Lista de Exercícios – Transformações Lineares
Licenciatura em Matemática – Professor Wálmisson Régis de Almeida

1) Consideremos a transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (3x-2y, x+4y)$. Utilizando os vetores $u=(1,2)$ e $v=(3,-1)$, mostre que $T(3u+4v) = 3T(u)+4T(v)$.

2) Dada a transformação linear $T:\mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tal que $T(u)=3u$ e $T(v)=u-v$, calcule em função de u e v:

a) $T(u+v)$ b) $T(3v)$ c) $T(4u-5v)$

3) Dentre as transformações a seguir, verifique quais são lineares

a) $T(x,y) = (x-3y, 2x+5y)$
b) $T(x,y) = (x^2, y^2)$
c) $T(x,y) = (x+1, y)$
d) $T(x,y) = (senx, 0)$
e) $T(x,y) = (xy, x-y)$
f) $T(x,y) = (x-y, 3x, -2y)$
g) $T(x,y,z) = -3x+2y+z$
h) $T(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 3x \\ -y & x+2y \end{pmatrix}$
i) $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix}$
j) $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

4) Seja a aplicação $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $(x,y) \to (x+ky, x+k, y), k \in \mathbb{R}$. Verifique os valores de k para os quais a transformação é linear.

5) Determine a transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-1,1) = (3,1,2)$ e $T(0,1) = (1,1,0)$. A seguir, encontre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (-2,1,-3)$.

6) Determine a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,-1,1) = (1,1)$, $T(0,1,1) = (2,2)$ e $T(0,0,1) = (3,3)$. A seguir, determine $T(1,0,0), T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$.

7) Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (2,3)$ e $T(1,0,0) = (3,4)$. Determine $T(x,y,z)$ e a seguir determine um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = (0,0)$.

8) Determine a transformação linear $T:\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ tal que $T(1) = x, T(x) = 1-x^2$ e $T(x^2) = x+2x^2$.

9) Determine o núcleo, uma base do núcleo e da imagem e a dimensão de cada um desses subespaços nas transformações a seguir:

a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (3x-y, -3x+y)$
b) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+y, x, 2y)$
c) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+2y-z, 2x-y+z)$
d) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x-y-2z, -x+2y+z, x-3z)$
e) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x-3y, x-z, z-x)$
f) $T:\mathbb{P}_1 \to \mathbb{R}^3$, $T(a+tb) = (a, 2a, a-b)$

g) $T: \mathbb{M}_2 \to \mathbb{R}^2$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b, a + b)$

10) Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-2,3) = (-1,0,1)$ e $T(1,-2) = (0,-1,0)$. Determine $T(x,y)$ e, a seguir, $N(T)$, $\dim N(T)$ e $\dim(ImT)$.

11) Seja $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(e_1) = (1,-2,1)$, $T(e_2) = (-1,0,-1)$, $T(e_3) = (0,-1,2)$ e $T(e_4) = (1,-3,1)$, sendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^4$. Determine o núcleo de T, uma base para o núcleo e a imagem dessa transformação e verifique o Teorema da Dimensão (teorema do Núcleo e da Imagem) para esse caso.

12) Seja T o operador linear dado pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule $N(T)$ e, a seguir, uma base e a dimensão do núcleo e da imagem dessa transformação.

13) Seja o espaço Vetorial $\mathbb{V} \to \mathbb{M}_2$ e a transformação linear $T: \mathbb{V} \to \mathbb{R}^3, T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, c - d, 2a)$. Mostre que T é linear, calcule $v \in \mathbb{V}$ tal que $T(v) = (3,-2,4)$ e determine $N(T)$.