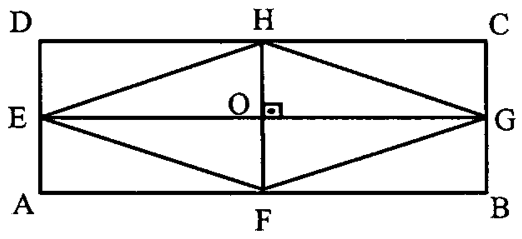
Lista de Exercícios: Vetores no Plano e Espaço Cartesiano
Professor Wálmisson Régis de Almeida

1) A figura abaixo representa o losango EFGH inscrito no retângulo ABCD, sendo O o ponto de intersecção das diagonais desse losango. Decida se cada afirmativa é verdadeira ou falsa:

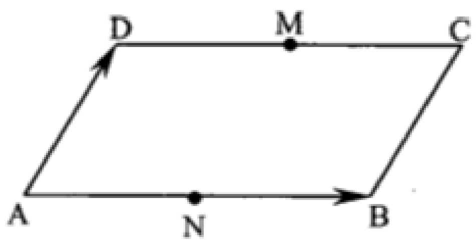


a) $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG}$
b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}$
c) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{HG}$
d) $|C - O| = |O - B|$
e) $|H - O| = |H - D|$
f) $H - E = O - C$
g) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$
h) $|\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DB}|$
i) $\overrightarrow{AF} \;//\; \overrightarrow{CD}$
j) $\overrightarrow{GF} \;//\; \overrightarrow{HG}$
k) $\overrightarrow{AO} \;//\; \overrightarrow{OC}$
l) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$
m) $\overrightarrow{EO} \perp \overrightarrow{CB}$
n) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{HF}$
o) $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{FE}$

2) Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo:

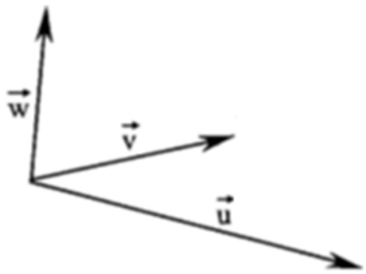
a) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
b) Se $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, então $\vec{u} = \vec{v}$.
c) Se $\vec{u} \;//\; \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.
d) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $\vec{u} \;//\; \vec{v}$.
e) Se $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, então $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.
f) $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.
g) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, então ABCD (vértices nesta ordem) é paralelogramo.
h) $|5\vec{v}| = |-5\vec{v}| = 5|\vec{v}|$.
i) Os vetores $3\vec{v}$ e $-4\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.
j) Se $\vec{u} \;//\; \vec{v}$, $|\vec{u}| = 2$ e $|\vec{v}| = 4$, então $\vec{v} = 2\vec{u}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.

3) O paralelogramo ABCD na figura a seguir é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N os pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Determine o resultado das operações a seguir como um vetor único com origem e extremidade nos pontos da figura.



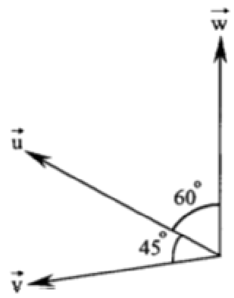
a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$
c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC}$
e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$
f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$
g) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{CB}$
h) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MN} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
i) $\overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CN}$

4) Na figura a seguir estão representados os vetores coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Indicar na própria figura os vetores



a) $a\vec{v}$ e $b\vec{w}$ tal que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$
b) $\alpha\vec{u}$ e $\beta\vec{w}$ tal que $\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$

5) Dados os vetores coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, representados na figura, determinar:

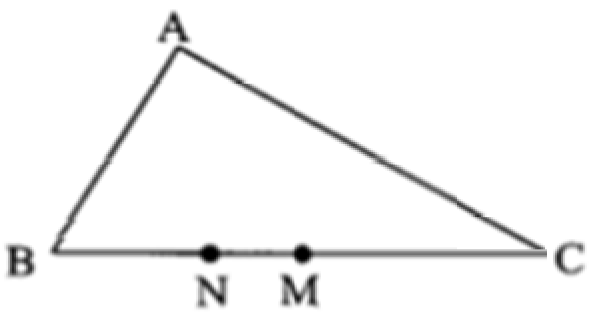


a) Um representante do vetor $\vec{x} + \vec{y}$, sendo $\vec{x} = -\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{y} = 2\vec{u} - \vec{v}$.
b) O ângulo entre os vetores $-2\vec{u}$ e $-\vec{w}$.

6) Sendo M o ponto médio de um segmento AB e sendo P um ponto fora da reta AB, determine os valores de x e y tais que $\overrightarrow{PM} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{PB}$.

7) Considere um triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Mostre que MN é paralelo a AB e tem comprimento igual à metade do comprimento de AB (teorema da base média do triângulo).

8) No triângulo ABC, tem-se $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Expresse os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AN}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, ou seja, como uma expressão da forma $x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$, com $x, y \in \mathbb{R}$.



9) Determinar a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v} = (2, -5)$, sabendo que sua origem é o ponto $A(-1, 3)$.

10) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{w}$ tal que:

a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$
b) $3\vec{w} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{w} - 3\vec{u})$

11) Dados os pontos $A(-1, 3)$, $B(2, 5)$ e $C(3, -1)$ e sendo O a origem do plano cartesiano, calcular

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$
c) $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$.

12) Dados os pontos $A(-1, 3)$, $B(1, 0)$, $C(2, -1)$, determinar D tal que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$.

13) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -4)$ e $\vec{v} = (-\frac{9}{4}, 3)$, verificar se existem números a e b tais que $\vec{u} = a\vec{v}$ e $\vec{v} = b\vec{u}$.

14) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar a e b tal que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

15) É possível escrever o vetor $\vec{u} = (5, 7)$ como uma combinação linear dos vetores $\vec{v} = (1, 3)$ e $\vec{w} = (-2, -6)$? Justifique sua resposta.

16) Dados os pontos $A(2, -3, 1)$, e $B(4, 5, -2)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.

17) Dados os pontos $A(-1, 2, 3)$, e $B(4, -2, 0)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$.

18) Dados os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(-6, -2, 3)$ e $C(1, 2, 1)$ determinar $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.

19) Determinar o vetor $\vec{v}$ sabendo que $(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6{,}10{,}4) - \vec{v}$.

20) Encontrar os números a e b tais que $\vec{w} = a\vec{v} + b\vec{u}$, sendo $\vec{v} = (1, -2, 1)$, $\vec{u} = (2, 0, -4)$ e $\vec{w} = (-4, -4, 14)$.

21) Determine o(s) valor(es) de $r \in \mathbb{R}$ tal(is) que os vetores $\vec{u} = (r - 5{,}6{,}r)$ e $\vec{v} = (24, r + 5, \frac{52}{3})$ sejam paralelos.

22) Verificar se são colineares os pontos:

a) $A(-1,-5\ 0)$, $B(2,1,3)$ e $C(-2,-7,-1)$
b) $A(2,1,-1)$, $B(3,-1,0)$ e $C(1,0,4)$

23) Mostrar que os pontos $A(4,0,1)$, $B(5,1,3)$, $C(3,2,5)$ e $D(2,1,3)$ são vértices de um paralelogramo.

24) Determinar o simétrico do ponto $P(3,1,-2)$ em relação ao ponto $A(-1,0,-3)$.

25) Determinar todos os vetores de módulo 5 que são paralelos ao vetor $\vec{v} = (1,-1,2)$.

26) Determine a distância do ponto C ao ponto médio do segmento AB, sendo $A = (1,1,1)$ $B = (3,5,7)$ e $C = (-1,2,3)$.

27) Uma agência de espionagem programa um pequeno drone para, a partir de um ponto inicial, deslocar-se na direção do vetor $\vec{v} = (1,3)$. Em virtude do vento, o drone seguiu em outra direção, a do vetor $\vec{w} = (2,2)$. Qual o vetor que representa a velocidade do vento? Qual a velocidade escalar (módulo da velocidade) do vento?

28) Verificar se são unitários os seguintes vetores: $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$.

29) Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = (n,\frac{4}{5},\frac{2}{5})$ seja unitário.

30) Seja o vetor $\vec{v} = (m+7)\vec{i} + (m+2)\vec{j} + 5\vec{k}$. Calcular m para que $|\vec{v}| = \sqrt{38}$.

31) Dados os pontos $A(3,m-1,-4)$ e $B(8,2m-1,m)$, determinar m de modo que $\overrightarrow{|AB|} = \sqrt{35}$.

32) Calcular o perímetro do triângulo de vértices $A(0,1,2)$, $B(-1,0,-1)$ e $C(2,-1,0)$.

33) Obter um ponto P do eixo das abscissas equidistante dos pontos $A(2,-3,1)$ e $B(-2,1,-1)$.

34) Dados os vetores $\vec{\mathrm{u}} = (1,\mathrm{a},-2\mathrm{a}-1)$, $\vec{v} = (\mathrm{a},\mathrm{a}-1,1)$ e $\vec{w} = (\mathrm{a},-1,1)$, determinar a de modo que $\vec{\mathrm{u}} \cdot \vec{v} = (\vec{\mathrm{u}} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

35) Seja o triângulo de vértices $\mathrm{A}(-1,-2,4)$, $\mathrm{B}(-4,-2,0)$ e $\mathrm{C}(3,-2,1)$. Determinar o ângulo interno ao vértice B.

36) Dados os vetores $\vec{\mathrm{a}} = (2,1,\alpha)$, $\vec{\mathrm{b}} = (\alpha+2,-5,2)$ e $\vec{\mathrm{c}} = (2\alpha,8,\alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{\mathrm{a}} + \vec{\mathrm{b}}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{\mathrm{c}} - \vec{\mathrm{a}}$.

37) Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{\mathrm{u}} = (1,-1,2)$, tal que $\vec{v} \,.\, \vec{\mathrm{u}} = -18$.

38) Provar que os pontos $A(5,1,5)$, $B(4,3,2)$ e $C(-3,-2,1)$ são vértices de um triângulo retângulo.

39) Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = (\alpha+1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ sejam ortogonais?

40) Verificar se existe ângulo reto no triângulo ABC, sendo $A(2,1,3)$, $B(3,3,5)$ e $C(0,4,1)$.

41) Determinar um vetor unitário ortogonal ao vetor $\vec{v} = (2,-1,1)$.

42) Dados os pontos $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$ e $C(3,2,1)$, determinar o vetor $\overrightarrow{CB} \times (\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA})$.

43) Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a} + \mathrm{b}$ e $\vec{b} - \vec{a}$, sendo $\vec{a} = (3,-1,-2)$ e $\vec{b} = (1,0,-3)$.

44) Determinar o valor de m para que o vetor $\vec{w} = (1,\ 2,\ m)$ seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v} = (2,-1,0)$ e $\vec{t} = (1,-3,-1)$.

45) Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v} = (1,1,0)$ e $\vec{u} = (2,-1,3)$. Nas mesmas condições determinar um vetor de módulo 5.

46) Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (3,1,2)$ e $\vec{v} = (4,-1,0)$.

47) Mostrar que o quadrilátero cujos vértices são os pontos $A(1,-2,\ 3)$, $B(4,3,-1)$, $C(5,7,-3)$ e $D(2,2,1)$ é um paralelogramo e calcular sua área.

48) Calcular a área do triângulo de vértices

a) $A(-1,0,2)$, $B(-4,1,1)$ e $C(0,1,3)$.
b) $A(1,0,1)$, $B(4,2,1)$ e $C(1,2,0)$.
c) $A(2,3,-1)$, $B(3,1,-2)$ e $C(-1,0,2)$

49) Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3,2,1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1,1,-1)$ e $C(0,1,2)$.

50) Verificar se são coplanares os seguintes vetores:

a) $\vec{u} = (3,-1,2)$, $\vec{v} = (1,2,1)$ e $\vec{w} = (-2,3,4)$
b) $\vec{u} = (2,-1,0)$, $\vec{v} = (3,1,2)$ e $\vec{w} = (7,-1,2)$

51) Verificar se são coplanares os pontos:

a) $A(1,1,1)$, $B(-2,-1,-3)$, $C(0,2,-2)$ e $D(-1,0,-2)$;
b) $A(1,0,2)$, $B(-1,0,3)$, $C(2,4,1)$ e $D(-1,-2,2)$

52) Para que valor de m os pontos $\mathrm{A}(\mathrm{m}, 1, 2)$, $\mathrm{B}(2, -2, -3)$, $\mathrm{C}(5, -1, 1)$ e $\mathrm{D}(3, -2, -2)$ são coplanares?

53) Sejam os vetores $\vec{\mathrm{u}} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$, $\vec{\mathrm{w}} = 3\vec{\mathrm{u}} - 2\vec{\mathrm{v}}$, $\vec{\mathrm{t}} = \vec{\mathrm{u}} + 3\vec{\mathrm{v}}$ e $\vec{\mathrm{s}} = \vec{\mathrm{i}} + \vec{\mathrm{j}} - 2\vec{\mathrm{k}}$. Determinar o volume do paralelepípedo definido por $\vec{\mathrm{w}}$, $\vec{\mathrm{t}}$ e $\vec{\mathrm{s}}$.

54) Calcular o volume do tetraedro $ABCD$, sendo dados $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ e $D(4, 2, 7)$.

55) Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{\mathrm{v}} = 2\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}}$, $\vec{\mathrm{u}} = 6\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{m}\vec{\mathrm{j}} - 2\vec{\mathrm{k}}$ e $\vec{\mathrm{t}} = -4\vec{\mathrm{i}} + \vec{\mathrm{k}}$ seja igual a 10.