Matemática para a Computação I

Notas de Aula

Valdigleis S. Costa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET

Departamento de Informática e Matemática Aplicada – DIMAP

14 de setembro de 2025

Página pessoal do autor https://linus.pagina

Este tomo foi escrito com base em uma coleção de notas de aulas do autor, o mesmo foi redigido usando um *template* desenvolvido pelo próprio autor. Este texto foi escrito com o conjunto de macros LaTeX (em sua versão 2) e compilado usado as ferramentas LuaLaTeX e BibTeX, tais ferramentas fornecidas pelas distribuições TeXLive e MacTeX, respectivamente nos sistema operacionais *Unix-like*: Debian e no Mac OS X, para edição foram usados os *softwares* livres de edição textual Vim (versão 0.10.1), além disso, o sistema de controle de versão adotado é o Git (versão 2.34.1).

Release compilado em 14 de setembro de 2025 (597 minutos após a meia-noite).

Sumário

I Fundamentos de Lógica

1 Introdução à Lógica — **3**

1.1 O que é Lógica? . . . 3
1.2 Um Pouco de História . . . 4
1.3 Argumentos, Proposições e Predicados . . . 6
1.4 Conectivos, Quantificadores e Negação . . . 7
1.5 Representação Simbólica . . . 9
1.6 Lógica e Ciência da Computação . . . 10
1.7 Questionário . . . 11

2 Lógica Proposicional — **15**

2.1 A Linguagem Proposicional . . . 15
2.2 Sistema Dedutivo . . . 17
2.3 Sistema Axiomático L . . . 28
2.4 Sistema Semântico . . . 28

Referências Bibliográficas — **32**

Parte I

Fundamentos de Lógica

Capítulo 1

Introdução à Lógica

"Se você sabe que está morto, você está morto.
Mas se você sabe que está morto, você não está morto,
portanto você não sabe se está morto ou não."

Zenão de Citio (334-262 a.C.)

1.1 O que é Lógica?

Antes de apresentar uma descrição histórica da lógica, este texto começa pela árdua tarefa de apresentar de forma sucinta uma resposta para a pergunta, **"o que é a lógica?"**. Como dito em [3, 9], a palavra lógica e suas derivações são familiares a quase todas (se não todas) as pessoas, de fato, é comum durante o cotidiano do dia a dia as pessoas recorrerem ao uso do termo lógica ou de seu derivados, sendo que na maioria das vezes seu uso está ligada à ideia de obviedade (ou certeza), por exemplo, nas frases:

(a) É lógico que vou na festa.

(b) É lógico que ciência da computação é um curso difícil.

(c) Logicamente o Vasco não pode ganhar o título da primeira divisão nacional em 2021.

(d) Logicamente se eu tomar banho, vou ter que me molhar.

Essa forma de usar os derivados da palavra lógica enquanto entidades para transmissão de certeza pode ser usada como gatilho "fácil e preguiçoso" para enunciar que a lógica se trata de uma ciência (ou disciplina) acerca das certezas sobre os fatos do mundo real.

Existem outras respostas comumente encontradas na literatura acadêmica (ver [1, 3, 28]) para o que seria a lógica, entre essas respostas, esta aquela que descreve a lógica como sendo um mecanismo utilizado durante o raciocínio estruturado e correto[1], isto é, uma ferramenta do raciocínio que possibilita a inferência de conclusões a partir de premissas [1, 9, 19], por exemplo, dado as premissas:

[1] Em [26] diz que a lógica se preocupa com a avaliação de argumentos, e em separar os argumentos bons dos ruins.

(a) Toda quinta-feira é servido peixe no almoço.

(b) Hoje é quarta-feira.

O raciocínio munido da "ferramenta de inferência" contida na lógica permite deduzir a afirmação: **Amanhã será servido peixe no almoço**, como conclusão. Note que esta segunda resposta estabelece que a lógica é um tipo de procedimento mental capaz de transformar (informações) as entradas (as premissas) nas saídas (a conclusão), usando uma ferramenta de inferência.

Essas duas formas de encarar a lógica não estão totalmente erradas, entretanto, também não exibem de forma completa o real significado do que seria a lógica em si. Uma terceira resposta para a pergunta "O que é a lógica?" aparece na edição de 1953 da Encyclopædia Britannica na seguinte forma: "*Logic is the systematic study of the structure of propositions and of the general conditions of valid inference by a method which abstracts from the content or matter of the propositions and deals only with their logical form*". Note que essa resposta utiliza-se de autorreferência[2], pois a mesma tenta definir o que é a lógica em função do termo "forma lógica".

[2] Autorreferência é um fenômeno que ocorre na língua natural e nas linguagens formais, tal fenômeno consiste em uma oração ou fórmula que se refere a si mesma de forma direta ou através de alguma sub-frase ou fórmula intermediária, ou ainda por meio de alguma codificação.

Apesar dessa definição recursiva, a resposta da Encyclopædia Britannica apresenta duas características muito marcantes para a apresentação da lógica enquanto ciência (ou disciplina) nos dias atuais. A primeira característica é a validade das afirmações derivadas (ou concluídas) pelos mecanismos de inferência. A segunda característica é a importância da forma de representação (a escrita) dos termos lógicos.

A validade remonta a ideia de um significado dual (verdadeiro e falso) para as afirmações, ou seja, fornece indícios da existência de interpretações das afirmações, e isto significa que existem diferentes significados para as afirmações a depender de um fator que pode ser chamado de contexto, por exemplo, considere a seguinte afirmação:

"**O atual presidente americano é um democrata**".

Note que o contexto temporal muda drasticamente o valor lógico interpretativo (semântico) dessa afirmação, pois em 2021 essa afirmação pode ser interpretada como verdadeira, porém no ano de 2019 a mesma era falsa. Assim, os valores interpretativos (semânticos) dentro do universo da lógica não são imutáveis, isto é, os valores das interpretações da lógica são passíveis de mudança a depender do contexto.

Dado então estes componentes sintáticos e semânticos pode-se concluir a partir das definições linguísticas que a **lógica é uma linguagem**, entretanto, vale salientar que não é uma linguagem natural como o português, como será visto nós próximos capítulos a lógica é uma linguagem formal [4], no sentido de que todas as construções linguísticas possuem uma forma precisa e sem ambiguidade determinada por uma gramática geradora [21, 23], pode-se inclusive estabelecer que a lógica é a linguagem da ciência da inferência racional, ou seja, a linguagem usada para representar argumentos, inferência e conclusões sobre um certo universo do discurso.

1.2 Um Pouco de História

A história do desenvolvimento da lógica remonta até a Grécia antiga e a nomes como: Aristóteles (384-322 a.C.), Sócrates (469-399 a.C.), Zenão de Eléia (490-420 a.C.), Parmenides (515-445 a.C.), Platão (428-347 a.C.), Eudemus de Rodes (350-290 a.C.), Teofrastus de Lesbos (378-287 a.C.), Euclides de Megara (435-365 a.C.) e Eubulides de Mileto[3] (384-322 a.C.). De fato, o nome lógica vem do termo grego *logike*, cunhado por Alexandre de Afrodisias no fim do século II depois de Cristo. Como explicado em [1], os mais antigos registros sobre o estudo da lógica como uma disciplina (ciência) são encontrados exatamente na obra de Aristóteles intitulado como "Γ da metafísica". Todavia, após seu desenvolvimento inicial dado pelos gregos antigos, a lógica permaneceu quase que intocada[4] por mais de 1800 anos.

[3] A quem é creditado o paradoxo do mentiroso.

[4] Aqui não está sendo levada em conta as tentativas de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) de desenvolver uma linguagem universal através da precisão matemática.

Os primeiros a profanar a santidade da lógica de forma contundente, abalando as estruturas da ideia de que a lógica era uma ciência completa, no sentido de que não havia nada novo a se fazer, estudar ou provar. Foram os matemáticos George Boole (1815-1864) e Augustus De Morgan (1806-1871), que introduziram a moderna ideia da lógica como uma ciência simbólica, isto é, eles semearam os conceitos iniciais que depois iriam convergir para as ideias da lógica enquanto linguagem formal apresentadas pelo matemático e filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1925), que via a lógica como uma linguagem, que continha em seu interior todo o rigor da matemática.

Ainda no século XIX os maiores defensores das ideias de Frege, os britânicos Alfred Whitehead (1861-1947) e Betrand Russel (1872-1970), usaram muitas de suas ideias e sua linguagem na publicação monumental em três volumes intitulada "*Principia Mathematica*" [2], que é ainda hoje considerada por muitos o maior tratado matemático do século XIX. Como dito em [3], outro influenciado por Frege que apresentou importantes contribuições foi filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein (1889-1951), que em seu "*Tractatus Logico-Philosophicus*" apresentou pela primeira vez a lógica proposicional através das tabelas verdade. Muitos autores, como é o caso de [1], consideram que a lógica moderna se iniciou verdadeiramente com a publicação do *Principia*, de fato, alguns usam exatamente a visão de Whitehead que diz: "A lógica atual está para a lógica aristotélica como a matemática moderna está para a aritmética das tribos primitivas".

Outra vertente emergente na lógica do século XIX era aquela apoiada puramente por interesses matemáticos, isto é, a visão da lógica não apenas como linguagem, mas também como um objeto algebrizável (um cálculo). Tal escola de lógica encontra alguns de seus expoentes nos nomes de: Erns Zermelo[5] (1871-1953), Thoralf Skolem (1887-1963), Ludwig Fraenkel-Conrad (1910-1999), John von Neumman (1903-1957), Arend Heyting (1898-1980) entre outros. Uma das grandes contribuições feitas por essa escola foi incluir uma formulação explícita e precisa das regras de inferência no desenvolvimento de sistemas axiomáticos.

[5] Zermelo junto com Fraenkel desenvolveu o sistema formal hoje conhecido como teoria axiomática dos conjuntos.

Uma ramificação desta escola "matemática" ganhou força na Polônia sobre a tutela e liderança do lógico e filósofo Jan Łukasiewics (1878-1956), o foco da escola polonesa era como dito em [3], analisar os sistemas axiomáticos da lógica proposicional, lógica modal e das álgebras booleanas. Foi esta escola que primeiro considerou interpretações alternativas da linguagem (da lógica) e questões da meta-lógica, tais como: consistência, corretude e completude. Por fim, foi na escola polonesa que houve pela primeira vez duas visões separadas sobre a lógica, uma em que a lógica era vista puramente como uma linguagem, e a segunda visão que via a lógica puramente como um cálculo [3].

Instigado pelo problema número dois da lista Hilbert (1862-1943), o jovem matemático e lógico austríaco Kurt Gödel (1906-1978) fez grandes contribuições para a lógica, inicialmente ele provou o teorema da completude para a lógica de primeira ordem em sua tese de doutorado em 1929, tal resultado estabelece que uma fórmula de primeira ordem é dedutível se e somente se ela é universalmente válida [3]. Outra contribuição monumental de Gödel são seus teoremas da incompletude [14], em especial o primeiro que deu uma resposta negativa ao problema número dois da lista Hilbert, de forma sucinta o resultado de Gödel estabelece que não pode haver uma sistematização completa da Aritmética, ou seja, sempre vão existir sentenças verdadeiras, porém indemonstráveis [1, 26].

Outros contemporâneos de Gödel também contribuíram fortemente para a lógica, Alfred Tarski (1901-1983) foi o responsável pela matematização do conceito de verdade como correspondência [1, 36], já o francês Jacques Herbrand (1908-1931) introduziu as funções recursivas e apresentou os resultados hoje chamados de teoria de Herbrand. Entre os resultados de Herbrand se encontra o teorema que relaciona um conjunto insatisfatível de fórmulas da lógica de primeira ordem com um conjunto insatisfatível de fórmulas proposicionais.

Outra enorme revolução matemática do século XX que foi escrita na linguagem da lógica foi a prova da independência entre a hipótese do *continuum*[6] e o axioma da escolha da teoria de conjuntos de ZermeloFraenkel ou teoria dos conjuntos axiomática, como também é chamada.

[6] A hipótese do *continuum* é uma conjectura proposta por Georg Cantor e que fazia parte da lista inicial de 10 problemas estabelecida por David Hilbert. Esta conjectura consiste no seguinte enunciado: **Não existe nenhum conjunto com cardinalidade maior que a do conjunto dos números inteiros e menor que a do conjunto dos números reais**.

De forma sucinta pode-se então concluir que a lógica uma ciência nascida na Grécia antiga se desenvolveu de forma exponencial após o século XIX, e que seu desenvolvimento foi em boa parte guiado por matemáticos, de fato, pode-se dizer que a lógica contemporânea se caracteriza pela tendência da matematização da lógica [**?**]. Muitos outros estudiosos, além dos que foram aqui mencionados, também apresentaram resultados diretos em lógica ou em área correlatas, como a teoria da prova e a teoria da recursão, tornando a lógica e suas ramificações e aplicações um dos assuntos dominantes nos séculos XX e XXI.

1.3 Argumentos, Proposições e Predicados

Como qualquer outra disciplina para entender de fato o que é a lógica deve-se estudar a mesma [9], antes de qualquer coisa é bom saber que diferente de outras ciências, a lógica não apresentar fronteiras bem definidas, na verdade, como dito em [28], a lógica pode ser compreendida como a tênue linha que separa as ciências da filosofia e da matemática, no que diz respeito a isto, este manuscrito irá se debruçar primariamente sobre os aspectos matemáticos da lógica.

É sabido que para se estudar uma ciência deve-se saber quais são as entidades fundamentais de interesse dessa ciência, no caso da lógica, estas entidades fundamentais são os argumentos em um discurso.

Definição 1.1 (Argumento) Um argumento é par formado por dois componentes básicos, a saber:

(1) Um conjunto de frases declarativas, em que cada frase é chamada de premissa.

(2) Uma frase declarativa, chamada de conclusão.

Para representar um argumento pode-se como visto em [9, 28] usar uma organização de linhas, por exemplo, para representar um argumento que possua n premissas primeiro serão distribuídas nas n primeiras linhas as tais premissas do argumento depois na linha $n+1$ é usado o símbolo $\therefore$ para separar as premissas da conclusão[7], sendo esta última colocada na linha $n+2$.

[7] Como dito em [26] o símbolo $\therefore$ como "portanto".

Exemplo 1.3.1 A construção:

Toda quarta-feira é servida sopa para as crianças.
Hoje é quinta-feira.
$\therefore$
Ontem as crianças tomaram sopa.

É um argumento.

As frases declarativas usadas para construção de argumentos são aquelas que, como dito em [28], enunciam como as entidades em um certo discurso são ou poderiam ter sido, em outras palavras, as frases declarativas falam sobre as propriedades das entidades.

Exemplo 1.3.2 As frases:

- A lua é feita de queijo.
- O Flamengo é um time carioca.

São ambas frases declarativas. Por outro lado, as frases:

- Que horas são?
- Forneça uma resposta para o exercício.
- Faça exatamente o que eu mandei.
- Cuidado!

Não são frases declarativas.

Uma forma de identificar se uma frase é declarativa é verificada se a mesma admite ser classificada como verdadeira ou falso. Na lógica, as frases declarativas podem ser "tipadas" com dois rótulos: **proposições** e **predicados**.

Definição 1.2 (Proposição) Uma proposição é uma frase declarativa sobre as propriedades de indivíduos específicos em um discurso.

Exemplo 1.3.3 São exemplos de proposições:

(a) $3 < 5$.

(b) A lua é feita de queijo.

(c) Albert Einstein era francês.

(d) O Brasil é penta campeão de futebol masculino.

Definição 1.3 (Predicados) Predicados são frases declarativas sobre as propriedades de indivíduos não específicos em um discurso.

Pela Definição 1.3 pode-se entender que um predicado fala das propriedades de indivíduos sem explicitamente dar nomes a tais indivíduos.

Exemplo 1.3.4 São exemplos de predicados:

(a) Para qualquer $x \in \mathbb{N}$ tem-se que $x < x + 1$.

(b) Para todo $x \in \mathbb{R}$ sempre existem dois números $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 < x < y_2$.

(c) Existe algum professor cujo nome da mãe é Maria de Fátima.

(d) Há um estado brasileiro que não tem litoral.

Agora note que nas frases (a) e (b) do Exemplo 1.3.4 o símbolo x se torna um mecanismo que faz o papel dos números naturais e reais respectivamente, mas sem ser os próprios números em si, o mesmo vale para y_1 e y_2. Similarmente, na frase (c) o termo **professor** representa todo um conjunto de pessoas, mas nunca sendo uma pessoa em particular, já na frase (d) o termo **estado brasileiro** representa novamente todos os indivíduos de um conjunto, mas ele nunca é um indivíduo particular. Os termos em um predicado que tem essa capacidade de representação são chamados de **variáveis do predicado**.

Atenção Um predicado que tem suas variáveis substituídas (ou instanciadas) por valores específicos ou concretos se torna uma proposição.

Exemplo 1.3.5 Considere o predicado: "**Existe algum professor cujo nome da mãe é Maria de Fátima**". Se for atribuído o valor **Valdigleis** no lugar da variável **professor** será gerado a proposição: **O nome da mãe de Valdigleis é Maria de Fátima**.

Exemplo 1.3.6 Considere o predicado: Para todo $x \in \mathbb{N}$, tem-se que $x > x + 1$. Ao atribuir o valor 2 a variável x teremos a proposição $2 > 2 + 1$[a].

[a] Obviamente se for feita a avaliação do termo $2 + 1$, poderia ser escrito a proposição como $2 > 3$.

1.4 Conectivos, Quantificadores e Negação

As proposições e os predicados podem ser classificados em duas categorias: simples ou composto. Uma proposição (ou predicado) é dita(o) composta(o) sempre que for possível dividi a (o) proposição (predicado) em proposições (predicados) menores. E no caso contrário é dito que a proposição (ou predicado) é simples (ou atômicas).

Definição 1.4 (Conectivos) Conectivos são termos linguísticos que fazem a ligação entre as proposições ou (e) predicados.

Os principais conectivos são: a conjunção, a disjunção e a implicação. E a depender do idioma[8] mais de um termo da linguagem pode representar um determinado conectivos.

[8] Idioma aqui diz respeito a linguagem natural (português, por exemplo) que tem papel de meta-linguagem para falar sobre a lógica.

A seguir são listados os termos na língua portuguesa que são conectivos, ressaltamos que o símbolo ________ será usado como meta-variável para representar a posição de proposições (ou predicados).

Conectivo	**Termo em Português**
Conjunção	________ e ________
	________ mas ________
	________ também ________
	________ além disso ________
Disjunção	________ ou ________
Implicação	Se ________, então ________
	________ implica ________
	________ logo, ________
	________ só se ________
	________ somente se ________
	________segue de ________
	________ é uma condição suficiente para ________
	Basta ________ para ________
	________é uma condição necessária para ________

Tabela 1.1: Termos em português que representamos conectivos.

Exemplo 1.4.1 Usando as proposições do Exemplo 1.3.3 e os predicados do Exemplo 1.3.4 pode-se criar:

(a) $3 < 5$ e para qualquer $x \in \mathbb{N}$ tem-se que $x < x + 1$.

(b) Há um estado brasileiro que não tem litoral ou O Brasil é penta campeão de futebol masculino.

(c) Se para todo $x \in \mathbb{R}$ sempre existem dois números $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 < x < y_2$, então Albert Einstein era francês.

(e) Se a lua é feita de queijo ou $3 < 5$, então há um estado brasileiro que não tem litoral.

Neste exemplo, os conectivos estão destacados na cor *teal*.

Como já mencionado antes um predicado não especifica diretamente os indivíduos, em vez disso, usa variáveis para não mencionar os indivíduos especificamente. Essas variáveis por sua vez, estão conectadas a termos da linguagem que determinam a quantidade de elementos que podem vim a ser atribuído a tais variáveis, tais termos são chamados de quantificadores. Os quantificadores por sua vez, podem ser "tipados" em duas categorias: universais e existenciais.

Quando uma variável é ligada a um quantificador universal significa que o predicado será verdadeiro se para a atribuição de cada um dos elementos do universo discurso a proposição gerada com a atribuição é também verdadeira, no caso contrário o predicado é falso. Por outro lado, quando uma variável é ligada a um quantificador existencial significa que tal predicado será verdadeiro se para pelo menos um dos elementos do discurso ao ser atribuído a variável gera uma proposição verdadeira, e no caso contrário o predicado será falso.

De forma similar aos conectivos os quantificadores também são "representados" por termos da língua portuguesa como mostrado na tabela 1.2. Anteriormente já foi dito que na lógica as proposições e predicados podem ser interpretados como sendo verdadeiros ou falsos, dito isto, para qualquer proposição ou predicado sempre é possível obter uma proposição ou predicado com um valor de interpretação oposta, isto é, se a proposição (ou predicado) original for verdadeira a proposição (ou predicado) oposta será falsa, ou vice-versa. Esse operador que gerar as proposições (ou predicados) opostas(os) é chamado de negação e a Tabela 1.3 exibe como os termos na língua portuguesa podem ser usados para representar a negação.

Quantificador	**Termo em Português**
Universal	Para todo(a) ________
	Para qualquer ________
	Para cada ________
Existencial	Existe ________
	Existe algum ________
	Há um ________
	Para algum ________
	Para um ________

Tabela 1.2: Termos em português que representamos quantificadores.

Termos em português
Não ________
É falso que ________
Não é verdade que ________

Tabela 1.3: Termos em português para designar a negação de uma proposição ou predicado.

1.5 Representação Simbólica

A lógica simbólica é o estudo das propriedades lógica sem se preocupar com o que cada proposição e(ou) predicado de fato enuncia, em tal perspectiva as abstrações simbólicas capturam as características formais (sintaxe e semântica) das proposições e predicados, além de, representar de forma sucinta e precisa as abordagens para a inferência lógica aplicada a qualquer argumento [2, 16].

Definição 1.5 Na lógica simbólica, as letras maiúsculas do alfabeto latino com ou sem indexação representam proposições simples.

Além dos símbolos usados para representar as proposições, é necessário, como destacado em [18] apresentar representações simbólicas para os conectivos e a negação, as representações usadas neste documento estão listadas a seguir.

Objeto	**Notação**
Negação	$\neg$
Conjunção	$\wedge$
Disjunção	$\vee$
Implicação	$\Rightarrow$

Tabela 1.4: Notação simbólica para os conectivos e a negação.

Exemplo 1.5.1 Dado duas proposições:

(1) “**Hoje é quarta-feira**”

(2) “**Julia foi ao parque**”

pode-se representar ambas respectivamente por Q e J, assim a conjunção de (1) e (2), é simbolicamente representada por $Q \wedge J$. Além disso, a implicação de que

Julia não foi ao parque com o fato de hoje não ser quarta-feira, é representada por $\neg J \Rightarrow \neg Q$.

Exemplo 1.5.2 A proposição "**A formatura é amanhã ou no sábado**", pode ser simbolicamente representada por $A \vee S$.

Já para os quantificadores existencial e universal, os mesmos são representados como exposto na tabela a seguir, ressaltando que no caso x é uma variável da linguagem de primeira ordem e o [________] imediatamente inserido após a simbolização do quantificador diz respeito ao escopo do mesmo (isso será melhor discutido no capítulo próprio do assunto), dentro do escopo está representado o predicado, a representação do predicado pode conter símbolos de conectivos, além de, símbolos para constantes, funções, relações e variáveis.

Objeto	**Notação**
Quantificador existencial	$(\exists x)[\_\_\_\_\_\_\_\_]$
Quantificador universal	$(\forall x)[\_\_\_\_\_\_\_\_]$

Tabela 1.5: Notação simbólica para os quantificadores.

Exemplo 1.5.3 O predicado: "**Existe um gato que mora na casa de Hugo,**", pode ser representado por $(\exists x)[g(x) \wedge h(x)]$, x denota a variável do discurso, $g(x)$ é a relação que denota que x é um gato, $h(x)$ denota a relação de morar na casa de Hugo.

Exemplo 1.5.4 O clássico predicado[a]: "**Todos os homens são mortais,**", pode ser representado por $(\forall x)[h(x) \Rightarrow m(x)]$. Aqui x é novamente a variável usada para simbolizar de forma genérica os elementos no discurso, $h(x)$ simboliza o fato de x ser homem e $m(x)$ ser mortal.

[a] Alguns textos, como [8], costumam creditar a Aristóteles a criação de tal predicado.

1.6 Lógica e Ciência da Computação

Para finalizar este capítulo introdutório, é conveniente falar mesmo que de forma superficial sobre os tipos de lógica. A lógica, assim como a física, pode ser dividida em duas categorias ou tipos bem definidos, a saber, clássicas e as não clássicas. Como mencionado em [3, 11], as lógicas clássicas são aquelas que apresentam a característica de obedecer aos seguintes princípios:

- **Principio da não contradição**: Qualquer proposição (ou predicado) não pode ser verdadeira(o) e falsa(o) ao mesmo tempo;
- **Principio do terceiro excluído**: Toda(o) proposição (ou predicado) só pode ser falsa(o) ou verdadeira(o), não existe uma terceira possibilidade.

Logo a lógica clássica é bi-valorada [11], ou seja, as interpretações sobre as proposições e predicados só podem ser valoradas por dois valores, a saber: verdadeiro ou falso. E por sua vez, a própria lógica clássica é subdividida em duas partes, sendo estas: a lógica proposicional e a lógica de primeira ordem (ou lógica dos predicados).

Como respeito a aplicações, a lógica clássica tem um papel fundamental e central para a Ciência da Computação, uma vez que, todos os computadores são construídos pela combinação de circuitos digitais e estes por sua vez implementam operações da lógica proposicional [1, 12]. Outra área de destaque da aplicação da lógica dentro da Ciência da Computação é no campo de Inteligência Artificial, onde a mesma é o principal formalismo de representação do conhecimento e, portanto, é muito útil no desenvolvimento de sistemas especialistas e sistemas multi-agentes [3], algumas outras áreas de aplicação da lógica clássica são:

- Banco de dados: através da descrição de consultas e no relacionamento das tabelas em bancos de dados dedutivos.

- Ontologias web: como uma linguagem para descrever ontologias e representar o conhecimento.

- Engenharia de software: usada como formalismo para especificação e verificação formal das propriedades dos sistemas[9].

[9] Em especial sistemas críticos como software para controle aéreo são exemplo de sistemas cujas propriedades deve ser especificadas e verificadas com alta precisão matemática dado a importância do mesmo para a manutenção da vida humanas que dependem dele.

As lógicas não clássicas, por sua vez, podem se apresentar de duas formas. (1) não obedecem a algum dos princípios apresentados acima ou (2) estendem a lógica clássica através de teoremas e meta-teoremas (formalizados nos capítulos futuros) não válidos para as lógicas clássicas. Como exemplos de lógicas não clássicas estão: lógica intuicionista [25], lógica paraconsistente [10], lógicas multivaloradas [3, 26], lógicas modais [26] e lógicas temporais [15, 17, 27]. Com respeito a aplicações relacionadas à Ciência da Computação tem-se, por exemplo:

- A utilização da lógica modal para a verificação das propriedades de sistemas e software [17].

- A lógica temporal usada para especificação e verificação de programas concorrentes [27] e também para especificar circuitos síncronos [15].

- As lógicas multi-valoradas usadas para lidar com a simulação e representação de incertezas presente no raciocínio aproximado [3], principalmente na área de reconhecimento de padrões.

Obviamente, como dito em [3], existem muitas outras lógicas não clássicas que têm aplicações ou ainda servem de fundamentação para diversas áreas, ou disciplinas da computação. Porém, como esta parte do texto é apenas uma introdução, não cabe neste escopo se debruçar tão profundamente assim neste assunto. Em capítulos futuros, as lógicas não clássicas (em especial a modal) serão estudadas mais a fundo em capítulos futuros deste documento.

1.7 Questionário

Questão 1.1 Examine cada uma das frases declarativas abaixo e diga se as mesmas são proposições ou predicados e também diga se são simples ou compostas, justifique suas respostas no caso de proposição (ou predicado) composta(o).

(a). Existe um gato amarelo.

(b). Alguns patos são marrons.

(c). Não é verdade que o gato de Júlio é amarelo.

(d). O Flamengo joga hoje.

(e). Todos os ratos têm olhos azuis.

(f). 4 é o menor número composto pelo produto de primos.

(g). Meu cachorro é branco, alguns outros são vermelhos.

(h). Alguns gatos são cinzas, mas meu gato não é cinza. Além disso, Tadeu tem um gato preto ou Sormany tem um rato amarelo.

(i). Os carros são amarelos se e somente se eles não são italianos.

(j). Se todos os jogadores da seleção jogam na Europa ou Neymar está machucado, então o Brasil não vence a Argentina.

(k). Basta mais um ponto na carteira de motorista para Sormany perder a aposta ou Juca terá que pagar o almoço.

(l). Se Lucas é irmão de Pedro, então Natalia vai casar com Gabriel e Francisco não voltará para a Espanha.

(m). Se $\frac{10^2}{50} = 2!$, então o $\pi - 2x = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$.

(n). Se a terra é plana e existe chip nas vacinas, então o Brasil vai conquistar o país de Juvenal.

(o). A bola é preta.

(p). Eu tirei foto com meu avô hoje.

(q). $3 < 5$ segue do fato de que o voto no papel é mais rápido que o voto eletrônico.

(r). O sorvete ser de uva segue do fato de Juliane estar grávida.

(s). Bill escreveu o DOS em 1978 é condição necessária para *Apple Inc.* ter lançado o *Apple* 2.

(t). Se o Cruzeiro é um time da primeira divisão, então todo pato come macarrão ou não é o caso de Patricia ser professora de matemática.

Questão 1.2 Determine as frases simples (ou atômicas) que compõem as proposições e predicados que se seguem.

(a). Juca não irá à festa, mas Pedro irá ou Flaviana irá.

(b). Fui com a minha família ontem ao parque e me diverti muito.

(c). Juca vai com a família ou irá sozinho, mas se Anabel aparecer no parque, então Juca e Paula não vão se divertir.

(d). Se Paulo chegou, então ele está na sala. Mas não é verdade que Paulo chegou.

(e). Valdi toca clarinete somente se Katia tocar flauta ou Shizue sabe desenhar com carvão.

(f). Eu sou aluno da computação somente se eu passei em Matemática discreta. Mas eu não passei em Introdução à programação ou reprovei todas as disciplinas do primeiro período.

(g). Para qualquer navio no porto, existe um marinheiro bêbado no bar ou todos os soldados estão dormindo na praia.

(h). Se Romero tivesse vindo ver o filme, então Katia teria ido para a sorveteria com ele. Mas Romero foi para a praia com Julinha.

(i). Todos os números primos são números impares ou o número π é o pode ser escrito como produto de números primos.

(j). Vou à padaria e, se estiver fazendo frio, então Juliane vai tomar sopa.

(k). Não é verdade que a terra é esférica e não existem pessoas morando em Recife.

(l). Shizue e Valdi foram para o Chile, mas Luiza também foi.

(m). Basta que eu tire 8 em Matemática discreta para eu ter uma noite de festa.

(n). A gripe é uma condição suficiente para ser declarado morto.

(o). Se para toda flor existe um vaso, então os jardins de Jaçanã são cheios de cerejeiras.

(p). Se ontem choveu a noite toda e hoje é meu aniversário de 14 anos, então se Pedro vai à Califórnia, então Tom e Frajola são amigos do Manda-chuva.

(q). Não é verdade que Shizue sabe desenhar com carvão, mas sabe desenhar com lápis e pincel.

(r). Se o Catatau comeu o mel e o Puffy saiu para passear, então o Jack ou Jerry é vizinho do Mickey.

(s). Para todo homem existe uma mulher que é sua mãe ou Valdi toca clarinete.

(t). Existe um carro amarelo e, se todas as bicicletas são roxas, então não é verdade que existem motos que são azuis.

Capítulo 2

Lógica Proposicional

"Ou a matemática é muito grande para a mente humana, ou a mente humana é mais do que uma máquina."

Kurt Gödel

2.1 A Linguagem Proposicional

Este capítulo tem como objetivo apresentar ao leitor o cálculo proposicional, ou seja, o estudo da lógica proposicional, em seus dois aspectos já bem estabelecido por matemáticos e filósofos, isto é, sua sintaxe e sua semântica[1]. Assim esse capítulo começa com a formalização da linguagem da lógica proposicional, isto é, a linguagem proposicional. A seguir é apresentado formalmente a noção de alfabeto proposicional.

[1] O aspecto pragmático da lógica, por ainda se encontrar em um estágio primitivo de seu desenvolvimento, do ponto de vista matemático, não será abordado neste texto, para este assunto ver [31, 33].

Definição 2.1 (Alfabeto Proposicional) O alfabeto proposicional corresponde ao conjunto enumerável $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_o \cup \Sigma_p \cup \{\bot\}$ onde:

- $\Sigma_s = \{A, \cdots, P, Q, R, P_1, Q_{12}, \cdots\}$ é um conjunto enumerável, chamado conjunto dos átomos;
- $\Sigma_o = \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow\}$ é o conjunto dos símbolos operacionais[a];
- $\Sigma_p = \{(,)\}$ é o conjunto dos símbolos de pontuação e
- $\bot$ é o símbolo do absurdo.

[a] Também é comum encontrar na literatura (ver [28]) a nomenclatura conjunto de conectivos.

Em algumas outras obras tais como [8] também é mencionado o símbolo $\top$ para designar a tautologia, entretanto, como explicado no próprio texto de [8], tal símbolo é apenas um açucar sintático para a expressão $(\neg\bot)$.

Definição 2.2 (Linguagem Proposicional) Dado o alfabeto proposicional Σ, a linguagem proposicional, denotada por $\mathcal{L}$, é menor conjunto de fórmulas bem formadas (fbf) indutivamente gerado, tal que cada fbf $\phi \in \mathcal{L}$ é construído pela gramática:

$$\phi \quad ::= \quad x \mid (\neg\phi) \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \Rightarrow \phi)$$

onde $x \in \Sigma_s \cup \{\bot\}$.

Exemplo 2.1.1 Dado $P, Q, R, S, T \in \Sigma_s \cup \{\bot\}$ tem-se que:

(a) P

(b) $(P \wedge Q)$

(c) $(R \Rightarrow S)$

(d) $((Q \vee S) \Rightarrow T)$

são todas palavras da linguagem $\mathcal{L}$. Por outro lado, as palavras:

(e) $P\wedge$

(f) $\Rightarrow Q$

(g) $P \vee \wedge Q$

não são palavras da linguagem $\mathcal{L}$, pois nenhuma é uma fbf.

Na prática, o número das parênteses incomoda bastante, assim sempre que possível é interessante remover o excesso deles. E para remover os parênteses mais externos de qualquer fórmula, para isso se considera como dito em [37], a precedência dos símbolos dos conectivos da linguagem proposicional, sendo tal precedência expressa a seguir.

Ordem	Conectivo
1	$\neg$
2	$\wedge$
3	$\vee$
4	$\Rightarrow$

Tabela 2.1: Tabela de precedência dos conectivos proposicionais.

Ou seja, a Tabela 2.1 descreve que o símbolo $\neg$ tem precedência maior do que $\wedge$, sendo que $\wedge$ tem precedência maior do que $\vee$ e, por fim, $\vee$ tem precedência maior do que $\Rightarrow$.

Exemplo 2.1.2 Usando a precedência dos conectivos da linguagem proposicional tem-se a seguinte tabela de simplificações de fbf's:

Fbf	Fbf simplificada
$(\neg(\neg(\neg(\neg P))))$	$\neg\neg\neg\neg P$
$((P \vee Q) \Rightarrow (R \wedge (\neg S)))$	$P \vee Q \Rightarrow R \wedge \neg S$
$((P \wedge Q) \vee R)$	$P \wedge Q \vee R$

É possível enriquecer[2] a linguagem proposicional adicionando mais símbolos operacionais no alfabeto da mesma, essa introdução é feita utilizando o conceito de abreviação. Uma abreviação na lógica formal consiste na ação de usar um novo símbolo para criar uma nova palavra não presente originalmente na linguagem proposicional, mas que representa uma palavra da linguagem.

[2] No sentido de adicionar mais símbolos ao alfabeto.

Um exemplo do que foi descrito no paragrafo anterior é o símbolo $\top$, que na verdade é uma abreviação para a palavra $(\neg\bot)$, outro exemplo de abreviação, como dito em [28], é o uso do símbolo $\Leftrightarrow$, usando tal símbolo como um Conectivo lógico, tem-se que $\alpha \Leftrightarrow \beta$ é a abreviação da palavra $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$ com $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, vale salientar que o símbolo $\Leftrightarrow$ também pode ser usado para representa uma relação de equivalência semântica [3, 11, 12].

De fato, muitos dos símbolos operacionais que foram tomados como símbolos básicos do alfabeto proposicional (Definição 2.1) poderiam ser removidos, pois como muito bem explicado em [3, 28] a lógica proposicional pode ser definida sobre a linguagem que contém apenas os símbolos operacionais de $\Rightarrow$ e $\neg$, os demais símbolos podem ser obtidos via abreviação sem qualquer perda no estudo da lógica proposicional, para mais detalhes ver [3].

2.2 Sistema Dedutivo

A ideia de sistemas dedutivos para a lógica formal remonta aos trabalhos publicados[3] no ano de 1934 pelo matemático e filósofo alemão Gerhard Gentzen (1909-1945) e pelo lógico polonês Stanisaw Jakowski (1906-1965). Existem diversos sistemas dedutivos para a lógica proposicional, cada um possuindo suas próprias características, vantagens e desvantagens, no entanto, todos os sistemas dedutivos compartilham a característica em comum de possuírem um conjunto finito de regras de inferência, esse conjunto de regras de inferência é também chamado de sistema regras ou sistema de dedução [11].

[3] Esses trabalhos podem ser encontrados re-editados respectivamente em [35] e [22].

O sistema dedutivo introduzido por Gentzen e Jakowski é conhecido por dedução natural, aqui ele será apresentado de forma similar a exposição feita em [28]. O conjunto de regras de inferência da dedução natural e composto pelas regras: de introdução e eliminação de conectivos, regra de reiteração, introdução de hipóteses e a regra do absurdo. Entretanto, antes de apresentar as regras do sistema de dedução natural e conveniente apresentar o conceito de demonstração, para isso deve-se escolher uma notação para as provas da dedução natural.

Existem diversas formas de se escrever (ou representar) uma demonstração no sistema de dedução natural, entre elas destacam-se as árvores de prova de Gentzen [3], o estilo linear [9, 29] e o estilo de Fitch [13, 28].

Neste texto será adotado o estilo de Fitch como modelo padrão para a escrita das demonstrações do sistema de dedução natural para a lógica proposicional, assim é conveniente apresentar de forma sucinta o estilo de Fitch. O estilo de Fitch foi introduzido pelo lógico americano Frederic Brenton Fitch (1908-1987) e corresponde a diagramas hierárquicos formados por linhas e barras (verticais e horizontais) que representam o raciocínio para a partir de um conjunto de premissas se obter uma determinada conclusão ou objetivo (em inglês *goal*).

O diagrama de Fitch é organizado por linhas numeradas, onde cada linha i pode conter uma única palavra de $\mathcal{L}$, sendo essa palavra uma premissa ou sendo ela obtida pela aplicação de alguma regra de inferência sobre uma ou mais linhas anteriores a linha i.

As barras verticais nos diagramas de Fitch são usadas de duas formas:

(1) Para separar a demonstração em escopos, sendo que um escopo consiste de uma sequência de várias linhas (ou passos) para demonstrar uma conclusão.

(2) Como um mecanismo para saber quais palavras de $\mathcal{L}$ estão ativas[4] na prova, como explicado em [28].

[4] Uma palavra de $\mathcal{L}$ está ativa em uma demonstração, enquanto o escopo da mesma está aberto na demonstração.

As barras horizontais no diagrama de Fitch indicam a divisão entre as afirmações que estamos assumindo (nossas premissas e (ou) hipóteses) e as palavras que se seguem delas, sejam conclusões intermediárias ou nosso objetivo final. No caso das hipóteses a barra horizontal também cria um novo "escopo", isto é, adiciona uma indentação em relação ao escopo anterior, vale salientar que cada escopo é na verdade uma prova para um (sub-)objetivo.

Por fim, é comum na notação dos diagramas de Fitch escrever mais à direita de cada linha a regra de inferência que gerou a palavra na linha, ou o fato da palavra ser uma premissa ou hipótese. Agora pode-se apresentar formalmente o conceito de prova que será adotado neste capítulo.

Definição 2.3 (Prova) Uma prova para $\alpha \in \mathcal{L}$ consiste de um diagrama de Fitch como uma quantidade finita de linhas, de forma que a última linha contém a palavra α e cada linha i anterior contém uma palavra $\beta_i \in \mathcal{L}$ tal que β_i ou é uma premissa ou é obtida via aplicação de alguma regra de inferência.

Agora pode-se definir precisamente o conceito de relação de consequência sintática sobre a linguagem $\mathcal{L}$.

Definição 2.4 (Consequência Sintática) Seja $\mathcal{L}$ a linguagem proposicional, dado $\alpha \in \mathcal{L}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, diz-se que α é consequência sintática de Γ, denotado por $\Gamma \vdash \alpha$, sempre que existir uma prova de α a partir do conjunto de premissas Γ.

A seguir são apresentadas as regras de inferência do sistema de dedução natural, aqui será iniciada pelas regras que não envolvem diretamente os símbolo operacionais, isto é, que não age diretamente para eliminar ou introduzir os elementos de Σ_o na demonstração.

Definição 2.5 (Regra das premissas) Se $\Gamma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ é um conjunto finitos de premissas, então a regra das premissas fixa que a construção do diagrama de Fitch para uma prova de $\Gamma \vdash \alpha$ dispões nas n primeiras linhas do diagrama as n premissas contidas Γ, onde na linha i se encontra a premissa α_i, além disso, existe uma barra vertical contínua[a] a esquerda das premissas e após a linha n há uma barra horizontal separando as promissas do resto da prova, ou seja:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \alpha_1 & \text{Premissa} \\
\vdots & \vdots & \\
n & \alpha_n & \text{Premissa} \\
\cline{2-2}
\vdots & \vdots &
\end{array}
$$

[a] Cada linha vertical contínua é um escopo dentro da demonstração.

Exemplo 2.2.1 A prova de $\{P, Q\} \vdash P \wedge Q$ pode ser iniciada usando a regra das premissas de forma que é obtido o seguinte diagrama inicial:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & P & \text{Premissa} \\
2 & Q & \text{Premissa} \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

Atenção Obviamente, uma vez que, Γ é um conjunto seu elementos não possuem uma ordem explicita, assim não existe diferença entre o diagrama do Exemplo 2.2.1 com um diagrama em que Q esteja na linha 1, e P na linha 2.

Seguindo com as regras mais básicas do sistema de dedução natural tem-se a regra de reiteração, repetição, copia ou clonagem, aqui esta regra será denotada apenas por REI.

Definição 2.6 (Regra da reiteração) Em uma demonstração sempre é possível repetir uma palavra $\beta \in \mathcal{L}$ que já foi obtida em uma linha i durante a prova, desde que o escopo que contém β ainda esteja ativo[a]. Na notação de Fitch tem-se:

$$
\begin{array}{r|ll}
\vdots & \vdots & \\
i & \beta & \\
\vdots & \vdots & \\
n & \beta & \text{REI}, i \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
$$

[a] A noção de escopo ativo diz respeito se uma (sub-)prova foi concluída ou ainda está em desenvolvimento, este conceito será melhor trabalhado mais adiante.

Exemplo 2.2.2 Em uma prova de $\{P, Q\} \vdash P \wedge (P \wedge Q)$ após aplicar a regra das premissas pode-se aplicar a regra de reiteração na linha 1 e com isso é obtido uma segunda "instância" da proposição P:

1	P	Premissa
2	Q	Premissa
3	P	REI, 1

Agora que já foram apresentadas as regras que não agem diretamente sobre os símbolos operacionais (de conectivos) pode-se dá sequência no texto apresentando as regras de inferência do sistema de dedução natural que atuam diretamente sobre os símbolos.

Atenção A partir deste ponto serão apresentadas as regras de introdução e elimitaçã dos operadores (conectivos), assim sempre que o símbolo vier seguindo de I significa que a regra é de introdução, e quando vier seguido de E a regra será de eliminação.

Definição 2.7 (Regra $\wedge I$) Se em uma prova foram deduzidas as palavras $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ nas linhas i e j respectivamente, então pode-se deduzir a palavra $\alpha \wedge \beta$ em uma linha k com $i < j < k$, na notação do diagrama de Fitch tem-se:

$\vdots$	$\vdots$	
i	α	
$\vdots$	$\vdots$	
j	β	
$\vdots$	$\vdots$	
k	$\alpha \wedge \beta$	$\wedge$I, i, j
$\vdots$	$\vdots$	

A regra de introdução da conjunção impõe que a palavra que está na linha i seja fixada à esquerda do símbolo $\wedge$ e a palavra na linha j seja fixada à direita do símbolo $\wedge$. Entretanto, isso pode ser facilmente contornado, imagem que na linha i aparece a palavra β e apenas na linha j (com $i < j$) se encontra o α, mas se deseja obter a palavra $\alpha \wedge \beta$, bem pela Definição 2.7 não seria possível, entretanto, sempre se pode usar a regra descrita na Definição 2.6 para copiar β para uma linha $j + k$, e então obter após isso a palavra $\alpha \wedge \beta$.

Exemplo 2.2.3 Para concluir a prova de $\{P, Q\} \vdash P \wedge Q$ iniciada no Exemplo 2.2.1 basta aplicar a regra de introdução da conjunção nas linhas 1 e 2, como pode ser visto a seguir.

1	P	Premissa
2	Q	Premissa
3	$P \wedge Q$	$\wedge$I, 1, 2

Exemplo 2.2.4 A prova de $\{P, Q, S\} \vdash S \wedge (P \wedge Q)$ é dada por:

1	P	Premissa
2	Q	Premissa
3	S	Premissa
4	$P \wedge Q$	$\wedge$I, 1, 2
5	$S \wedge (P \wedge Q)$	$\wedge$I, 3, 4

A próxima regra é a eliminação da conjunção, tal regra possui duas formas o que contrasta com a regra da introdução da conjunção que possui apenas uma única forma, note que o operador $\wedge$ combina duas palavras $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, assim quando tal operador for removido deve-se optar por qual das duas palavras será mantida como uma conclusão (intermediária ou final) da prova. A seguir é definida formalmente a regra de eliminação de conjunção.

Definição 2.8 (Regra $\wedge E$) Se em uma prova for deduzida a palavra $\alpha \wedge \beta$ na linha i, então pode-se deduzir a palavra α ou então a palavra β em uma linha j com $i < j$, na notação do diagrama de Fitch tem-se:

$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	
i	$\alpha \wedge \beta$			i	$\alpha \wedge \beta$	
$\vdots$	$\vdots$		ou	$\vdots$	$\vdots$	
j	α	$\wedge$E, i		j	β	$\wedge$E, i
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	

Agora será aberto um parêntese na apresentação das regras de inferência dos símbolos operacionais para que possa ser discutido neste texto a noção de prova hipotética. As provas hipotéticas são muito importantes dentro do sistema de dedução natural, tais provas com dito em [28], podem ser pensadas como sendo um ambiente (ou escopo) de sub-prova em que além das premissas que iniciaram a prova são assumidas outras informações na forma de hipóteses.

Como argumentado em [9, 28], uma prova hipotética surge quando a regra de introdução hipótese é aplicada, e ao se introduzir essa nova hipótese na prova é gerado um novo escopo dentro da prova que se estava demonstrando, isto é, é criada uma sub-prova que terá seu próprio objetivo.

Definição 2.9 (Regra de introdução de hipótese) Dado uma demonstração com n passos, se for necessário assumir uma hipótese $\beta \in \mathcal{L}$ no passo $n+1$, então é inserida a hipótese β junto com uma barra vertical de escopo, e abaixo de β é inserida a barra horizontal de separação para destacar a hipótese, aqui será usado a palavra **Assuma** para referenciar a regra de introdução de hipótese[a].

$\vdots$	$\vdots$		
n	$\vdots$		
$n+1$		β	Assuma
$\vdots$		$\vdots$	

[a] Na literatura em língua inglesa é comum o uso do termo *Assumption*.

Como dito em [11], uso da regra de inferência de introdução de hipótese está intimamente ligada ao uso da regra de introdução da implicação definida a seguir, por isso a necessidade de apresenta-lá antes da regra de introdução da implicação.

Definição 2.10 (Regra $\Rightarrow I$) Se partindo de uma suposição hipotética α na linha m for possível deduzir um certo β na linha n com $m < n$, então no escopo externo da prova hipotética é concluído na linha $n+1$ que $\alpha \Rightarrow \beta$, na notação dos diagrama de Fitch tem-se:

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & \quad \alpha & \text{Assuma} \\
\vdots & \quad \vdots & \\
n & \quad \beta & \\
n+1 & \alpha \Rightarrow \beta & \Rightarrow\text{I}, m\text{–}n \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Note que a regra de introdução da implicação pode ser vista como um mecanismo que desativa um escopo de prova, isto é, quando a mesma é aplicada um escopo de prova terá sido completado e assim estará desativado.

Exemplo 2.2.5 Para provar que a $P \Rightarrow P$ é consequência sintática de um conjunto vazio de premissas utiliza-se a combinação das regras de introdução de hipótese, reiteração e da introdução da implicação como pode ser visto pelo diagrama a seguir.

$$
\begin{array}{lll}
1 & \quad P & \text{Assuma} \\
2 & \quad P & \text{REI, 1} \\
3 & P \Rightarrow P & \Rightarrow\text{I, 1–2}
\end{array}
$$

Atenção Ao desativar um escopo de prova todas as palavras contidas entre as linhas i e j, que forma a prova, não podem mais ser utilizadas na sequência da demonstração, isso ocorre pela razão de tais palavras só existirem no escopo “local” da sub-prova que foi concluída, ou seja, as palavras internas a uma sub-prova são similares a variáveis internas a um sub-programa, isto é, só existem dentro do escopo em que foram criadas ou derivadas.

Aproveitando o Exemplo 2.2.5, antes de seguir o texto com a próxima regra de inferência é interessante introduzir ao leitor a ideia de teorema, este conceito é extremamente importante no estudo de qualquer lógica e o mesmo é descrito formalmente a seguir.

Definição 2.11 (Teorema) Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem formal[a] e seja $\vdash$ uma relação de consequência sintática sobre $\mathcal{L}$, uma palavra $\alpha \in \mathcal{L}$ é dita ser um teorema sempre que $\emptyset \vdash \alpha$[b].

[a] A palavra formal aqui diz respeito a ideia de sabe-se precisamente a forma de todas as palavras contidas na linguagem.

[b] É também comum encontrar na literatura a notação $\vdash \alpha$ em vez de $\emptyset \vdash \alpha$.

Atenção Dizer que α é um teorema, significa que α é uma consequência direta do próprio sistema sintático da linguagem, isto é, que α é consequência das próprias regras de inferência, sem que haja a necessidade da existência de premissas.

Usando apenas as regras de inferência apresentadas até este ponto do texto no próximo exemplo será mostrado um clássico teorema da linguagem proposicional.

Exemplo 2.2.6 Para qualquer $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ tem-se o seguinte diagrama de Fitch:

1	$\alpha \wedge \beta$	Assuma
2	β	$\wedge$E, 1
3	α	$\wedge$E, 1
4	$\beta \wedge \alpha$	$\wedge$I, 2, 3
5	$(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\beta \wedge \alpha)$	$\Rightarrow$I, 1–4

Portanto, para qualquer $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ tem-se que $\vdash \alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta \wedge \alpha$, ou seja, a palavra $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\beta \wedge \alpha)$ é um teorema da linguagem $\mathcal{L}$.

Prosseguindo com a apresentação das regras de inferência do sistema de dedução natural a seguir será definida formalmente a regra de eliminação da implicação, também conhecida como *modus ponens*, que surge da expressão em latin, *modus ponendo ponens*, que em português pode ser traduzido como: **o modo de afirmar, afirmando**.

Definição 2.12 (Regra $\Rightarrow$E) Se em uma prova na linha i existe uma palavra α e em uma linha j existe uma palavra $\alpha \Rightarrow \beta$ com $i < j$, então na linha k tal que $j < k$ é possível deduzir a palavra β, em diagrama tem-se:

i	α	
$\vdots$	$\vdots$	
j	$\alpha \Rightarrow \beta$	
$\vdots$	$\vdots$	
k	β	$\Rightarrow$E, i, j
$\vdots$	$\vdots$	

Exemplo 2.2.7 A prova de $\{P \Rightarrow Q, P \wedge R\} \vdash Q$ é dado pelo seguinte diagrama:

1	$P \Rightarrow Q$	Premissa
2	$P \wedge R$	Premissa
3	P	$\wedge$E, 2
4	$P \Rightarrow Q$	REI, 1
5	Q	$\Rightarrow$E, 3, 4

Atenção O leitor deve ficar atento ao fato de que a Definição 2.12 especifica que o termo hipotético α deve aparecer na prova antes do termo condicional $\alpha \Rightarrow \beta$, para que se possa aplicar a regra $\Rightarrow$E.

A próxima regra de inferência do sistema de dedução natural que será apresentada neste texto é chamada de regra de introdução do absurdo, a mesma é utilizada para introduzir na demonstração o símbolo do absurdo ($\perp$), de fato, é comum na literatura em língua inglesa principalmente na área de lógica algébrica achar o símbolo do absurdo sendo chamado *bottom*.

Atenção O $\perp$ não é um operador de fato, entretanto, é uma palavra tão importante que no estudo da lógica tem uma regra de introdução própria.

Definição 2.13 (Regra de introdução do absurdo ($\perp I$)) Se na linha i de uma prova existe uma palavra β e no mesmo escopo de prova na linha j existe uma palavra $\neg\beta$ com $i < j$, então na linha k desta prova é deduzido $\perp$ com $j < k$, em diagrama tem-se:

$$\begin{array}{c|ll}
\vdots & \vdots & \\
i & \beta & \\
\vdots & \vdots & \\
j & \neg\beta & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \perp & \quad \perp \text{ I}, i, j \\
\vdots & \vdots &
\end{array}$$

Exemplo 2.2.8 Uma prova de $\{P \wedge Q, R \wedge \neg P\} \vdash \perp$ é dado pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{c|ll}
1 & P \wedge Q & \text{Premissa} \\
2 & R \wedge \neg P & \text{Premissa} \\ \cline{2-2}
3 & P & \wedge\text{E}, 1 \\
4 & \neg P & \wedge\text{E}, 2 \\
5 & \perp & \perp \text{ I}, 3, 4
\end{array}$$

Definição 2.14 (Regra $\neg I$) Se existe uma sub-prova iniciada com α na linha i que deduz $\perp$ em uma linha j tal que $i < j$, então pode-se fechar a sub-prova e na linha $j+1$ introduzir a palavra $\neg\alpha$. Em notação de diagrama de Fitch tem-se:

$$\begin{array}{c|l|ll}
\vdots & \vdots & & \\
i & & \alpha & \\ \cline{3-3}
\vdots & & \vdots & \\
j & & \perp & \\
j+1 & \neg\alpha & & \neg\text{I}, i\text{–}j \\
\vdots & \vdots & &
\end{array}$$

Exemplo 2.2.9 Uma prova de $\{P \Rightarrow \neg Q, Q\} \vdash \neg P$ é descrita pelo diagrama a seguir.

$$\begin{array}{c|l|ll}
1 & P \Rightarrow \neg Q & & \text{Premissa} \\
2 & Q & & \text{Premissa} \\ \cline{2-2}
3 & & P & \text{Assuma} \\ \cline{3-3}
4 & & P \Rightarrow \neg Q & \text{REI}, 1 \\
5 & & Q & \text{REI}, 2 \\
6 & & \neg Q & \Rightarrow\text{E}, 3, 4 \\
7 & & \perp & \perp \text{ I}, 5, 6 \\
8 & \neg P & & \neg\text{I}, 3\text{–}7
\end{array}$$

Definição 2.15 (Regra $\neg E$) Sempre que existir uma palavra $\neg\neg\alpha$ em uma linha i, então em uma linha j pode-se deduzir α com $i < j$. Em notação de diagrama tem-se:

$$
\begin{array}{r|ll}
\vdots & \vdots & \\
i & \neg\neg\alpha & \\
\vdots & \vdots & \\
j & \alpha & \neg\text{E}, i \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
$$

E possível interpretar esta regra como representado a ideia de que negar uma palavra (argumento) duas vezes é o mesmo que afirmar tal palavra (argumento).

Exemplo 2.2.10 O seguinte resultado $\vdash (P \wedge \neg P) \Rightarrow Q$ é um dos mais famosos e controversos teoremas envolvendo o operador de implicação, para detalhes ver [28], na demostração pode-se ver o uso da regra de eliminação da negação para provar tal teorema.

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & P \wedge \neg P & & \text{Assuma} \\
\hline
2 & & \neg Q & \text{Assuma} \\
3 & & P \wedge \neg P & \text{REI}, 1 \\
4 & & P & \wedge\text{E}, 3 \\
5 & & \neg P & \wedge\text{E}, 3 \\
6 & & \perp & \perp\text{I}, 4, 5 \\
7 & \neg\neg Q & & \neg\text{I}, 2\text{–}6 \\
8 & Q & & \neg\text{E}, 7 \\
9 & (P \wedge \neg P) \Rightarrow Q & & \Rightarrow\text{I}, 1\text{–}8
\end{array}
$$

Por fim, serão agora apresentadas as regras de introdução e eliminação para a disjunção para o sistema de dedução natural. Pela regra de eliminação da disjunção é um pouco mais complicada.

Definição 2.16 (Regra $\vee E$) Dado $\alpha \vee \beta$ na i-ésima linha se for possível deduz γ a partir de α e β como hipótese, então na linha n tal que $i < n$ é deduzida a palavra γ, ou seja:

$$
\begin{array}{l|lll}
i & \alpha \vee \beta & & \\
\vdots & \vdots & & \\
j & & \alpha & \\
\vdots & & \vdots & \\
j + l_1 & & \gamma & \\
k & & \beta & \\
\vdots & & \vdots & \\
k + l_2 & & \gamma & \\
\vdots & \vdots & & \\
n & \gamma & & \vee\text{E}, i, (j\text{–}j + l_1, k\text{–}k + l_2)
\end{array}
$$

Exemplo 2.2.11 A prova de $\vdash ((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$ usa a regra de eliminação da disjunção.

1	$(P \vee Q) \wedge \neg P$	Assuma
2	$P \vee Q$	$\wedge$E, 1
3	$\neg P$	$\wedge$E, 1
4	P	Assuma
5	$\neg Q$	Assuma
6	P	REI, 4
7	$\neg P$	REI, 3
8	$\bot$	$\bot$ I, 6, 7
9	$\neg\neg Q$	$\neg$I, 5–8
10	Q	$\neg$E, 9
11	Q	Assuma
12	Q	REI, 11
13	Q	$\vee$E, 2, (4–10, 11–12)
14	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$	$\Rightarrow$I, 1–13

A próxima regra é reponsável por introduzir a disjunção, em alguma obras tais como [8] é mencionado que ela também é conhecida como regra aditiva, por ser capaz de introduzir símbolos que não estava inicialmente expostos no conjunto de premissas. A introdução da disjunção apesar de apresentar duas formas de aplicação, é muito mais simples que a regra remoção apresentada anteriormente.

Definição 2.17 (Regra $\vee I$) Se em uma prova aparece na linha i uma palavra α, então em uma linha j tal que $i < j$ pode-se deduzir para algum $\beta \in \mathcal{L}$ uma das seguintes palavras: $\alpha \vee \beta$ ou $\beta \vee \alpha$, ou seja:

$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	
i	α			i	α	
$\vdots$	$\vdots$		ou	$\vdots$	$\vdots$	
j	$\alpha \vee \beta$	$\vee$I, i		j	$\beta \vee \alpha$	$\vee$I, i
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	

Exemplo 2.2.12 A prova de $\{P, (Q \wedge S)\} \vdash S \vee \neg P$ é dada por:

1	P	Premissa
2	$Q \wedge S$	Premissa
3	S	$\wedge$E, 2
4	$S \vee \neg P$	$\vee$I, 3

Exemplo 2.2.13 Uma simples prova da relação de consequência sintática $\{\neg S \Rightarrow (P \wedge Q), \neg S\} \vdash$

$Q \vee \neg R$ utilizando a regra de introdução da disjunção pode ser vista a seguir.

1	$\neg S$	Premissa
2	$\neg S \Rightarrow (P \wedge Q)$	Premissa
3	$P \wedge Q$	$\Rightarrow$E, 1, 2
4	Q	$\wedge$E, 3
5	$Q \vee \neg R$	$\vee$I, 4

Para prosseguir serão apresentadas as propriedades do sistema dedutivo, os próximos resultados são meta-teoremas do sistema em si, isto é, são resultados da natureza do sistema dedutivo em si e não palavras que podem ser deduzidas de um conjunto vazio de hipóteses.

Teorema 1 (Teorema da dedução) Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ e $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$. Se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, então $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

Prova Suponha que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, assim existe um diagrama da forma:

1	δ_1	Premissa
$\vdots$	$\vdots$	
m	δ_m	Premissa
$m+1$	α	Premissa
$\vdots$	$\vdots$	
n	β	

com $\delta_i \in \Gamma$ para todo $i \leq m$. Assim pode-se iniciar uma nova prova a partir das premissas $\delta_1, \cdots, \delta_m$ do conjunto Γ, em seguida é iniciada uma sub-prova hipotética tomando α como hipótese, ou seja, começa-se a desenvolver o seguinte diagrama:

1	δ_1	Premissa
$\vdots$	$\vdots$	
m	δ_m	Premissa
$m+1$	α	Assuma

Em seguida usando a regra REI é possível "copiar" todas as premissas para o escopo da sub-prova, atualizando o diagrama para a forma:

1	δ_1	Premissa
$\vdots$	$\vdots$	
m	δ_m	Premissa
$m+1$	α	Assuma
$m+1+1$	δ_1	REI, 1
$\vdots$	$\vdots$	
$2m+1$	δ_m	REI, m

Agora basta desenvolver a sub-prova utilizando exatamente a mesma sequência de regras utilizadas[a] na prova original de $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, e assim será possível deduzir a palavra β na sub-prova após n linhas depois da última premissa copiada com REI, ou seja, o diagrama fica com a seguinte forma:

1	δ_1	Premissa
$\vdots$	$\vdots$	
m	δ_m	Premissa
$m+1$	$\quad \alpha$	Assuma
$m+1+1$	$\quad \delta_1$	REI, 1
$\vdots$	$\quad \vdots$	
$2m+1$	$\quad \delta_m$	REI, m
$\vdots$	$\quad \vdots$	
$2m+n+1$	$\quad \beta$	

Portanto, utilizando a regra de introdução da implicação entre as linhas $m+1$ e $2m+n+1$, é obtida na linha $2m+n+2$ a palavra $\alpha \Rightarrow \beta$, ou seja, tem-se o seguinte diagrama:

1	δ_1	Premissa
$\vdots$	$\vdots$	
m	δ_m	Premissa
$m+1$	$\quad \alpha$	Assuma
$m+1+1$	$\quad \delta_1$	REI, 1
$\vdots$	$\quad \vdots$	
$2m+1$	$\quad \delta_m$	REI, m
$\vdots$	$\quad \vdots$	
$2m+n+1$	$\quad \beta$	
$2m+n+2$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\Rightarrow$I, $m+1$–$2m+n+1$

O que mostra que, $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, concluindo assim a prova. $\square$

[a] Vale destacar que obviamente devem ser atualizadas as informações sobre as linhas de aplicação das regras, com respeito as linha do novo diagrama.

O resultado que se segue é uma consequência direta do Teorema da dedução.

Corolario 1 Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ tal que $\Gamma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ e $\beta \in \mathcal{L}$. Se $\Gamma \vdash \beta$, então $\vdash \alpha_1 \Rightarrow (\cdots(\alpha_n \Rightarrow \beta))$.

Prova A prova deste corolário consiste simplesmente de n aplicações do Teorema da dedução (Teorema 1). $\square$

Teorema 2 Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ e $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$. Se $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Prova A prova deste teorema apresenta uma simetria de raciocínio com o raciocínio apresentado pela prova do Teorema da dedução, assim sendo, a prova deste teorema irá ficar como exercício ao leitor. $\square$

2.3 Sistema Axiomático L

Uma abordagem alternativa para o sistema de dedução natural são os chamados sistemas axiomáticos[5], esses sistemas introduzidos inicialmente pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943), consistem em adotar um conjunto finito de axiomas e um número reduzido de regras de inferência [28, 32].

[5] Em algumas referências como por exemplo [3, 18] é usado o termo teorias formais em vez de sistemas axiomáticos.

Antes de prosseguir para definir precisamente a noção de sistemas axiomáticos é necessário antes falar sobre provas para o sistemas axiomáticos.

2.4 Sistema Semântico

A semântica da lógica proposicional foi descrita inicialmente pelo matemático inglês George Boole (1815-1864) em seu trabalho [5, 6], entretanto, Alfred Tarski[6] (1901-1983) apresentou uma formulação mais rigorosa para computar os valores lógicos das palavras da linguagem proposicional em 1936.

[6] O artigo de Tarski pode ser consultado na versão re-editada em [36].

A semântica é responsável por introduzir significado para as palavras de uma linguagem formal, no caso da linguagem proposicional clássica[7], as palavras podem ter seu significado como verdadeiro ou falso. Antes de apresentar formalmente o conceito de semântica da linguagem proposicional é necessário definir a ideia de função de valoração.

[7] Clássica aqui diz respeito a lógica como apresentada pelo matemático, lógico e filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1925).

Definição 2.18 (Valoração) Uma valoração dos símbolos proposicionais é uma função total $\rho : \Sigma_s \rightarrow \{0, 1\}$.

O conjunto $\{0, 1\}$ na Definição 2.18 é chamado de conjunto dos valores de representação de verdade, em muitas apresentações de lógica usam V e F para representar os dois valores de verdade (a saber, verdadeiro e falso) em vez de usar 0 e 1. Neste texto, entretanto, se optou por usar 1 (verdade) e 0 (falso), para assim, evitar confusão com variáveis em fórmulas e metavariáveis em regras de inferência, que podem ocorrer ao usar V e F. O uso de 1 e 0 também é interessante, uma vez que, tais valores tem uso comum no design de circuitos digitais [7, 20, 24] e em discussões sobre design e arquitetura de computadores [30, 34], duas áreas intimamente ligadas a lógica clássica.

A semântica da linguagem proposicional como destacado em [28] se baseia na noção de interpretação[8], sendo que, uma interpretação nada mais é do que a extensão de uma dada valoração ρ para a linguagem proposicional, usando alguma álgebra booleana [5, 6].

[8] A definição de semântica apresentada neste texto é uma definição equacional, no sentido de que, sempre existe uma equação que determina o valor semântico para qualquer que seja a palavra de $\mathcal{L}$.

Definição 2.19 (Interpretação) Dada uma valoração ρ, uma interpretação é uma função total $I_\rho : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$ definida para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ recursivamente como:

- Se $\alpha = \bot$, então $I_\rho(\alpha) = 0$.
- Se $\alpha \in \Sigma_s$, então $I_\rho(\alpha) = \rho(\alpha)$.
- $I_\rho(\neg\alpha) = 1 - I_\rho(\alpha)$.
- $I_\rho(\alpha \wedge \beta) = min(I_\rho(\alpha), I_\rho(\beta))$.
- $I_\rho(\alpha \vee \beta) = max(I_\rho(\alpha), I_\rho(\beta))$.
- $I_\rho(\alpha \Rightarrow \beta) = max(1 - I_\rho(\alpha), I_\rho(\beta))$.

Exemplo 2.4.1 Considere uma valoração ρ tal que $\rho(P) = 0, \rho(Q) = 1$ e $\rho(R) = 1$ o valor de significado da palavra $\neg(P \Rightarrow (R \wedge Q))$ é calculado por:

$$\begin{aligned} I_\rho(\neg(P \Rightarrow (R \wedge Q))) &= 1 - I_\rho(P \Rightarrow (R \wedge Q)) \\ &= 1 - max(1 - I_\rho(P), min(I_\rho(R), I_\rho(Q))) \\ &= 1 - max(1 - \rho(P), min(\rho(R), \rho(Q))) \\ &= 1 - max(1 - 0, min(1, 1)) \\ &= 1 - max(1, 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pode-se entretanto, em vez de usar a formalização equacional de interpretação (Definição 2.19), usar a noção de tabela verdade, destaca-se entretanto, que as duas definição são equivalentes.

Definição 2.20 Seja $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, a tabela verdade da conjunção possui a seguinte forma:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Referências Bibliográficas

[1] J. M. Abe. *Introdução à Lógica para a Ciência da Computação*. Arte & Ciência, 2002.

[2] W. AN and B. Russell. Principia Mathematica, 1910.

[3] B. Bedregal and B. M. Acióly. Introdução à lógica clássica para a ciência da computação. Notas de Aula, 2007.

[4] B. Bedregal, B. M. Acióly, and A. Lyra. *Introdução à Teoria da Computação: Linguagens Formais, Autômatos e Computabilidade*. Editora UnP, Natal, 2010.

[5] G. Boole. *An Investigation of the Laws of Thought: On which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, volume 2. Walton and Maberly, 1854.

[6] G. Boole. *The Laws of Thought*. Dover, New York (original edition 1854), 1957.

[7] F. G. Capuano. *Elementos de eletrônica digital*. Saraiva Educação SA, 2018.

[8] J. Carmo, P. Gouveia, and F. M. Dionísio. *Elementos de Matemática Discreta*. College Publications, 2013.

[9] I. M. Copi. *Introdução à Lógica*. Mestre Jou, 1981.

[10] J. I. da Silva Filho. Lógica Paraconsistente e Probabilidade Pragmática no Tratamento de Incertezas. *Revista Seleção Documental*, (9):16–27, 2008.

[11] E. de Alencar Filho. *Iniciação à Lógica Matemática*. NBL Editora, 2002.

[12] J. N. de Souza. *Lógica para Ciência da Computação e Áreas Afins*. Elsevier Brasil, 2008.

[13] F. B. Fitch. Symbolic Logic, An Introduction. *American Journal of Physics*, 21(3):237–237, 1953.

[14] K. Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für mathematik und physik*, 38(1):173–198, 1931.

[15] J. Halpern, Z. Manna, and B. Moszkowski. A hardware Semantics Based on Temporal Intervals. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 278–291. Springer, 1983.

[16] A. G. Hamilton. *Logic for Mathematicians*. Cambridge University Press, 1988.

[17] D. Harel et al. First-order Dynamic Logic. *Lecture Notes Computer Sciences*, (9):133, 1979.

[18] L. Hegenberg. *Lógica: Cálculo Sentencial, Cálculo de Predicados, Cálculo com Igualdades*. GEN, 3ł edition, 2012.

[19] W. Hodges et al. *A Shorter Model Theory*. Cambridge university press, 1997.

[20] B. Holdsworth and C. Woods. *Digital logic design*. Elsevier, 2002.

[21] J. E. Hopcroft, R. Motwani, and J. D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Pearson Education India, USA, 3ł edition, 2008.

[22] S. Jaskowski. On the rules of supposition in formal logic in the series. *Studia Logica: Wydawnictwo Poswiecone Logice i jej Historii*, 1934.

[23] P. Linz. *An Introduction to Formal Languages and Automata*. Jones & Bartlett Learning, New York, 2006.

[24] A. C. d. Lourenço, E. C. A. CRUZ, S. R. FERREIRA, and S. C. JÚNIOR. Circuitos digitais. *Sao Paulo, Erica*, 6, 1996.

[25] C. A. Lungarzo. La Consistencia de la Lógica Intuicionista. *Tarea*, 3:119–132, 1972.

[26] P. D. Magnus, T. Button, A. Thomas-Bolduc, R. Zach, and R. Trueman. *Forall x: Calgary. An Introduction to Formal Logic*. Fall 2020, 2020.

[27] Z. Manna and A. Pnueli. The Modal Logic of Programs. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 385–409. Springer, 1979.

[28] J. P. Martins. *Lógica e Raciocínio*. College Publications, 2014.

[29] C. A. Mortari. *Introdução à Lógica*. Unesp, 2001.

[30] M. J. Murdocca and V. P. Heuring. *Introdução à arquitetura de computadores*. Elsevier, 2001.

[31] D. A. Rodrigues. *Sobre a Lógica da Verdade Pragmática em Cálculo de Sequentes*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brasil, 2021.

[32] A. Sernadas and C. Sernadas. *Fundamentos de Lógica e Teoria da Computação*. College Publications, 2012. Coleção: Cadernos de Lógica e Computação.

[33] H. G. d. Silva. *A Lógica da Verdade Pragmática em um Sistema de Tableaux*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brasil, 2018.

[34] W. Stallings. *Arquitetura e Organização de Computadores 8a Edição*. São Paulo: Prentice Hall do Brasil, 2010.

[35] M. E. Szabo et al. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, volume 74. North-Holland Amsterdam, 1969.

[36] A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers From 1923 To 1938*. Hackett Publishing, 1983.

[37] S. I. to Logic. Operator Precedence. Acessado em 25 de Agosto de 2024 na página http://intrologic.stanford.edu/dictionary/operator_precedence.html, 2023.