

ИНСТИТУТ ТРАНСПОРТА И СВЯЗИ

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И ЭЛЕКТРОНИКИ

Домашнее задание

По дисциплине

«Численные методы»

**Тема: Методы численного интегрирования и
дифференцирования функции.**

Студент: Виктор Выползов
Группа: 4102BD

Рига
2014 г.

1. ЗАДАНИЕ

1. Вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$ на интервале $[a, b]$, разделяя интервал на $n = 5$ частей с шагом $h = (b-a) / n$:
 - методом прямоугольников,
 - методом трапеций,
 - методом Симпсона,
 - с помощью квадратурной формулы Гаусса 3-го порядка. (Этот пункт задания необходимо выполнять только студентам специальности "Компьютерные науки").
2. Сравнить полученные результаты.
3. Вычислить производную по методу центральных разностей $f'(x)$ и интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ по методу трапеций, выбирая шаг h . Результаты занести в таблицу.
4. Выбрав соответствующие масштабы, построить графики функций $f(x), f'(x)$ и $F(x)$ на одном рисунке в интервале $x \in [a, b]$.

2. ДАНО

Функция одной переменной $f(x) = x * 2^{3x}$

Границы интервала $a=1$ и $b=4$

Шаг дискретизации: $h = (4-1)/5 = 0.6$

i	0	1	2	3	4	5
x	1	1.6	2.2	2.8	3.4	4
$f(x)$	8	44.5722	213.4129	945.8233	3999.3082	16384

3. МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

$$S_i = h * f(x_i)$$

$$S_0 = 0.6 * 8 = 7.8$$

$$S_1 = 0.6 * 44.5722 = 26.7433$$

$$S_2 = 0.6 * 213.4129 = 128.0477$$

$$S_3 = 0.6 * 945.8233 = 567.4940$$

$$S_4 = 0.6 * 3999.3082 = 2399.5849$$

$$S_5 = 0.6 * 16384 = 9830.4$$

$$I = \sum S_i = 12960.0699$$

4. МЕТОД ТРАПЕЦИЙ

$$S_i = \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

$$S_1 = 0.3 * (8 + 44.5722) = 15.7717$$

$$S_2 = 0.3 * (44.5722 + 213.4129) = 77.3955$$

$$S_3 = 0.3 * (213.4129 + 945.8233) = 347.7709$$

$$S_4 = 0.3 * (945.8233 + 3999.3082) = 1483.5394$$

$$S_5 = 0.3 * (3999.3082 + 16384) = 6114.9925$$

$$I = \sum S_i = 8039.47$$

5. МЕТОД СИМПСОНА

$$S_i = \frac{h}{6} (f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

$$S_1 = 0.1 * (8 + 4 * 44.5722 + 213.4129) = 39.9702$$

$$S_3 = 0.1 * (213.4129 + 4 * 945.8233 + 3999.3082) = 799.6014$$

$$S_5 = 0.3 * (3999.3082 + 16384) = 6114.9925$$

$$I = \sum S_i = 6954.5641$$

6. КВАДРАТУРА ГАУССА 3-ГО ПОРЯДКА

Относительные координаты и коэффициенты 3-го порядка известны, поэтому их просто берем.

Относительные коор.: $t_0 = t_2 = \pm 0.775$; $t_1 = 0$

Коэффициенты: $A_0 = A_2 = 0.555$; $A_1 = 0.889$

$$\varphi(t) = \frac{b-a}{2} * f\left(\frac{b-2}{2} * t + \frac{b+2}{2}\right)$$

$$\varphi(t_0) = \frac{4-1}{2} * f\left(\frac{4-2}{2} * 0.775 + \frac{4+2}{2}\right) = 1.5 * f(3.6625) = 11154.1368$$

$$\varphi(t_1) = \frac{4-1}{2} * f\left(\frac{4-2}{2} * 0 + \frac{4+2}{2}\right) = 1.5 * f(2.5) = 678.8224$$

$$\varphi(t_2) = \frac{4-1}{2} * f\left(\frac{4-2}{2} * (-0.775) + \frac{4+2}{2}\right) = 1.5 * f(1.3375) = 32.3793$$

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} [A_i * \varphi(t_i)] = (11154.1368 * 0.555) + (678.8224 * 0.889) + (32.3793 * 0.555) = 6811.9895$$

7. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Ответ из matlab	I = 6929.79
Метод прямоугольников	I = 12960.0699
Метод трапеций	I = 8039.47
Метод Симпсона	I = 6954.5641
Квадратура Гаусса 3-го порядка	I = 6811.9895

Как видно, самые близкие ответы получились при методе Симпсона и квадратуре Гаусса 3-го порядка.

8. ПРОИЗВОДНАЯ ПО МЕТОДУ ЦЕНТРАЛЬНЫХ РАЗНОСТЕЙ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$f'(x_1) = \frac{213.4129 - 8}{1.2} = 171.1774$$

$$f'(x_2) = \frac{945.8233 - 44.5722}{1.2} = 751.0426$$

$$f'(x_3) = \frac{3999.3082 - 213.4129}{1.2} = 3154.9127$$

$$f'(x_4) = \frac{16382 - 945.8233}{1.2} = 12865.1472$$

9. ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

$$F(x_i) = F(x_{i-1}) + S_i; \quad F(x_0) = 0$$

$$F(x_0) = 0$$

$$F(x_1) = 0 + 15.7717 = 15.7717$$

$$F(x_2) = 15.7717 + 77.3955 = 93.1672$$

$$F(x_3) = 93.1672 + 347.7709 = 440.9381$$

$$F(x_4) = 440.9381 + 1483.5394 = 1924.4775$$

$$F(x_5) = 1924.4775 + 6114.9925 = 8039.47$$

10. РЕЗУЛЬТАТ

i	0	1	2	3	4	5
x	1	1.6	2.2	2.8	3.4	4
$f(x)$	8	44.5722	213.4129	945.8233	3999.3082	16384
$f'(x)$	-	171.1774	751.0426	3154.9127	12865.1472	-
$F(x)$	0	15.7717	93.1672	440.9381	1924.4775	8039.47

11. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

