



Институт транспорта и связи

Факультет
компьютерных наук и электроники

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
И
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению

курсовых, лабораторных и контрольных
работ для студентов дневного, вечернего
и заочного отделений

Составитель: А.В. Граковский

Рига 2007

Граковский А.

Численные методы: учебное пособие и методические указания. Рига: Институт транспорта и связи, 2007. 35 с.

Учебное пособие "Численные методы" предназначено для студентов следующих направлений:

- Компьютерные науки (курс "Численные методы в компьютерных расчетах");
- Электроника (курс "Численные методы и прикладное программирование", часть I)

для всех форм обучения (очной, вечерней, заочной).

Разделы пособия соответствуют учебным программам бакалаврской степени обучения по вышеуказанным специальностям.

В каждом разделе даны основные теоретические положения, определения, методические указания и примеры решения типовых заданий.

Вторая часть пособия – "Домашние задания" содержит варианты заданий на курсовую работу (Компьютерные науки) и домашнее задание (Электроника). Индивидуальные особенности заданий для каждой специальности определяются преподавателем дополнительно.

В конце пособия представлен список литературы, содержащей более глубокую теоретическую информацию о рассматриваемых в нем вопросах.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ.....	4
ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ КУРСА.....	4
1. ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ.....	4
2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА С ВЫБОРОМ ВЕДУЩЕГО ЭЛЕМЕНТА. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦЫ.....	7
3. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ.....	9
4. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ.....	13
5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ	17
6. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	20
7. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ	23
8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ФУРЬЕ ПРОСТЕЙШИХ ФУНКЦИЙ	26
ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ	29
1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ ГАУССА	29
2. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ.....	30
3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ.	31
4. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ.....	32
5. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 2-го ПОРЯДКА.....	32
6. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ	33
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	35

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Методические указания к выполнению курсовых, контрольных и лабораторных работ по курсу "Численные методы" предназначены для самостоятельной подготовки к выполнению данных работ студентами ИТС разных специальностей и форм обучения и содержат краткое изложение теоретических аспектов каждой темы, типовые задания и примеры их решения. Для полного усвоения материала курса сведения, содержащиеся в методических указаниях, необходимо дополнить информацией из лекционного материала и рекомендуемой учебной литературы. Индивидуальные особенности заданий для каждой специальности определяются преподавателем дополнительно.

Для выполнения заданий № 2–5 возможно применение вычислительной техники. При этом язык программирования выбирается самим студентом. В примерах и в качестве рекомендуемого предлагается BASIC IBM PC как наиболее универсальный, простой и подходящий для решения предлагаемых задач.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1. ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Общие сведения

Алгебра комплексных чисел широко используется при анализе электрических цепей с источниками переменного тока. Под переменным будем понимать ток (или напряжение), изменяющийся во времени по закону *Sin* или *Cos*, т.е. гармоническому закону:

$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где I_0 – амплитуда, $\omega = 2\pi / T_0$ – угловая частота, $\varphi_0 = \omega \cdot t_0$ – начальная фаза синусоиды, T_0 – период и t_0 – начальное запаздывание или задержка (рис. 1). Такая форма называется мгновенным значением тока $i(t)$.

Представление гармонической функции как проекции на плоскость некоей пространственной спирали дает другую проекцию в виде окружности, по которой вращается точка с угловой скоростью ω и начальной фазой φ_0 .

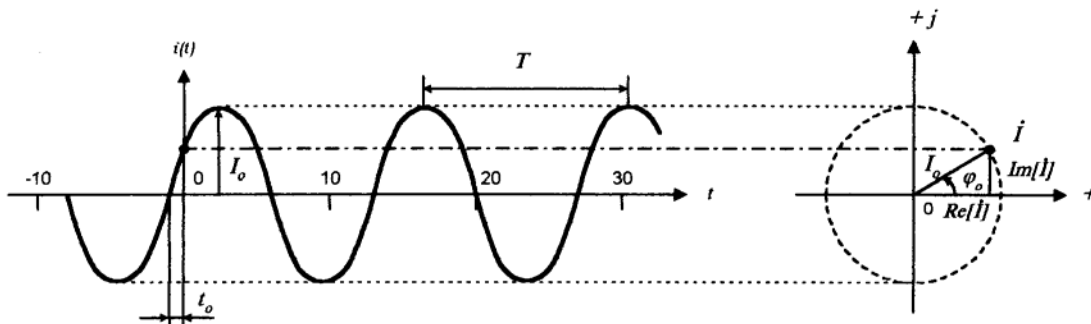


Рис. 1. Отображение синусоиды на комплексной плоскости

Радиус окружности равен амплитуде синусоиды I_0 (рис. 1). Плоскость этой проекции называется комплексной плоскостью, ее оси: $+$ – вещественная ось, $+j$ – мнимая ось.

Аналитически образ синусоиды на комплексной плоскости записывается по правилу Эйлера с помощью комплексной экспоненты:

$$i(t) = I_0 \cdot \exp(j\omega t + \varphi_0), \text{ где } \exp(j\phi) = \cos(\phi) + j\sin(\phi) \text{ и } j = \sqrt{-1}.$$

Такая форма записи называется комплексом мгновенного значения тока (напряжения). Если исключить вращение (в линейной цепи все токи и напряжения имеют одну и ту же частоту), то мы получим точку на комплексной плоскости $\vec{I} = I_0 e^{j\varphi_0}$, являющуюся образом исходной синусоиды. Она называется комплексом амплитуды тока (напряжения).

В математике комплексное число обозначается в виде вектора \vec{A} с началом в центре системы координат. Его основные формы представления:

показательная – $\vec{A} = A_0 e^{j\varphi}$ (что соответствует полярной системе координат с амплитудой A_0 и фазой φ комплексного числа) или алгебраическая – $\vec{A} = a + jb$ (декартова система координат, где a – вещественная $\operatorname{Re}\{\vec{A}\}$, b – мнимая $\operatorname{Im}\{\vec{A}\}$ части комплексного числа). За положительный угол (фазу) комплексного числа принимается угол, отсчитываемый от положительного направления вещественной оси ($+Re$) против часовой стрелки.

Преобразование комплексного числа из одной формы в другую

Пересчет числа из одной формы в другую осуществляется с использованием стандартных тригонометрических соотношений для прямоугольного треугольника (связь между полярной и декартовой системами координат):

$$\vec{A} = A_0 e^{j\varphi} = a + jb,$$

$$a = A_0 \cos(\varphi), \quad b = A_0 \sin(\varphi),$$

$$\text{и } A_0 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg(b/a). \quad ***$$

ПРИМЕЧАНИЕ.*** При вычислении фазы φ , если $\operatorname{Re}\{\vec{A}\} = a < 0$, то во избежание ошибки из-за ограничения области определения функции $\arctg()$ (от -90° до $+90^\circ$) к вычисленной фазе комплексного числа необходимо прибавить или отнять 180° так, чтобы результат был меньше по абсолютной величине.

Алгебра комплексных чисел

1) Сложение и вычитание комплексных чисел. Выполняется только в алгебраической форме:

$$\vec{A}_1 \pm \vec{A}_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2).$$

2) Умножение и деление. Предпочтительно проводить эту операцию в показательной форме:

$$\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \vec{A}_1 / \vec{A}_2 = (A_1 / A_2) \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Сложнее умножать в алгебраической форме (правила перемножения скобок и учет определения $j = \sqrt{-1}$, т.е., $j \cdot j = j^2 = (\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) = -1$

$$\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Деление в алгебраической форме требует умножения числителя и знаменателя на комплексное число, сопряженное знаменателю

$$\vec{A}_2^* = (a_2 - jb_2), \text{ так, что } \vec{A}_2 \cdot \vec{A}_2^* = (a_2 + jb_2) \cdot (a_2 - jb_2) = A_2 \cdot A_2 = A_2^2.$$

Тогда мнимость в знаменателе исчезает и далее (см. умножение)

$$\frac{\vec{A}_1}{\vec{A}_2} = \frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

3) Возведение комплексного числа в степень (в т.ч. дробную степень, т.е. вычисление корня n -степени). Операция выполняется только в показательной форме.

$$(\vec{A})^n = (A_0 \cdot e^{j\varphi_0})^n = (A_0)^n \cdot e^{jn\varphi_0}.$$

4) Натуральный логарифм от комплексного числа. Только показательная форма.

$$\ln(\vec{A}) = \ln(A_0 \cdot e^{j\varphi_0}) = \ln A_0 + j\varphi_0.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Чтобы получить Re и Im результата безразмерными, фазу, заданную в градусах, необходимо перевести в радианы, используя переводной коэффициент $1 \text{ рад.} \approx 57.3^\circ$.

5) Экспонента от комплексного числа. Только алгебраическая форма.

$$\exp(\vec{A}) = e^{\vec{A}} = e^{a+jb} = (e^a) \cdot e^{jb}.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Чтобы результат был в стандартной показательной форме, фазу необходимо домножить на коэффициент $1 \text{ рад.} \approx 57.3^\circ$.

Пример. Вычислить значение выражения:

$$\ln \left(1 + \frac{\vec{A}^2}{\vec{A} + \vec{B}^3} \right), \text{ где } \vec{A} = -2 + j2 \text{ и } \vec{B} = 5e^{-j30^\circ}.$$

Действия выполняются последовательно с учетом иерархии арифметических операций, на каждом шаге выбирается наиболее удобная форма комплексных чисел (алгебраическая или показательная). Итоговый результат дается в обеих формах. Все действия выполняются с точностью до трех значащих цифр после запятой.

$$\vec{A} = -2 + j2 = 2.828e^{j135^\circ}, \quad \vec{B} = 5e^{-j30^\circ} = 4.326 - j2.5,$$

$$\vec{A}^2 = 8e^{j270^\circ} = -j8, \quad \vec{B}^3 = 125e^{-j90^\circ} = -j125,$$

$$\vec{A} + \vec{B}^3 = -2 + j2 - j125 = -2 - j127 = 127.016e^{j(89.098^\circ - 180^\circ)} = 127.016e^{-j90.902^\circ},$$

$$1 + \vec{A}^2 / (\vec{A} + \vec{B}^3) = 1 + 8e^{j270^\circ} \cdot 127.016e^{-j90.902^\circ} = 1 + 0.063e^{j179.098^\circ} = 1 - 0.062 + j0.001 = 0.938 + j0.001 = 0.938e^{j0.061^\circ}.$$

$$\ln \left(1 + \frac{\vec{A}^2}{\vec{A} + \vec{B}^3} \right) = \ln(0.938) + j \left(\frac{0.061^\circ}{57.3^\circ} \right) = -0.064 + j0.001 = 0.064e^{j179.105^\circ}.$$

рассматривается столбец коэффициентов при x_2 и шаги 1 и 2 повторяются и т.д., до тех пор, пока матрица системы не примет вид верхней треугольной матрицы.

Обратный ход. Из самого нижнего уравнения преобразованной системы, где остался ненулевым только коэффициент при x_n , находится $x_n = b_n / a_{nn}$. Найденное решение подставляется в предпоследнее уравнение, откуда находится x_{n-1} и т.д., снизу вверх определяются все неизвестные $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_2, x_1$.

Ориентировочный вариант BASIC-программы, реализующей метод исключения Гаусса с выбором ведущего элемента, приводится ниже:

```

-----Ввод коэффициентов системы-----
10 PRINT "Задайте порядок системы": INPUT n
20 DIM a(n, n), b(n), x(n)
30 FOR i = 1 TO n: FOR j = 1 TO n: PRINT "a("; i; ", "; j; ")=?"
40 INPUT a(i, j): NEXT j: PRINT "b("; i; ")=?": INPUT b(i): NEXT i
-----Прямой ход Гаусса-----
60 FOR i = 1 TO n - 1
  -----Выбор ведущего элемента-----
  65 m = i: FOR j = i + 1 TO n
  70 IF ABS(a(m, i)) < ABS(a(j, i)) THEN m = j
  75 NEXT j
  -----Перестановка строк-----
  80 FOR k = i TO n: c = a(m, k): a(m, k) = a(i, k): a(i, k) = c: NEXT k
  90 c = b(m): b(m) = b(i): b(i) = c
  -----Исключение коэффициентов в j-м столбце-----
  100 FOR j = i + 1 TO n: c = -a(j, i) / a(i, i): FOR k = i + 1 TO n
  105 a(j, k) = a(j, k) + c * a(i, k)
  110 NEXT k: b(j) = b(j) + c * b(i): NEXT j: NEXT i
  -----Обратный ход Гаусса-----
  120 x(n) = b(n) / a(n, n): FOR i = n - 1 TO 1 STEP -1: FOR k = i + 1 TO n
  135 b(i) = b(i) - x(k) * a(i, k)
  140 NEXT k: x(i) = b(i) / a(i, i): NEXT i
  -----Печать результатов-----
  150 FOR i = 1 TO n: PRINT "x("; i; ")="; x(i): NEXT i
  170 END

```

Число обусловленности матрицы

Число обусловленности матрицы системы линейных уравнений характеризует чувствительность решения к изменению исходных данных — коэффициентов системы. Любая система из n уравнений с n неизвестными должна иметь единственное решение, если ее матрица — невырожденная (т.е. определитель $\det(A) \neq 0$). Однако на практике погрешности (округления) исходных данных приводят к изменению решений системы. Коэффициент пропорциональности между относительной нормой ошибки решения $\|\Delta X\| / \|X\|$ и относительной нормой ошибки коэффициентов правой части системы $\|\Delta B\| / \|B\|$ определяется как число обусловленности матрицы $Cond(A)$:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \text{Cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|},$$

где норма вектора (число, характеризующее величины элементов вектора) задается в виде евклидовой длины вектора:

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}.$$

Число обусловленности вырожденной матрицы ($\det(A)=0$) $\text{Cond}(A) = \infty$, число обусловленности единичной (диагональной) матрицы $\text{Cond}(E) = 1$. Для всех остальных случаев $1 \leq \text{Cond}(A) \leq \infty$.

3. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ

Общие сведения

В инженерной практике наиболее распространен табличный способ задания функции, при котором для конечного множества значений аргумента x_0, \dots, x_n известны полученные экспериментально (как результат наблюдений или измерений) соответствующие значения функции $f(x_0), \dots, f(x_n)$. В этом случае аналитическое выражение функции неизвестно. При необходимости найти значения функции в промежуточных точках $x \neq x_0, \dots, x_n$ строят приближенную (аппроксимирующую) функцию $\varphi_k(x)$, расчеты по которой либо совпадают (задача интерполяции), либо в определенном смысле приближаются к экспериментально полученным величинам (задача аппроксимации).

Аппроксимация применяется также в случае, когда вид функции известен, но очень сложен. Замена исходной функции $f(x)$ более простой приближенной $\varphi_k(x)$ позволяет упростить вычисления или сгладить форму сигнала.

Широкое распространение получила алгебраическая аппроксимация (интерполяция), т.е. приближенная замена на заданном интервале $x \in [x_0, x_n]$ табличной функции многочленом $P_k(x)$ степени k так, чтобы в точках x_i их значения были по возможности близки (аппроксимация) либо полностью совпадали (интерполяция):

$$P_k(x_i) \cong f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Точки x_i называют узлами интерполяции. Можно показать, что интерполяционный многочлен n -го порядка ($k=n$), проходящий через $(n+1)$ узел интерполяции, единственен.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Решение задачи алгебраической интерполяции обеспечивает интерполяционный многочлен Лагранжа, являющийся линейной комбинацией известных значений функции и локальных полиномов Лагранжа:

$$L_n(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) \cdot l_1(x) + \dots + f(x_n) \cdot l_n(x), \quad l_i(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i, \\ 0, & x \neq x_i, \end{cases}$$

таких, что $l_i(x) = 1$ только в точке x_i , а во всех других узлах интерполяции x_j ($j \neq i$) он равен 0. Тогда i -й локальный полином должен иметь следующий вид:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n-1})(x_i - x_n)},$$

что обеспечит выполнение условий интерполяции.

Интерполяционный многочлен Ньютона

Каждое слагаемое формулы Лагранжа представляет собой многочлен n -й степени, т.е. зависит от всех узлов интерполяции. В силу этого при увеличении числа узлов и, соответственно, степени многочлен требуется строить заново. От этого недостатка свободен интерполяционный многочлен (полином) Ньютона. Для его построения введем предварительно понятие *разделенных разностей*. Они определяются выражениями:

$$\Delta f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{— разделенные разности первого порядка;}$$

$$\Delta^2 f(x_i) = \frac{\Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)}{x_{i+2} - x_i} \quad \text{— разделенные разности второго порядка;}$$

$$\Delta^{(n)} f(x_i) = \frac{\Delta^{(n-1)} f(x_{i+1}) - \Delta^{(n-1)} f(x_i)}{x_n - x_0} \quad \text{— разделенные разности } n\text{-го порядка, где}$$

$$i=0,1,2,\dots,n-1.$$

Если узлы интерполяции расположены равномерно (постоянный шаг), то при $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = \text{Const}$, ($i = 0,1,\dots,n-1$) получаем упрощенные выражения для вычисления разделенных разностей:

$$\Delta^{(k)} f(x_i) = \frac{\Delta^{(k-1)} f(x_{i+1}) - \Delta^{(k-1)} f(x_i)}{k \cdot h}, \quad k = 1,2,\dots,n.$$

С учетом введенных обозначений интерполяционный многочлен Ньютона принимает вид:

$$N_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \Delta f(x_0) + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \Delta^2 f(x_0) + \\ + \dots + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) \cdot \Delta^{(n)} f(x_0).$$

Здесь каждое i -е слагаемое ($i=0,1,\dots,n$) зависит только от i первых узлов интерполяции и значений функции в них. Добавление новой точки требует вычисления одного слагаемого и добавление его к предыдущей сумме. Первоначальные слагаемые не меняются, что является важным преимуществом данного многочлена по сравнению с полиномом Лагранжа. В силу существования единственного интерполяционного многочлена формулы Лагранжа и Ньютона представляют две различные его записи и дают одинаковый результат. Погрешность интерполяции в обоих случаях также одинакова.

На практике используют частные случаи многочлена Ньютона. Например, при $n=1$ получаем формулу линейной интерполяции. Удобство программирования обеспечило широкое применение при обработке результатов эксперимента.

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

Алгебраическая аппроксимация (приближение) функции многочленом k -го порядка ($k < (n + 1)$, где $n + 1$ – количество точек таблицы) имеет общий вид:

$$\varphi_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k,$$

где коэффициенты многочлена a_i , ($i=0, 1, \dots, k$) находятся из условия минимизации функционала квадрата ошибки:

$$S(x, a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=0}^n (\varphi_k(x_i) - f(x_i))^2 = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k - f(x_i))^2.$$

Требование равенства 0 частных производных функционала $S(x, a_0, a_1, \dots, a_k)$

$$\begin{cases} \frac{dS}{da_0} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dS}{da_k} = 0, \end{cases}$$

дает систему линейных уравнений порядка $(k+1)$:

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 + \dots + a_k \sum_{i=0}^n x_i^k = \sum_{i=0}^n f(x_i), \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 + \dots + a_k \sum_{i=0}^n x_i^{k+1} = \sum_{i=0}^n x_i \cdot f(x_i), \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 + \dots + a_k \sum_{i=0}^n x_i^{k+2} = \sum_{i=0}^n x_i^2 \cdot f(x_i), \\ \dots\dots\dots \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^k + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{k+1} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{k+2} + \dots + a_k \sum_{i=0}^n x_i^{2k} = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot f(x_i), \end{cases}$$

решение которой, например методом исключения Гаусса, даст искомые коэффициенты аппроксимации по методу наименьших квадратов. Иными словами, найденный аппроксимирующий многочлен $\varphi_k(x)$ будет из всех многочленов k -го порядка проходить наиболее близко к заданным значениям функции (табличным точкам). Отметим, что если $k=n$, то аппроксимирующий многочлен автоматически превращается в его частный случай – интерполирующий многочлен.

Аппроксимация в базисе ортогональных функций

Главная проблема полиномиальной аппроксимации по методу наименьших квадратов заключается в том, что при высоких порядках аппроксимации ($k > 10$) главная матрица системы линейных уравнений A становится плохо обусловленной, т.е. $Cond(A) \rightarrow \infty$ и решение ее содержит большие погрешности.

Альтернативный вариант – использование в качестве базиса аппроксимации ортогональных функций, таких, что

$$\int_a^b f_m(x) \cdot f_j(x) dx = 0, \quad \text{если } m \neq j,$$

или в дискретной форме по всем $(n+1)$ заданным точкам (число точек – четное)

$$\sum_{i=0}^n [f_m(x_i) \cdot f_j(x_i)] = 0. \quad \text{если } m \neq j.$$

Свойством ортогональности обладают многие функции: тригонометрические ряды, полиномы Чебышева, Бесселя, Лежандра, Лаггера и др. Если выбрать в качестве базиса аппроксимации набор ортогональных функций $f_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, k-1$

$$\Phi_k(x) = \sum_{m=0}^k a_m \cdot f_m(x),$$

то система линейных уравнений, составленная по методу наименьших квадратов, с учетом ортогональности превращается в систему несвязанных уравнений с диагональной матрицей ($Cond(A) \rightarrow 1$)

$$a_m \cdot \sum_{i=0}^n f_m^2(x_i) = \sum_{i=0}^n (y_i \cdot f_m(x_i)), \quad m = 0, 1, 2, \dots, k-1,$$

которая решается относительно неизвестных коэффициентов аппроксимации a_m достаточно просто. Если в качестве базисных функций использовались ортогональные полиномы (многочлены), то через приведение слагаемых при одинаковых степенях результат аппроксимации можно представить в виде обычной степенной функции $\Phi_k(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_k \cdot x^k$.

Пример. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа 3-го порядка и аппроксимирующий по методу наименьших квадратов многочлен 2-го порядка для функции, заданной 4 точками таблицы, и построить их графики на заданном интервале.

x	0	3.3	6.6	9.9
$y(x)$	12.1	15.9	12.4	13.4

Интерполяция Лагранжа:

$$L_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

$$\begin{aligned} L_3(x) &= 12.1 \cdot \frac{(x-3.3)(x-6.6)(x-9.9)}{(0-3.3)(0-6.6)(0-9.9)} + 15.9 \cdot \frac{(x-0)(x-6.6)(x-9.9)}{(3.3-0)(3.3-6.6)(3.3-9.9)} + \\ &+ 12.4 \cdot \frac{(x-0)(x-3.3)(x-9.9)}{(6.6-0)(6.6-3.3)(6.6-9.9)} + 13.4 \cdot \frac{(x-0)(x-3.3)(x-6.6)}{(9.9-0)(9.9-3.3)(9.9-6.6)} = \\ &= 0.0547x^3 - 0.877x^2 + 3.449x + 12.1. \end{aligned}$$

Аппроксимация:

$$\varphi_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Составляем систему уравнений по методу наименьших квадратов:

$$\begin{cases} 4a_0 + 19.8a_1 + 152.4a_2 = 53.8, \\ 19.8a_0 + 152.4a_1 + 1293.732a_2 = 266.97, \\ 152.4a_0 + 1293.732a_1 + 11622.026a_2 = 2026.629. \end{cases}$$

Решая систему методом исключения Гаусса, находим:

Ответ:

$$a_0 = 12.69, \quad a_1 = 0.648, \quad a_2 = -0.0643.$$

$$\varphi_2(x) = 12.69 + 0.648x - 0.0643x^2.$$

Результаты расчетов демонстрирует рис. 2.

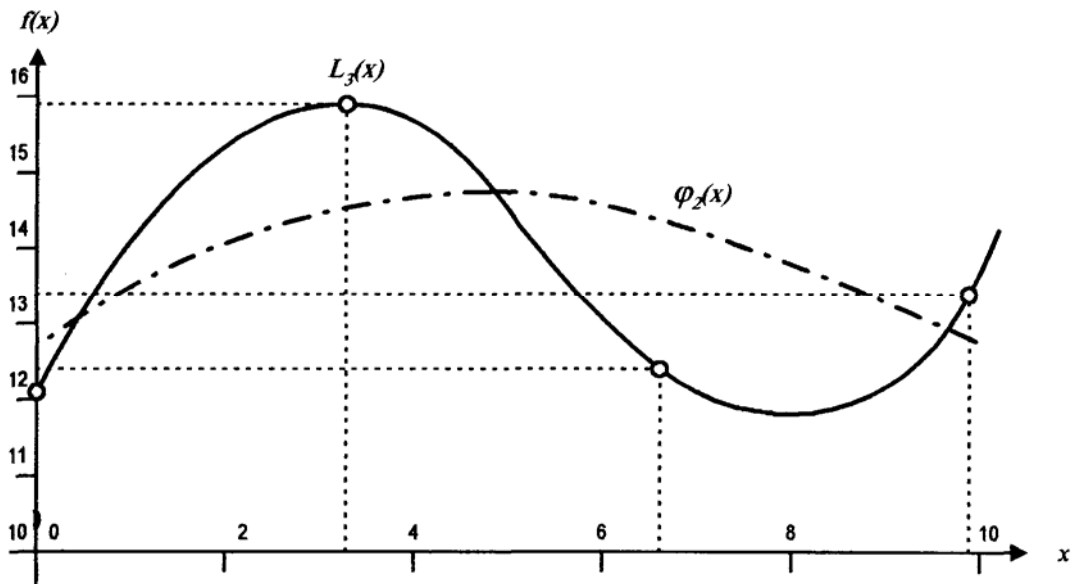


Рис. 2. Графики интерполяции и аппроксимации табличной функции $f(x)$

ПРИМЕЧАНИЕ. При построении графиков необходимо вычислить несколько промежуточных точек между узлами интерполяции (аппроксимации), используя найденное ранее выражение для интерполирующего (аппроксимирующего) полинома.

4. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Общие сведения

Методы численного дифференцирования и интегрирования применяются в тех случаях, когда функция задана в виде таблицы или если аналитически вычислить интеграл невозможно. Тогда заданную область значений аргумента $x \in [a, b]$ — интервал определения функции разбивают на n отрезков (рис. 3) с шагом

$h = (b - a) / n$ (шаг дискретизации). В промежуточных точках вычисляются значения функции, заносимые в таблицу.

Общая идея численных методов заключается в замене функции, заданной таблично, многочленом n -го порядка (интерполяция). Далее, производная и интеграл от многочлена вычисляются элементарно. Ошибки численного дифференцирования и интегрирования зависят от порядка выбранного метода и величины шага $h = x_k - x_{k-1}$.

Численное дифференцирование

Наиболее известны численные методы, называемые разностными:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &\approx \frac{y_k - y_{k-1}}{h} && \text{— левая разность,} \\ \frac{dy}{dx} &\approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} && \text{— правая разность,} \\ \frac{dy}{dx} &\approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2 \cdot h} && \text{— центральная разность.} \end{aligned}$$

Разностные схемы отличаются порядком точности, т.е. многочлен какого порядка будет данным методом продифференцирован без ошибки. Для левой и правой разности – первый порядок. Для центральной разности – второй, она точнее. Однако левая разность не вычисляет производную в первой точке ($k=0$), правая разность – в последней ($k=n$), а центральная – в обеих точках.

Численное интегрирование

Методы численного интегрирования (квадратурные формулы) используют геометрическую трактовку интеграла как площади, ограниченной графиком функции, осью абсцисс и пределами интегрирования. Площадь определяется как сумма площадей элементарных криволинейных трапеций с высотой h (рис. 3а). Все методы отличаются способом вычисления площади элементарного фрагмента S_i . Наиболее известны квадратурные формулы Ньютона-Котеса m -го порядка, в том числе:

$$\begin{aligned} S_i &= h \cdot f(x_i) && \text{— метод прямоугольников, } m=0, \\ S_i &= \frac{h}{2} \cdot [f(x_{i-1}) + f(x_i)] && \text{— метод трапеций, } m=1, \\ S_i &= \frac{h}{6} \cdot [f(x_{i-1}) + 4 \cdot f(x_i) + f(x_{i+1})] && \text{— метод Симпсона, } m=2. \end{aligned}$$

Тогда определенный интеграл есть сумма площадей S_i :

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n S_i,$$

а неопределенный, или интеграл с переменным верхним пределом, как функция от аргумента x_i есть:

$$F(x_i) = F(x_{i-1}) + S_i, \quad F(x_0) = 0.$$

Квадратурные формулы Гаусса

В рассмотренных выше формулах численного интегрирования используются равноотстоящие узлы и произвольное разбиение отрезка интегрирования. Основная идея квадратуры Гаусса состоит в следующем: при заданном числе интервалов разбиения (порядке квадратурной формулы Гаусса) следует разложить их концы так, чтобы получить наивысшую точность интегрирования. В математическом плане это означает выбор коэффициентов A_i и узлов t_i ($i = 1, 2, \dots, k$) квадратурных формул Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{i=1}^k A_i \cdot f(t_i) + R_k$$

такими, чтобы формулы были точны для многочленов наивысшей возможной степени N . Можно показать, что при k узлах точно интегрируются все многочлены степени $N \leq 2k - 1$.

Правило определения узлов и коэффициентов квадратурной формулы Гаусса следующее. Узлы t_i являются корнями многочлена Лежандра соответствующего порядка $P_k(t) = 0$, который определяется с помощью производных:

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \frac{d^k \{(t^2 - 1)^k\}}{dt^k}$$

или через рекуррентные соотношения:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_{m+1}(t) = \frac{(2m+1) \cdot t \cdot P_m(t) - m \cdot P_{m-1}(t)}{m+1}.$$

Коэффициенты A_i вычисляются через найденные узлы t_i по формуле:

$$A_i = \frac{2}{(1 - t_i^2) \cdot [P'_i(t_i)]^2}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Погрешность усечения, определяемую остаточным членом R_k , можно оценить по выражению

$$R_k = \frac{2^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k)!} \left[\frac{(k!)^2}{(2k)!} \right]^2 \cdot f^{(2k)}(t), \quad t \in [-1, 1].$$

При вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ отрезок $[-1, 1]$ преобразуется в отрезок $[a, b]$ путем замены переменной

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t_i.$$

В результате квадратурная формула Гаусса k -го порядка приобретает вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{i=1}^k A_i \cdot f(x_i) + R_k^*, \quad \text{где ошибка } R_k^* = \left[\frac{b-a}{2} \right]^{2k+1} \cdot R_k.$$

Квадратурная формула Гаусса обеспечивает высокую точность интегрирования при небольшом числе узлов и используется для вычисления интегралов от аналитически неинтегрируемых функций.

Пример.

Вычислить:

- 1) производную $y' = dy/dx$ методом центральных разностей,
- 2) определенный интеграл по методу трапеций $I = \int_0^{\pi/2} y(x) dx$,
- 3) интеграл с переменным верхним пределом по методу трапеций $F(x_i)$,
- 4) построить графики $y(x_i)$, $y'(x_i)$, $F(x_i)$ для функции:

$$y(x) = e^{-2x} \cdot \sin(x)$$

на интервале $x \in [0, \pi/2]$ с шагом $h = 0.1 \cdot \pi \approx 0.314$.

Находим значения функции в заданных точках и записываем в таблицу, после чего можем использовать формулы метода центральной разности и метода трапеций (см. выше). Затем строим три графика на одном поле, выбирая соответствующие масштабы (рис. 3б).

x	0	0.1л	0.2л	0.3л	0.4л	0.5л
$y(x)$	0	0.165	0.167	0.123	0.077	0.0432
$y'(x)$	-	0.2662	-0.0669	-0.1436	-0.1267	-
$F(x)$	0	0.0259	0.0781	0.1236	0.1550	0.1739

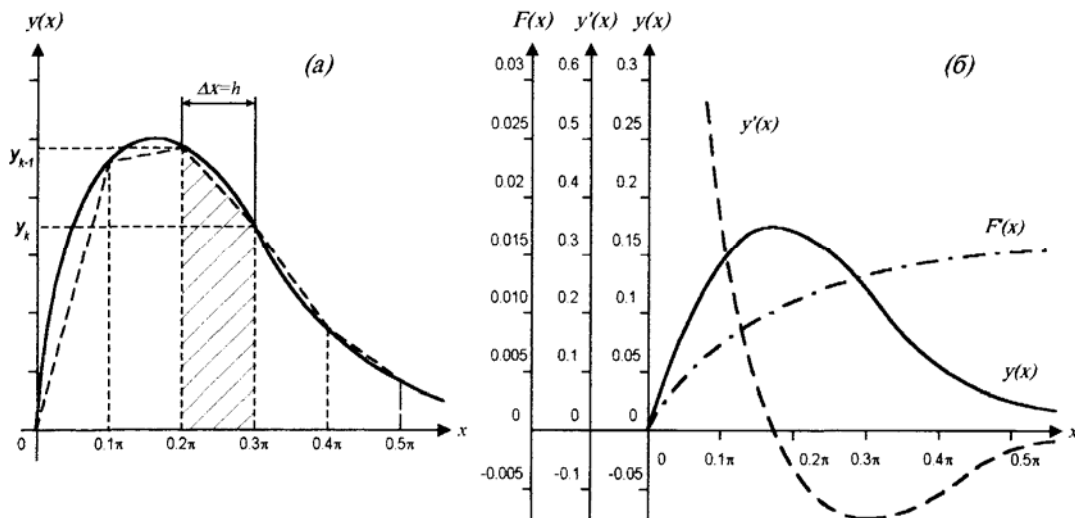


Рис. 3. Разбиение интервала на участки (а), графики результатов численного интегрирования и дифференцирования (б)

ПРИМЕЧАНИЕ. Производная на концах интервала методом центральной разности не определяется (ставим прочерк). Интегральная кривая $F(x)$ в первой точке всегда будет равна 0, а определенный интеграл $I \approx F(x_n) - F(x_0) = 0.1739$.

5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ

Общие сведения

В научной и инженерной практике часто возникает необходимость решения уравнений вида $f(x) = 0$, где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором интервале $a \leq x \leq b$. Аналитическое решение имеют только алгебраические нелинейные уравнения (в которых функция $f(x)$ есть многочлен степени n : $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$) порядка не выше $n = 4$. Решение уравнения с любым другим видом функции $f(x)$, называемого тогда трансцендентным, может быть получено только численными методами.

Все численные методы решения нелинейных уравнений есть итерационные методы, в которых решение достигается с заданной точностью путем последовательных приближений (итераций). Количество итераций, необходимых каждому методу для достижения решения с заданной точностью, определяет скорость сходимости каждого метода. Все численные методы за одну реализацию определяют только один из возможных нескольких корней нелинейного уравнения.

Процесс отыскания корня уравнения $f(x) = 0$ состоит из двух этапов:

- 1) отделения корней, т.е. отыскания интервалов по x , на которых располагается только по одному действительному корню;
- 2) уточнения значений корней на каждом интервале до некоторой заданной степени точности ε .

Первый этап выполняется различными способами, в том числе графическим, исходя из физического смысла задачи и т.д. В любом методе проверка (верификация) выбранного интервала, где есть только один корень, осуществляется выполнением условия $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, т.е. на границах интервала функция $f(x)$ имеет разные знаки. Второй этап, определяющий способ приближения к решению, и задает вид численного метода. На каждой k -й итерации метод определяет k -е приближение к истинному решению x , поэтому условие $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ есть условие достижения заданной точности, т.е. прекращения работы алгоритма.

Метод бисекции (деления отрезка пополам)

Для нахождения решения уравнения $f(x) = 0$ интервал, где находится только один корень, делится пополам: $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Для каждой из половинок проверяется условие существования корня $f(a) \cdot f(x_0) \leq 0$ или $f(x_0) \cdot f(b) \leq 0$. Интервал, для которого условие не выполняется, отбрасывается. Таким образом, после первой итерации имеем интервал вдвое меньшей длины, чем $[a, b]$, где опять есть только один корень. Этот процесс повторяется до тех пор, пока длина интервала не станет меньше заданной точности $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Ниже приводится пример BASIC-программы, реализующей метод бисекции для нелинейного уравнения $x^2 + 5x + 4 = 0$:

```

      — Определение функции пользователя f(x) -----
10 DEF fny (x) = x * x + 5 * x + 4
      — Ввод исходных данных -----
20 PRINT "Введите границы интервала [a, b],точность eps"
30 INPUT a, b, eps
      — Проверка наличия корня на интервале -----
35 IF fny(a) * fny(b) <= 0 THEN GOTO 50
40 PRINT "На интервале ["; a; "; "; b; "] нет корней!": GOTO 20
50 n = 0
      — Деление отрезка пополам -----
60 x = (a + b) / 2
      — Выбор интервала с корнем уравнения -----
70 IF fny(x) * fny(a) <= 0 THEN b = x ELSE a = x
      — Печать результатов каждой итерации -----
80 n = n + 1: delt = ABS(b - a): PRINT n; "Ошибка"; delt
      — Проверка на заданную точность -----
90 IF delt >= eps THEN GOTO 60
      — Вывод результатов -----
95 PRINT "Ответ:"; x ; " Число итераций:" ; n
100 END

```

Метод "золотого сечения" (Фибоначчи)

Отличается от метода бисекции только тем, что интервал делится не пополам, а в пропорции "золотого сечения":

$$\frac{I_{\min}}{I_{\max}} = \frac{I_{\max}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad I_{\min} = |x_0 - a|, \quad I_{\max} = |b - x_0|, \quad \text{или приближенно}$$

$x_0 \approx a + 0.618 \cdot (b - a)$, если $|f(a)| \geq |f(b)|$ и, наоборот, $x_0 \approx a + 0.382 \cdot (b - a)$, если $|f(a)| < |f(b)|$. В большинстве случаев такой метод сходится быстрее метода бисекции.

Метод хорд (секущих)

Отличается от метода бисекции тем, что новая точка, разделяющая исходный интервал $[a, b]$ на два участка, находится как точка пересечения с осью OX хорды – отрезка, соединяющего точки $f(a)$ и $f(b)$. Уравнение хорды определяет алгоритм метода:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k), \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots \text{ и } x_0 = a, \quad x_1 = b.$$

Метод Ньютона (касательных) с коррекцией

В данном методе отсутствует деление отрезка $[a, b]$ на две части. Здесь на интервале выбирается начальное приближение – точка x_0 , а следующее приближение определяется как точка пересечения оси OX с касательной,

проведенной из точки $f(x_0)$. Такой алгоритм имеет второй порядок скорости сходимости, однако в случае неудачного выбора начального приближения x_0 может вообще не достигать решения, выходя за границы исходного интервала.

Для коррекции нового приближения используется коэффициент α , который принимает значение 1, если $|f(x_{k+1})| \rightarrow 0$. В противном же случае он принимает значение $\alpha = 0.5, 0.25, 0.125, \dots$ и т.д. до тех пор, пока $|f(x_{k+1})|$ не будет меньше, чем $|f(x_k)|$. Алгоритм метода задается выражением:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \alpha = \begin{cases} 1, & |f(x_{k+1})| < |f(x_k)|, \\ \frac{\alpha}{2}, & |f(x_{k+1})| \geq |f(x_k)|. \end{cases}$$

Метод парабол

Во многом сходен с методом хорд (секущих). На интервале $[a, b]$ выбирается точка x_0 . По трем точкам $f(a), f(x_0), f(b)$ интерполируется парабола $y(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$. Новое значение x_{k+1} , разделяющее предыдущий интервал на две части, выбирается как корень квадратного уравнения $y(x) = 0$, принадлежащий исходному интервалу. Корни квадратного уравнения определяются аналитически. Затем выбирается интервал, на котором есть искомый корень $f(x) = 0$, и процесс повторяется до достижения заданной точности. Решение находится за 2–4 итерации.

Метод простой итерации

Исходное нелинейное уравнение $f(x) = 0$ трансформируется к виду, удобному для итерации $x = \varphi(x)$, например, прибавлением x к обеим частям исходного уравнения $x = f(x) + x$, где $\varphi(x) = f(x) + x$. Тогда итерационный алгоритм задается выражением $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Метод сходится, если выполняется условие $|\varphi'(x)| < 1$ на интервале определения $[a, b]$. Если условие не выполняется, необходимо изменить исходное уравнение, умножив его на корректирующую функцию $\xi(x)$, которая не имеет корней на заданном интервале или равна константе. Тогда новое уравнение будет иметь те же решения, что и исходное, а подбором функции $\xi(x)$ можно добиться выполнения условия сходимости метода.

Комбинированные методы

Эти методы объединяют достоинства двух разных методов и состоят из двух этапов. На первом этапе устойчивым, но медленным методом, например, бисекции, сужается исходный интервал – находится грубое решение, а на втором этапе оно уточняется быстрым методом, например методом Ньютона. Здесь задаются две точности решения для каждого этапа.

6. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Общие сведения

Аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений используются при расчетах переходных процессов в линейных электрических цепях. В этих задачах система уравнений по законам Кирхгофа для цепи есть система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая преобразуется в линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. При этом начальные условия для задачи Коши $y(0)$ определяются из расчета цепи до коммутации, а принужденная составляющая $y(\infty)$ – из расчета цепи после коммутации в установившемся режиме.

Классический метод

Классический метод основан на утверждении, что полное решение неоднородного дифференциального уравнения (с правой частью):

$$y^{(n)} + c_1 \cdot y^{(n-1)} + c_2 \cdot y^{(n-2)} + \dots + c_{n-2} \cdot y'' + c_{n-1} \cdot y' + c_n \cdot y = f(x)$$

всегда есть сумма общего решения однородного уравнения (правая часть равна 0 $f(x) = 0$) – свободной составляющей $y_0(x)$ и частного решения неоднородного уравнения – принужденной составляющей $y(\infty)$:

$$y(x) = y_0(x) + y(\infty),$$

где свободная составляющая всегда есть сумма экспонент:

$$y_0(x) = A_1 \cdot e^{p_1 x} + A_2 \cdot e^{p_2 x} + \dots + A_n \cdot e^{p_n x}.$$

Здесь p_1, p_2, \dots, p_n – корни характеристического уравнения для исходного однородного уравнения:

$$p^n + c_1 \cdot p^{n-1} + c_2 \cdot p^{n-2} + \dots + c_{n-1} \cdot p + c_n = 0,$$

а неизвестные коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n – неизвестные постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий. Вид общего решения (свободной составляющей) зависит от характера корней характеристического уравнения. Например, для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + c_1 \cdot y' + c_2 \cdot y = f(x)$$

характеристическое уравнение принимает вид:

$$p^2 + c_1 \cdot p + c_2 = 0,$$

и общее решение, в зависимости от характера корней, принимает форму:

$$y_0(x) = A_1 \cdot e^{p_1 x} + A_2 \cdot e^{p_2 x} \text{ – корни вещественные } p_1 \neq p_2, \quad p_{1,2} < 0,$$

$$y_0(x) = (A_1 + A_2 \cdot p_1) \cdot e^{p_1 x} \text{ – вещественные, кратные } p_1 = p_2, \quad p_{1,2} < 0,$$

$y_0(x) = A_0 \cdot e^{-b \cdot x} \sin(\omega \cdot x + \varphi)$ – корни комплексно- сопряженные.

$$p_{1,2} = -b \pm j\omega, b > 0$$

Во всех трех выражениях A_1, A_2, A_0, φ – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Операторный метод

Основой операторного метода является преобразование Лапласа:

$$L\{y(x)\} = Y(p) = \int_0^{\infty} e^{px} \cdot |y(x)| dx, \quad p = -s + j\omega.$$

Его основные свойства таковы:

1. Умножение на константу оригинала приводит к умножению на нее же образа:

$$L\{k \cdot y(x)\} = k \cdot Y(p).$$

2. Преобразование Лапласа от суммы функций есть сумма их образов:

$$L\{y_1(x) + y_2(x)\} = Y_1(p) + Y_2(p).$$

3. Изображение производной включает в себя начальные условия:

$$L\{y^{(n)}(x)\} = p^n \cdot Y(p) - p^{n-1} \cdot y(0) - p^{n-2} \cdot y'(0) - \dots - p \cdot y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0).$$

4. Изображение интеграла от функции есть образ самой подынтегральной функции, деленный на p .

$$L\left\{\int_0^x y(x) dx\right\} = \frac{Y(p)}{p}.$$

В справочной литературе приводятся изображения по Лапласу всех элементарных функций.

Алгоритм решения дифференциального уравнения n -го порядка:

$$y^{(n)} + c_1 \cdot y^{(n-1)} + c_2 \cdot y^{(n-2)} + \dots + c_{n-2} \cdot y'' + c_{n-1} \cdot y' + c_n \cdot y = f(x)$$

операторным методом заключается в переходе в область изображений:

$$y^{(n)}(x) \Rightarrow p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \dots - p \cdot y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0),$$

.....

$$y''(x) \Rightarrow p^2 Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0),$$

$$y'(x) \Rightarrow p Y(p) - y(0),$$

$$f(x) \Rightarrow F(p).$$

Так как в области изображения уравнение становится алгебраическим, его решение выражается в виде дробно-рациональной функции от p .

$$Y(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}, \quad m \leq n.$$

Для полученного изображения оригинал (решение дифференциального уравнения) находится при возвращении в область времени с помощью теоремы разложения. Она

записывается в двух формах для различных видов решений в зависимости от наличия или отсутствия нулевого корня в знаменателе изображения:

I форма: $Y(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$

а) $y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k x}$, если корни простые вещественные,

б) $y(x) = \sum_{k=1}^{n-\alpha} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k x} + \frac{1}{(\alpha-1)!} \cdot \frac{d^{(\alpha-1)}}{dp^{(\alpha-1)}} \left[\frac{F_1(p)}{F_3(p)} \cdot e^{px} \right]_{p=p_{n-\alpha+1}},$

$$F_2(p) = F_3(p)(p - p_{n-\alpha+1})^\alpha,$$

если среди них есть кратные (α - кратность),

в) $y(x) = 2 \cdot \text{Real} \left\{ \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 x} \right\}$, для каждой пары комплексно-сопряженных корней $p_{1,2} = -b \pm j\omega$.

II форма: $Y(p) = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}.$

а) $y(x) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k \cdot F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k x}$, если корни простые вещественные,

б) $y(x) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^{n-\alpha} \frac{F_1(p_k)}{p_k \cdot F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k x} + \frac{1}{(\alpha-1)!} \cdot \frac{d^{(\alpha-1)}}{dp^{(\alpha-1)}} \left[\frac{F_1(p)}{p \cdot F_3(p)} \cdot e^{px} \right]_{p=p_{n-\alpha+1}},$

$$F_2(p) = F_3(p)(p - p_{n-\alpha+1})^\alpha,$$

если среди них есть кратные (α - кратность),

в) $y(x) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + 2 \cdot \text{Real} \left\{ \frac{F_1(p_1)}{p_1 \cdot F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 x} \right\},$

для каждой пары комплексно-сопряженных корней $p_{1,2} = -b \pm j\omega$.

Во всех формулах $p_k, k = 1, 2, \dots, n$ - корни характеристического уравнения

$$F_2(p) = p^n + c_1 \cdot p^{n-1} + c_2 \cdot p^{n-2} + \dots + c_{n-1} \cdot p + c_n = 0.$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + 5y' + 4y = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Классический метод. Из условия установившегося режима при $x = \infty, y(\infty) = \text{const}, y''(\infty) = y'(\infty) = 0$ находим частное решение (принужденную составляющую): $y(\infty) = 0.5$. Характеристическое уравнение:

$$p^2 + 5p + 4 = 0$$

имеет корни $p_1 = -1$ и $p_2 = -4$ (простые отрицательные корни). Тогда полное решение ДУ ищем в виде:

$$y_0(x) = A_1 \cdot e^{-x} + A_2 \cdot e^{-4x}$$

Неизвестные константы интегрирования находим, составив систему линейных уравнений и используя начальные условия:

$$\begin{cases} y(0) = y_0(0) + y(\infty) = A_1 + A_2 + 0.5 = 1, & A_1 = \frac{4}{3}, \\ y'(0) = y_0'(0) = -A_1 - 4A_2 = 2, & A_2 = -\frac{5}{6}. \end{cases}$$

Ответ:
$$y(x) = \frac{4}{3}e^{-x} - \frac{5}{6}e^{-4x} + 0.5.$$

Операторный метод. Образы в области преобразования Лапласа частей дифференциального уравнения:

$$y''(x) \Rightarrow p^2 Y(p) - p - 2,$$

$$y'(x) \Rightarrow pY(p) - 1,$$

$$f(x) \Rightarrow \frac{2}{p}.$$

Уравнение принимает вид:

$$p^2 Y(p) + 5pY(p) + 4Y(p) = p + 7 + \frac{2}{p},$$

откуда
$$Y(p) = \frac{p^2 + 7p + 2}{p(p^2 + 5p + 4)} = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}.$$

Корни характеристического уравнения $F_2(p) = 0$ есть $p_1 = -1$ и $p_2 = -4$.

Корни простые отрицательные, и есть нулевой корень $p = 0$, поэтому воспользуемся **формой II(a)** теоремы разложения:

$$F_1(p) = p^2 + 7p + 2, \quad F_2(p) = p^2 + 5p + 4, \quad F_2'(p) = 2p + 5,$$

$$y(x) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \left[\frac{F_1(p)}{p \cdot F_2'(p)} \cdot e^{px} \right]_{p=-1} + \left[\frac{F_1(p)}{p \cdot F_2'(p)} \cdot e^{px} \right]_{p=-4} = 0.5 + \frac{4}{3}e^{-x} - \frac{5}{6}e^{-4x}.$$

7. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ

Общие сведения

Только малая часть дифференциальных уравнений может быть решена в квадратурах, т.е. аналитическими методами может быть получено выражение для неизвестной функции $y(x)$, входящей в дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}),$$

заданного в форме задачи Коши, т.е. с начальными условиями:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad y''(0) = y''_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y^{(n-1)}_0.$$

В основном же такие задачи решаются численными методами. Любое дифференциальное уравнение n -го порядка всегда можно элементарной заменой переменных свести к системе n дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} y' = z_1(x), \\ z_1' = z_2(x), \\ \dots\dots\dots, \\ z_{n-1}' = f(x, y, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}). \end{cases}$$

Поэтому все численные методы рассматриваются в применении к решению уравнений 1-го порядка вида $y' = f(x, y)$ и их систем.

Сущность численных методов состоит в следующем. На интервале наблюдения $[x_0, x_n]$ выбирается некоторое множество точек, называемое сеткой:

$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ с начальным условием $y(0) = y_0$. На узлах сетки $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ определяются значения искомой функции $y(x)$. Тогда проблема численного решения дифференциального уравнения заключается в построении рекуррентной процедуры определения последующего значения функции y_{k+1} в точке x_{k+1} по предыдущему y_k в точке x_k . Такая процедура называется разностной схемой. Разность $h = \Delta x = x_{k+1} - x_k$ называют шагом сетки или шагом интегрирования и в большинстве случаев полагают постоянной.

Явные методы

Явными называют такие методы, в которых последующее значение функции явно выражается через предыдущее. Простейший пример – метод Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k).$$

Явные методы более устойчивы, но обладают свойством накапливать ошибку с объемом вычислений.

Неявные методы

В таких методах неизвестное значение функции в новом узле входит как в левую, так и в правую часть разностной схемы. Например, метод Эйлера–Коши:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})).$$

Неявный метод требует предварительного определения y_k , которое можно вычислить с использованием явного метода, например метода Эйлера (см. выше). Такие методы неустойчивы, но обладают большей точностью.

Методы прогноза и коррекции

Это двухступенчатые комбинированные методы, объединяющие достоинства явных и неявных схем. На шаге прогноза определяется приближенное значение y_{k+1} с помощью явного метода, а затем, на шаге коррекции, строится итерационная процедура, в которой найденное решение уточняется по неявной схеме. Процесс коррекции ограничивается либо заданной точностью, либо заданным числом итераций. Пара методов Эйлера и Эйлера–Коши или многошаговая схема Адамса–Башфорта могут быть рассмотрена как примеры метода прогноза и коррекции.

Методы Рунге–Кутты

Различные методы данной группы отличаются друг от друга объемом производимых вычислений и получаемой при этом точностью. Они включают в себя комбинации явных и неявных методов, в том числе и метод Эйлера (метод Рунге–Кутты 0-го порядка), метод Эйлера–Коши (метод Рунге–Кутты 1-го порядка). В качестве примера приведем метод Рунге–Кутты 4-го порядка:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \cdot [f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4],$$

$$f_1 = f(x_k, y_k), \quad f_2 = f\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_k + \frac{h}{2} \cdot f_1\right),$$

где

$$f_3 = f\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_k + \frac{h}{2} \cdot f_2\right), \quad f_4 = f(x_{k+1}, y_k + h \cdot f_3).$$

Здесь точность повышается за счет использования фиктивных промежуточных точек на половине шага $x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}$. Ниже приведен вариант BASIC-программы, реализующей метод Рунге–Кутты 4-го порядка для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

```
Определение правых частей двух уравнений -----
DEF fny (x1, x2) = x2
DEF fnz (x1, x2) = 1 - 5 * x2 - 6 * x1
Ввод аналитического точного решения (если оно известно) -----
DEF fnya (x3) = .167 + 24.5 * EXP(-2 * x3) - 19.67 * EXP(-3 * x3)
Ввод исходных данных и начало цикла по времени -----
t0 = 0: tk = 2: dt = (tk - t0) / 200: y0 = 5: z0 = 10: kr = 10: k = 0
FOR t = (t0 + dt) TO tk STEP dt
Метод Рунге-Кутты для двух уравнений (расчет промежуточных шагов) --
f1 = fny(y0, z0): g1 = fnz(y0, z0)
f2 = fny(y0 + dt / 2 * f1, z0 + dt / 2 * g1): g2 = fnz(y0 + dt / 2 * f1, z0 + dt / 2 * g1)
f3 = fny(y0 + dt / 2 * f2, z0 + dt / 2 * g2): g3 = fnz(y0 + dt / 2 * f2, z0 + dt / 2 * g2)
f4 = fny(y0 + dt * f3, z0 + dt * g3): g4 = fnz(y0 + dt * f3, z0 + dt * g3)
Метод Рунге-Кутты для двух уравнений (расчет новой точки) -----
y1 = y0 + dt / 6 * (f1 + 2 * f2 + 2 * f3 + f4)
z1 = z0 + dt / 6 * (g1 + 2 * g2 + 2 * g3 + g4)
y0 = y1: z0 = z1: k = k + 1
IF k <> kr THEN GOTO 100
PRINT t, y1, z1, fnya(t), (y1 - fnya(t)) : k = 0
100 NEXT t
END
```

В многошаговых разностных схемах значение функции в новой точке вычисляется через несколько предыдущих точек, как, например, в методе Адамса:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (55f(x_k, y_k) - 59f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 37f(x_{k-2}, y_{k-2}) - 9f(x_{k-3}, y_{k-3})).$$

Использование нескольких точек повышает точность аппроксимации решения, хотя вносит дополнительные сложности. Так, для запуска метода Адамса необходимо уже знать не только начальное условие по задаче Коши y_0 , но и три последующих точки y_1, y_2, y_3 . Следовательно, недостающие точки должны быть предварительно определены каким-либо одношаговым методом, например методом Эйлера.

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ФУРЬЕ ПРОСТЕЙШИХ ФУНКЦИЙ

Общие сведения

Разложение в ряд Фурье применяется в анализе электрических цепей с источниками несинусоидального периодического напряжения (тока). Представив сигнал в виде суммы гармоник (синусоид с кратной частотой), можно использовать принцип суперпозиции, т.е. вести расчет для каждой гармоники, используя метод комплексных амплитуд, а полученные результаты затем просуммировать.

Разложение периодической функции в ряд Фурье задается выражением:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(k\omega_0 t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \varphi_k),$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ – основная частота. T – период, B_k, C_k – синусные и косинусные коэффициенты k -й гармоники, A_k, φ_k – амплитуда и фаза k -й гармоники, A_0 – постоянная составляющая.

Коэффициенты разложения в ряд Фурье вычисляются так:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0 t) d(\omega_0 t), \quad C_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0 t) \cdot \cos(k\omega_0 t) d(\omega_0 t),$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0 t) \cdot \sin(k\omega_0 t) d(\omega_0 t), \quad A_k = \sqrt{C_k^2 + B_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{B_k}{C_k}.$$

Полный набор коэффициентов Фурье $F(j\omega)$ – комплексная функция от частоты $\omega = k \cdot \omega_0$, называется спектром исходного сигнала. В вышеприведенных выражениях время t умножается на ω_0 , т.е. измеряется в радианах для удобства при вычислении коэффициентов.

Для решения задачи необходимо:

1. Для функции, заданной на периоде графически, необходимо правильно получить кусочно-аналитическое выражение для функции.

2. Корректно использовать правила аналитического вычисления определенных интегралов.
3. Там, где это возможно, для облегчения расчетов использовать свойства преобразования Фурье:

• *Аддитивность:* $x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow F_1(j\omega) + F_2(j\omega),$

• *Коммутативность:* $k \cdot x(t) \Rightarrow k \cdot F(j\omega),$

• *Теорему о сдвиге:* $x(t - t_0) \Rightarrow F(j\omega) \cdot e^{j\omega t_0}.$

Значительно может облегчить расчеты использование свойств симметрии преобразования Фурье:

1. Если функция четная (симметрия относительно оси ординат), то все синусные коэффициенты $B_k = 0$.
2. Если функция нечетная (симметрия относительно начала координат), то все косинусные коэффициенты $C_k = 0$ и постоянная составляющая $A_0 = 0$.
3. Если функция нечетная относительно сдвига на π (полпериода), то в спектре отсутствуют постоянная составляющая A_0 и коэффициенты C_k и B_k с четными номерами $k = 2, 4, 6, \dots$.

Пример. Найти первые 5 коэффициентов разложения меандра (рис. 4а) с амплитудой A_{max} и построить дискретный спектр такого сигнала.

Решение. Приведенная на рис. 4(а) кривая имеет аналитическое выражение:

$$f(\omega_0 t) = \begin{cases} -A_{max}, & -\pi \leq \omega_0 t \leq 0, \\ A_{max}, & 0 \leq \omega_0 t \leq \pi. \end{cases}$$

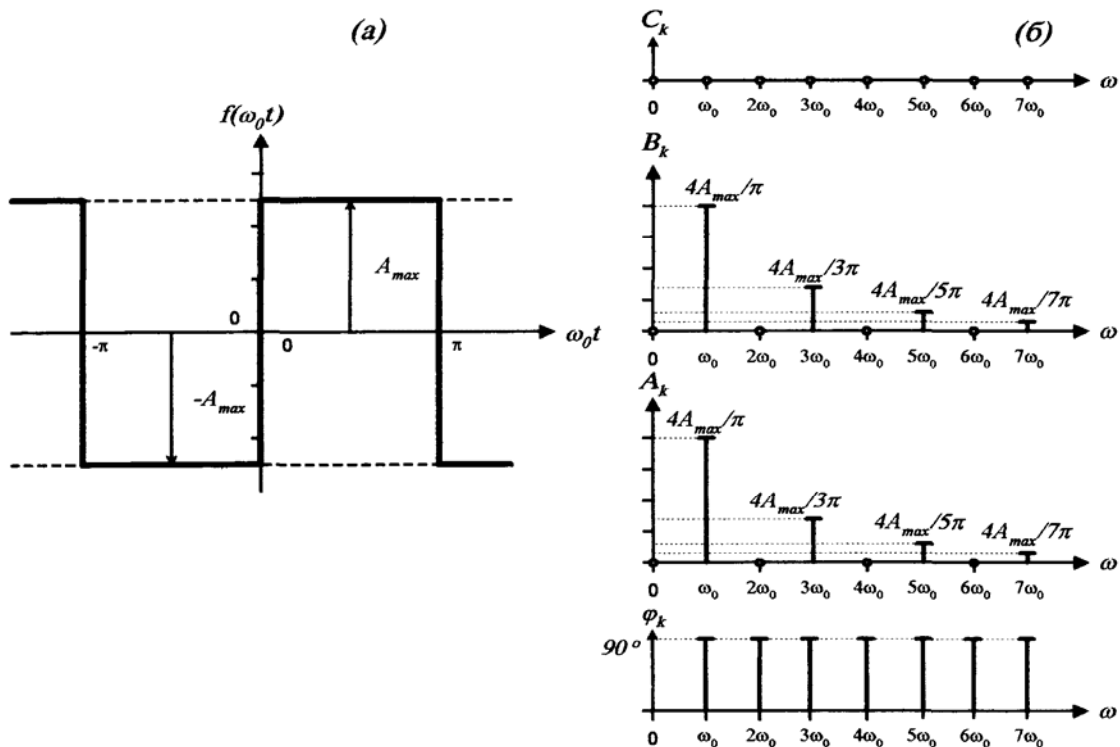


Рис. 4. Периодический несинусоидальный сигнал – меандр (а), коэффициенты разложения сигнала в ряд Фурье (б)

и обладает 2-м и 3-м свойствами симметрии, поэтому сразу можно записать, что $A_0 = 0$, $C_1 = C_2 = \dots = C_k = 0$, $B_2 = B_4 = B_6 = \dots = 0$. То есть равны 0 все четные гармоники, косинусные коэффициенты и постоянная составляющая. Тогда для оставшихся вычисляем:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0 t) \cdot \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -A_{max} \cdot \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A_{max} \cdot \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \\ &= \frac{A_{max}}{\pi} \left(\cos(\omega_0 t) \Big|_{-\pi}^0 - \cos(\omega_0 t) \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4A_{max}}{\pi}, \\ B_3 &= \frac{4A_{max}}{3\pi}, \quad B_5 = \frac{4A_{max}}{5\pi}, \quad B_7 = \frac{4A_{max}}{7\pi}, \quad \dots \end{aligned}$$

Общее выражение для разложения принимает вид:

$$f(\omega_0 t) = \frac{4A_{max}}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots + \frac{1}{k} \sin(k\omega_0 t) \right).$$

Спектр коэффициентов Фурье приведен на рис. 4(б).

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Содержание и график выполнения данного домашнего задания тесно связаны с содержанием курса "Численные методы" и имеет целью приобретение навыков выполнения сложных математических вычислений, необходимых для успешного освоения последующих дисциплин. В ходе выполнения работы студент должен, кроме решения задачи, выполнить всестороннюю проверку решения. Каждый студент получает индивидуальное задание в соответствии с первой, второй и последней цифрой номера группы $N_g = |3 \cdot (N_{dept} + F_{time}) + N_{year} - N_{group}|$ и номером по журналу учебной группы N_s , а также формой обучения F_{time} ($F_{time} = 1, 2, 3$ для дневной, вечерней и заочной форм обучения соответственно).

Например, для номера 8 по журналу учебной группы 3401BV соответствующая пара номеров будет вычисляться следующим образом:

$$N_g = 3 \cdot (3 + 2) + 4 - 1 = 18,$$

$$N_s = 8.$$

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ ГАУССА

Содержание задания:

1. Решить систему линейных уравнений 3-го порядка с комплексными коэффициентами методом исключения Гаусса:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= (N_g + 4) + j5, & a_{12} &= -3 - j4, & a_{13} &= 4 - j4, & b_1 &= 3 + j6, \\ a_{21} &= -3 + j2, & a_{22} &= 8 + j(10 - N_s), & a_{23} &= 1 + j2, & b_2 &= 1 - j(N_s - 20), \\ a_{31} &= j(N_g + 1), & a_{32} &= N_s - 10, & a_{33} &= N_s - j(N_g), & b_3 &= j10. \end{aligned}$$

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Для студентов специальности «Компьютерные науки» мнимые части всех коэффициентов отбрасываются и решается система уравнений с вещественными коэффициентами.

1. В отчете представить последовательность действий и промежуточные результаты. Решения (конечный результат) представить в алгебраической и показательной форме.

2. Произвести проверку путем подстановки найденных решений во все три уравнения системы. Вычислить невязку для каждого уравнения (разность левой и правой части отдельно для действительной и мнимой составляющих).

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Точность решения обычно характеризуется величиной относительной ошибки решения для каждого уравнения системы:

$$\sigma(b_i) = \frac{|\Delta b_i|}{b_i} \cdot 100\%.$$

В случае когда вещественная или мнимая часть b_i равна 0, для определения невязки необходимо вычислять и указывать в работе только абсолютную ошибку:

$$\Delta b_i = |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i|,$$

которая и есть невязка для данного уравнения.

2. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ

Задана функция одной переменной $y(x)$ в виде таблицы значений:

X	-1	N_g	6	10
$y(x)$	1	$N_s - 5$	8	-2

где N_g – расчетный номер группы, а N_s – номер по журналу учебной группы. (Например, для номера 8 по журналу учебной группы **3401BV** - $N_g = 18$ и $N_s = 8$).

Содержание задания:

1. Интерполировать функцию $y(x)$ полиномом Лагранжа 3-го порядка $L_3(x)$. Выполнить проверку правильности интерполяции по всем точкам.
2. Интерполировать функцию $y(x)$ полиномом Ньютона 3-го порядка $N_3(x)$. (Этот пункт задания необходимо выполнять только студентам специальности “Компьютерные науки”).
3. Аппроксимировать функцию $y(x)$ по методу наименьших квадратов полиномом 2-го порядка $\varphi_2(x)$.
4. Построить графики интерполяции $L_3(x)$ и аппроксимации $\varphi_2(x)$ на одном рисунке в интервале $x \in [x_{min}, x_{max}]$ из таблицы и отметить на поле графика заданные табличные точки.

3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Задана функция одной переменной $f(x)$ и границы интервала a и b (выбрать из таблицы в соответствии с номером по журналу N_s):

Номер варианта	Вид функции $f(x)$	Границы интервала	
		a	b
1	$x \cdot \sin(2x)$	0	$\pi/4$
2	2^{3x}	0	1
3	$(\ln^2 x)/x$	1	5
4	$e^{2x} \cdot \sin(x)$	0	$\pi/2$
5	$x \cdot e^{0.8 \cdot x}$	2	3
6	$x^2 \cdot \sin(x)$	0	π
7	$x \cdot 2^{3x}$	1	4
8	$(\ln^3 x)/x^2$	1	5
9	$x^2 + \sin(x)$	0	$(3/2)\pi$
10	$x \cdot e^{x/2}$	1	2
11	$x/(x+2)^2$	0	2
12	$x^2/(2x+1)^3$	1	4
13	$x^2/\sqrt{2x+1}$	1	3
14	$x/(x+3)^3$	0	2
15	$\sqrt{(4-x^2)}/x$	0.2	1
16	$x/\sin^2(3x)$	0.1	1
17	$x^2/(2x+0.3)^2$	1	2
18	$x/(0.5x+0.1)^3$	3	5
19	$x^2 \cdot \sin(x^2)$	0	1
20	$x/\sqrt{(x+3)^3}$	4	6

Содержание задания:

- Вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ на интервале $[a, b]$, разделяя интервал на $n = 5$ частей с шагом $h = (b - a)/n$:
 - методом прямоугольников,
 - методом трапеций,
 - методом Симпсона,

- с помощью квадратурной формулы Гаусса 3-го порядка. (Этот пункт задания необходимо выполнять только студентам специальности “Компьютерные науки”).
2. Сравнить полученные результаты.
 3. Вычислить производную по методу центральных разностей $f'(x)$ и интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ по методу трапеций, выбирая шаг h . Результаты занести в таблицу.
 4. Выбрав соответствующие масштабы, построить графики функций $f(x)$, $f'(x)$ и $F(x)$ на одном рисунке в интервале $x \in [a, b]$.

4. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Содержание задания:

Решить нелинейное уравнение $f(x)=N_g$,

где N_g – расчетный номер группы, а $f(x)$ – функция из предыдущего задания, четырьмя различными методами:

- методом бисекции;
- методом хорд;
- методом Ньютона;
- методом простых итераций (последовательных приближений).

Выполнить по 6 итераций каждым методом, сравнить погрешность вычислений.

ПРИМЕЧАНИЕ. Начальное приближение (границы интервала) следует выбирать так, чтобы на интервале находился только один корень уравнения. Если полученное уравнение не имеет решения, согласовать с преподавателем изменение исходных данных.

5. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Содержание задания:

Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y''(t) + 5 \cdot y'(t) + N_s \cdot y(t) = N_g, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 10.$$

где N_s – номер по журналу, а N_g – расчетный номер группы (из 1-го задания).

Задачу решить тремя различными методами:

- классическим аналитическим методом (для специальности «Электроника»);
- операторным аналитическим методом (для специальности «Электроника»);
- численным методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Сравнить полученные результаты, построить график решения.

ПРИМЕЧАНИЕ. Для численного метода Рунге-Кутты предварительно требуется рассчитать время переходного процесса, используя найденные ранее корни характеристического уравнения. В качестве интервала наблюдения выбирается временной интервал $T = (3 \div 4)\tau$, где $\tau = 1/|p_{\min}|$. Здесь p_{\min} – минимальный по величине (модулю) корень характеристического уравнения $p_{\min} = \min\{|p_1|, |p_2|\}$.

Рекомендуемая величина шага интегрирования: $h = \Delta t = T/20$ для ручного счета, или $h = \Delta t = T/200$ при использовании программы метода Рунге-Кутты. Исходное уравнение 2-го порядка $y'' = f(y, y')$ преобразуется в систему двух уравнений 1-го порядка с помощью замены переменных:

$$\begin{cases} y' = z, & y(0) = y_0, \\ z' = f(y, z), & z(0) = y'(0) = y'_0. \end{cases}$$

Методом Рунге-Кутты решается данная система. Результаты заносятся в таблицу для построения графика решения $y(t)$.

6. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ

Содержание задания:

1. Для периодической несинусоидальной функции, заданной графически на рис. 5, в соответствии с номером варианта, определить:

- постоянную составляющую A_0 ;
- косинусные и синусные коэффициенты C_k и B_k для трех первых гармоник ($k=1,2,3$) разложения в ряд Фурье;
- модуль A_k и фазу φ_k каждой гармоники.

Здесь $A_{\max} = N_g$ (см. стр. 28), а номер варианта определяется по выражению: $N_{\text{var}} = 2 \cdot N_g + N_s - 8 \cdot m$, где N_g – расчетный номер группы (из 1-го задания), N_s – номер студента по журналу, а m – коэффициент, принимающий значение $0,1,2,\dots$, если $N_{\text{var}} > 8$.

2. Построить комплексный спектр $\{C(k\omega_0), B(k\omega_0)\}$ и амплитудно-фазовый спектр сигнала $\{A(k\omega_0), \varphi(k\omega_0)\}$, как функцию от частоты $k\omega_0$;
3. Рассчитать значения функции

$$\phi(\omega_0 t) = A_0 + \sum_{k=1}^3 A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

в 7 точках на интервале $[-\pi, \pi]$ и занести их в таблицу.

4. По результатам расчета построить графики исходной функций $f(\omega_0 t)$ и $\phi(\omega_0 t)$ на одном рисунке.

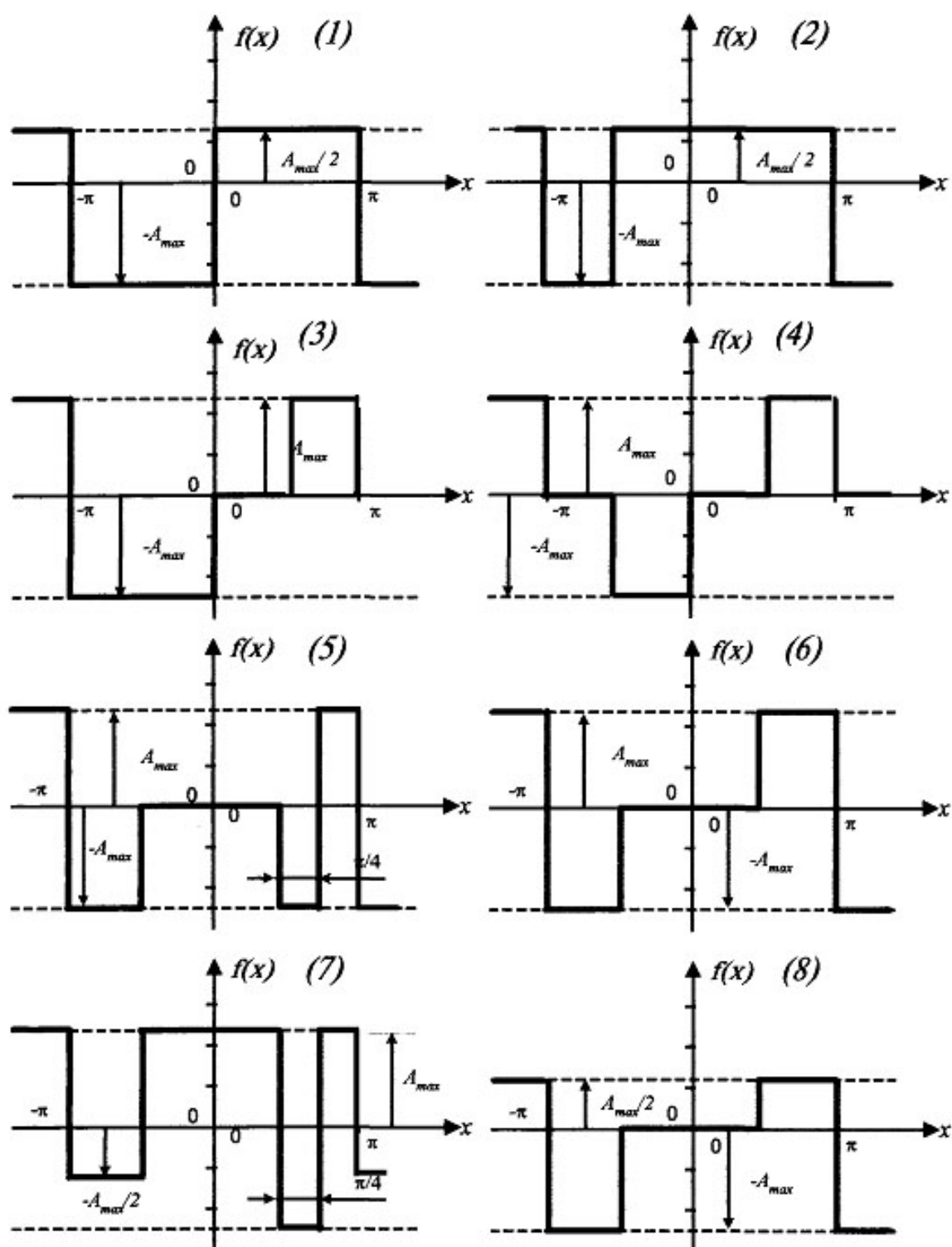


Рис. 5. Исходные данные – несинусоидальный периодический сигнал с периодом 2π как функция безразмерного времени ($\omega_0 t$)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. *Численные методы и программное обеспечение*. М.: Мир, 1998.
2. Ортега Дж., Пул У. *Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1986.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. М.: Наука, 1989.
4. Турчак Л.И. *Основы численных методов*. М.: Наука, 1987.
5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. *Машинные методы математических вычислений*. М.: Мир, 1980.
6. Фурунжиев Р.И., Бабушкин Ф.М., Варавко В.В. *Применение математических методов и ЭВМ. Практикум: Учебное пособие для вузов*. Минск: Высшая школа, 1988.
7. Зевеке Г.В. и др. *Основы теории цепей*. М.: Высшая школа, 1989.
8. Попов В.И. *Основы теории цепей*. М.: Высшая школа, 1985.
9. *Основы теории цепей. Методические указания по выполнению курсовой работы "Анализ простейших цепей в установившемся и переходном режимах"*. Составители: Зиньковский А.В. и др. Рига: РКИИГА, 1990.