Universiteti i Prishtinës

Fakulteti i Shkencave Matematike-Natyrore
Drejtimi: Shkencë Kompjuterike

Interpolimi i polinomit të Lagranzhit

Anëtarët e grupit:

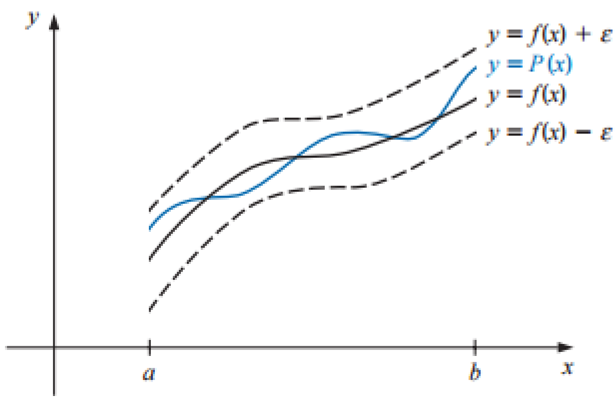
Edon Avdyli,
Selim Lushtaku,
Valdrin Baleci.

Mentori:

Eliot Bytyçi.

Abstrakt

Nje nga klasat me te perdorshme dhe me te njohura te fuksioneve qe paraqesin bashkesine e numrave real ne vetvete eshte polinomi algjebrik, bashkesia e funksioneve te formes $Pn(x) = anxn + an-1xn-1 + \cdots + a1x + a0$, ku n eshte nje numer i plote jonegativ dhe $a0,\ldots,an$ jane konstanta reale.Nje arsye per rendesine e tyre jane fuksionet e vazhdueshme te perafrimit.Me kete ne themi se dhene nje fuksion, i definuar dhe i vazhdueshem ne nje interval te mbyllur dhe te kufizuar, ekziston nje polinom qe eshte po aq afer funksionit sa kerkohet. Ky rezultat shprehet saktesisht ne Teoremen e Perafrimit te Weierstrass.[2]



Fjalet kyce: Interpolimi, polinomi i Lagranzhit

1.Polinomi interpolues i Lagranzhit

Problemi i percaktimit te nje polinomi te shkalles qe kalon pertej pikave te vecanta $(x0,y0)$ dhe $(x1,y1)$ eshte njejte si perafrimi i nje fuksioni f per te cilin $f(x0)=y0$ dhe $f(x1)=y1$ me ane te interpolimit polinomial te shkalles se pare, ose duke u pajtuar me vlerat e f ne pika te caktuara. Duke perdorur polinomin per perafrimin brenda intervalit te dhene nga pikat finale quhet interpolim polinomial.
Defino funksionet

$L0(x) = (x - x1) /(x0 - x1)$ and $L1(x) = (x - x0) /(x1 - x0)$.[2]

Polinomi linear interpolues i Lagranzhit ne $(x0,y0)$ dhe $(x1,y1)$ eshte

$P(x) = L0(x)f (x0) + L1(x)f (x1) = [(x - x1)/(x0 - x1)]* f (x0) +[(x - x0) /(x1 - x0)]*f (x1)$.[2]

Vini re se

$L0(x0) = 1, L0(x1) = 0, L1(x0) = 0$, and $L1(x1) = 1$, qe implikon se

$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$ dhe

$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1$.

Keshtu qe P eshte polinomi unik i shkalles qe me se shumti kalon ne (x_0,y_0) dhe (x_1,y_1).[2]

Shembull:

Dojme te gjejme polinomin qe interpolon ne pikat

x	1	1.3	1.6	1.9	2.2
$f(x)$	0.1411	−0.6878	−0.9962	−0.5507	0.3115

ku $f(x)=\sin(3x)$ dhe te gjejme $f(1.5)$.

Se pari gjejme polinomet e Lagranzhit $L_k(x), k=1,\ldots,5$,

$$L_1(x) = \frac{(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)(x-2.2)}{(1-1.3)(1-1.6)(1-1.9)(1-2.2)}, \quad L_2(x) = \frac{(x-1)(x-1.6)(x-1.9)(x-2.2)}{(1.3-1)(1.3-1.6)(1.3-1.9)(1.3-2.2)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-1.3)(x-1.9)(x-2.2)}{(1.6-1)(1.6-1.3)(1.6-1.9)(1.6-2.2)}, \quad L_4(x) = \frac{(x-1)(x-1.3)(x-1.6)(x-2.2)}{(1.9-1)(1.9-1.3)(1.9-1.6)(1.9-2.2)}$$

$$L_5(x) = \frac{(x-1)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)}{(2.2-1)(2.2-1.3)(2.2-1.6)(2.2-1.9))}$$

Pastaj perafrimi polynomial mund te behet

$$P(x) = 0.1411 \times L_1(x) - 0.6878 \times L_2(x) - 0.9962 \times L_3(x) - 0.5507 \times L_4(x) + 0.3115 \times L_5(x).$$

Polinomi interpolues perafron saktesisht funksionin $f(1.5) = \sin(4.5) \approx -0.9775$ sakte ne $E \approx 2 \times 10^{-4}$.

2.Formula e interpolimit te Lagranzhit

Formula u publikua fillimisht nga Waring (1779), u rizbulua nga Euler ne 1783, dhe u publikua nga Lagranzhi ne 1795 (Jeffreys and Jeffreys 1988).[3]

Nje formule per te siguruar polinomin e shkalles n(polinomin interpolues te Lagranzhit) qe interpolon nje funksion f(x) te dhene ne nyjet x0,…,xn

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \,. \quad (1).[1]$$

Kur xi jane te larguara njejte, qe i bie, x1-x0=…=xn-xn-1=h, duke perdorur shprehjen (x-x0)/h=t mund te reduktojme (1) ne formen

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = (-1)^n \frac{t(t-1) \square \dots (t-n)}{n!} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{f(x_i)}{t-i} \,. \quad (2).[1]$$

Ne shprehjen (2), e thirrur formula e interpolimit te Lagranzhit per nyje te baraslarguara, koeficientet

$$(-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(t-i)n!} \quad [1]$$

e f(xi) thirren koeficientet e Lagranzhit.

Nese f ka nje derivat te rendit n+1 ne intervalin [a,b], nese te gjitha nyjet interpoluese jane ne interval dhe nese per gjdo pike x nga [a,b] definohet si

$$\alpha_x = \min\{x_0, \dots, x_n, x\}, \qquad \beta_x = \max\{x_0, \dots, x_n, x\},$$

atehere nje pike p nga [ax,bx] ekziston ashtu qe

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)\, \omega_n(x)}{(n+1)!}, \text{ ku}$$

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \,. \quad [1].$$

Nese vlera absolute e derivatit f^(n+1) kufizohet ne [a,b] nga nje kontant M dhe nese nyjet interpoluese zgjedhen ashtu qe rrenjet e polinomin te Chebyshev te shkalles n+1 paraqiten ne keto pike nen nje paraqitje lineare nga [-1,1] ne [a,b], atehere per gjdo x nga [a,b] kemi

$$|f(x)-L_n(x)| \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!2^{2n+1}}.$$ [1]

Nese nyjet interpoluese jane numra kompleks z0,…,zn dhe gjenden ne ndonje domen G te kufizuara nga nje kontur e rrafshet k, dhe nese f eshte nje funksion analitik me vlere te vetme i definuar ne mbylljen G, atehere formula interpoluese e Lagranzhit ka formen

$$L_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\omega(\zeta)(\zeta-z)} f(\zeta)\, d\zeta,$$ ku

$$f(z)-L_n(z)=\frac{\omega(z)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)(z-\zeta)}\, d\zeta.$$ [1]

Formula e interpolimit te Lagranzhit per interpolime te polinomeve trigonometrike eshte

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j\neq k} \frac{\sin(x-x_j)/2}{\sin(x_k-x_j)/2},$$ [1]

qe eshte polinom trigonometrik i rendit n qe ka vlera te pershkruara y0,...,yn ne nyjet e dhena x0,…,xn.

3.Ekzistenca dhe vecantia e polinomeve interpoluese te Lagranzhit

3.1 Ekzistenca

Jane Ik polinome qe vertetojne tiparin vijues:

$$l_k(x_i)=\delta_{ki}=\begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}, \quad \forall i=0,\ldots,n.$$ [4]

Ato formojne bazen e vektorit te hapesires Pn te polinomeve te shkalles me te afert te n

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k l_k(x)=0$$ [4]

Duke caktuar x=xi ne fitojme:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k l_k(x_i)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \delta_{ki}=0 \Longrightarrow \alpha_i=0$$ [4]

Bashkesia (Ik) ku 0<=k<=n eshte linearisht e pavarur dhe konsiston ne n+1 vektor. Per cfare eshte baza e Pn.

Perfundimisht, mund te themi se:

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x_i) f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{ki} f(x_k) = f(x_i)$$ [4]

3.2 Vecantia

Le te konsiderojme dy elementet Ln dhe Qn nga Pn, qe vertetojne

$$P_n(x_i) = Q_n(x_i) = f(x_i), \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$ [4]

Le te jete Rn=(Ln-Qn) nga Pn.Polinomi Rn ka (n+1) rrenje te cilat jane saktesisht (xi); 0<=i<=n meqe

$$R_n(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0, \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$ [4]

Rn tani ka (n+1) rrenje dhe Rn elemenet i Pn.Pra,

$$R_n = 0 \Longrightarrow P_n = Q_n.$$ [4]

4.Gabimi ne polinomin interpolues te Lagranzhit

Supozojme se x0,…,xn jane numra te vecante ne intervalin [a,b] dhe f ∊ C^n+1[a,b].Atehere per gjdo x ne [a,b], nje numer E(x) (I panjohur) ne mes x0,…xn, dhe prandaj ne (a,b) ekziston meoscillator

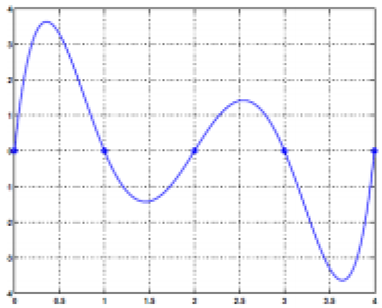
f(x)=P(x)+[(f^n+1*E(x))/(n+1)!]*(x-x0)*…*(x-xn).[5]

ku P(x) eshte polinomi interpolues i Lagranzhit.

Verejtje:

1.Aplikimi i termit te gabimit mund te jete i veshtire (x-x0)*…*(x-xn) eshte e lekundshme.E(x) eshte zakonisht e panjohur.

2.Formula e gabimit eshte e rendesishme pasi qe perdoret per diferencime dhe integrime numerike.


[5]

5.Krahasimi i saktesise dhe sjellja

Kufiri i gabimit |En(x)| varet ne h ne dy menyra. Se pari h^{n+1} prezente ashtu qe |En(x)| eshte proporcionale me h^{n+1} . Se dyti, vlera Mn+1 zakonisht varen ne h dhe tentojne ne |f^(N+1)(x0)| kur h shkon ne 0. Keshtu qe, kur h shkon ne 0, |En(x)| konvergjon ne 0 me shpejtesi te njejte sikur h^{n+1} konvergjon ne 0. Shprehja O(h^{n+1}) perdoret per diskutimin e sjelljes.

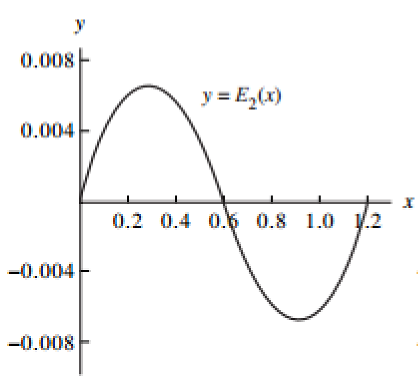
P.sh. shprehja |E1(x)| ≤ (h^2*M2)/8 per x ∈ [x0, x1],[7]

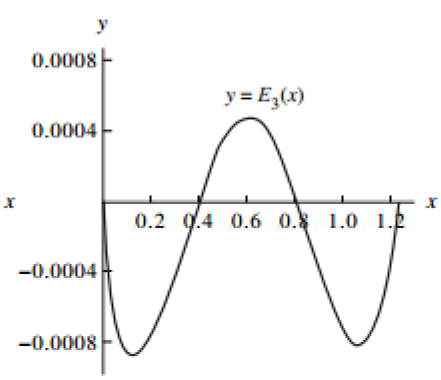
mund te shkruhet si |E1(x)| = O(h^2) per x ∈ [x0, x1].[7]

Shprehja O(h^2) qendron ne vend te h^2M2/8 dhe ka kuptimin te percoje idene se kufiri i termit te gabimit eshte perafersisht nje shumefish i h^2,qe eshte

|E1(x)| ≤ Ch^2 ≈ O(h^2).[7]

Si vazhdim, nese derivatet e f(x) jane uniformisht te kufizuara ne intervalin [a,b] dhe |h|<1, atehere duke zgjedhur N te madhe do te bente h^(n+1) te vogel, dhe polinomi perafrues i shkalles se larte do te kete me pak gabim.



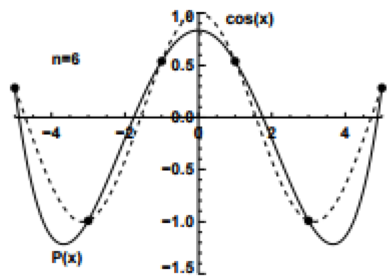


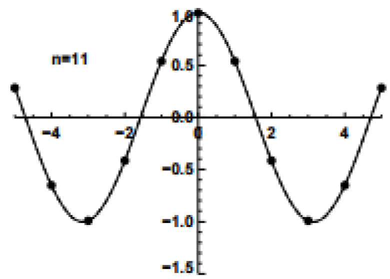
[7].

a) b)

6.Konvergjenca e interpolimit te Lagranzhit

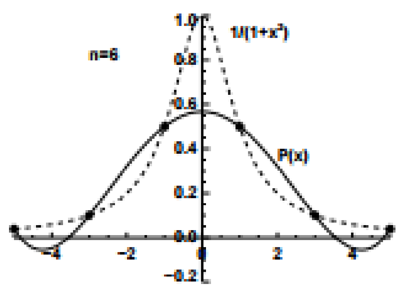
Se pari, konsiderojme P(x) polinomin qe interpolon f(x)=cos(x) ne nje bashkesi te pikave te baraslarguara ne intervalin [-5,5].

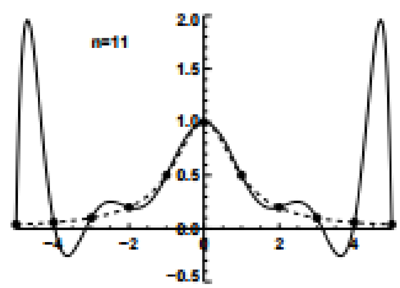




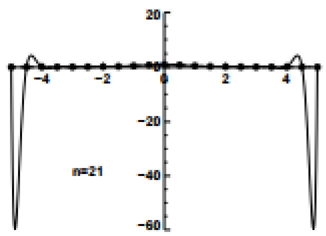
Qartazi, duke rritur numrin e pikave te baraslarguara nga n=6 (paneli i majte) ne n=11 (paneli i djathte) goxha permireson perafrimin e f(x) nga polinomi P.Ne panelin e djathte, polinomi interpolues i 10-te (vije solide) perputhet perfekt me funksionin cos(x).

Megjithate, interpolimi i Lagranzhit nuk eshte gjithnje i sakte. Per shembull konsideroni polinomin qe interpolon funksionin Lorentz f(x)=1/(1+x^2), ne bashkesine e pikave te baraslarguara ne intervalin [-5,5].





Duke rritur numrin e pikave te baraslarguara nga n=6 (paneli i majte) ne n=11 (paneli i djathte) permireson interpolimin polynomial ne pjesen qendrore te f(x), por ka lekundje te medha ne pjesen e rrafshet.



Nese numri i pikave te baraslarguara interpoluese rritet tutje, keto lekundje behen edhe me te medha.Polinomi interpolues i shkalles n-1,P(x), nuk konvergjon te funksioni 1/(1+x^2) kur

n -->infinit. [6].

Lista e figurave:

REFERENCAT:

- [1] Hazewinkel, Michiel, ed. (2001), "Lagrange interpolation formula",
- [2] R.L. Burden,J.D.Faires. "Numerical Analysis", 9th Edition,
- [3] Archer, Branden and Weisstein, Eric W. "Lagrange Interpolating Polynomial.",
- [4] N.Soualem. "Lagrange Interpolating Polynomial" www.math-linux.com,
- [5] Z.Xu."Interpolating and Lagrange Polynomial" University of Notre Dame,
- [6] E. Kersale. "Numerical Analysis" University of Leeds.
- [7] J. H. Mathews , K. K. Fink "Numerical Methods Using Matlab", 4th Edition, 2004.