Lista de Exercícios – Espaços Vetoriais
Professor Wálmisson Régis de Almeida

1) Apresentamos a seguir alguns subconjuntos de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ e das matrizes $\mathbb{M}_2$. Verifique quais deles são subestaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ relativamente às operações de soma e multiplicação por escalar usuais. Para os que são subespaços, mostrar que as condições são satisfeitas. Caso contrário, citar um contra-exemplo.

a) $S = \{(x, y) \mid y = -x\}$
b) $S = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
c) $S = \{(x, y, z) \mid x = 4y \text{ e } z = 0\}$
d) $S = \{(x, y, z) \mid y = x + 2 \text{ e } z = 0\}$
e) $S = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$
f) $S = \{(x, y, z) \mid y \geq 0\}$
g) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; d = a + b \text{ e } c = 0\right\}$
h) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; ad - bc = 0\right\}$ (Conjunto das matrizes inversíveis)

2) Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.

a) Escreva o vetor $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v.
b) Para que valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de u e v?
c) Determine uma condição entre a, b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de u e v.

3) Consideremos no espaço $\mathbb{P}_2 = \{at^2 + bt + c\,; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ (espaço vetorial dos polinômos de grau ≤ 2) os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

a) Escreva o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.
b) Escreva o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1 e p_2.
c) Determine uma condição entre a, b e c para que o vetor $at^2 + bt + c$ seja uma combinação linear de p_2 e p_3.
d) É possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3?

4) Seja o espaço vetorial $\mathbb{M}_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ e os vetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Escreva o vetor $v = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3.

5) Expresse o vetor $u = (-1, 4, -4, 6) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (3, -3, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $v_3 = (1, -1, 0, 0)$.

6) Seja S o subespaço do $\mathbb{M}_2$ dado por $S = \left\{\begin{pmatrix} a - b & 2a \\ a + b & -b \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$. Pergunta-se:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S$?
b) Qual deve ser o valor de k para que $\begin{pmatrix} -4 & k \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ pertença à S?

7) Seja o conjunto $A = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (-1,3,-1)$ e $v_2 = (1,-2,4)$. Determine:

a) O subespaço gerado por A, ou seja, $G(A)$.
b) O valor de k para que o vetor $v = (5, k, 11)$ pertença a $G(A)$.

8) Sejam os vetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,0)$ e $v_3 = (1,3,-1)$. Se $v_4 = (3,-1,k) \in G(\{v_1, v_2, v_3\})$:

a) qual é o valor de k?
b) para o valor de k encontrado, escreva v_4 como uma combinação linear de $\{v_1, v_2, v_3\}$.

9) Determine os subespaços de $\mathbb{P}_2$ gerados pelos seguintes vetores:

a) $p_1 = 2x + 2, p_2 = -x^2 + x + 3$ e $p_3 = x^2 + 2x$
b) $p_1 = x^2$ e $p_2 = x^2 + x$
c) $p_1 = 1, p_2 = x$ e $p_3 = x^2$

10) Seja o espaço vetorial $\mathbb{M}_2$. Determine o subespaço gerado pelos vetores:

a) $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
b) $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

11) Mostre que os vetores $v_1 = (2,1)$ e $v_2 = (1,1)$ geram o $\mathbb{R}^2$.

12) Mostre que os vetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$ geram o $\mathbb{R}^3$.

13) Classifique os conjuntos abaixo como LD (Linearmente Dependente) ou LI (Linearmente Independente).

a) $\{(1,3); (2,6)\}$
b) $\{(2,-1); (3,5)\}$
c) $\{(1,0); (-1,1); (3,5)\}$
d) $\{(1,-1,1); (-1,1,1)\}$
e) $\{(2,-1,0); (-1,3,0); (3,5,0)\}$
f) $\{(1,-1,-2); (2,1,1); (-1,0,3)\}$
g) $\{2 + x - x^2; -4 - x + 4x^2; x + 2x^2\}$
h) $\{1 - x + 2x^2; x - x^2, x^2\}$
i) $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right\}$

14) Determine o valor de de k para que seja LI o conjunto $\{(-1,0,2); (1,1,1); (k,-2,0)\}$.

15) Determine o valor de k para que $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{pmatrix}\right\}$ seja LD.

16) Para que valores de k o conjunto $\beta = \{(1, k); (k, 4)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$?

17) O conjunto $\beta = \{(2,-1);(-3,2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Escreva o vetor genérico $v = (x,y)$ do $\mathbb{R}^2$ como combinação linear de β.

18) Quais dos seguintes conjuntos de vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$?

a) $\{(1,1,-1);(2,-1,0);(3,2,0)\}$
b) $\{(1,0,1);(0,-1,2);(-2,1,-4)\}$
c) $\{(2,1,-1);(-1,0,1);(0,0,1)\}$
d) $\{(1,2,3);(4,1,2)\}$
e) $\{(0,-1,2);(2,1,3);(-1,0,1);(4,-1,-2)\}$

19) Quais dos seguintes conjuntos de vetores formam uma base de $\mathbb{P}_2$?

a) $\{2t^2+t-4; t^2-3t+1\}$ b) $\{1;t;t^2\}$ c) c$\{2;1-x;1+x^2\}$

20) Mostre que o conjunto $\left\{\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & -2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-3 & -2\\1 & -1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3 & -7\\-2 & 5\end{pmatrix}\right\}$ é uma base de $\mathbb{M}_2$.

21) Mostre que os polinômios $p_1 = 1+2x-3x^2$; $p_2 = 1-3x+2x^2$ e $p_3 = 2-x+5x^2$ formam uma base do espaço dos polinômios de grau ≤ 2 e calcule as coordenadas do vetor $p = -2-9x-13x^2$ na base $\beta = \{p_1;p_2;p_3\}$.

22) Determinar uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,-1,0,0)$; $v_2 = (-2,2,2,1)$; $v_3 = (-1,1,2,1)$ e $v_4 = (0,0,4,2)$.

23) Seja $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ e o conjunto $\beta = \{(0,1,1);(1,1,0);(1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Mostre que β não é base de $\mathbb{R}^3$
b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha dois elementos de β.

24) Seja o subespaço $S = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}; c = a+b \text{ e } d = a\right\}$ de $\mathbb{M}_2$.

a) Qual a dimensão de S?
b) O conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}\right\}$ é uma base de S? Justifique.
c) O conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}\right\}$ é uma base de S? Justifique.

25) Encontre uma base e a dimensão do espaço-solução dos sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y-2z-t=0\\ 2x+4y+z+t=0\\ x+2y+3z+2t=0\end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-z+3t=0\\ 2x+3y+z-t=0\\ 4x+7y-z+5t=0\end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y-z=0\\ 2x+y+3z=0\\ x+3y+4z=0\end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-2z+t=0\\ 2x+2y-4z+2t=0\end{cases}$