_1 \bullet R_2) \bullet R_3 \iff (x, z) \in R_1 \bullet (R_2 \bullet R_3)$, logo pela Definição 6 tem-se que $(R_1 \bullet R_2) \bullet R_3 = R_1 \bullet (R_2 \bullet R_3)$. \square

Teorema 26 Dado duas relações R_1 e R_2 e A, B e C conjuntos. Se $R_1 \subset A \times B$ e $R_2 \subset B \times C$, então $R_1 \bullet R_2 \subset A \times C$.

Prova Suponha que $R_1 \subset A \times B$ e $R_2 \subset B \times C$ logo tem-se que se $(x, y) \in R_1 \bullet R_2$ logo por definição existe $z \in B$ tal que $(x, z) \in R_1$ e $(z, y) \in R_2$, mas assim é claro que $(x, z) \in A \times B$ e $(z, y) \in B \times C$ e, portanto, $(x, y) \in A \times C$. Consequentemente, $R_1 \bullet R_2 \subset A \times C$. \square

Teorema 27 Seja A, B e C conjuntos. Então tem-se que:

- (1) Se $A \cap B \neq \emptyset$, então $(A \times B) \bullet (A \times B) = A \times B$.
- (2) Se $A \cap B = \emptyset$, então $(A \times B) \bullet (A \times B) = \emptyset$.
- (3) Se $B \neq \emptyset$, então $(B \times C) \bullet (A \times B) = A \times C$.

Prova Aqui será demonstrado só o fato (1) ficando o (2) e (3) como exercício ao leitor. Dado A, B e C conjuntos, assumamos que $A \cap B \neq \emptyset$, agora note que para todo $(x, y) \in (A \times B) \bullet (A \times B)$ tem-se que pelo fato de A e B não serem disjuntos sempre existe um $z \in A \cap B$ tal que $(x, z) \in (A \times B)$ e $(z, y) \in (A \times B)$, portanto, $(x, y) \in A \times B$, logo pela Definição 6 tem-se que $(A \times B) \bullet (A \times B) = A \times B$. \square

Teorema 28 Dado duas relações R_1 e R_2 tem-se que:

- (1) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.
- (2) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

Prova Sejam R_1 e R_2 duas relações logo,

(1) Tem-se trivialmente que,

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} &\iff (y, x) \in (R_1 \cup R_2) \\
 &\iff (y, x) \in R_1 \text{ ou } (y, x) \in R_2 \\
 &\iff (x, y) \in R_1^{-1} \text{ ou } (x, y) \in R_2^{-1} \\
 &\iff (x, y) \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}
 \end{aligned}$$

logo pela Definição 6 tem-se que $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.

(2) A demonstração é similar ao item anterior.

□

2.4 Tipos ou Propriedades das Relações Binárias

Deste ponto em diante todas as relações consideradas até o final deste capítulo serão relações binárias sobre um conjunto não vazio A genérico, ou seja, tem-se que se R for uma relação, então $R \subseteq A \times A$. Dito isto, agora serão apresentados os “tipos”, ou na visão de [1], as propriedades que as relações binárias sobre um conjunto podem ser possuir.

Definição 23 (Tipo Identidade) Uma relação R é dita ser uma relação de identidade (ou relação idêntica [1]) sempre que R é igual ao conjunto $\{(x, x) \mid x \in A\}$.

Exemplo 40 | Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a relação $M = \{(3, 3), (1, 1), (2, 2), (4, 4)\}$ é uma relação de identidade, já a relação $Q = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4)\}$ não é uma relações de identidade.

Exemplo 41 | Dado o conjunto \mathbb{N} , a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x - y = 0\}$ é uma relação de identidade, já a relação $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x - y > 0\}$ não é uma relação de identidade pois $(5, 4) \in S$.

Dado que a relação de identidade possui exatamente todos os pares da forma (x, x) , é comum chamar esta relação de identidade do conjunto A , ou simplesmente identidade de A , que costuma também ser denotado por Id_A .

Teorema 29 (Neutralidade da relação de identidade) Se R é uma relação sobre A , então as seguintes igualdade são verdadeiras:

- (i) $R \bullet Id_A = R$.
- (ii) $Id_A \bullet R = R$.

Prova | (i) Suponha que R é uma relação sobre A , assim tem-se que:

$$\begin{aligned} (x, y) \in R \bullet Id_A &\iff (\exists y \in A)[x R y \text{ e } y Id_A y] \\ &\iff (x, y) \in R \end{aligned}$$

Portanto, $R \bullet Id_A = R$. (ii) Similar a demonstração do item anterior.

□

Lema 3 Se A é um conjunto não vazio, então $Id_A^{-1} = Id_A$.

Prova | Trivial pelas Definições 21 e 23.

□

Definição 24 (Tipo Reflexivo) Uma relação R é dita ser reflexiva quando para todo $x \in A$ tem-se que $x R x$.

Um leitor atento pode perceber que a relação identidade de um conjunto é sempre reflexiva, porém, o oposto não é verdadeiro como exposto no exemplo a seguir.

Exemplo 42 | Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$ tem-se que:

- (a) $K = \{(a, a), (b, c), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$ é uma relação reflexiva, mas não é a identidade do conjunto A .
- (a) $M = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ é uma relação reflexiva e é também a relação identidade do conjunto A .

Como dito em [1], uma relação R não será reflexiva quando existir pelo menos um $x \in A$ tal que $x \not R x$.

Exemplo 43 | Dado o conjunto $L = \{0, 0.5, 1\}$ tem-se que o conjunto Q formado pelos elementos $(0, 0), (0, 0.5)$ e $(1, 1)$ não é uma relação reflexiva, pois $0.5 \not R 0.5$, ou seja, $(0.5, 0.5) \notin Q$.

O próximo resultado estabelece uma caracterização para as relações serem reflexivas, isto é, tal resultado apresenta as condições suficientes e necessárias para que uma relação seja reflexiva.

Teorema 30 (Caracterização das Relações Reflexivas) Uma relação R é reflexiva se, e somente se, $Id_A \subset R$.

Prova | (\Rightarrow) Suponha que R seja reflexiva, logo por definição para todo $x \in A$ tem-se que $x R x$, e portanto, pela Definição 23 é claro que $Id_A \subset R$.
 (\Leftarrow) Assuma que $Id_A \subset R$, agora uma vez que para todo $x \in A$ tem-se que $(x, x) \in Id_A$, pela Definição 5 segue que $(x, x) \in R$, isto é, tem-se que $x R x$, e portanto, R é reflexiva. \square

Corolário 3 Uma relação R é reflexiva se, e somente se, R^{-1} é reflexiva.

Prova | A demonstração é simples e fica como exercício ao leitor. \square

Teorema 31 (Fecho Algébrico das Relações Reflexivas) Se R_1 e R_2 são relações reflexivas sobre o mesmo conjunto, então $R_1 \cup R_2$ e $R_1 \cap R_2$ são também relações reflexivas.

Prova | Assuma que R_1 e R_2 são relações reflexivas sobre um conjunto A , assim pelo Teorema 30 tem-se que $Id_A \subset R_1$ e $Id_A \subset R_2$, agora pelo Teorema 3 tem-se a seguinte relação de inclusão:

$$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$$

logo, tem-se que $Id_A \subset R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, consequentemente pelo Teorema 3 tem-se que $R_1 \cup R_2$ é uma relação reflexiva. Agora suponha por absurdo que $Id_A \not\subset (R_1 \cap R_2)$, logo existe $(x, x) \in Id_A$ tal que $(x, x) \notin (R_1 \cap R_2)$, consequentemente pela Definição 8 tem-se que $(x, x) \notin R_1$ e $(x, x) \notin R_2$, o que contradiz a hipótese de que R_1 e R_2 sejam relações reflexivas, isto é, contradiz a hipótese de $Id_A \subset R_1$ e $Id_A \subset R_2$, e portanto, $Id_A \subset (R_1 \cap R_2)$, logo pelo Teorema 30 tem-se que $R_1 \cap R_2$ é também uma relação reflexiva. \square

Teorema 32 Seja R_1 uma relação reflexiva sobre um conjunto A e seja R_2 um relação qualquer sobre o conjunto A , tem-se $R_1 \cup R_2$ é uma relação reflexiva.

Prova | A demonstração é trivial e ficará como exercício ao leitor. \square

Teorema 33 Se R é uma relação reflexiva, então $R \bullet R^{-1}$ e $R^{-1} \bullet R$ são também relações reflexivas.

Prova | Assuma que R é uma relação reflexiva sobre um conjunto A , assim pelo Corolário 3 tem-se que R^{-1} é uma relação reflexiva. Assim pelo Teorema 30 tem-se que $Id_A \subseteq R$ e $Id_A \subseteq R^{-1}$, consequentemente, pelo Corolário 2 tem-se que $(Id_A \bullet Id_A) \subseteq (R \bullet R^{-1})$ e $(Id_A \bullet Id_A) \subseteq (R^{-1} \bullet R)$, mas pela neutralidade da relação identidade (Teorema 29) tem-se que $Id_A \bullet Id_A = Id_A$, assim tem-se que $Id_A \subseteq (R \bullet R^{-1})$ e $Id_A \subseteq (R^{-1} \bullet R)$, e portanto, $R \bullet R^{-1}$ e $R^{-1} \bullet R$ são relações reflexivas. \square

Teorema 34 Se R é uma relação reflexiva, então as seguintes afirmações são verdadeiras.

(i) $R \subset R \bullet R$.

(ii) $R \bullet R$ é reflexiva.

Prova | A demonstração é simples e fica como exercício ao leitor. \square

Um terceiro tipo de relações binárias é o tipo irreflexivo, de um certo ponto de vista, tal tipo de relação pode ser visto como sendo o contraponto do tipo reflexivo.

Definição 25 (Tipo Irreflexivo) Uma relação R é dita ser irreflexiva quando para todo $x \in A$ tem-se que $x \not R x$.

Exemplo 44 | Seja P o conjunto de todas as pessoas, e seja R a relação “ser vó”, tem-se que R é irreflexiva pois é claro que ninguém pode ser vó de si próprio, portanto, para todo $x \in P$ tem-se que $x \not R x$.

Exemplo 45 | Seja $\mathbb{N}_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$ tem-se que a relação R definida sobre \mathbb{N}_1 como sendo $x \not R y \iff y = 2x$ é irreflexiva.

Seguindo com a tipagem das relações binárias, a seguir este documento irá apresentar os tipos: simétrico, assimétrico e anti-simétricos.

Definição 26 (Tipo Simétrico) Uma relação R é dita ser simétrica quando para todo $x, y \in A$ se $x R y$, então $y R x$.

Exemplo 46 | Dado o conjunto $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ o conjunto $\{(x, y) \in A^2 \mid x + y \geq 6\}$ é claramente uma relação simétrica sobre A .

Exemplo 47 | Sendo $B = \{1, 2, 3, 4\}$ o conjunto $\{(1, 1), (1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 2), (3, 1)\}$ é claramente uma relação simétrica sobre B .

Pela Definição 26 é fácil notar que uma relação R não será simétrica sempre que existir pelo menos um par (x, y) tal que $x R y$ mas $y \not R x$. O próximo resultado estabelece uma caracterização para as relações simétricas.

Teorema 35 (Caracterização das Relações Simétricas) Uma relação R será simétrica se, e somente se, $R = R^{-1}$.

Prova | (\Rightarrow) Suponha que R é simétrica, logo

$$\begin{aligned} (x, y) \in R & \iff (y, x) \in R \\ & \iff (x, y) \in R^{-1} \end{aligned}$$

portanto, pela Definição 6 tem-se que $R = R^{-1}$. (\Leftarrow) É trivial e fica como exercício ao leitor. \square

Corolário 4 Se R é simétrica, então $R \bullet R^{-1} = R^{-1} \bullet R$.

Prova | Direto do Teorema 35. \square

Agora será mostrado que união e interseção são operações fechadas sobre o conjunto de todas as relações binárias simétricas.

Teorema 36 Se R e S são relações simétricas, então $R \cup S$ e $R \cap S$ também são simétricas.

Prova | Trivial. \square

Teorema 37 Se R é uma relação qualquer, então $R \bullet R^{-1}$ e $R^{-1} \bullet R$ são ambas simétricas.

Prova | Suponha que R é uma relação, assim tem-se que

$$\begin{aligned} (R \bullet R^{-1})^{-1} &\stackrel{Teo.24}{=} (R^{-1})^{-1} \bullet R^{-1} \\ &= R \bullet R^{-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (R^{-1} \bullet R)^{-1} &\stackrel{Teo.24}{=} R^{-1} \bullet (R^{-1})^{-1} \\ &= R^{-1} \bullet R \end{aligned}$$

assim pelo Teorema 35 tem-se que $R \bullet R^{-1}$ e $R^{-1} \bullet R$ são ambas simétricas. \square

Teorema 38 | Se R é uma relação qualquer, então $R \cup R^{-1}$ e $R \cap R^{-1}$ são ambas simétricas.

Prova | Suponha que R é uma relação, assim tem-se que

$$\begin{aligned} (R \cup R^{-1})^{-1} &\stackrel{Teo.28}{=} R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} \\ &= (R^{-1})^{-1} \cup R^{-1} \\ &= R \cup R^{-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (R \cap R^{-1})^{-1} &\stackrel{Teo.28}{=} R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} \\ &= (R^{-1})^{-1} \cap R^{-1} \\ &= R \cap R^{-1} \end{aligned}$$

assim pelo Teorema 35 tem-se que $R \cup R^{-1}$ e $R \cap R^{-1}$ são ambas simétricas. \square

Definição 27 | (Tipo Assimétrico) Uma relação R é dita ser assimétrica quando para todo $x, y \in A$ se $x R y$, então $y \not R x$.

Exemplo 48 | Considere que P é a relação de paternidade definida sobre o conjunto dos seres humanos, isto é, $x P y$ significa que x é pai de y , obviamente esta relação é assimétrica pois dado que um indivíduo x é pai de um certo y é impossível que y seja pai de x , ou seja, sempre que $x R y$ será verdade que $y \not R x$.

Exemplo 49 | A relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \mid x - y \leq 0\}$ é uma relação assimétrica

O leitor deve ficar atento ao fato de que uma relação R será dita não ser assimétrica se existir pelo menos um par (x, y) tal que $x R y$ e também que $x R y$.

Exemplo 50 | Considere $K = \{1, 2, 3, 4\}$ e T a relação binária definida sobre o conjunto K tal que $T = \{(1, 2), (1, 3), (4, 1), (1, 4), (2, 3)\}$. Tem-se claramente que T não é assimétrica pois $4 T 1$ e $1 T 4$.

O resultado exposto a seguir mostra que o tipo assimétrico e o tipo irreflexivo estão intimamente ligados entre si.

Teorema 39 | Se R é uma relação assimétrica sobre A , então R é uma relação irreflexiva sobre A .

Prova | Suponha por absurdo que R é uma relação assimétrica sobre A e R não é irreflexiva sobre A , logo por R não ser irreflexiva existe $x \in A$ tal que $x R x$, mas isso não satisfaz a Definição 27 e, portanto, isso contradiz a hipótese de que R é uma relação assimétrica sobre A , consequentemente se R é assimétrica, então R tem que ser irreflexiva. \square

Definição 28 (Tipo Anti-simétrico) Uma relação R é dita ser anti-simétrica quando para todo $x, y \in A$ se $x R y$ e $y R x$, então $x = y$.

Exemplo 51 Considerando $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 3), (4, 4), (4, 3)\}$ tem-se que R é claramente anti-simétrica.

Exemplo 52 Dado um conjunto A qualquer a relação de subconjunto \subseteq sobre $\wp(A)$ é uma relação que é anti-simétrica, pois para todo $A, B \in \wp(A)$ quando $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ tem-se por definição que $A = B$.

O leitor deve ter notado que uma relação R sobre um conjunto A não será anti-simétrica se existir pelo menos $x, y \in A$ tais que $x R y$ e $y R x$, mas $x \neq y$.

Exemplo 53 Considere que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = (1, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 4)$ obviamente R não é anti-simétrica pois $3 R 2$ e $2 R 3$ mas claramente 2 e 3 são elementos distintos de A .

Teorema 40 (Caracterização das Relações Anti-simétricas) Uma relação R é anti-simétrica sobre A se, e somente se, $R \cap R^{-1} \subset Id_A$.

Prova (\Rightarrow) Suponha por absurdo que R é anti-simétrica sobre A e que $R \cap R^{-1} \not\subset Id_A$, logo existe $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ tal que $(x, y) \notin Id_A$, mas pelo fato de que $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ tem-se que $(x, y) \in R$ e $(x, y) \in R^{-1}$ e assim $(y, x) \in R$ e como R é anti-simétrica tem-se que $x = y$, logo $(x, y) \in Id_A$ o que é um absurdo, portanto, se R é anti-simétrica sobre A , então tem-se que $R \cap R^{-1} \subset Id_A$. (\Leftarrow) Suponha que $R \cap R^{-1} \subset Id_A$, assim seja $x, y \in A$ tal que $x R y$ e $y R x$, ou seja, $(x, y) \in R$ e $(x, y) \in R^{-1}$, logo $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ e assim tem-se que $x = y$ e assim R é anti-simétrica. \square

Corolário 5 Uma relação R é anti-simétrica se, e somente se, R^{-1} for anti-simétrica.

Prova Note que,

$$\begin{aligned}
 R \text{ é uma relação anti-simétrica} & \xLeftrightarrow{\text{Teo.40}} R \cap R^{-1} \subset Id_A \\
 & \xLeftrightarrow{\text{Teo.22}} (R \cap R^{-1})^{-1} \subset Id_A^{-1} \\
 & \xLeftrightarrow{\text{Lema 3}} (R \cap R^{-1})^{-1} \subset Id_A \\
 & \xLeftrightarrow{\text{Teo.28(2)}} R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} \subset Id_A \\
 & \xLeftrightarrow{\text{Teo.40}} R^{-1} \text{ é uma relação anti-simétrica}
 \end{aligned}$$

E isto conclui a prova. \square

Teorema 41 Se R e S são relações anti-simétricas, então $R \cap S$ também é anti-simétrica.

Prova Suponha que R e S são relações anti-simétricas, logo pela Teorema 40 tem-se que $R \cap R^{-1} \subset Id_A$ e $S \cap S^{-1} \subset Id_A$, agora note que,

$$\begin{aligned}
 (R \cap S) \cap (R \cap S)^{-1} & \stackrel{\text{Teo.28(2)}}{=} (R \cap S) \cap (R^{-1} \cap S^{-1}) \\
 & \stackrel{\text{Tab.1.1(p2) e (p3)}}{=} (R \cap R^{-1}) \cap (S \cap S^{-1}) \\
 & \stackrel{\text{Hip.}}{\subset} Id_A \cap Id_A \\
 & = Id_A
 \end{aligned}$$

Portanto, $(R \cap S) \cap (R \cap S)^{-1} \subset Id_A$ e assim pelo Teorema 40 tem-se que $R \cap S$ é anti-simétrica. \square

Continuando a apresentação dos tipos (propriedades) das relações binárias, agora será introduzida o tipo transitivo.

Definição 29 (Tipo Transitivo) Uma relação R é dita ser transitiva quando para todo $x, y, z \in A$ se $x R y$ e $y R z$, então $x R z$.

Exemplo 54 | Dado um conjunto não vazio A a relação \subseteq definida sobre $\wp(A)$ é um clássico exemplo de relação transitiva.

Exemplo 55 | A relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\exists k \in \mathbb{R})[x = ky]\}$ é uma relação transitiva^a.

^aA prova disso ficará como exercício ao leitor.

Exemplo 56 | A relação “ser ancestral de”, definida sobre o conjunto de todos os seres humanos (vivos e mortos) é uma relação transitiva.

Como muito explicado em [1] uma relação não será transitiva sempre que existirem $x, y, z \in A$ tais que $x R y$ e $y R z$ mas $x \not R z$.

Exemplo 57 | Seja $P = \{1, 2, 3, 4\}$ a relação $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 2), (1, 4)\}$ é transitiva, já a relação $R_2 = \{(1, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ não é transitiva pois $(3, 1), (1, 2) \in R_2$ mas $(3, 2) \notin R_2$.

Teorema 42 (Caracterização das Relações Transitivas) Uma relação R é transitiva sobre A se, e somente se, $R \bullet R \subset R$.

Prova | (\Rightarrow) Suponha que R seja transitiva, assim para todo $(x, y), (y, z) \in R$ é tal que $(x, z) \in R$, mas note que $(x, y), (y, z) \in R$ implica que $(x, z) \in R \bullet R$ e, portanto, $R \bullet R \subseteq R$. (\Leftarrow) Assuma que $R \bullet R \subset R$, logo todo $(x, z) \in R \bullet R$ é tal que $(x, z) \in R$, mas note que $(x, z) \in R \bullet R$ implica que existe $y \in A$ tal que $(x, y), (y, z) \in R$ e assim por definição R é transitiva. \square

Corolário 6 Uma relação R é transitiva se, e somente se, R^{-1} é também transitiva.

Prova | Note que,

$$\begin{aligned} R \text{ é uma relação transitiva} &\stackrel{\text{Teo. 42}}{\iff} R \bullet R \subset R \\ &\iff (R \bullet R)^{-1} \subset R^{-1} \\ &\stackrel{\text{Teo. 24}}{\iff} R^{-1} \bullet R^{-1} \subset R^{-1} \\ &\stackrel{\text{Teo. 42}}{\iff} R^{-1} \text{ é uma relação transitiva} \end{aligned}$$

E isto conclui a prova. \square

Teorema 43 Se R é transitiva, então $R \bullet R$ é transitiva.

Prova | Direto do Teorema 42. \square

Por fim será agora apresentado o último tipo das relação binárias, sendo este último tipo a contraparte do tipo transitivo.

Definição 30 (Tipo Intransitivo) Uma relação R é dita ser intransitiva quando para todo $x, y, z \in A$ se $x R y$ e $y R z$, então $x \not R z$.

Exemplo 58 | A relação “ x é mãe de y ” definida sobre o conjunto de todas as pessoas (vivas e mortas) é uma relação intransitiva, pois se “Maria é mãe de Julia” e “Julia é mãe de Rebeca” tem-se que “Maria não pode ser mãe de Rebeca”.

O leitor atento pode notar que uma relação R sobre um conjunto não vazio A qualquer, será dita não ser intransitiva quando existir pelo menos três elementos $x, y, z \in A$ tal que $x R y$ e $y R z$ e $x \not R z$.

2.5 Fecho das Relações Binárias

Dado uma relação R e uma propriedade P não satisfeita por R , pode-se questionar “É possível fazer R satisfazer P ?”, a resposta para essa pergunta é clara, **não**! Pois R , é uma estrutura matemática (uma relação) o que significa que é imutável²! O que se pode fazer neste caso, como explicando em [17], é criar uma nova relação R' que seja o fecho- P de R , ou seja, essa nova relação é como uma cobertura que fecha R com respeito a propriedade P .

A seguir, seguindo a ordem de apresentação vista em [34], este documento irá apresentar de forma direta como é possível fechar as relações com respeito as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade, ou seja, serão definidos os “algoritmos” de fechamento para tais propriedades.

Definição 31 (Fecho de uma relação) Seja R uma relação sobre A e P uma propriedade, a relação \widehat{R} definida sobre A é dita ser o fecho de R com respeito a P sempre que:

1. \widehat{R} possui a propriedade P .
2. $R \subseteq \widehat{R}$.
3. Para toda relação R^* que satisfaça as condições (1) e (2) tem-se que $\widehat{R} \subseteq R^*$.

Para fins de interesse de estudantes de computação e também para fins didáticos neste documento serão estudados os métodos de construção dos fechos para propriedades específicas, a saber, as propriedades de reflexividade, transitividade e simetria.



Atenção

Se R já possui uma certa propriedade P , o fecho de R com respeito a esta propriedade P será exatamente o próprio R . Nesta situação é dito que R é o ponto fixo de R com respeito a P .

Definição 32 Seja R uma relação binária sobre A o fecho reflexivo de R , denotado por $ref(R)$, corresponde a seguinte relação:

$$ref(R) = R \cup Id_A$$

Exemplo 59 Seja $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c)\}$ uma relação sobre A , o fecho reflexivo desta relação é dado por:

$$\begin{aligned} ref(R) &= R \cup Id_A \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c)\} \cup \{(a, a), (b, b), (c, c)\} \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c), (b, b), (c, c)\} \end{aligned}$$

Exemplo 60 Seja $B = \{0, 1\}$ e $K = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ uma relação sobre B , o fecho reflexivo desta relação é dado por:

$$\begin{aligned} ref(K) &= K \cup Id_B \\ &= \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \cup \{(0, 0), (1, 1)\} \\ &= \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\} \end{aligned}$$

Exemplo 61 Dado o conjunto \mathbb{N} e a relação “menor que” definida nos números naturais corresponde ao conjunto,

$$\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists z \in \mathbb{N}_*)[x = y + z]\}$$

e o fecho reflexivo para tal relação é exatamente a relação “menor ou igual que” e corresponde exatamente ao conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists z \in \mathbb{N})[x = y + z]\}$.

Definição 33 Seja R uma relação binária sobre A o fecho simétrico de R , denotado por $\text{sim}(R)$, corresponde a seguinte relação:

$$\text{sim}(R) = R \cup \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Exemplo 62 | Seja $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c)\}$ uma relação sobre A , o fecho reflexivo desta relação é dado por:

$$\begin{aligned} \text{sim}(R) &= R \cup \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c)\} \cup \{(a, a), (b, a), (c, a), (a, c), (c, b)\} \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c), (b, a), (c, b)\} \end{aligned}$$

Exemplo 63 | Se X é o conjunto dos humanos (vivos ou mortos) e M é a relação “pai de”, então $\text{sim}(M) = \{(x, y) \in X^2 \mid x \text{ é pai de } y \text{ ou } y \text{ é filho de } x\}$.

O próximo fecho apresentado é chamado de fecho transitivo, de um ponto de vista de teoria dos grafos, é exibição direta da propriedade de caminho entre dois pontos A e B , sem, entretanto, necessitar informar a existência dos pontos e caminhos intermediários que ligam A e B .

Definição 34 Seja R uma relação binária sobre A o fecho transitivo de R , denotado por R^+ , corresponde a seguinte relação:

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$$

em que, $R^1 = R$ e $R^{i+1} = R \bullet R^i$. Em particular, quando A for um conjunto finito a igualdade acima pode ser reescrita como:

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R_i$$

O fecho transitivo é especialmente importante para diversas áreas que são usualmente de interesse dos cientistas da computação tais como a teoria dos grafos, a lógica e teoria da complexidade. Particularmente o fecho transitivo aparece de forma recorrente nos algoritmos de banco de dados, como dito em [34], pois diversos bancos de dados são construídos desde a década de 70 de forma que seja sempre possível realizar a implementação de fechos transitivos.

Exemplo 64 | Para qualquer conjunto A a relação binária \subseteq definida sobre $\wp(A)$ é um clássico exemplo de relação cujo fecho transitivo é igual a ela mesmo.

Exemplo 65 | Dado o conjunto $B = \{0, 1\}$ e a relação $T = \{(1, 0), (0, 1)\}$ definida sobre B tem-se que o fecho transitivo de T é dado por,

$$\begin{aligned} T^+ &= \bigcup_{i=1}^2 T_i \\ &= T_1 \cup T_2 \\ &= T \cup (T \bullet T_1) \\ &= T \cup (T \bullet T) \\ &= \{(1, 0), (0, 1)\} \cup \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 0)\} \\ &= \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 0)\} \end{aligned}$$

Exemplo 66 | Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $S = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (2, 3)\}$ uma relação sobre A o fecho

transitivo de R é exatamente o conjunto:

$$\begin{aligned}
 S^+ &= \bigcup_{i=1}^3 S_i \\
 &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \\
 &= S \cup (S \bullet S_1) \cup (S \bullet S_2) \\
 &= \{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (2, 3), (1, 3), (1, 1), (3, 3)\}
 \end{aligned}$$

2.6 Relações e Grafos

Escrever depois...

2.7 Questionário

Escrever depois...

Funções

“O ego é o pior inimigo do Eu, mas o Eu é o melhor amigo do ego... O ego é um péssimo senhor, mas é um ótimo servidor”.

Bhagavad Gita

3.1 Conceitos, Definições e Nomenclaturas

Após o conceito importantíssimo de conjunto, o componente mais importante na matemática é provavelmente a noção de função. O autor deste documento não hesita em afirmar que você, leitor, com certeza já teve contato com a ideia de função, seja em seus cursos de nível primário, secundário ou mesmo mais recentemente em seus cursos de cálculo diferencial e integral, estatística ou cursos de física.

Dado este encontro anterior do leitor sobre o assunto, o autor fica confortável em pedir que o leitor faça uma pequena pausa e tente lembrar de seus cursos anteriores e responda para si ao questionamento: **o que é uma função?**

Bem, para muitos físicos, estatísticos e alguns matemáticos (não todos¹), uma função é vista meramente como sendo um mapeamento (ou transformação) entre os elementos de dois conjuntos [1]. Por outro lado, em obras tais como [14, 26, 27, 28, 34] uma função é vista como uma caso particular de relação entre dois conjuntos, ou seja, em última análise para esse grupo de pessoas uma função é exatamente um conjunto. Já em [36, 40] é apresentada uma visão mais mecanicista da ideia de função, essa visão captura a ideia de função enquanto uma máquina¹ (ou caixa preta) que transforma as entradas (*inputs*) em saídas (*outputs*), essa visão é ilustrada pela Figura 3.1.

¹ Um visão interessante é aquela apontada em [23], que descreve uma função como sendo um objeto com quatro descrições simultâneas: uma algébrica, uma numérica, uma gráfica e uma descritiva (ou em palavras).

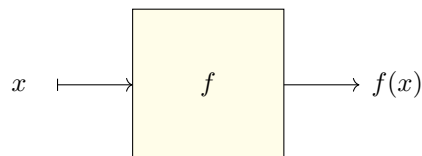


Figura 3.1: Visão de uma função de uma variável enquanto uma máquina (ou caixa preta).

Há também a ideia de função como uma estrutura [17], com componentes bem estabelecidos. Essa visão é capaz (como será mostrado a seguir) de capturar todas as outras ideias de função. Neste documento, a formalização da ideia de função como uma estrutura será apresentada gradualmente, trançando paralelos com as linguagens de programação que possuam um sistema de tipos. Isso será adotado para tornar o

¹Para cientistas da computação os termos máquina e programa são sinônimos.

texto mais didático e interessante ao leitor de computação, além disso, irá aproximar os tópicos teóricos (as funções) dos tópicos práticos (os programas). Entretanto, essa forma de apresentação não será menos rigorosa que outras fontes bibliográficas. O objetivo deste texto é apresentar da forma mais precisa e detalhada a noção de função, tanto do ponto de vista puramente formal, como do ponto de vista prático (da construção de algoritmos).

Este documento inicia o estudo sobre funções apresentando ao leitor a ideia básica de assinatura de função, isto é, a seguir será apresentado a representação sintática (ou de tipagem) que descreve as funções, ou seja, o componente descritivo como mencionado em [23].

Definição 35 (Assinatura de Função) Sejam A e B dois conjuntos a assinatura da função de A em B nomeada como f , corresponde a palavra da forma $f : A \rightarrow B$.

A Definição 35 permite facilmente deduzir que em qualquer função existem três elementos básicos, sendo eles: um nome (rótulo ou símbolo funcional), um conjunto de partida e um conjunto de chegada. Por convenção, o nome de uma função deve ser sempre iniciado por caracteres latinos, no caso de usar índices apenas o último caractere do nome deve ser indexado.

Exemplo 67 São exemplos de assinaturas de funções:

- (a) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.
- (b) $\text{sqrt} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (c) $k_1 : A \times B \rightarrow \mathbb{C}$.
- (d) $\text{loc}_2 : D \rightarrow \mathbb{R} \times \{0, 1\}$.
- (e) $\text{min} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- (f) $\text{BUSCA} : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$.
- (g) $\text{BUSCA} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$.
- (h) $\text{mydouble} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.



Atenção

Apesar das assinaturas nos itens (f) e (g) do Exemplo 67 terem o mesmo nome, elas não são iguais, pois diferem no conjunto de partida, e assim não são a mesma assinatura. Esse tipo de cenário recebe o nome de sobrecarga^a, isto é, o símbolo funcional *BUSCA* está sobrecarregado para identificar duas funções distintas.

^aNa literatura sobre linguagens de programação é usado o termo *overload*.

Diversas linguagens de programação tais como C, C++, Haskell e Java (entre outras) apresentam a possibilidade de definir assinaturas de funções. Na linguagem C, por exemplo, as assinaturas de funções que compõem uma biblioteca são geralmente reunidas em um arquivo de *header*, isto é, um arquivo com a extensão “.h”, para mais detalhes consulte [15], a seguir é exemplificado um arquivo de *header*.

```
1 /* Assinaturas */
2 int reverse(int x);
3 int mydouble(int x);
4 unsigned int strlen(char *x);
5 int strcmp(char *x, char *y);
6 char *strcpy(char *y, char *x);
```

Figura 3.2: Exemplo de um arquivo .h contendo assinaturas na linguagem C.

Um conceito indiretamente esboçado pela ideia de assinatura de função, é o de

```

1 -- Assinaturas
2 mysum :: Int -> Int -> Int
3 mydouble :: Int -> Int
4 iseven :: Int -> Bool
5 factorial :: Int -> Int

```

Figura 3.3: Exemplo de um arquivo com assinaturas na linguagem Haskell.

tipagem da função, sempre que a assinatura é da forma $f : A \rightarrow B$ pode-se dizer que f é uma função do tipo “ A em B ”, ou mesmo que “ f é um tipo seta de A para B ”, a noção de “tipo seta” é uma nomenclatura indiretamente ligado a ideia de teoria dos tipos.

Como dito anteriormente uma função pode ser vista como uma máquina que transforma entradas em saídas, mas note que para que isso aconteça a máquina deve de alguma forma realizar ações sobre a entrada, ou seja, a máquina deve “operar” sobre a entrada. Esse conceito de como a máquina deve operar sobre as entradas é descrito por uma propriedade P que define uma relação de mapeamento²

² Alguns textos usam a nomenclatura lei de formação, ver por exemplo [9].

Definição 36

(Relação de mapeamento) Dado dois conjuntos A e B e seja $x \in A$ e $y \in B$ a relação de mapeamento definida por uma propriedade P corresponde ao seguinte conjunto

$$\varepsilon = \{(x, y) \mid P\}$$

tal que a propriedade P deve satisfazer a seguinte condição: se os pares (x, y_1) , (x, y_2) satisfazem P , então obrigatoriamente $y_1 = y_2$.

Note que a Definição 36 apenas descreve que para cada entrada (variável) x existirá uma única saída y tal que x e y estão relacionados por uma certa propriedade P .

Exemplo 68

São exemplos de relações de mapeamento³:

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \log_2(x + 1)\}$
- (b) $\{(w_1 w_2 w_3 \cdots w_m, y) \in E^2 \mid y = w_3 \cdots w_m w_1 w_2\}$ onde E é o conjunto de todas as palavras sobre um determinado alfabeto Σ e w_i representa o i -ésimo símbolo de uma palavra w , com $w_i \in \Sigma$.
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 14\}$.
- (d) $\{(x_1, x_2, x_3, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x_1 + x_2}\}$.

Não são exemplos de relações de mapeamento:

- (e) $\{(x, y) \in N_P \times I_P\}$ onde N_P é o conjunto de todos os nomes de pessoas e I_P é o conjunto de naturais que representam idades, note que em tal relação é permitido que (Fátima, 10), (Fátima, 55) estejam nesse conjunto, portanto, esse conjunto não satisfaz a Definição 36.
- (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x = y^2\}$, note que $(25, 5)$ e $(25, -5)$ pertence a tal conjunto e, portanto, esse conjunto não satisfaz a Definição 36.

Agora que foram apresentados estes conceitos fundamentais pode-se continuar o desenvolvimento deste texto com a formalização da ideia de função.

Definição 37

(Função) Dado uma assinatura $f : A \rightarrow B$ e seja $\varepsilon \subseteq A \times B$ uma relação de mapeamento, a estrutura $\langle f : A \rightarrow B, \varepsilon \rangle$ é uma função.

³ O item (c) descreve que para qualquer x o $y = 14$, ou seja, para todo x tem-se que o par $(x, 14)$ está na relação, ou seja, o item (c) define em última análise uma **função constante**.

Exemplo 69 São exemplos de funções:

- (a) $\langle \text{dob} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 2x\} \rangle$.
- (b) $\langle \text{mul} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \{((x, y), z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = xy\} \rangle$.
- (c) $\langle \text{sqroot} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y^2 = x\} \rangle$.
- (d) $\langle \text{one} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{1\}, \{((x, y), 1) \in \mathbb{Z}^2 \times \{1\} \mid 1 = x + y\} \rangle$.
- (e) $\langle \text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}, \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\} \mid y = 1 \text{ sempre que } x > 0.5 \text{ e } y = 0 \text{ se } x \leq 0.5\} \rangle$.

De forma similar a apresentação feita em [9] aqui será usado a própria relação de mapeamento para definir as noções de domínio e imagem de uma função.

Definição 38 (Domínio e Imagem de função) Seja $\langle f : A \rightarrow B, \varepsilon \rangle$ uma função o domínio e a imagem de f , denotados respectivamente por $\text{dom}(f)$ e $\text{ima}(f)$, corresponde exatamente ao domínio e a imagem de ε , ou seja, $\text{dom}(f) = \text{dom}(\varepsilon)$ e $\text{ima}(f) = \text{ima}(\varepsilon)$.

Exemplo 70 Considere a função,

$$\langle k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x - 1\} \rangle$$

tem-se que, $\text{dom}(k) = \mathbb{N} - \{0\}$ e $\text{img}(k) = \mathbb{N}$, pois claramente $(x, y) \in \varepsilon$ se, e somente se, $(x, y) = (x, x - 1)$, agora obviamente $x - 1 \in \mathbb{N}$ apenas se $x \geq 1$, logo $\text{dom}(\varepsilon) = \mathbb{N} - \{0\}$, em contrapartida para qualquer seja $x \in \mathbb{N}$ tem-se que existe um $x + 1 \in \mathbb{N}$, de forma que $(x + 1, x) \in \varepsilon$, consequentemente, $\text{ima}(\varepsilon) = \mathbb{N}$.

Agora é comum ao realizar estudos sobre funções, como destacado em [9], não ficar declarando a estrutura da funcional o tempo inteiro (só quando realmente necessário), em vez disso, em geral é descrita a assinatura da função junto com o açúcar sintático (detalhado a seguir), que busca sintetizar todas as informações a cerca da função.



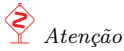
Atenção

Para qualquer função $\langle f : A \rightarrow B, \varepsilon \rangle$, a notação $f(x)$ é um açúcar sintático para dizer que f está recebendo como entrada x , se escreve $f(x) = y$ como açúcar sintático da frase: “ao calcular f com entrada x é gerado y como saída”, mas para isso é necessário que $(x, y) \in \varepsilon$, ou que x e y sejam símbolos de variáveis. Além disso, quando a relação ε de uma função descreve y a partir de uma igualdade da forma $y = E$, em que E é uma expressão válida, pode-se em vez de, fazer $f(x) = y$ escreve diretamente $f(x) = E$, e desde que $y = E$ a expressão $f(x) = E$ é um refinamento do açúcar sintático.

Exemplo 71 Usando as ideias do açúcar sintático descrito acima tem-se que:

- (a) A função $\langle \text{dob} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 2x\} \rangle$ pode simplesmente ser escrita usando sua assinatura $\text{dob} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e dizendo que $\text{dob}(x) = 2x$.
- (b) A função $\langle \text{pot} : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \{((x, y), z) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{R} \mid z = x^y\} \rangle$ pode simplesmente ser escrita usando sua assinatura $\text{pot} : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e dizendo que $\text{pot}(x, y) = x^y$.
- (c) A função $\langle \text{plus4} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x + 4\} \rangle$ pode simplesmente ser escrita usando sua assinatura $\text{plus4} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e dizendo que $\text{plus4}(x) = x + 4$.

Agora com respeito a implementação prática de funções em linguagens de programação, a expressão E mencionada anteriormente, costuma ser chamada de corpo da função, em linguagens imperativas, como dito em [35, 30], já nas linguagens funcionais como Haskell, não é nomeada de forma especial, continua sendo mencionada apenas com expressão [25, 31].



Deste ponto em diante, quando se for tratar de função abstratamente, sempre que for possível será usado apenas a assinatura para se referir a uma função.

Note que se f é uma função com assinatura $f : A \rightarrow B$, isto é, f é um objeto do tipo seta de A em B , e x um objeto do tipo A ⁴ pode-se pensar em uma regra capaz de deduzir o tipo da saída de $f(x)$, tal regra poderia ser escrita como:

$$\frac{x : A \quad f : A \rightarrow B}{f(x) : B}$$

essa regra não é algo novo criado nesse documento, na verdade a mesma, em um certo ponto de vista, é uma versão da famosa regra de *modus ponens*, a existência de tal regra é uma manifestação da profunda conexão que existe entre lógica e computação. Tal conexão é conhecida como isomorfismo de CurryHoward, e é um aspecto fundamental em áreas como teoria dos tipos [32, 39], teoria da prova [32, 37], λ -cálculo [3, 4, 7] e programação funcional [39, 40], este documento irá se aprofundar no estudo de tal isomorfismo em capítulos futuros, quando se estiver estudando λ -cálculo.

⁴ Em teoria dos tipos [32, 39] se A é um tipo e x é um objeto do tipo A pode-se escrever que $x : A$, isto é algo semelhante a teoria dos conjuntos ao dizer que $x \in A$.

```
1 int sqrt(int x){
2     unsigned y = 0;
3     while(y*y != x){
4         y = y + 1;
5     }
6     return y;
7 }
```

Figura 3.4: Código da implementação da função no item (c) do Exemplo 69 escrito na linguagem C.

Agora note que a Definição 38 não impõe de forma alguma que todos os elementos do conjunto de partida de uma função estejam no seu domínio, e isso gera situação interessantes tanto do ponto de vista teórico quando do ponto de vista prático, para ilustra essa questão considere o código fonte na linguagem C esboçado na Figura 3.4 que implementa a função (c) do Exemplo 69, o que ocorre se tal código receber como entrada um x com valor 3? Bem para um programador com um pouco de experiência nota facilmente que o algoritmo não retorna nada, ficando em *loop* eterno⁵. Para entender essa resposta deve-se atentar aos seguintes fatos:

1. O fato principal é que $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$, ou seja, não existe um $y \in \mathbb{N}$ tal que $y = \sqrt{3}$.
2. A partir do item anterior é claro que não existe um par (x, y) na relação definida pela propriedade $y = \sqrt{x}$ quando $x = 3$.

⁵ Um simples teste de mesa pode mostra a verdade dessa afirmação, para saber mais sobre testes de mesa ver [30].

Assim a função *sqrt* definida no item (c) do Exemplo 69 não pode produzir uma saída para a entrada $x = 3$. Do ponto de vista prático (implementação) o programa esboçado na Figura 3.4 encerra e retorna um y como saída se, e somente se, $y = \sqrt{x} \in \mathbb{N}$, dessa forma pode-se pensar que a noção da divergência (ou *loop* eterno) de programas pode ser usada para modelar a indefinição de funções, isto é, quando um programa *prog* é a implementação de uma função f , sempre que *prog* receber uma entrada para a qual f não calcula uma saída o programa *prog* fica em divergência.

Considerando essa pequena discussão pode-se então pensar em separar (ou classificar) as funções, as funções que estão definidas para todas as entradas e as funções que não estão definidas para todas as entradas, essa classificação é formalizada na definição que se segue, tal definição tem uma íntima e importante ligação com a própria teoria da computação [6, 19].

Definição 39

(Funções totais e parciais) Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita ser total sempre que $\text{dom}(f) = A$ e será dita parcial sempre que $\text{dom}(f) \subsetneq A$.

Exemplo 72 Considerando as assinaturas $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tem-se que:

- (a) $f(x) = x - 1$ é uma função total.
- (b) $g(x) = \frac{1}{x}$ é uma função parcial, visto que $\frac{1}{0} \notin \mathbb{N}$.
- (c) $h(x) = x^2 + 3$ é uma função total.
- (d) $i(x) = x - 5$ é uma função parcial, pois tem-se que $1 - 5 = -4$ e $-4 \notin \mathbb{R}_+$.

Em algumas obras tais como [9], as funções totais também costumam ser chamadas de aplicações, neste documento isto não será feito, aqui será mantido a nomenclatura **função total**. Em texto de teoria da recursão (ou computação) como [33], é comum adotar para as funções parciais a escrita $f(x) = \uparrow$, para denotar que a função f é divergente para entrada x , ou seja, para tal entrada a função não tem uma saída, sempre que necessário será usado nessa notação neste documento.

Exemplo 73 Seja $List_{int}$ o conjunto de todas as lista de int da linguagem C, tem-se que a função $first_{int}$ que recebe uma lista de int e retorna o primeiro elemento da mesma não é uma função total, pois se a mesma receber a lista vazia não há um primeiro elemento a ser retornado e assim a mesma deve entrar em divergência.

Em geral, linguagens de programação não implementam verdadeiramente a função do Exemplo 73, em geral quando a função implementada as linguagens recebe a lista vazia, ou a função retorna um valor constante qualquer identificado o erro, ou no caso específico de Java, lança uma exceção.



Atenção

A assinatura de uma função é determinante para a totalidade da mesma, por exemplo, a função f do Exemplo 72 com a assinatura $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ passa a ser uma função parcial.

Um ponto interessante que talvez o leitor tenha percebido no Exemplo 72 é que, para mostrar a parcialidade de uma função basta apresentar um elemento do conjunto de partida para o qual a função em questão não está definida, dessa forma o conjunto de partida é diferente do domínio da função e, portanto, a função é parcial. A seguir é apresentado a definição do espaço de função, um conceito que será importante no decorrer deste documento.

Definição 40 (Conjunto ou Espaço de Funções) Sejam A e B conjuntos, o conjunto ou espaço de todas as funções de A em B é denotado^a por B^A .

^aTambém é encontrado na literatura o uso de $(f : A \rightarrow B)$ para denotar o espaço de função [40].



Atenção

Deste ponto em diante sempre que possível (e não causar ambiguidade) será escrito $f \in B^A$ em vez de escrever a assinatura $f : A \rightarrow B$.

Agora que foram estabelecidas as questões de totalidade, parcialidade e espaço das funções, pode-se generalizar a ideia de aplicação de função, e isto é feito introduzindo os conceitos de imagem direta e pré-imagem.

Definição 41 (Imagem direta e Pré-imagem) Sejam A e B conjuntos e $f \in B^A$, dado dois conjuntos $S \subseteq \text{dom}(f)$ e $T \subseteq \text{ima}(f)$, a **imagem direta** de f aplicada a S , denotada por $\vec{f}[S]$, é o conjunto de todos os elementos de B que são gerados a partir da aplicação de f usando os elementos de S como entrada para f , ou seja,

$$\vec{f}[S] = \{b \in B \mid (\exists x \in S)[f(x) = b]\}$$

dualmente a **pré-imagem** de f aplicada a T , denotado por $\overleftarrow{f}[T]$, corresponde a um subconjunto do domínio de f necessário para “produzir” T como saída da aplicação

de f , ou seja,

$$\overleftarrow{f}[T] = \{a \in A \mid (\exists y \in T)[f(a) = y]\}$$

Exemplo 74 | Considerando uma função $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definida como $f(x) = 2x$, tem-se então que $\overrightarrow{f}[\{2, 4, 7\}] = \{14, 8, 4\}$ e $\overleftarrow{f}[\{22, 6, 124\}] = \{3, 11, 62\}$.

Exemplo 75 | Seja uma função $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definida como $g(x) = 2x^2 - 1$, dado os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R}_+ \mid 2 < y < 13\}$ tem-se então a imagem direta:

$$\overrightarrow{g}[A] = \{y \in \mathbb{R}_+ \mid -1 < y \leq 7\}$$

e a pré-imagem:

$$\overleftarrow{g}[B] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{7}\right\}$$

da aplicação de f .

Atenção | Agora pela Definição 41, é claro que, para qualquer função $f \in B^A$, tem-se que, $\overrightarrow{f}[\emptyset] = \emptyset$ e $\overleftarrow{f}[\emptyset] = \emptyset$.

Agora note que para algum $S \subseteq A$, $S' \subseteq B$ com $S, S' \neq \emptyset$ e $f \in B^A$, é possível que, $\nexists \overrightarrow{f}[S]$, pois para isso (pela Definição 41) basta que $S \not\subseteq \text{dom}(f)$. Dualmente, pode ser que $\nexists \overleftarrow{f}[S']$, bastando para isso que $S' \not\subseteq \text{ima}(f)$ ².

Exemplo 76 | Considerando uma função $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definida como $h(x) = 2x + 1$, tem-se então que $\overrightarrow{h}[\{1, 7, 17, 19\}] = \{3, 15, 35, 39\}$, porém note que, $\overleftarrow{h}[\{0, 15, 5\}] = \nexists$, pois é claro que $h(2) = 5$ e $h(7) = 15$, entretanto, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h(n) = 0$, logo o conjunto $\{0, 15, 5\}$ não possui pré-imagem.

Exemplo 77 | Considere uma função $g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ com

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 5k, k \in \mathbb{Z}_+ \\ 0, & \text{se } x = 5j, j \in \mathbb{Z}_- \end{cases}$$

tem-se para a função g que $\overrightarrow{g}[\{3, 7, 12, 4\}] = \nexists$.

Observe que a Definição 41 estabelece que a imagem direta e a pré-imagem são ambos conjuntos, entretanto, a mesma definição permitir enxergar tais conceitos como funções de fato, para isso basta notar a seguinte sutileza, enquanto $f \in B^A$, a imagem direta \overrightarrow{f} pode ser vista como uma função do tipo seta das partes de A nas partes de B , ou seja, $\overrightarrow{f} \in \wp(B)^{\wp(A)}$. Por outro lado, é claro que a pré-imagem \overleftarrow{f} da função f , será uma nova função cujo tipo será seta das partes de B nas partes de A , ou seja, $\overleftarrow{f} \in \wp(A)^{\wp(B)}$.

Proposição 1 | Dado conjuntos A e B . Se $f \in B^A$ é uma função total, então $\overrightarrow{f} \in \wp(B)^{\wp(A)}$ é uma função total.

Prova | Fazer a prova depois. . .

□

Definição 42 (Igualdade de funções) Duas funções $f, g \in B^A$ são ditas iguais, denotado por $f = g$, sempre que as seguintes condições são satisfeitas.

(i) $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$ e

(ii) Para todo $x \in \text{dom}(f)$ tem-se que $f(x) = g(x)$.

²O símbolo \nexists é uma outra forma de escrever $\neg \exists$ (não existe).

Teorema 44 Se $f, g \in B^A$ e $f = g$, então para todo $S \subseteq \text{dom}(f)$ tem-se que $\vec{f}[E] = \vec{g}[E]$.

Prova | Direto da definição 42. □

Outro aspecto interessante entre funções que é muito apreciado no estudo (e uso) de linguagens de programação e a ideia de compatibilidade entre funções, esse aspecto é muito importante para algumas linguagens de programação (veja alguns detalhes em [12]), a seguir será expresso formalmente tal conceito.

Definição 43 (Compatibilidade de funções) Sejam A e B dois conjuntos e $h_1, h_2 \in B^A$ duas funções, é dito que h_1 e h_2 são compatíveis, sempre que as seguintes propriedades forem satisfeitas:

(i) $\text{dom}(h_1) \cap \text{dom}(h_2) \neq \emptyset$.

(ii) Para todo $S \subseteq (\text{dom}(h_1) \cap \text{dom}(h_2))$ tem-se que $\vec{h_1}[S] = \vec{h_2}[S]$.

Note que a Definição 43 estabelece que duas funções são compatíveis quando elas possuem uma faixa de entradas em comum (ou compartilhada), além disso, é exigido que elas produzam a mesma saída para todos os dados nessa faixa compartilhada. Vale ressaltar que em uma visão de máquina, as duas funções produzirem a mesma saída para os dados, não implica que o funcionamento das duas funções sejam iguais.

Exemplo 78 Sejam $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$ pode-se verificar facilmente que $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) = \{1\}$, além disso, é claro que $\vec{f}[\{1\}] = \{1\} = \vec{g}[\{1\}]$, portanto, f e g são compatíveis.

Exemplo 79 Não é difícil verificar que as funções de \mathbb{N} em \mathbb{Q}_+ ,

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \text{ é par} \\ \frac{1}{x-3}, & \text{senão} \end{cases}$$

e $h(x) = \frac{4x}{2}$, são tais que $\text{dom}(g) \cap \text{dom}(h) = \mathbb{N} - \{1, 3\}$. Agora note que $\{5\} \subseteq (\text{dom}(g) \cap \text{dom}(h))$, por fim, perceba que $\vec{g}[\{5\}] = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ e $\vec{h}[\{5\}] = \{10\}$ e, obviamente $\left\{\frac{1}{2}\right\} \neq \{10\}$, consequentemente g e h não são funções compatíveis.

Um ponto importante sobre compatibilidade de duas funções f e g , é o fato que ela (a compatibilidade) só existe na faixa de domínio compartilhada entre duas funções com expresso pela Definição 43, entretanto, caso essa faixa coincida como todo o domínio das funções, ou seja, no caso de $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$ tem-se então que a compatibilidade torna-se exatamente a relação de igualdade entre funções.

3.2 Propriedades das Funções

Esta seção irá tratar de apresentar algumas propriedades que as funções podem apresentar, a saber, as funções pode ser injetora, sobrejetoras e bijetoras³. Além disso, aqui também será apresentados alguns resultados importantes sobre as funções envolvendo estas propriedades.

Definição 44 (Função injetora) Seja $f \in B^A$, f é dita ser **injetora** sempre que para todo $x_0, x_1 \in \text{dom}(f)$, se $x_0 \neq x_1$, então tem-se que $f(x_0) \neq f(x_1)$.

³Os termos injetora, sobrejetoras e bijetoras foram cunhados e apresentados pela primeira vez pelo grupo Bourbaki, como explicado em [?].

Note que a Definição 44 diz que, em uma função f o número de elementos distintos de qualquer subconjunto de $dom(f)$ é sempre mantido na $ima(f)$, ou seja, a saída da função é sempre determinística, no sentido de que dois elementos (dados) distintos de entrada sempre irão produzir elementos distintos de saída, assim nunca é o caso de não saber qual dado gerou qual saída, as Figuras 3.5 e 3.6, ilustra⁶ essa ideia. Já a função h esboçada pela Figura 3.7 apresenta a característica de que $g(x_2) = g(x_3)$, mas $x_2 \neq x_3$, portanto, h não é injetora, por não ser injetora a função g esboçada pela Figura 3.7 produz não-determinismo, no sentido de que, usando apenas a informação de saída y_2 , não se pode determinar qual dado de entrada gerou tal saída.

⁶ O Esboço de funções através de diagramas está intimamente ligado ao estudo da teoria dos conjuntos feito pelo matemático inglês John Venn (1834-1923), para detalhes veja [9].

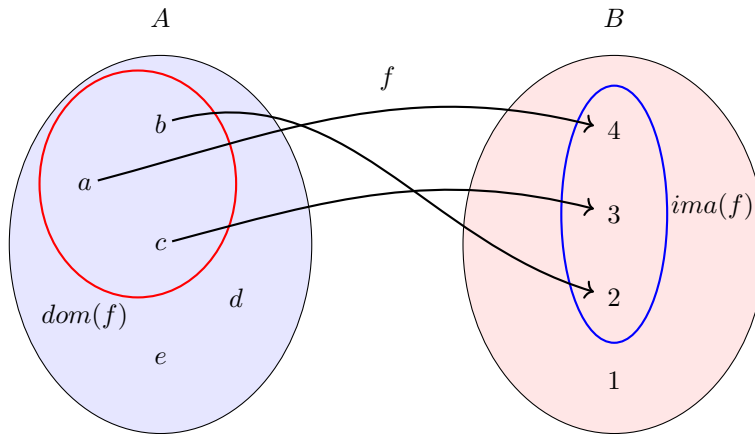


Figura 3.5: Diagrama de uma função f que é injetora.

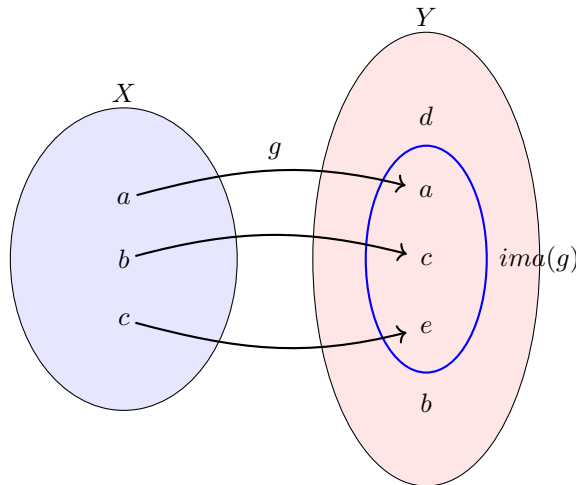


Figura 3.6: Diagrama de uma função injetora g .

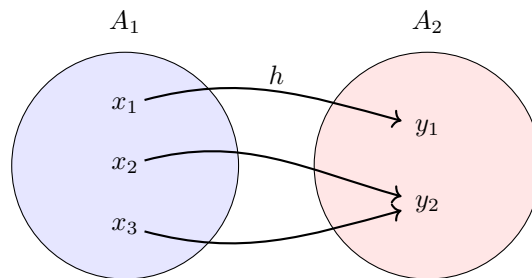


Figura 3.7: Diagrama de uma função h , que não é injetora.

O leitor atento pode perceber que a propriedade de injeção, isto é, a propriedade da função ser injetora, não está ligado ao tipo da função, note que as funções esboçadas nas Figuras 3.5 e 3.6 são ambas injetoras, porém, a primeira é parcial, enquanto que a segunda é total, o Exemplo 80 a seguir apresenta algumas funções injetora.

Exemplo 80

As funções:

(a) $f(x) = 2x$ com $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

(b) $g(x) = 3x + 1$ com $g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$.

(c) A função de Cantor $C(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$ com $C \in \mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.

(d) $Step_k(x) = x + k$ com $k \in \mathbb{Z}_+^*$ e $Step_k \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$.

são todas injetoras. Por outro lado, as funções a seguir não são injetoras.

(e) $T(x, y) = xy$ com $T \in \mathbb{B}^{\mathbb{B} \times \mathbb{B}}$ e $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

(f) $C(x, y) = \min(x, y)$ com $C \in L^{L \times L}$ e $L = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

(g) $h(x) = x^2$ com $h \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$.

Pela Definição 44 pode-se notar que a propriedade de injeção de uma função f é uma propriedade relacionada diretamente com os “dados” de entrada que a função recebe, isto é, a propriedade de injeção está diretamente ligado ao conjunto $dom(f)$. A próxima propriedade que será apresentada, por sua vez, está relacionada ao dados que a função produz após sua aplicação, a mesma relaciona o dados de saída com o conjunto de chegada da assinatura da função.

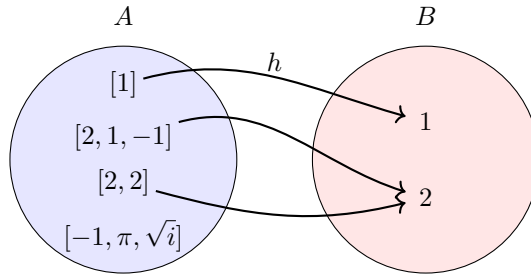


Figura 3.8: Diagrama de uma função h que é sobrejetora.

Definição 45

(Função sobrejetora) Seja $f \in B^A$, f é dita ser **sobrejetora** sempre que para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Outra caracterização para funções sobrejetora apresentada em [26] é que, uma função $f \in B^A$ é sobrejetora sempre que $\vec{f}[dom(f)] = B$, porém, dizer isso é o mesmo que dizer que, uma função $f \in B^A$ é sobrejetora sempre que $ima(f) = B$, que é outra forma de caracterizar funções sobrejetoras como dito em [9]. Claramente a função descrita na Figura 3.7 e 3.8 são ambas sobrejetoras, enquanto as funções esboçadas nas Figuras 3.5 e 3.6 não são sobrejetoras, são também exemplos de funções sobrejetoras os itens (d), (e) e (f) do Exemplo 80.

Exemplo 81

As funções,

(a) $f(x) = 2x$ com $f \in \mathbb{P}^{\mathbb{N}}$.

(b) $g(x) = \frac{1}{x}$ com $g \in L_0^{\mathbb{N}}$ onde $L_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$.

são funções sobrejetoras. Por outro lado, as funções,

(c) $A(x) = 1 - x$ com $A \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(d) $B(x) = 2x$ com $B \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

não são funções sobrejetoras.

Definição 46 (Função bijetora) Seja $f \in B^A$, f é dita ser **bijetora** sempre que f for injetora e sobrejetora.

As funções bijetoras como dito em [26], também costuma ser chamadas de funções biunívocas ou mapeamento um para um (ou *one-to-one* em inglês [9]). Nos casos em que a bijeção $f \in A^A$ para algum conjunto A , a função bijetora f costuma ser chamada de permutação [9] sobre (ou em) A .

Exemplo 82 | Seja A um conjunto, a função identidade $id_A : A \rightarrow A$ construída por $id_A(x) = x$ para todo $x \in A$ é claramente uma bijeção.

Exemplo 83 | A função descrita pela Figura 3.9 é claramente uma bijeção, uma vez que é visivelmente uma função de um para um.

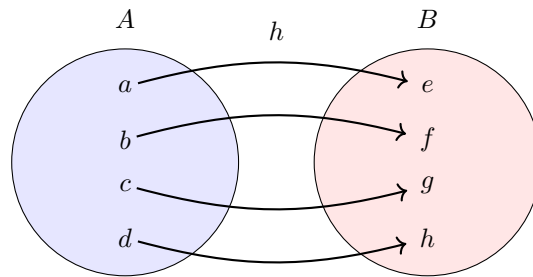


Figura 3.9: Diagrama de uma função h que é bijetora.

Exemplo 84 | São bijetoras.

(a) A função $f(x) = 2x + 1$ com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(b) A função⁷ $\exp(x)$ com $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

(c) A função C de Cantor, esboçada no item (c) do Exemplo 80 é uma bijeção.

⁷ $\exp(x)$ é a forma padrão usada principalmente em linguagens de programação e calculadoras científicas para denotar a função exponencial, que na matemática é escrita como e^x sendo e a constante de Euler para o logaritmo natural, que possui um valor aproximado de 2.71828.

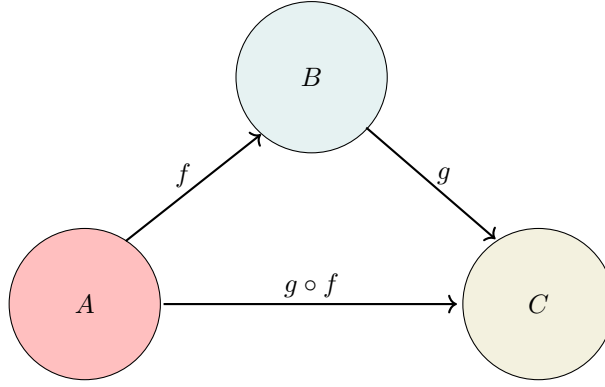
3.3 Composição e Função Inversa

Como qualquer outro objeto matemático, também existem operações sobre as funções, isto é, mecanismos que atuam sobre funções para criar novas funções. Dessas operações a mais importante é sem dúvidas a composição de funções.

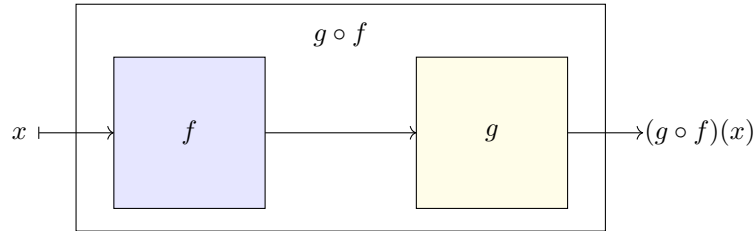
Definição 47 (Composição de função) Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ duas funções, a função composta de g com f , denotada por $g \circ f$, é uma função com a assinatura $g \circ f : A \rightarrow C$ que atende as seguintes restrições:

- $\text{dom}(g \circ f) = \{x \mid x \in \text{dom}(f) \wedge f(x) \in \text{dom}(g)\}$ e
- $(\forall x \in \text{dom}(g \circ f))[(g \circ f)(x) = g(f(x))]$.

Se as funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ forem enxergadas apenas como mapeamentos, a composição das duas funções pode ser vista como sendo uma forma de mapear elementos de A direto em elementos de C , sem há necessidade (explícita) de mapear em B , como ilustrado na Figura 3.10.


 Figura 3.10: Diagrama da composição de uma função g com outra função f .

Por outro lado, a composição vista enquanto máquina (ou caixa preto), e na verdade uma máquina “maior”, em que, as funções usadas na composição são apenas partes aninhadas sequencialmente, a Figura 3.11 apresenta essa ideia.


 Figura 3.11: Composição $g \circ f$ vista enquanto uma máquina (ou caixa preto).

Agora dado duas funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, com A e B sendo conjuntos numéricos e $f(x) = E$ e $g(x') = E'$ onde E e E' são expressões válidas, e além disso, a expressão E sendo capaz de descrever os elementos em $\text{dom}(g)$, tem-se que $(g \circ f)(x) = E'[E/x']$, onde $E'[E/x']$ será uma nova expressão válida obtida a partir da substituição na expressão E' de todas as ocorrências da variável x' pela expressão E .

Exemplo 85 Dado a função de naturais em reais $f(x) = \frac{1}{x+1}$, e a função de reais em reais $g(x) = (-x+2)^3 + 4$, tem-se que,

$$\begin{aligned} \text{dom}(f) &= \mathbb{N} \\ \text{dom}(g) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

além disso, tem-se a composição:

$$(g \circ f)(x) = \left(-\frac{1}{x+1} + 2 \right)^3 + 4$$

note agora que

$$\begin{aligned} \text{dom}(g \circ f) &= \{x \mid x \in \text{dom}(f) \wedge f(x) \in \text{dom}(g)\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{N} \end{aligned}$$

e, portanto, a composição $g \circ f$ é uma construção válida.

Exemplo 86 Dado duas funções $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ sendo que $f_1(x) = -x + 3$ e $f_2(x) = 2x + 1$, tem-se que $\text{dom}(f_1) = \mathbb{Z}$ e $\text{dom}(f_2) = \mathbb{Z}$ assim tem-se que,

$$(a) \quad (f_1 \circ f_2)(x) = -2x + 2 \text{ e}$$

$$(b) (f_2 \circ f_1)(x) = -2x + 7.$$

note agora que,

$$\begin{aligned} \text{dom}(f_1 \circ f_2) &= \{x \mid x \in \text{dom}(f_2) \wedge f_2(x) \in \text{dom}(f_1)\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge f_1(x) \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned} \text{dom}(f_2 \circ f_1) &= \{x \mid x \in \text{dom}(f_1) \wedge f_1(x) \in \text{dom}(f_2)\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge f_1(x) \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

e, portanto, as composições $f_1 \circ f_2$ e $f_2 \circ f_1$ são ambas construções válidas.

O Exemplo 86 é interessante pois ele mostra que a composição de funções não é uma operação comutativa, no sentido de igualdade, ou seja, não é sempre que ocorre que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$.

Exemplo 87 Dado duas funções $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $Id_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $i(x) = -x$ e $j(x) = \sqrt{x}$, tem-se que a composição $Id_{\mathbb{Z}} \circ i$ não é uma composição válida, pois por definição a aplicação para algum $x \in \mathbb{N}$ seria da forma $(Id_{\mathbb{Z}} \circ i)(x) = Id_{\mathbb{Z}}(i(x)) = \sqrt{-x}$, e obviamente, $\sqrt{-x}$ não é uma expressão válida no contexto dos números inteiros. Note que neste exemplo isso ocorre pelo fato de $-x \notin \text{dom}(g)$ com $x \in \mathbb{N}$.

Exemplo 88 Dado a função $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$ com $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tem-se que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$, por outro lado, $f \circ g$ não é uma composição válida, pois basta notar que $0 \in \text{dom}(g)$, mas $g(0) \notin \text{dom}(f)$ ^a.

^aEste exemplo considera que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ através da ideia de sobrecarga de símbolo, ou seja, todo número natural é sobrecarregado para ser considerado também como número inteiro positivo.

Proposição 2 A composição de funções é associativa.

Prova Considere que $f \in B^A$, $g \in C^B$ e $h \in D^C$, agora pela Definição 47 se a composição entre essas funções existe ela irá satisfazer as seguintes pertinências, $g \circ f \in C^A$ e $h \circ (g \circ f) \in D^A$, por outro lado, $h \circ g \in D^B$ e $(h \circ g) \circ f \in D^A$, ou seja, ambas as composições estão no mesmo espaço funcional. Além disso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{dom}(h \circ (g \circ f)) &\stackrel{\text{Def. 47}}{=} \{x \mid x \in \text{dom}(g \circ f) \wedge (g \circ f)(x) \in \text{dom}(h)\} \\ &\stackrel{\text{Def. 47}}{=} \{x \mid x \in \{y \mid y \in \text{dom}(f) \wedge f(y) \in \text{dom}(g)\} \\ &\quad \wedge (g \circ f)(x) \in \text{dom}(h)\} \\ &= \{x \mid x \in \text{dom}(f) \wedge f(x) \in \text{dom}(g) \wedge g(f(x)) \in \text{dom}(h)\} \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{dom}((h \circ g) \circ f) &\stackrel{\text{Def. 47}}{=} \{x \mid x \in \text{dom}(f) \wedge f(x) \in \text{dom}(h \circ g)\} \\ &\stackrel{\text{Def. 47}}{=} \{x \mid x \in \text{dom}(f) \wedge \\ &\quad f(x) \in \{y \mid y \in \text{dom}(g) \wedge g(y) \in \text{dom}(h)\}\} \\ &= \{x \mid x \in \text{dom}(f) \wedge f(x) \in \text{dom}(g) \wedge g(f(x)) \in \text{dom}(h)\} \end{aligned}$$

consequentemente, $\text{dom}(h \circ (g \circ f)) = \text{dom}((h \circ g) \circ f)$, por fim note que para todo

$x \in \text{dom}(f)$ segue que,

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x)\end{aligned}$$

o que conclui a prova. \square

A seguir são apresentados mais alguns resultados sobre a composição de funções.

Teorema 45 Se $f \in B^A$ é uma função injetora, então existe uma função $g \in A^B$ tal que $(g \circ f)(x) = x$.

Prova Suponha que $f \in B^A$ é uma função injetora, agora deixe $y \in B$. Agora defina uma nova função $g \in A^B$ da seguinte forma:

$$g(y) = \begin{cases} x, & \text{se } f(x) = y \\ a, & \text{senão} \end{cases}$$

para algum $x \in \text{dom}(f)$ e $a \in A$. Note que se $y \in \text{ima}(f)$, então por f ser injetora irá existir $x \in A$ tal que $f(x) = y$, no caso contrário, é claro que o resultado para $g(y)$ será um $a \in A$ predefinido (ou pré-escolhido), de forma que g é claramente uma função total. Agora note que para todo $x \in \text{dom}(f)$ é claro pela construção de g que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$. \square

Teorema 46 Se $f \in B^A$ é uma função sobrejetora, então existe uma função $g \in A^B$ tal que $(f \circ g)(y) = y$.

Prova A demonstração fica como exercício ao leitor. \square

Teorema 47 Sejam $f \in B^A$ e $g \in C^B$ duas funções totais, tem-se que:

- i. Se f e g são injetoras, então $g \circ f$ também é injetora.
- ii. Se f e g são sobrejetoras, então $g \circ f$ também é sobrejetoras.

Prova Dado duas funções totais $f \in B^A$ e $g \in C^B$ tem-se:

- i. Suponha que f e g são injetoras, desde que f é total tem-se que para todo $a, a' \in A$ que $f(a)$ e $f(a')$ estão definidos, além disso, como por hipótese f é injetora tem-se para $a \neq a'$ que $f(a) \neq f(a')$, agora por definição de $g \circ f$ todo $f(x) \in \text{ima}(f)$ é tal que $f(x) \in \text{dom}(g)$, logo $f(a), f(a') \in \text{dom}(g)$, como por hipótese g é injetora tem-se que $g(f(a)) \neq g(f(a'))$, ou seja, tem-se que $(g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(a')$ e, portanto, $g \circ f$ também é injetora.

- ii. A demonstração desde item ficará com exercício ao leitor.

\square

Corolário 7 Se $f \in B^A$ e $g \in C^B$ são bijetoras, então $g \circ f$ também é bijetora.

Prova Direto do Teorema 47. \square

Teorema 48 Dado uma função $f \in B^A$, tem-se que $f \circ \text{id}_A = f$ e $\text{id}_B \circ f = f$.

Prova Dado uma função qualquer $f \in B^A$ tem-se para todo $x \in \text{dom}(f)$ que,

$$(f \circ \text{id}_A)(x) = f(\text{id}_A(x)) = f(x)$$

ou seja, $f \circ \text{id}_A = f$. Por outro lado, considere que para $x \in \text{dom}(f)$ tem-se que $f(x) = y$ assim,


$$(\text{id}_B \circ f)(x) = \text{id}_B(f(x)) = \text{id}_B(y) = y = f(x)$$

consequentemente, $\text{id}_B \circ f = f$. \square

A partir dos conceitos de composição de funções e de funções bijetoras, é possível definir o conceito de inversão para a teoria das funções, ou seja, apresentar o conceito de função inversa. De um ponto de vista operacional, uma função inversa “desfaz” as ações realizadas por uma outra função. A existência da função inversa de funções bijetoras é um corolário direto dos Teoremas 45 e 46 com dito esboçado em [?].

Definição 48 (Função Inversa) Seja $f \in B^A$ uma bijeção, uma função inversa de f é qualquer função $g \in A^B$ tal que $g \circ f = \text{id}_{\text{dom}(f)}$ e $f \circ g = \text{id}_{\text{ima}(f)}$, ou seja, para todo $x \in \text{dom}(f), y \in \text{ima}(f)$ tem-se que $(g \circ f)(x) = x$ e $(f \circ g)(y) = y$.

Agora dado que toda bijeção f é uma função total, as igualdades expressas na Definição 48 podem ser reescritas como sendo da forma $g \circ f = \text{id}_A$ e $f \circ g = \text{id}_B$.

 **Atenção** Dado uma função $f \in B^A$, na literatura (ver [27, 28]) é comum usar f^{-1} para se referir a função inversa de f . Além disso, como discutido em [9] se $f \in B^A$ é uma bijeção sua inversa também será uma bijeção.

Exemplo 89 Para $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ com $f(x) = 3x + 4$ tem-se $f^{-1}(x) = \frac{(x-4)}{3}$.

Exemplo 90 Para $f \in]0, 1]^{\mathbb{R}_+^*}$ com $f(x) = \frac{1}{x}$ tem-se $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

Exemplo 91 Seja \mathbb{L} o conjunto de todas as listas de números inteiros, a função *doubleend* $\in \mathbb{L}^{\mathbb{L}}$ que duplica o último elemento na lista l , tem como inversa a função *delatend* $\in \mathbb{L}^{\mathbb{L}}$ que apaga o último elemento de uma lista.

Exemplo 92 Para $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ com,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{senão} \end{cases}$$

tem-se então que $f^{-1} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ sendo da forma,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } x \in \mathbb{P} \\ -\frac{(x+1)}{2}, & \text{senão} \end{cases}$$

Teorema 49 Se $f \in B^A$ e $g \in C^B$ são bijetoras, então $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Prova Suponha que $f \in B^A$ e $g \in C^B$ são bijetoras, logo pelo Corolário 7 tem-se que $g \circ f$

também é uma bijeção e dado que $g \circ f \in C^A$ tem-se que $(g \circ f)^{-1} \in A^C$, assim,

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)^{-1} &\stackrel{\text{Teo.48}}{=} (g \circ f)^{-1} \circ id_C \\
 &\stackrel{\text{Def.48}}{=} (g \circ f)^{-1} \circ (g \circ g^{-1}) \\
 &\stackrel{\text{Prop.2}}{=} ((g \circ f)^{-1} \circ g) \circ g^{-1} \\
 &\stackrel{\text{Teo.48}}{=} ((g \circ f)^{-1} \circ (g \circ id_B)) \circ g^{-1} \\
 &\stackrel{\text{Def.48}}{=} ((g \circ f)^{-1} \circ (g \circ (f \circ f^{-1}))) \circ g^{-1} \\
 &\stackrel{\text{Prop.2}}{=} ((g \circ f)^{-1} \circ ((g \circ f) \circ f^{-1})) \circ g^{-1} \\
 &\stackrel{\text{Prop.2}}{=} (((g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f)) \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\
 &\stackrel{\text{Def.48}}{=} (id_A \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\
 &\stackrel{\text{Prop.2}}{=} id_A \circ (f^{-1} \circ g^{-1})
 \end{aligned}$$

agora desde que $f^{-1} \in A^B$ e $g^{-1} \in B^C$, tem-se que $f^{-1} \circ g^{-1} \in A^C$ e assim pelo Teorema 48 tem-se que $id_A \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = f^{-1} \circ g^{-1}$, o que completa a prova. \square

3.4 Famílias

Halmos em [18] menciona que, “. . . existem diversas ocasiões em que a imagem de uma função é tida como mais importante do que a própria função”. Quando este é o caso, a terminologia e a notação, ambas, passam por radicais alterações, que serão introduzidas a seguir.

Definição 49

(Família Indexada) Sejam I e D dois conjuntos não vazios, uma família indexada (ou simplesmente família) por I em D , é uma função injetora e total $u : I \rightarrow D$.

A Definição 49 estabelece o conceito de família (ou como nomeadas em [18] e [9], indexação), a ideia aqui decorre da seguinte forma, existe um conjunto de índices (ou endereços) I e um conjunto de dados D , a família u é então uma forma de organizar via uso de índices⁸ $i \in I$ os elementos armazenados $d \in D$. Aqui cada $u(i)$ é escrito na verdade como u_i , e é chamado de i -ésimo elemento da família. Além disso, a família é representado como $(u_i)_{i \in I}$, em vez de simplesmente usar o símbolo u .

⁸ Ou seja, uma família estabelece o conceito de chave-valor, tão importante dentro das linguagens de programação.

Parte II

Estruturas Algébricas

Parte III

Categorias

Referências Bibliográficas

- [1] J. M. Abe and N. Papavero. *Teoria Intuitiva dos Conjuntos*. MAKRON Books, 1991.
- [2] A. V. AHO, M. S. LAM, R. SETHI, and J. D. ULLMAN. *Compiladores: Princípios, Técnicas e ferramentas*. Editora Pearson, 2 edition, 2007.
- [3] H. P. Barendregt. *The Lambda Calculus Its Syntax and Semantics*. Elsevier, 1984.
- [4] H. P. Barendregt. *Lambda Calculi with Types*. Oxford: Clarendon Press, 1992.
- [5] J. M. Barreto, M. Roiseberg, M. A. F. Almeida, and K. Callozos. Fundamentos de matemática aplicada à informática. Disponível em <http://www.inf.ufsc.br/~mauro.roisenberg/ine5381/leituras/apostila.pdf>, ???-2021.
- [6] B. Bedregal, B. M. Acióly, and A. Lyra. *Introdução à Teoria da Computação: Linguagens Formais, Autômatos e Computabilidade*. Editora UnP, Natal, 2010.
- [7] K. Bimbó. *Combinatory Logic: Pure, Applied and Typed*,. Chapman and Hall/-CRC, 2019.
- [8] G. Cantor. Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 46(4):481–512, 1895.
- [9] J. Carmo, P. Gouveia, and F. M. Dionísio. *Elementos de Matemática Discreta*. College Publications, 2013.
- [10] M. E. Celebi. *Partitional clustering algorithms*. Springer, 2014.
- [11] K. Cooper and L. Torczon. *Construindo Compiladores*, volume 1. Elsevier Brasil, 2017.
- [12] C. I. Corporation. Compatible functions (C only). Acessado em 17 de Julho de 2023 na página <https://www.ibm.com/docs/en/zos/2.4.0?topic=definitions-compatible-functions-c-only>, 2021.
- [13] S. S. Epp. *Discrete mathematics with applications*. Wadsworth Publ. Co., 1990.
- [14] S. S. Epp. *Discrete Mathematics With Applications*. Cengage learning, 2010.
- [15] P. Feofiloff. *Algoritmos em linguagem C*. Elsevier Brasil, 2009.
- [16] X. Z. Fern and C. E. Brodley. Solving cluster ensemble problems by bipartite graph partitioning. In *Proceedings of the twenty-first international conference on Machine learning*, page 36, 2004.
- [17] J. L. Gersting. *Fundamentos Matemáticos para Ciência da Computação*. Grupo-Gen LTC, 2021.
- [18] P. R. Halmos. *Teoria ingênua dos conjuntos*. Editora Ciência Moderna, 2001.

- [19] J. E. Hopcroft, R. Motwani, and J. D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Pearson Education India, USA, 31 edition, 2008.
- [20] P. J. Landin. The mechanical evaluation of expressions. *The computer journal*, 6(4):308–320, 1964.
- [21] P. J. Landin. Correspondence between algol 60 and church’s lambda-notation: part i. *Communications of the ACM*, 8(2):89–101, 1965.
- [22] P. J. Landin. A correspondence between algol 60 and church’s lambda-notations: Part ii. *Communications of the ACM*, 8(3):158–167, 1965.
- [23] O. Levin. Discrete mathematics: An open introduction. Digital book: <https://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html>, 2021.
- [24] P. Linz. *An Introduction to Formal Languages and Automata*. Jones & Bartlett Learning, New York, 2006.
- [25] M. Lipovaca. *Learn you a haskell for great good!: a beginner’s guide*. no starch press, 2011.
- [26] S. Lipschutz. *Topologia Geral*. McGRAW-HILL Do Brasil, LTDA/MEC, 1971. Coleção Schaum.
- [27] S. Lipschutz. *Teoria dos Conjuntos*. McGraw-Hill do Brasil - LTDA/MEC, 1978.
- [28] S. Lipschutz and M. Lipson. *Matemática Discreta*. Bookman Editora, 2013. Coleção Schaum.
- [29] J. P. Martins. *Lógica e Raciocínio*. College Publications, 2014.
- [30] M. Medina and C. Ferting. *Algoritmos e Programação: Teoria e Prática*. Novatec Editora, 2006.
- [31] A. S. Mena. *Beginning Haskell: A Project-Based Approach*. Apress, 2014.
- [32] R. Nederpelt and H. Geuvers. *Type theory and formal proof: an introduction*. Cambridge University Press, 2014.
- [33] C. A. C. Olguím. *A Topological and domain theoretical study of total computable functions*. PhD thesis, Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN, Natal, RN, 2016.
- [34] G. O’Regan. *Guide to discrete mathematics*. Springer, 2021.
- [35] Python Software Foundation. Página oficial da linguagem Python. Acessado em 23 de Agosto de 2023 na página <https://www.python.org/>, 2023.
- [36] E. R. Scheinerman. *Matemática Discreta - Uma Introdução*. Cengage Learning Editores, terceira edição edition, 2019.
- [37] I. Sergey. Programs and proofs: Mechanizing mathematics with dependent types. *Lecture notes with exercises*. Available at, 2014.
- [38] J. L. Szwarcfiter and L. Markenzon. *Estruturas de Dados e seus Algoritmos*, volume 2. Livros Tecnicos e Científicos, 1994.
- [39] S. Thompson. *Type theory and functional programming*. Addison Wesley, 1999.
- [40] T. Tsouanas. *Matemática Fundacional para Computação*. <http://www.tsouanas.org/fmcbook>, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2017–2021. Work in progress.