

ИНСТИТУТ ТРАНСПОРТА И СВЯЗИ

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И ЭЛЕКТРОНИКИ

Домашнее задание

По дисциплине

«Численные методы»

**Тема: Решение линейного дифференциального уравнения 2-го
порядка**

Студент: Виктор Выползов
Группа: 4102BD

Рига
2014 г.

1. Задание

Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y''(t) + 5y'(t) + N_s * y(t) = N_g, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 10$$

где N_s — 7, а N_g — 14

Задачу решить численным методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Сравнить полученные результаты, построить график решения.

Примечание:

Для численного метода Рунге-Кутты предварительно требуется рассчитать время переходного процесса, используя найденные ранее корни характеристического уравнения. В качестве интервала наблюдения выбирается временной интервал $T = (3/4) * \tau$, где $\tau = 1/|P_{min}|$. Здесь -

P_{min} - есть минимальный по величине (модулю) корень характеристического уравнения

$$P_{min} = \min\{|p_1|, |p_2|\}.$$

Рекомендуемая величина шага интегрирования: $h = \Delta t = T/20$ для ручного счета, или

$h = \Delta t = T/200$ при использовании программы метода Рунге-Кутты. Исходное уравнение 2-го порядка $y'' = f(y, y')$ преобразуется в систему двух уравнений 1-го порядка с помощью замены переменных:

$$\begin{cases} y' = z, & y(0) = y_0 \\ z' = f(y, z), & z(0) = y'(0) = y'_0 \end{cases}$$

Методом Рунге-Кутты решается данная система. Результаты заносятся в таблицу для построения графика решения $y(t)$.

2. Решение

$$y''(t) + 5y'(t) + 7 * y(t) = 14, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 10$$

- Преобразуем исходное уравнение 2-го порядка в систему двух ОДУ 1-го порядка

$$\begin{cases} y' = z, & y(0) = y_0 = 5 \\ z' = 14 - 5z - 7y, & z(0) = y'(0) = y'_0 = 10 \end{cases}$$

- Вычисление корней характеристического уравнения

$$p^2 + 5p + 7 = 0;$$

$$D = 25 - 4 * 7 = -3 \Rightarrow \text{действительных корней нет}$$

$$p_{1,2} = -b \pm i\sqrt{(-D)}/2a$$

$$p \approx 2.6457$$

- Расчет интервала времени наблюдения

$$\tau = 1/2.6457 = 0.3779$$

$$T = 4 * 0.3779 = 1.5116$$

- Расчет шага дискретизации

$$h = \Delta t = 1.5116/20 = 0.07558$$

- Вычисление значений точек по методу Рунге-Кутты

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + h/6 * (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4); \\
f_1 &= z_0; \\
f_2 &= z_0 + h/2 * g_1; \\
f_3 &= z_0 + h/2 * g_2; \\
f_4 &= z_0 + h * g_1; \\
z_{k+1} &= z_k + h/6 * (g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4); \\
g_1 &= f(y, z); \\
g_2 &= f(y + h/2 * f_1, f_2) \\
g_3 &= f(y + h/2 * f_2, f_3) \\
g_4 &= f(y + h/2 * f_3, f_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= 10 \\
g_1 &= 14 - 7 * 5 - 5 * 10 = -71
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= 10 + 0.07558/2 * (-71) = 7.3169 \\
g_2 &= 14 - 7 * (5 + 0.07558/2 * 10) - 5 * 7.3169 = -60.2298
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 &= 10 + 0.07558/2 * (-60.2298) = 7.7239 \\
g_3 &= 14 - 7 * (5 + 0.07558/2 * 7.3169) - 5 * 7.7239 = -61.555
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 &= 10 + 0.07558 * (-61.555) = 5.3477 \\
g_3 &= 14 - 7 * (5 + 0.07558/2 * 7.7239) - 5 * 5.3477 = -51.8251
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= 5 + 0.07558/6 * (10 + 2 * 7.3169 + 2 * 7.7239 + 5.3477) = 5.5724 \\
z_1 &= 10 + 0.07558/6 * (-71 - 2 * 60.2298 - 2 * 61.555 - 51.8251) = 5.3834
\end{aligned}$$

- Таблица с результатами

Для расчета остальных точек была реализована программа для занесения их в таблицу:

```

function [y, z, t] = runge_kutta()

    y = 5;
    z = 10;
    a = 0;
    b = 2;
    h = 0.07558;

    t = 0;
    i = 1;
    while t(1, i) < b

        f1 = z(1, i);
        g1 = pdu(y(1, i), z(1, i));

        f2 = z(1, i) + (h/2)*(g1);
        g2 = pdu((y(1, i)+(h/2)*f1), (z(1, i)+(h/2)*g1));

        f3 = z(1, i) + (h/2)*(g2);
        g3 = pdu((y(1, i)+(h/2)*f2), (z(1, i)+(h/2)*g2));
    end

```

```

f4 = z(1, i) + (h)*(g3);
g4 = pdu((y(1, i)+(h)*f3), (z(1, i)+(h)*g3));

y = [y (y(1, i) + (h/6)*(f1+2*f2+2*f3+f4))];
z = [z (z(1, i) + (h/6)*(g1+2*g2+2*g3+g4))];

t = [t (t(1, i) + h)];
i = i + 1;

```

end

end

Результаты:

t	0	0.0756	0.1512	0.2267	0.3023	0.3779	0.4535
y	5	5.5723	5.8459	5.9057	5.8171	5.6297	5.3808
z	10	5.3846	2.0430	-0.3148	-1.9201	-2.9565	-3.5687

t	0.5291	0.6046	0.6802	0.7558	0.8314	0.9070	0.9825
y	5.0981	4.8015	4.5052	4.2191	3.9493	3.6998	3.4723
z	-3.8697	-3.9476	-3.8700	-3.6883	-3.4414	-3.1580	-2.8590

t	1.0581	1.1337	1.2093	1.2849	1.3604	1.3460	1.5116
y	3.2676	3.0853	2.9243	2.7833	2.6606	2.5547	2.4637
z	-2.5592	-2.2688	-1.9945	-1.7403	-1.5084	-1.2994	-1.1130

t	1.5872	1.6628	1.7383	1.8139	1.8895	1.9651	2.0407
y	2.3859	2.3198	2.2639	2.2168	2.1773	2.1444	2.1171
z	-0.9483	-0.8040	-0.6785	-0.5699	-0.4766	-0.3968	-0.3290

3. Графики решений

