Институт транспорта и связи

Домашние работы

По дисциплине

«Численные методы и прикладное программирование»

Студент: Федяев Роман

Группа: 3102BD

Рига

2014 г.

Задание 1

Решить систему линейных уравнений 3-го порядка с комплексными коэффициентами методом исключения Гаусса.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

где

$$a_{11} = (N_g + 4) + j5, \quad a_{12} = -3 - j4, \quad a_{13} = 4 - j4, \quad b_1 = 3 + j6,$$

$$a_{21} = -3 + j2, \quad a_{22} = 8 + j(10 - N_s), \quad a_{23} = 1 + j2, \quad b_2 = 1 - j(N_s - 20),$$

$$a_{31} = j(N_g + 1), \quad a_{32} = N_s - 10, \quad a_{33} = N_s - j(N_g), \quad b_3 = j10.$$

$N_g = 11$, $N_s = 6$.

Решение.

Исходная матрица коэффициентов и свободных членов, после подстановки переменных.

$$A0=\left[\begin{array}{ccc|c} 15.0000+5.0000i & -3.0000-4.0000i & 4.0000-4.0000i & 3.0000+6.0000i \\ -3.0000+2.0000i & 8.0000+4.0000i & 1.0000+2.0000i & 1.0000+14.0000i \\ 0+12.0000i & -4.0000 & 6.0000-11.0000i & 0+10.0000i \end{array}\right]$$

Коэффициент для обнуления элемента a_{21} будет $k_1 = -a_{21}/a_{11} = 0.1400 - 0.1800i$

Домножаем первую строку на этот коэффициент и прибавляем результат ко второй строке.

$$A1=\left[\begin{array}{ccc|c} 15.0000+5.0000i & -3.0000-4.0000i & 4.0000-4.0000i & 3.0000+6.0000i \\ -0.0000+0.0000i & 6.86+3.9800i & 0.84+0.72i & 2.5000+14.3000i \\ 0+12.0000i & -4.0000 & 6.0000-11.0000i & 0+10.0000i \end{array}\right]$$

Коэффициент для обнуления элемента a_{31} будет $k_2 = -a_{31}/a_{11} = -0.2400 - 0.7200i$

Домножаем первую строку на этот коэффициент и прибавляем результат к третьей строке.

$$A2=\left[\begin{array}{ccc|c} 15.0000+5.0000i & -3.0000-4.0000i & 4.0000-4.0000i & 3.0000+6.0000i \\ -0.0000+0.0000i & 6.8600+3.9800i & 0.84+0.72i & 2.5000+14.3000i \\ 0.0000+0.0000i & -6.16+3.1200i & 2.16-12.92i & 3.600+6.400i \end{array}\right]$$

Коэффициент для обнуления элемента a_{32} будет k_3=-a_{32}/a_{22}= 0.4744 + 0.7300i
Умножаем вторую строку на этот коэффициент и прибавляем к строке 3.

$$A3=\left(\begin{array}{ccc|c} 15.0000+5.0000i & -3.0000-4.0000i & 4.0000-4.0000i & 3.0000+6.0000i \\ -0.0000+0.0000i & 6.8600+3.98i & 0.84+0.72i & 2.5000+14.3000i \\ 0+0.0000i & 0+0.0000i & 3.0841-13.1917i & 15.2257+11.3589i \end{array}\right)$$

Из приведенной к такому виду матрицы находим x_1, x_2, x_3.

$x_3 = b_3/a_{33}$ = -0.5606 + 1.2852i = $1.402e^{j*1.982}$

$x_2 = (b_2 - a_{23}*x_3)/a_{22}$ = 1.2870 + 1.2393i=$1.787e^{j*0.767}$

$x_1 = (b_1 - a_{13}*x_3 - a_{12}*x_2)/a_{11}$ =0.0900 + 0.4689i=$0.477e^{j*1.381}$

Проверка. Подставим значения x_1, x_2, x_3 в уравнения и получим:

$c_1 = a_{11}*x_1 + a_{12}*x_2 + a_{13}*x_3$ = 3.0000 + 6.0000i

$c_2 = a_{21}*x_1 + a_{22}*x_2 + a_{23}*x_3$ = 1.0000 +14.0000i

$c_3 = a_{31}*x_1 + a_{32}*x_2 + a_{33}*x_3$ = 0.0000 +10.0000i

Невязки для каждого уравнения для действительной и мнимой составляющих:

	real(c)-real(b)	imag(c)-imag(b)
1	0	0
2	-8.8818e-16	-1.7764e-15
3	3.5527e-15	0

Задание 2

Задана функция одной переменной ***y(x)*** в виде таблицы значений:

x	-1	11	6	10
y(x)	1	1	8	-2

Ng=11, Ns=6

1. Интерполировать функцию полиномом Лагранжа 3-го порядка $L_3(x)$. Выполнить проверку правильности интерполяции по всем точкам.

2. Аппроксимировать функцию по методу наименьших квадратов полиномом 2-го порядка $\varphi_2(x)$.

3. Построить графики интерполяции $L_3(x)$ и аппроксимации $\varphi_2(x)$ на одном рисунке в интервале $x\epsilon[x_{min}, x_{max}]$ из таблицы и отметить на поле графика заданные табличные точки.

Решение

1. Локальные полиномы Лагранжа для заданной функции:

$$l_0(x) = \frac{(x-11)(x-6)(x-10)}{(-1-11)(-1-6)(-1-10)}; \quad l_1(x) = 1\frac{(x+1)(x-6)(x-10)}{(11+1)(11-6)(11-10)};$$

$$l_2(x) = 8\frac{(x+1)(x-11)(x-10)}{(6+1)(6-11)(6-10)}; \quad l_3(x) = -2\frac{(x+1)(x-11)(x-6)}{(10+1)(10-11)(10-6)};$$

Итоговый полином примет вид:

$$L_3(x) = \frac{(x-11)(x-6)(x-10)}{-924} + \frac{(x+1)(x-6)(x-10)}{60} + 8\frac{(x+1)(x-11)(x-10)}{140} +$$

$$+\frac{(x+1)(x-11)(x-6)}{22} = 0.1182x^3 - 2.0909x^2 + 7.7909x + 11$$

Проверка:

$L_3(-1) = 0.1182(-1) - 2.0909(1) - 7.7909 + 11 = 1$

$L_3(11) = 0.1182(11)^3 - 2.0909(11)^2 + 7.7909(11) + 11 = 1.0252 \approx 1$

$L_3(6) = 0.1182(6)^3 - 2.0909(6)^2 + 7.7909(6) + 11 = 8.0042 \approx 8$

$L_3(10) = 0.1182(10)^3 - 2.0909(10)^2 + 7.7909(10) + 11 = -1.9810 \approx -2$

2. Аппроксимирующий по методу наименьших квадратов полином 2-го порядка:

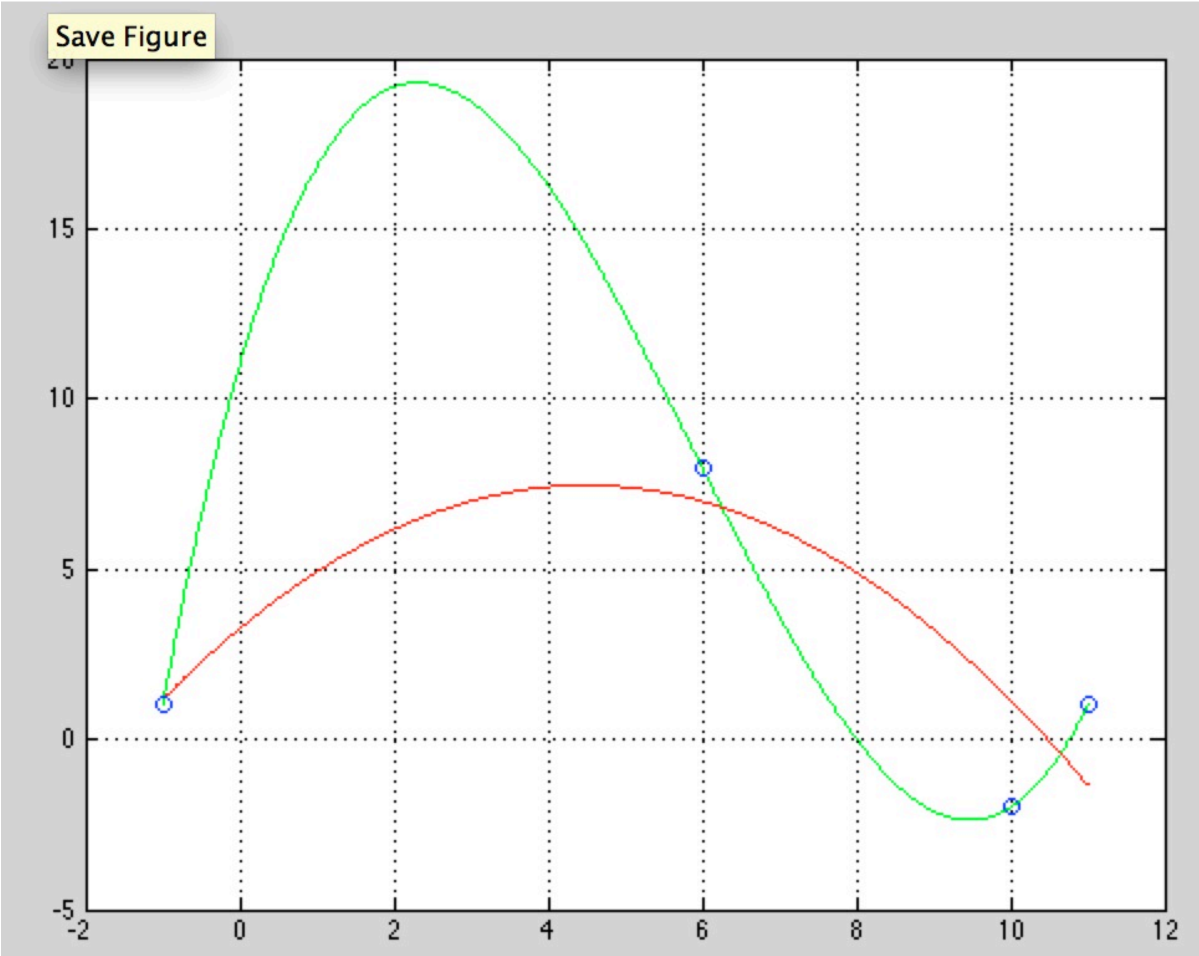
$$\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Система уравнений для вычисления коэффициентов:

$$\begin{cases} 4a_0 + 26a_1 + 258a_2 = 8, \\ 26a_0 + 258a_1 + 2546a_2 = 38, \\ 258a_0 + 2546a_1 + 25938a_2 = 210. \end{cases}$$

Решив систему, получим полином: $\varphi(x) = -0.2085x^2 + 1.8785x + 3.2380$

3. Графики функции, интерполяции $L_3(x)$ и аппроксимации $\varphi(x)$:



Задание 3

Содержание задания:
Задана функция одной переменной ***f(x)*** и границы интервала ***a*** и ***b:***

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 * Sin(\ x\ );\quad a = 0; b = \pi;}$$

1. Вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)$ на интервале ***[a,b]*** , разделяя интервал на ***n = 5*** частей с шагом ***h = (b − a) n***:

- методом прямоугольников,
- методом трапеций,
- методом Симпсона,

2. Сравнить полученные результаты.
3. Вычислить производную по методу центральных разностей ***f'(x)*** и интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int_a^b f(x)$ по методу трапеций, выбирая шаг *h*. Результаты занести в таблицу.
4. Выбрав соответствующие масштабы, построить графики функций ***f(x), f'(x)*** и ***F(x)*** на одном рисунке в интервале ***x ∈ [a,b]*** .

Решение

Вычисление определенного интеграла

Вычисляем шаг дискретизации: $h \ = \frac{(\,b-a\,)}{n} = \frac{\pi-0}{5} = 0.2\pi;$

i	0	1	2	3	4	5
x	0π	0.2π	0.4π	0.6π	0.8π	π
f(x)	0	0.23205	1.5018	3.3792	3.7128	0

Метод прямоугольников:

Формула : $\boldsymbol{S_i = h * \ f\ (\ x_{\ i-1})}$

$\boldsymbol{S_1 = h * \ f\ (\ x_{\ 1-1}) = 0}$;

$\boldsymbol{S_2 = h * \ f\ (\ x_{\ 2-1}) = 0.1458}$;

$\boldsymbol{S_3 = h * \ f\ (\ x_{\ 3-1}) = 0.94361}$;

$\boldsymbol{S_4 = h * \ f\ (\ x_{\ 4-1}) = 2.1232}$;

$\boldsymbol{S_5 = h * \ f\ (\ x_{\ 5-1}) = 2.3328}$;

Сумма площадей $\boldsymbol{I = 5.54541}$.

Метод трапеций:

Формула : $\boldsymbol{S_i = \frac{h}{2} * [f\ (\ x_{\ i-1}) + f(\ x_{\ i})]}$

$S_1 = \frac{h}{2} * [f\ (\ x_{\ 1-1}) + f(\ x_{\ 1})] = 0.2\pi/2 * (0 + 0.23205) = 0.072901;$

$S_2 = \frac{h}{2} * [f\ (\ x_{\ 2-1}) + f(\ x_{\ 2})] = 0.2\pi/2 * (0.23205 + 1.5018) = 0.54471;$

$S_3 = \frac{h}{2} * [f\ (\ x_{\ 3-1}) + f(\ x_{\ 3})] = 0.2\pi/2 * (1.5018 + 3.3792) = 1.5334;$

$S_4 = \frac{h}{2} * [f\ (\ x_{\ 4-1}) + f(\ x_{\ 4})] = 0.2\pi/2 * (3.3792 + 3.7128) = 2.228;$

$S_5 = \frac{h}{2} * [f\ (\ x_{\ 5-1}) + f(\ x_{\ 5})] = 0.2\pi/2 * (3.7128 + 0) = 1.1664;$

Сумма площадей $\boldsymbol{I = 5.54541}$.

Метод Симпсона:

Формула : $\boldsymbol{S_i = \frac{h}{6} * [f\ (x_{\ i-1}) + 4 * f(\ x_{\ i}) + f(\ x_{\ i+1})]}$

$S_1 = \frac{h}{6} * [f\ (\ x_{\ 1-1}) + 4 * f(\ x_{\ 1}) + f(\ x_{\ 1+1})] = 0.2\pi/6 * (0 + 4 * 0.23205 + 1.5018)$

$= 0.25447;$

$S_3 = \frac{h}{6} * [f\ (\ x_{\ 3-1}) + 4 * f(\ x_{\ 3}) + f(\ x_{\ 3+1})] = 0.2\pi/6 * (1.5018 + 4 * 3.3792 + 3.7128)$

$= 1.9615;$

$S_5(\text{по методу трапеций}) = \frac{h}{2} * [f\ (\ x_{\ 5-1}) + f(\ x_{\ 5})] = 0.2\pi/2 * (3.7128 + 0) = 1.1664;$

Сумма площадей $\boldsymbol{I = S1 + S2 + S5 = 3.3824}$

Сравнение полученных результатов:

Точный ответ : $I = \int_a^b f(x) = 5.8696;$

Ответ по методу прямоугольников: $\mathrm{I} = 5.54541;$

Ответ по методу трапеций: $\mathrm{I} = 5.54541;$

Ответ по методу Симпсона: $\mathrm{I} = 3.3824;$

Ответ по методу трапеций и прямоугольников - наиболее приближенный к точному.

Вычисление производной по методу центральных разностей и интеграл с переменным верхним пределом по методу трапеций

i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
x	0π	0.2π	0.4π	0.6π	0.8π	π
f(x)	0	0.23205	1.5018	3.3792	3.7128	0
f'(x)	-	1.1951	2.5044	1.7595	-2.6891	-
F(x)	0	0.07201	0.61672	2.1501	4.3781	5.5445

Вычисление производной по методу центральных разностей:

Формула: $\boldsymbol{f'(x)_i = \frac{f(x)_{i+1} - f(x)_{i-1}}{2 * h}}$

$$f'(x)_1 = \frac{f(x)_{1+1} - f(x)_{1-1}}{2 * 0.2\pi} = \frac{1.5018 - 0}{2 * 0.2\pi} = 1.1951;$$

$$f'(x)_2 = \frac{f(x)_{2+1} - f(x)_{2-1}}{2 * 0.2\pi} = \frac{3.3792 - 0.23205}{2 * 0.2\pi} = 2.5044;$$

$$f'(x)_3 = \frac{f(x)_{3+1} - f(x)_{3-1}}{2 * 0.2\pi} = \frac{3.7128 - 1.5018}{2 * 0.2\pi} = 1.7595;$$

$$f'(x)_4 = \frac{f(x)_{4+1} - f(x)_{4-1}}{2 * 0.2\pi} = \frac{0 - 3.3792}{2 * 0.2\pi} = -2.6891;$$

Вычисление интеграла с переменным верхним пределом по методу трапеций:

Формула: $\boldsymbol{F(x_i) = F(x_{i-1}) + S_i = F(x_{i-1}) + \frac{h}{2} * [f(x_{i-1}) + f(x_i)]}$,

где $\boldsymbol{F(a) = F(x_0) = 0}$.

$F(a) = F(x_0) = 0;$

$F(x_1) = F(x_{1-1}) + S_1 = 0 + 0.07201 = 0.07201;$

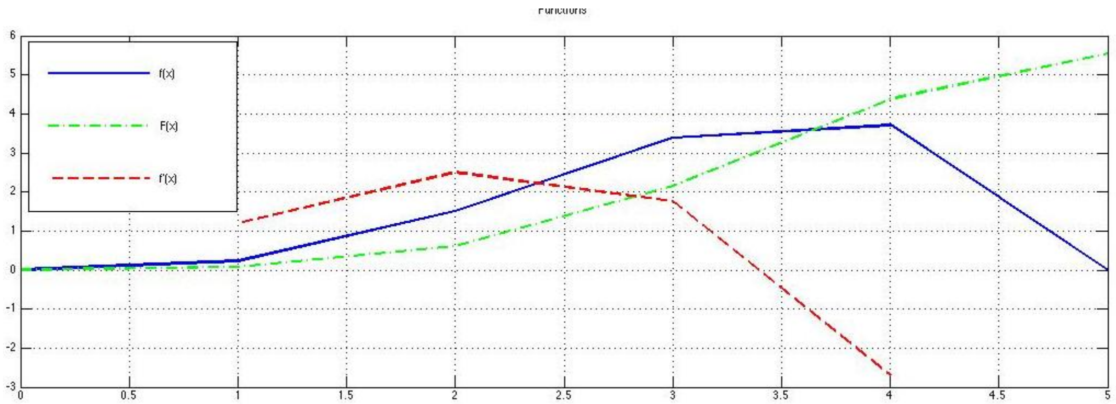
$F(x_2) = F(x_{2-1}) + S_2 = 0.07201 + 0.54471 = 0.61672;$

$F(x_3) = F(x_{3-1}) + S_3 = 0.61672 + 1.5334 = 2.1501;$

$F(x_4) = F(x_{4-1}) + S_4 = 2.1501 + 2.228 = 4.3781;$

$F(x_5) = F(x_{5-1}) + S_5 = 4.3781 + 1.1664 = 5.5445$

График функций



Задание 4

Содержание задания:
Решить нелинейное уравнение $\boldsymbol{f(x) = x^2 * sin(x) - 11 = 0}$ четырьмя различными методами:

- методом бисекции;
- методом хорд;
- методом Ньютона;
- методом простых итераций (последовательных приближений).

Выполнить по 6 итераций каждым методом,сравнить погрешность вычислений.

Решение

Метод бисекции

Подготовка:

- **Интервал [a, b]:** a = -4.5, b = -3.5 , $\boldsymbol{f(a) = 8.795, f(b) = -6.7029}$;

  $\boldsymbol{f(a) * f(b) \le 0}$ выполняется

Шаги:

1. $x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{-4.5-3.5}{2} = -4$

   $f(x_0) * f(a) \le 0$ не выполняется, $a = x_0 = -4$;

   $f(x_0) = 1.1088$;

   $f(a) = 1.1088$;

2. $x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{-4-3.5}{2} = -3.75$;

   $f(x_0) * f(a) \le 0$ выполняется, $b = x_0 = -3.75$;

   $f(x_0) = -2.9624$;

   $f(a) = 1.1088$;

3. $x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{-4-3.75}{2} = -3.875$;

   $f(x_0) * f(a) \le 0$ выполняется, $b = x_0 = -3.875$;

   $f(x_0) = -0.94847$;

   $f(a) = 1.1088$;

4. $x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{-4—3.875}{2} = -3.9375$

   $f(x_0) * f(a) \le 0$ не выполняется, $a = x_0 = -3.9375$;

   $f(x_0) = 0.077521$;

   $f(a) = 0.0077521$;

5. $x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{-3.9375-3.875}{2} = -3.9062;$

$f(x_0) * f(a) \leq 0$ выполняется, $\quad b = x_0 = -3.9062;$

$f(x_0) = -0.4365;$

$f(a) = 0.077521;$

6. $x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{-3.9375-3.9062}{2} = -3.9219$

$f(x_0) * f(a) \leq 0$ выполняется, $\quad b = x_0 = -3.9219;$

$f(x_0) = -0.1797;$

$f(a) = -0.077521;$

Метод хорд

Подготовка:

- **Интервал [a, b]:** a = -4.5, b = -3.5 , $\boldsymbol{f(a) = 8.795, f(b) = -6.7029}$;

$\boldsymbol{f(a) * f(b) \leq 0}$ выполняется

Шаги:

1. $x_0 = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} * f(b) = -3.9325;$

$f(x_0) * f(a) \leq 0$ выполняется, $\quad b = x_0 = -3.9325;$

$f(x_0) =; -0.0047581$

$f(a) = 8.795;$

2. $x_0 = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} * f(b) = -3.9328;$

$f(x_0) * f(a) \leq 0$ не выполняется, $\quad a = x_0 = -3.9328;$

$f(x_0) = 0.00029476;$

$f(a) = 0.0002976;$

3. $x_0 = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} * f(b) = -3.9328;$

$f(x_0) * f(a) \leq 0$ выполняется, $\quad b = x_0 = -3.9328;$

$f(x_0) = -3.8362e - 09;$

$f(a) = 0.00029476;$

4. $x_0 = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} * f(b) = -3.9328;$

   $f(x_0) * f(a) \leq 0$ выполняется, $\quad b = x_0 = -3.9328;$

   $f(x_0) = -1.7764e - 15;$

   $f(a) = 0.00029476;$

5. $x_0 = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} * f(b) = -3.9328;$

   $f(x_0) * f(a) \leq 0$ выполняется, $\quad b = x_0 = -3.9328;$

   $f(x_0) = -1.7764e - 15;$

   $f(a) = 0.00029476$

6. $x_0 = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} * f(b) = -3.9328;$

   $f(x_0) * f(a) \leq 0$ выполняется, $\quad b = x_0 = -3.9328;$

   $f(x_0) = -1.7764e - 15;$

   $f(a) = 0.00029476$

Метод Ньютона

Подготовка:

- **Интервал [a, b]:** a = -4.5, b = -3.5 , $\boldsymbol{f(a) = 8.795, f(b) = -6.7029}$;

  $\boldsymbol{f(a) * f(b) \leq 0}$ выполняется
- **Производная:** $\boldsymbol{f'(x) = x(2sin(x) + xcos(x));}$
- $x_0 = -4;$

Шаги:

1. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -3.9285;$

2. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -3.9331;$

3. $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -3.9328;$

4. $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -3.9328;$

5. $x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = -3.9328;$

6. $x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} = -3.9328;$

Метод простых итераций (Якоби)

Подготовка:

- **Интервал [a, b]:** a = -4.5, b = -3.5 , $\boldsymbol{f(a) = 8.795, f(b) = -6.7029}$;

  $\boldsymbol{f(a) * f(b) \leq 0}$ выполняется
- **Приведение уравнения к виду, удобному для итерации:**

  $$\varphi(x) = x + x^2 * \sin(x) - 11$$
- $x_0 = \frac{-4.5-3.5}{2} = -4$;
- **Проверка устойчивости:**

  $\varphi'(x_0) = x^2 \cos(x) + 2xsin(x) + 1 < 1$ $-$ не выполняется
- **Введение коэффициента релаксации:** $k = 0.01$;

  $\varphi(x) = x + k * \ x^2 * \sin(x) - 11$;
- **Проверка устойчивости:**

  $\varphi'(x_0) = |k * \varphi'(x_0)| = \left|0.01 * (x^2 \cos(x) + 2xsin(x) + 1)\right| < 1$ выполняется

Шаги:

1. $x_1 = \boldsymbol{\varphi}(x_0) = -3.9889$;
2. $x_2 = \boldsymbol{\varphi}(x_1) = -3.9797$;
3. $x_3 = \boldsymbol{\varphi}(x_2) = -3.9719$;
4. $x_4 = \boldsymbol{\varphi}(x_3) = -3.9655$;
5. $x_5 = \boldsymbol{\varphi}(x_4) = -3.9601$;
6. $x_6 = \boldsymbol{\varphi}(x_5) = -3.9556$;

Выводы

Ответы: Точный ответ Wolfram|Alpha - -3.92279330

Метод бисекции - -3.9219

Метод хорд - -3.9328

Метод Ньютона - -3.9328

Метод простых итераций (Якоби) - -3.9556

Задание 5

Содержание задания:

Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y''(t) + 5 * y'(t) + N_s * y(t) = N_g, \qquad y(0) = 5, \qquad y'(0) = 10.$$

$$N_s = 6, \qquad N_g = 11.$$

1. Классическим методом;
2. Операторным методом;
3. Задачу решить численным методом Рунге-Кутта 4-го порядка и построить график решения.

ПРИМЕЧАНИЕ. Для численного метода Рунге-Кутта предварительно требуется рассчитать время переходного процесса, используя найденные ранее корни характеристического уравнения. В качестве интервала наблюдения выбирается временной интервал $T = (3 \div 4)\tau$, где $\tau = 1/p_{min}$. Здесь p_{min} – минимальный по величине (модулю) корень характеристического уравнения $p_{min} = \min\{|p_1|, |p_2|\}$.

Рекомендуемая величина шага дискретизации $h = \Delta t = T / 20$ при использовании программы метода Рунге–Кутта. Исходное уравнение 2-го порядка $y'' = f(y, y')$ преобразуется в систему двух уравнений 1-го порядка с помощью замены переменных:

$$\begin{cases} y' = z, & y(0) = y_0, \\ z' = f(y, z), & z(0) = y'(0) = y'_0. \end{cases}$$

Исходное дифференциальное уравнение:

$$y''(t) + 5 * y'(t) + 6 * y(t) - 11 = 0, \qquad y(0) = 5, \qquad y'(0) = 10.$$

Классический метод

$$y''(t) + 5 * y'(t) + 6 * y(t) = 11, \qquad y(0) = 5, \qquad y'(0) = 10.$$

Частное решение $t \to \infty, 6y(\infty) = 11; y = \frac{11}{6} = 1.83$

Вычисление корней характеристического уравнения:

$p^{\,2} + 5p + 6 = 0;$

$D = 25 - 4 * 6 = 1;$

$p_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 1}{2};\ p_1 = -2;\ p_2 = -3$

Общее решение: $y(t) = C_1 e^{+p_1} + C_2 e^{+p_2}$

$$y(t) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

Задача Коши:

$y(0) = 5$

$y(0) = 1.83 + C_1 e^{-3*0} + C_2 e^{-2*0}$

$y(0) = C_1 + C_2 = 5 - 1.83$

$y(0) = C_1 + C_2 = 3.17 \ \to C_1 = 3.17 - C_2$

$y'(0) = 10$

$y'(t) = -3C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{-2t}$

$t = 0$

$y'(t) = -2C_1 - 3C_2 = 10$

Система уравнений

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3.17 \\ -2C_1 - 3C_2 = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} -2(3.17 - C_2) - 3C_2 = 10 \\ -6.34 + 2C_2 - 3C_2 = 10 \end{cases}$

$-6.34 - C_2 = 10$

$-C_2 = 10 + 6.34$

$C_2 = -16.34$

$C_1 = 3.17 + 16.34 = 19.51$

$\begin{cases} C_1 = 19.51 \\ C_2 = 16.34 \end{cases}$

Операторный метод

$$y''(t) + 5 * y'(t) + 6 * y(t) = 11, \qquad y(0) = 5, \qquad y'(0) = 10.$$

$$p^2Y(p) - p * y(0) - y'(0) + 5\big(pY(p) - y(0)\big) + 6Y(p) = \frac{11}{p};$$

$$p^2Y(p) - 5p - 10 + 5pY(p) - 25 + 6Y(p) = \frac{11}{p};$$

$$p^2Y(p) - 5p + 5pY(p) + 6Y(p) - 35 = \frac{11}{p};$$

$$p^2Y(p) + 5pY(p) + 6Y(p) = \frac{11}{p} + 5p + 35;$$

$$Y(p)(p^2 + 5p + 6) = \frac{11}{p} + 5p + 35;$$

$$Y(p) = \frac{5p^2 + 35p + 11}{p(p^2 + 5p + 6)};$$

Теорема:

$$f(t) = \frac{F1(p)}{pF2'(p)} * e^{pt};$$

$$F1(p) = 5p^2 + 35p + 11;$$

$$F2(p) = p^2 + 5p + 6;$$

$$F2'(p) = 2p + 5;$$

$$F2(p) = p^{\,2} + 5p + 6 = 0;$$

$$D = 25 - 4 * 6 = 1;$$

$$p_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2};\ p_1 = -3;\ p_2 = -2$$

$$y(t) = \frac{F1(0)}{F2(0)} + \frac{F1(p_1)}{p_1 * F2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F1(p_2)}{p_2 * F2'(p_2)} e^{p_2 t}$$

$$y(t) = \frac{11}{6} + \frac{20 - 70 + 11}{-2 * 1} e^{-2t} + \frac{-45 - 3 * 35 + 11}{+3} e^{-3t}$$

$$y(t) = 1.83 + \frac{-39}{-2} e^{-2t} + \frac{-49}{3} e^{-3t}$$

$$y(t) = 1.83 + 19.5e^{-2t} - 16.333e^{-3t}$$

Метод Рунге-Кутта 4 порядка

Подготовка к вычислениям по методу Рунге-Кутта

- Преобразование диф. уравнения второго порядка в систему двух уравнений первого:

$$\begin{cases} y' = z, \quad y(0) = y_0 = 5 \\ z' = 11 - 6y - 5z, \quad z(0) = y'(0) = y'_0 = 10. \end{cases}$$

- Вычисление корней характеристического уравнения:

$$p^2 + 5p + 6 = 0;$$

$$D = 25 - 4 * 6 = 1;$$

$$p_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2};\ p_1 = -2;\ p_2 = -3$$

- Расчет интервала времени наблюдения:

$$\tau = \frac{1}{|p_{min}|} = \frac{1}{2} = 0.5;$$

$$T = 4\tau = 2.$$

- Расчет шага дискретизации:

$$h = \Delta t = \frac{T}{20} = \frac{2}{20} = 0.1.$$

Вычисления значений точек по методу Рунге-Кутта

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} * (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$$

$$f_1 = z_0;$$

$$f_2 = z_0 + \frac{h}{2} * g_1;$$

$$f_3 = z_0 + \frac{h}{2} * g_2;$$

$$f_4 = z_0 + h * g_3;$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{h}{6} * (g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)$$

$$g_1 = f(t, y, z);$$

$$g_2 = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} * f_1, z + \frac{h}{2} * g_1);$$

$$g_3 = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} * f_2, z + \frac{h}{2} * g_2);$$

$$g_4 = f(t + \frac{h}{2}, y + h * f_3, z + h * g_3);$$

$$f_1 = 10;$$

$$g_1 = 11 - 6 * 5 - 5 * 10 = -69;$$

$f_2 = 10 + 0.05(-69) = 6.55;$

$g_2 = 11 - 6 * (5 + 0.05 * 10) - 5\big(10 + 0.05 * (-69)\big) = 11 - 33 - 32.75 = -54.75;$

$f_3 = 10 + 0.05(-54.75) = 7.2625;$

$g_3 = 11 - 6 * (5 + 0.05 * 6.55) - 5\big(10 + 0.05 * (-54.75)\big) = -57.4025;$

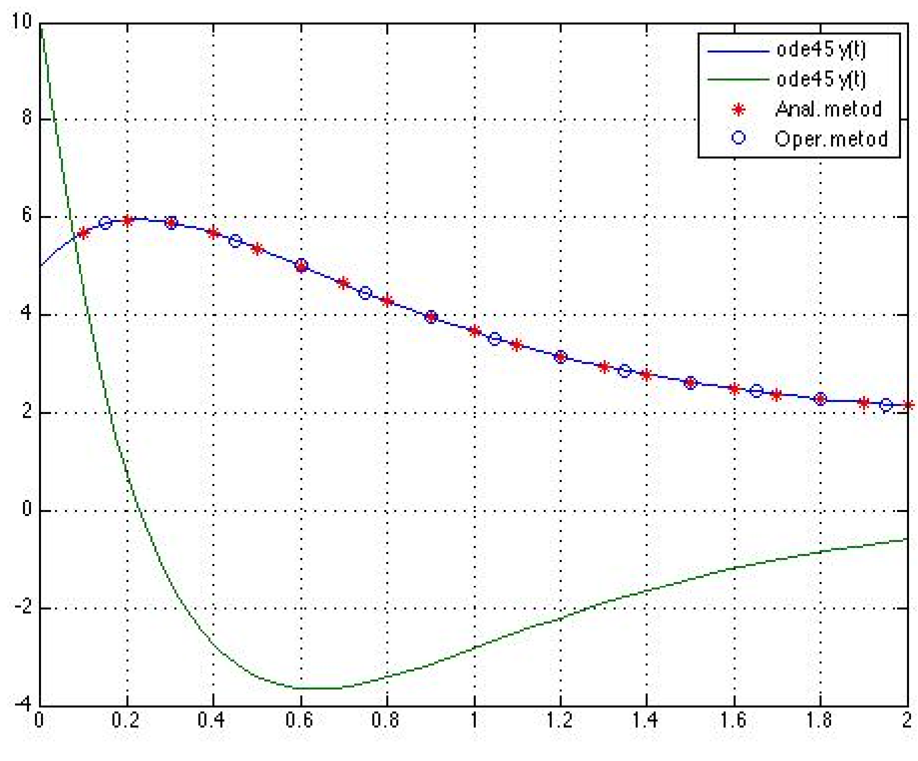
$f_4 = 10 + 0.1(-57.4025) = 4.25975;$

$g_4 = 11 - 6 * (5 + 0.1 * 7.2625) - 5\big(10 + 0.1 * (-57.4025)\big) = -44.656;$

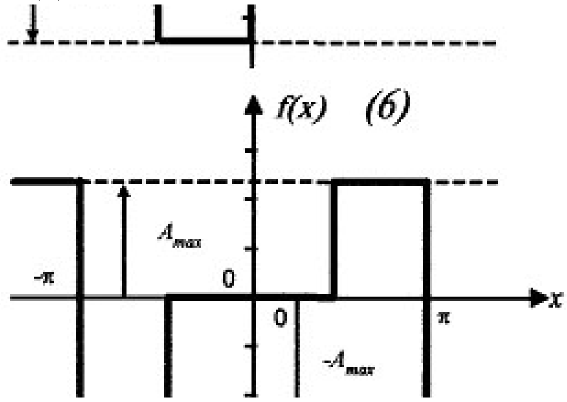
$$y_1 = 5 + \left(\frac{0.1}{6}\right) * (10 + 2 * 6.55 + 2 * 7.2625 + 4.25975) = 5.695286;$$

$$z_1 = 10 + \left(\frac{0.1}{6}\right) * \big((-69) + 2 * (-54.75) + 2 * (-57.4025) + 44.656\big) = 4.36956974;$$

Графики решений по классическому (аналитическому), операторному методам и методу Рунге-Кутта



Задание 6



Nvar=2; A_{max} = 11

1. Для периодической несинусоидальной функции, заданной графически, определить:
- постоянную составляющую A_0
- косинусные и синусные коэффициенты C_k и B_k для трех первых гармоник (k = 1, 2, 3) разложения в ряд Фурье
- модуль A_k и фазу φ_k каждой гармоники.

2. Построить комплексный спектр $\{C(k\omega_0), B(k\omega_0)\}$ и амплитудно-фазовый спектр сигнала $\{A(k\omega_0), \varphi(k\omega_0)\}$, как функцию от частоты $k\omega_0$

3. Рассчитать значения функции $\phi(\omega_0 t) = A_0 + \sum_{k=1}^{3} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ в 7 точках на интервале $[-\pi;\pi]$ и занести их в таблицу.

4. По результатам расчета построить графики исходной функции $f(\omega_0 t)$ и $\phi(\omega_0 t)$ на одном рисунке.

Решение.

1.а) постоянная составляющая

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-11)dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5.5 dt\right) = 1.3575$$

1.б) коэффициенты B_k для k = 1, 2, 3 по формуле $B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} -11 * \sin(1t)dt + \int_{-\pi/2}^{\pi} 5.5 * \sin(1t)\,dt\right) = 5.25211$$

$$B_2 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} -11 * \sin(2t)dt + \int_{-\pi/2}^{\pi} 5.5 * \sin(2t)\,dt\right) = -5.25211$$

$$B_3 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -11 * \sin(3t)dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} 5.5 * \sin(3t)\,dt\right) = 1.7507$$

1. в) коэффициенты C_k для k = 1, 2, 3 по формуле $C_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$

$$C_1 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} -11 * \cos(1t)dt + \int_{-\pi/2}^{\pi} 5.5 * \cos(1t)\,dt\right) = 5.25211$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} -11 * \cos(2t)dt + \int_{-\pi/2}^{\pi} 5.5 * \cos(2t)\, dt\right) = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} -11 * \cos(3t)dt + \int_{-\pi/2}^{\pi} 5.5 * \cos(3t)\, dt\right) = -1.7507$$

1. г) модуль гармоник A_k для k = 1, 2, 3 по формуле $A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}$

$$A_1 = \sqrt{5.25211^2 + 5.25211^2} = 7.4276$$

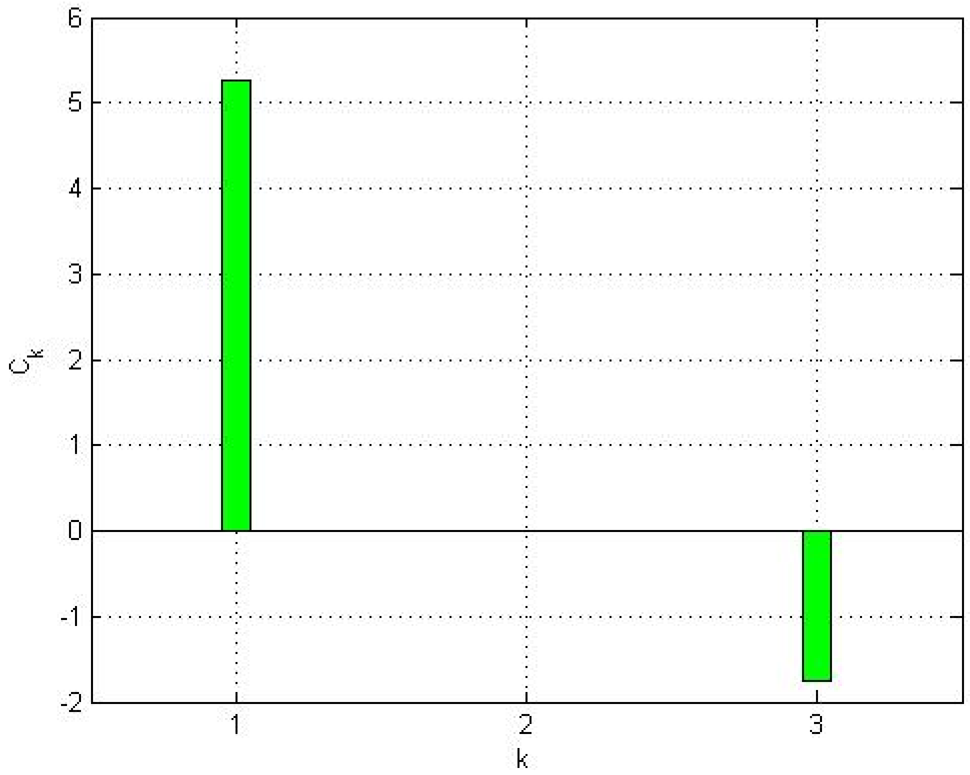
$$A_2 = \sqrt{(-5.25211)^2 + 0^2} = 5.2521$$

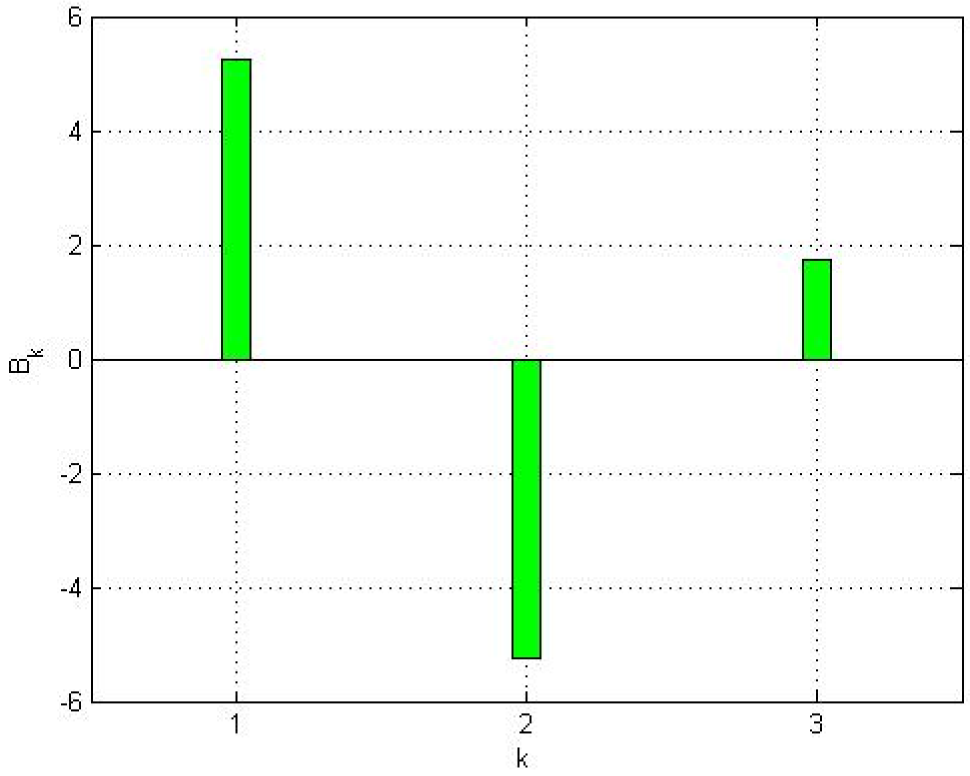
$$A_3 = \sqrt{1.7507^2 + (-1.7507)^2} = 2.4759$$

1. д) фаза гармоник для k = 1, 2, 3 по формуле $\varphi_k = arctg\frac{B_k}{C_k}$

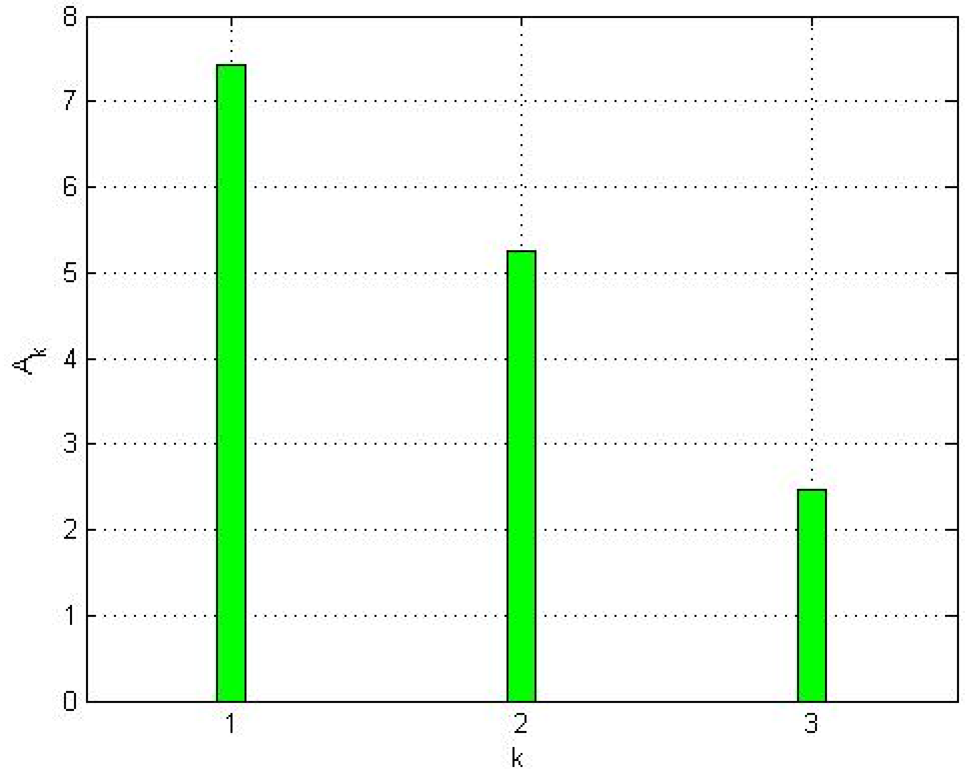
$$\phi_1 = 0.7854$$
$$\phi_2 = -1.5708$$
$$\phi_3 = -0.7854$$

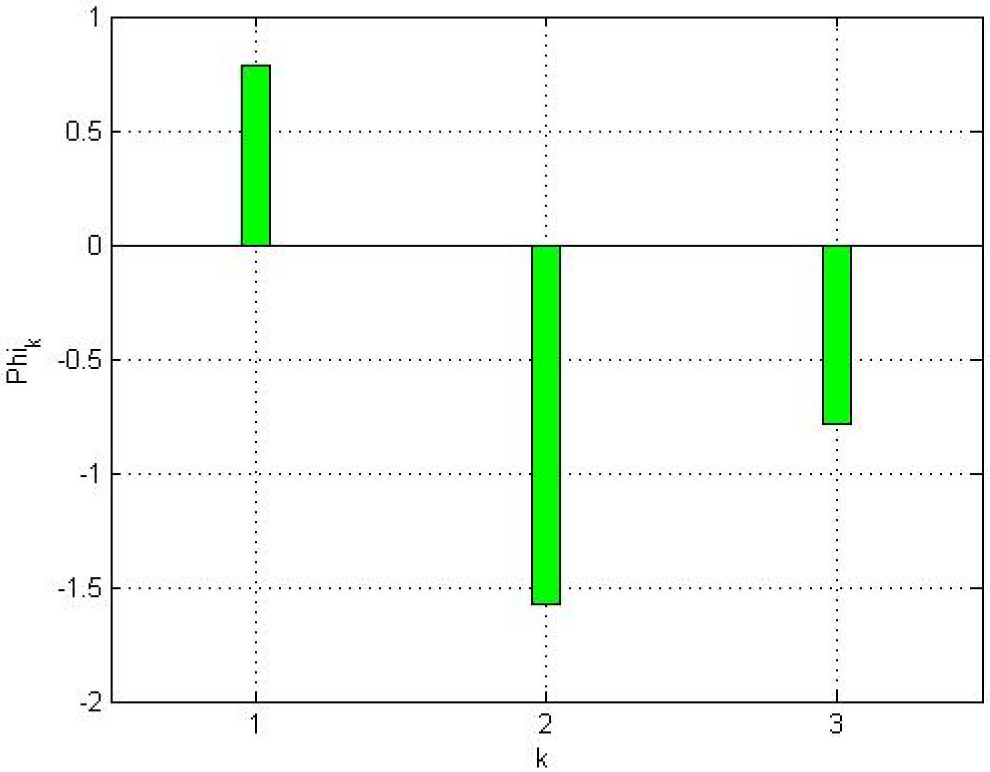
2. Комплексный спектр $\{C(k\omega_0), B(k\omega_0)\}$





Амплитудно-фазовый спектр сигнала $\{A(k\omega_0), \varphi(k\omega_0)\}$

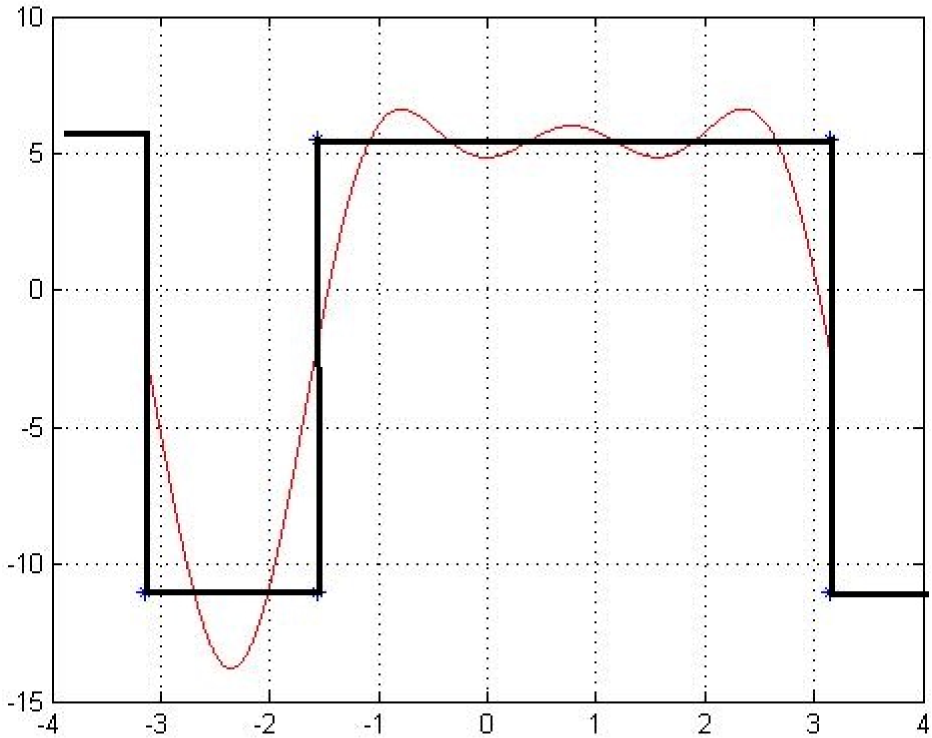




3. Общий вид разложения периодической функции в ряд

$$\varphi = A_0 + \sum C_k * \cos(k\omega t) + \sum B_k * sin(k\omega t)$$

t	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
φ	-2.1439	-13.798	-2.1439	4.8589	4.8589	6.6096	-2.1439


10
5
0
-5
-10
-15
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

Задание 7 (Matlab)

Задание II-3

Решение системы ОДУ (стабилизация цены в денежном выражении):

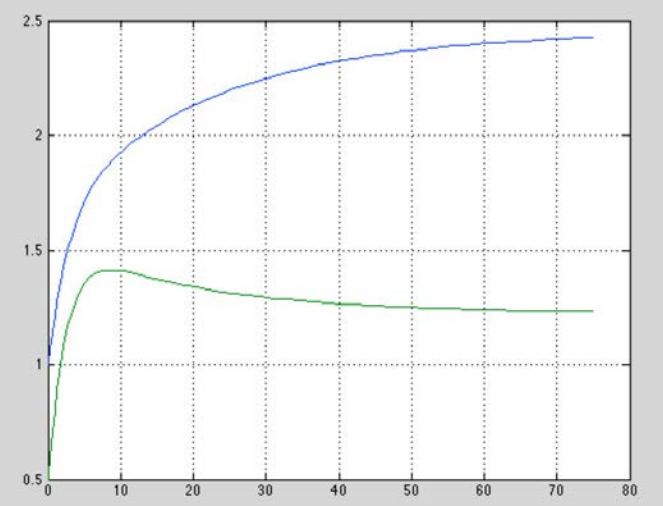
$$\begin{cases} x' = a_1 - a_2 * x * y \\ y' = b_1 - b_2 * y - b_3 * x * y \end{cases}$$

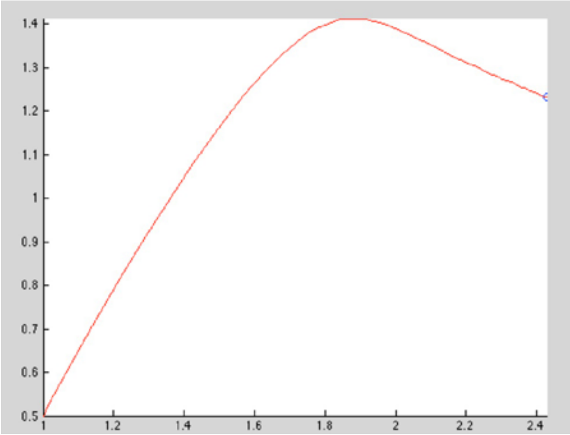
при $a_i = 0.3, a_2 = 0.1, b_1 = 0.52, b_2 = 0.18, b_3 = 0.1$ и начальных условиях x(0)=1 и y(0)=0.5. Построить графит x(t) – деньги, y(t) – товар и фазовый портрет системы на временном интервале [0;75]

Код команд:

```
function y = FIle1_RF(t, x)
y = [0.3 - 0.1*x(1).*x(2); 0.52 - 0.18*x(2) - 0.1*x(1).*x(2)];
end
```

```
>> x0 = [1 0.5];
>> t = [0 75];
>> [t, x] = ode45( 'FIle1_RF', t, x0 );
>> plot(t, x), grid on
>> figure(3), comet(x(:,1), x(:,2))
```





Задание VII-14

Методом линейного программирования минимизировать функцию

Найти минимум $F(x, y) = 2x + 5y$ при указанных ограничениях $(x >= 0, y >= 0, x + y >= 5,\ x + 2y <= 14, 2x + y <= 14)$.

Код команд:

```
clc, clear
% F celevaja funk
% A ogranic
% B vektor pravoj casti

F = [2. 5.];
A = [-1 0; 0 -1; -1 -1; 1 2; 2 1];
B = [0; 0; -5; 14; 14];
[x,fval, exitflag] = linprog(F, A, B)
Optimization terminated.
x =
    5.0000
   -0.0000
fval =
   10.0000
exitflag =
     1
```