

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS JOINVILLE

Valdomiro Botelho Junior

O seguinte trabalho tem por objetivo obter os parâmetros da órbita de um satélite e também sua trajetória espaçada em instantes de tempo, mostrando assim como a velocidade do satélite muda ao longo do tempo devidos à atração gravitacional. Os parâmetros da órbita descrevem toda sua trajetória ao longo de um dos focos da elipse. Para obtê-los, 3 pontos diferentes foram recebidos e manipulados de forma que gerassem um sistema linear capaz de definir 3 constantes (A, B, C), que por sua vez foram aplicados na técnica de Jacobi, para solução de sistemas de equações lineares a seguir.

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1 + C = y_1^2 \\ Ax_2^2 + Bx_2 + C = y_2^2 \\ Ax_3^2 + Bx_3 + C = y_3^2 \end{cases}$$

Sistema Linear – Figura 1

Para esse sistema linear, foi implementado o método de Jacobi e a partir deste, os valores de A,B,C foram encontrados e estes estão apresentados na tabela ao final do relatório. Com esses valores, é possível utilizando as equações abaixo encontrar os parâmetros de distância até a origem ( $x_c$ ), eixo maior da elipse (a) e eixo menor (b).

$$\begin{cases} x_c = -\frac{B}{2A} \\ a = \sqrt{x_c^2 - \frac{C}{A}} \\ b = a\sqrt{-A} \end{cases}$$

Obtenção de parâmetros da órbita – Figura 2

Com a obtenção dos parâmetros, facilmente é possível plotar uma figura que represente a elipse gerada pelo satélite. Para isso, foi utilizada a ferramenta `numpy.linspace` para gerar vários pontos no eixo x, e com a equação geral da elipse, foram plotados em coordenadas cartesianas os pontos que representam a trajetória do satélite utilizando-se da biblioteca “`matplotlib`” do python.

A imagem gerada pode ser visualizada a seguir:



Elipse gerada pelo satélite – figura 3

Com os valores de ‘xc’, ‘a’ e ‘b’ obtidos, a próxima etapa é em efetuar os cálculos de período, excentricidade e anomalias, a fim de se obter 30 pontos espaçados de forma temporal um do outro. Para o cálculo do período, foi utilizada a lei do período orbital, assim como também o valor da excentricidade e foco. Após calcular o período e excentricidade, as anomalias média e excêntrica são calculadas para 30 instantes de tempo espaçados de forma igual no período orbital.

A anomalia excêntrica em específico não pode ser calculada por meios convencionais, logo se faz necessário o uso de um método numérico para encontrar os valores para cada instante. A forma utilizada foi o método da secante. Tendo isso posto, a equação da anomalia excêntrica foi reescrita da seguinte forma:

$$M = E - e \sin E \Rightarrow E = M + e \sin E \quad \text{Eq.3, sendo 'E' a variável que descreve a anomalia excêntrica.}$$

Com a anomalia excêntrica calculada, vetores de raios e ângulos foram gerados para as 30 posições, e o cálculo destes ângulos é possível a partir de uma alteração na formula da anomalia verdadeira, como pode ser visto na equação 4:

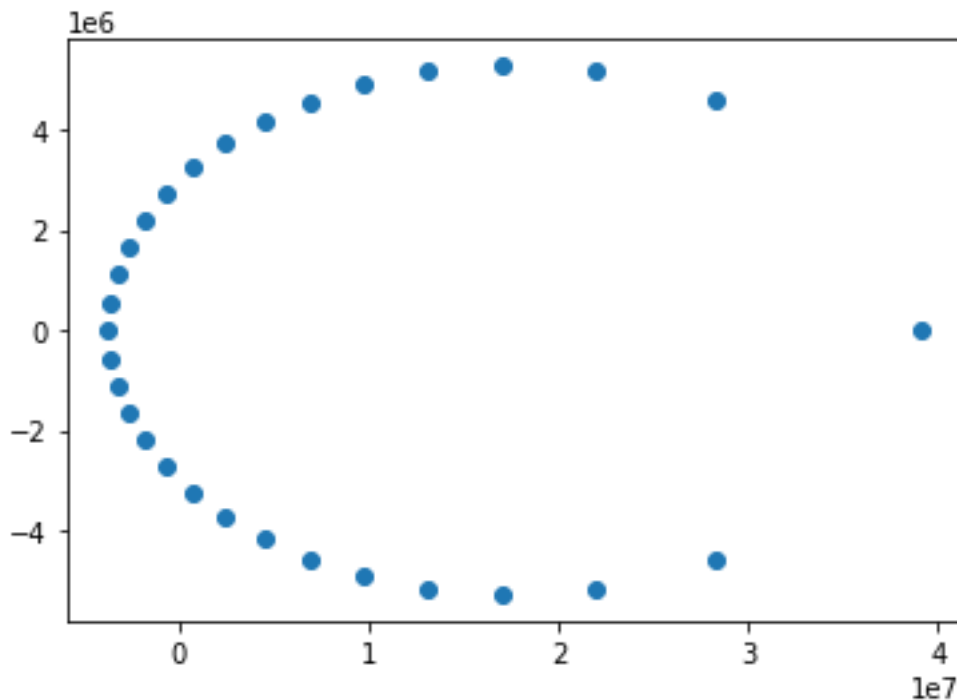
$$\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+e}}{1-e} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \Rightarrow \Theta = 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{1+e}}{1-e} \tan\left(\frac{E}{2}\right)\right) \quad \text{Eq.4}$$

Utilizando-se da formula dada no roteiro, também foi efetuado o cálculo das 30 posições de raios. Com os ângulos e raios obtidos, é possível saber as posições de cada um dos 30 pontos de tempo distribuídos no espaço, contudo estão em coordenadas polares e a biblioteca matplotlib do python efetua a plotagem apenas em coordenadas cartesianas. A posição do satélite para coordenadas cartesianas pode ser gerada através de outra formula dada no roteiro:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta + x_c + f \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

conversão entre coordenadas polares e cartesianas – Figura 4

Com os pontos convertidos através da formula da figura 4, a imagem que representa esses pontos em um plano pode ser plotada através da biblioteca matplotlib. A figura a seguir foi obtida com base nos cálculos apresentados nesse relatório e estão em uma ordem de  $10^7$  de grandeza. (O planeta que o satélite está orbitando encontra-se na coordenada (0,0) dessa figura)



Pontos espaçados por tempo - Figura 5

Nome das ariáveis	Formulas / Nomes	Valores
A	fig1	-0.060600694603987114
B	fig1	2141042.5501999003
C	fig1	$8,81e10^{15}$
xc	$-B/2A$	17665165.095805965
a	$(xc^2 - C/A)^{1/2}$	21386412.94581318
b	$a(-A)^{1/2}$	5264737.829520477
T	$2\pi(a^3/GMt)^{1/2}$	31126.564342075177
f	ae	20728270.412054684
e	$(1-b^2/a^2)^{1/2}$	0.9692261373879746
G	Constante Gravitacional	$6.67408e10^{-11}$
Mt	Massa da Terra	$5.972e10^{24}$

Valores obtidos e valores utilizados - Tabela 1