

# **Bau eines Doppelpendels als Beispiel für chaotisches Verhalten**

**PPG8**

Udo Beier      Leon Brückner      Valentin Olpp      Marco Zech  
                  Sebastian Ziegler

Dezember 2013/ Januar 2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Vorwort</b>	<b>4</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>5</b>
2.1 Newtonsche und Lagrang'sche Mechanik . . . . .	5
2.2 Das Doppelpendel . . . . .	5
2.3 Simulation des Doppelpendels . . . . .	7
2.4 Energieverlust des Systems . . . . .	8
2.4.1 Luftreibung . . . . .	8
2.4.2 Reibung in den Kugellagern . . . . .	8
2.4.3 Energieübertrag auf die Aufhängung . . . . .	8
2.5 Chaotisches Verhalten . . . . .	9
2.5.1 Stabilität . . . . .	9
2.5.2 Phasenraumkurven und Attraktoren . . . . .	9
<b>3 Versuchsaufbau</b>	<b>13</b>
3.1 Aufbau des Pendels . . . . .	13
3.2 Messung der Pendelbewegung . . . . .	13
<b>4 Darstellung der Ergebnisse und Auswertung</b>	<b>15</b>
4.1 Untersuchung des chaotischen Verhaltens . . . . .	15
4.2 Betrachtung der Reibung . . . . .	17
4.2.1 Allgemeines zur Auswertung . . . . .	17
4.2.2 Betrachtung der Messergebnisse . . . . .	17
4.2.3 Luftreibung . . . . .	18
4.2.4 Reibung in den Kugellagern . . . . .	19
4.2.5 Energieübertrag auf die Aufhängung . . . . .	19
4.3 Simulation des Doppelpendels . . . . .	20
<b>5 Fazit</b>	<b>23</b>
<b>6 Anhang</b>	<b>26</b>

## Abbildungsverzeichnis

1	Schematische Skizze eines Doppelpendels . . . . .	6
2	Die Ringe des Saturn, aufgenommen von der Cassini-Sonde . . . . .	10
3	Phasenraumkurven von: a) ungedämpfter harmonischer Oszillatior b) gedämpfter harmonischer Oszillatior c) harmonischer Oszillatior mit negativer Dämpfung d) nichtlinearer angeregter Oszillatior im chaotischen Bereich Herleitung siehe [Dem] Seite 388 . . . . .	11
4	Phasenraumkurven eines ungedämpften Fadenpendels. Der Punkt A ist Attraktor für alle Winkel $ \phi  < \pi$ . Die rote Kurve stellt eine 'Grenzkurve' zwischen stabilen und instabilen Lösungen dar. Die Punkte B ( $ \phi  = 180 \text{ deg}$ , $\dot{\phi} = 0$ ) sind instabile Fixpunkte, eine minimale Änderung des Winkels wird eine stabile Pendelbewegung erzeugen, eine minimale Änderung der Winkelgeschwindigkeit wird eine Rotationsbewegung erzeugen, bei der der Winkel unbegrenzt ansteigt. Herleitung siehe [Dem] Seite 389 . . . . .	12
5	1. Verlauf . . . . .	15
6	2. Verlauf . . . . .	16
7	3. Verlauf . . . . .	16
8	Energie des Pendels über der Zeit . . . . .	17
9	Schematische Darstellung der fehlerhaften Auswertung . . . . .	18
10	Geschwindigkeit der beiden Massepunkte über der Zeit . . . . .	19
11	Auftragung der $x_2$ -Koordinate bei einer Simulation mit Start zu etwa dem Zeitpunkt des Loslassens . . . . .	20
12	Auftragung der $x_1$ -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start . .	21
13	Auftragung der $y_1$ -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start .	21
14	Auftragung der $x_2$ -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start .	22
15	Auftragung der $y_2$ -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start .	22
16	Phasenraum $\dot{\varphi}_1$ über $\varphi_1$ . . . . .	23
17	Phasenraum $\dot{\varphi}_2$ über $\varphi_2$ . . . . .	24
18	Technische Zeichnung des Pendels . . . . .	27

## Tabellenverzeichnis

1	Verlauf der Position der beiden Massen über die Zeit des Versuchs. Dabei wird t in s und die Position in m gemessen. (Jeder 10. Messpunkt wird dargestellt.) . . . . .	28
---	--	----

## **1 Vorwort**

Das Doppelpendel, ein Pendel, an dessen Pendelmasse ein weiteres Pendel befestigt wird, mag zunächst nicht sonderlich interessant erscheinen. Bei genauerer Betrachtung hat dieser simple mechanische Aufbau jedoch einige faszinierende und sogar für aktuelle Forschung relevante Eigenschaften. Das Doppelpendel ist ein einfaches Beispiel für ein chaotisches System, d.h. ein System, dessen zeitliche Entwicklung sich schon bei kleinen Variationen der Anfangsbedingungen stark ändert. Chaotische Systeme haben eine wichtige Bedeutung in der Natur und sind der Hauptfokus eines Teilgebiets der modernen Physik, der Chaosforschung. Mithilfe der Chaosforschung lassen sich z.B. Bevölkerungsentwicklungen, die Bildung von Verkehrsstaus oder das Wetter untersuchen. In diesem Versuch soll nun ein Doppelpendel gebaut, die Physik dahinter untersucht und die Bedeutung als chaotisches System am praktischen Beispiel nachvollzogen werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Newtonsche und Lagrang'sche Mechanik

In folgenden soll die Herleitung der Bewegungsgleichung des Doppelpendels mit Hilfe des Lagrange-Formalismus der klassischen Mechanik beschrieben werden.

Die zu lösende Bewegungsgleichung eines Massepunkts ergibt sich nach Newton bekanntlich zu

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \sum \vec{F}, \quad (1)$$

wobei  $\sum \vec{F}$  die Summe aller am Massepunkt angreifenden Kräfte,  $\vec{x}$  die Ortskoordinate und  $m$  die Masse des betrachteten Massepunkts ist. In der Praxis, so auch beim Doppelpendel, stellt es sich als äußerst schwierig dar, alle am Massepunkt wirkenden Kräfte zu identifizieren sowie mathematisch zu beschreiben. Als eine Art Verallgemeinerung der Newton'schen Mechanik lässt sich aus ihr der sogenannte Lagrange-Formalismus herleiten. Hier sind die gesuchten Funktionen die Lösungen der Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

mit der Lagrangefunktion  $L = E_{kin} - V$ . Hierbei sind  $E_{kin}$  die kinetische Energie und  $V$  das auf den Massepunkt wirkende Potential. Ein weiterer Vorteil dieses Formalismus besteht darin, dass die Langrangegleichungen unter Koordinatentransformationen invariant bleiben, es gilt also:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3)$$

Hier seien  $q_i$  die sogenannten verallgemeinerten Koordinaten, die so gewählt werden, dass alle geometrischen Einschränkungen, denen das mechanische System unterworfen ist (sog. Zwangsbedingungen) berücksichtigt werden. Dies geschehe in dem Sinne, dass die verallgemeinerten Koordinaten für beliebige Werte nur unter den Zwangsbedingungen erlaubte Zustände liefern. Für jeden Freiheitsgrad muss nun eine Langrangegleichung aufgestellt werden.

### 2.2 Das Doppelpendel

Im Ursprungspunkt des Koordinatensystems wird ein Pendel, bestehend aus einem Stab mit fester Länge  $l_1$  und einer Masse  $m$  an dessen Ende, befestigt. Das Pendel soll sich nur in der x-z Ebene bewegen können. Am Massenpunkt befindet sich nun ein zweites Pendel mit Stab der Länge  $l_2$ , welches sich ebenso nur in der x-z-Ebene bewegen soll.

Es soll nun stets der Index 1 für Größen des oberen Pendels (inklusive der oberen Masse) und der Index 2 für alle Größen des unteren Pendels verwendet werden.

Der erste Schritt besteht nun darin, eine Beschreibung der Ortsvektoren der beiden Massenpunkte zu finden, die alle Zwangsbedingungen berücksichtigt. Derartige verallgemeinerte Koordinaten sind offenbar gegeben durch  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , welche die relativen

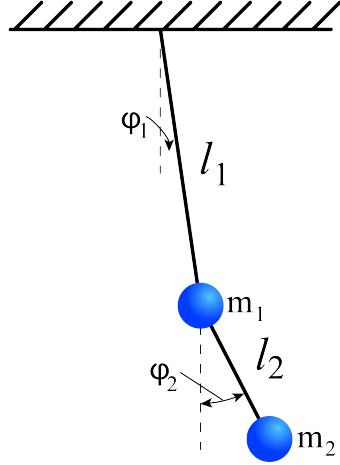


Abbildung 1: Schematische Skizze eines Doppelpendels

Winkel der Stäbe  $l_1$  und  $l_2$  zur Senkrechten (z-Achse) darstellen. Daraus folgt für  $\vec{x}_1$

$$\vec{x}_1 = l_1 \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ -\cos \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Für den Vektor  $\vec{x}_2$  folgt aus einfachen trigonometrischen Überlegungen:

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + l_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi_2 \\ -\cos \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cdot \sin \varphi_1 + l_2 \cdot \sin \varphi_2 \\ -l_1 \cdot \cos \varphi_1 - l_2 \cdot \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Zur Bestimmung von  $E_{kin,i} = \frac{m_i}{2} \cdot \dot{\vec{x}}_i^2$  müssen noch die Ableitungen der Ortsvektoren gebildet werden:

$$\dot{\vec{x}}_1 = l_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

und:

$$\dot{\vec{x}}_2 = \dot{\vec{x}}_1 + l_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Für die kinetische Energie ergibt sich:

$$E_{kin} = E_{kin,1} + E_{kin,2} = \frac{m_1}{2} \cdot l_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \cdot (l_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (8)$$

Das auf das Doppelpendel wirkende Potential  $V_i = m_i \cdot g \cdot h_i$  ist:

$$V = V_1 + V_2 = m_1 \cdot g \cdot (-l_1 \cdot \cos \varphi_1) + m_2 \cdot g \cdot (-l_1 \cdot \cos \varphi_1 - l_2 \cdot \cos \varphi_2) \quad (9)$$

Das Aufstellen der Lagrange-Gleichung erfolgt nun in mehreren Schritten.

Zuerst für  $\varphi_1$ :

$$\frac{\partial(E_{kin} - V)}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) \cdot l_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1 + m_2 \cdot (l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (10)$$

$$\frac{\partial(E_{kin} - V)}{\partial\varphi_1} = -m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1 \quad (11)$$

und nun für  $\varphi_2$ :

$$\frac{\partial(E_{kin} - V)}{\partial\varphi_2} \cdot \varphi_2 = m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2gl_2 \sin \varphi_2 \quad (12)$$

$$\frac{\partial(E_{kin} - V)}{\partial\varphi_2} = m_2l_2^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (13)$$

Setzt man diese Terme in (3) ein, erhält man die Bewegungsgleichungen des Systems:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{q_i} = (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1 = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{q_i} = m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2(\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + m_2gl_2 \sin \varphi_2 = 0 \quad (15)$$

Diese können noch vereinfacht werden durch eine Division durch  $l_1$  bzw.  $l_2$ :

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2)g \sin \varphi_1 = 0 \quad (16)$$

$$m_2l_2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1(\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + m_2g \sin \varphi_2 = 0 \quad (17)$$

## 2.3 Simulation des Doppelpendels

Mithilfe eines Python-Skripts wurden die in der Theorie hergeleiteten Differentialgleichungen für das Doppelpendel numerisch gelöst. Dafür wurden die Differentialgleichungen zunächst nach  $\ddot{\varphi}_1$  und  $\ddot{\varphi}_2$  aufgelöst:

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + g(m_1 + m_2) \sin \varphi_1 = 0 \quad (18)$$

und

$$m_2l_2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2l_1\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + gm_2 \sin \varphi_2 = 0 \quad (19)$$

Um die Gleichungen mittels eines Standardverfahrens numerisch lösen zu können, muss das Gleichungssystem auf die Form  $\dot{Y} = f(Y)$  gebracht werden. Zunächst werden die obigen Gleichungen nach  $\ddot{\varphi}_1$  und  $\ddot{\varphi}_2$  aufgelöst. Es ergibt sich unter Beachtung der folgenden abkürzenden Notation:  $(m_1 + m_2) =: M; \varphi_1 - \varphi_2 =: \Delta\varphi$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{-m_2l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin \Delta\varphi - gM \sin \varphi_1 - m_2l_1\dot{\varphi}_1^2 \sin \Delta\varphi \cos \Delta\varphi + gm_2 \sin \varphi_2 \cos \Delta\varphi}{Ml_1 - m_2l_1 \cos^2 \Delta\varphi} \quad (20)$$

und

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{-m_2l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin \Delta\varphi \cos \Delta\varphi - gM \sin \varphi_1 \cos \Delta\varphi - Ml_1\dot{\varphi}_1^2 \sin \Delta\varphi + gm_2 \sin \varphi_2}{m_2l_2 \cos^2 \Delta\varphi - Ml_2} \quad (21)$$

Dieses Differenzialgleichungssystem erster Ordnung kann nun mit Hilfe elementarer Algorithmen gelöst werden. Hier wurde das explizite Euler-Verfahren verwendet ([Eul]). Es wurde also ein Vektor  $\vec{Y} = \vec{\varphi} = (\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)^T$  definiert, für den sich ergibt:

$$\dot{\vec{\varphi}} = (\dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_2)^T, \quad (22)$$

wobei für  $\ddot{\varphi}_1$  und  $\ddot{\varphi}_2$  obige Gleichungen eingesetzt werden. Dann wird eine schrittweise Iteration durchgeführt, der Quelltext für das verwendete Python-Skript findet sich im Anhang.

## 2.4 Energieverlust des Systems

Bei dem hier behandelten Doppelpendel treten im Wesentlichen Luftreibung und Reibung in der Lagerung der zueinander beweglichen Bauteile, also den Kugellagern, auf. Darüber hinaus tritt weiterer Energieverlust auf, indem die Aufhängung des Pendels vom Pendel selbst zu Schwingungen angeregt wird und so ein Energieübertrag stattfindet.

### 2.4.1 Luftreibung

Für die Luftreibungskraft, die auf einen laminar umströmten Gegenstand wirkt, gilt die in guter Näherung gültige Formel

$$F_R = v^2 \cdot \frac{\rho}{2} \cdot A_S \cdot c_W, \quad (23)$$

wobei  $F_R$  die Luftreibungskraft,  $v$  die Geschwindigkeit der umströmenden Luft,  $\rho$  deren Dichte,  $A_S$  die Fläche der Projektion des Gegenstands in Störmungsrichtung und  $c_W$  ein von der Form des Gegenstands bestimmter, dimensionsloser Koeffizient ist.

### 2.4.2 Reibung in den Kugellagern

Für die Reibung in den Kugellagern kann das Modell der Rollreibung verwendet werden. Demnach ergibt sich für die Reibungskraft  $F_R$ :

$$F_R = c_R \cdot F_N, \quad (24)$$

wobei  $c_R$  ein die verwendeten Materialien und deren Form charakterisierender Parameter ist und  $F_N$  der Betrag der Normalkraft, also die senkrecht zur Rollrichtung wirkende Kraft.

### 2.4.3 Energieübertrag auf die Aufhängung

Die Betrachtung dieser Art von Energieverlust ist schwierig. Er könnte mit dem Modell zweier gekoppelter schwingfähiger Systeme, bei dem das zweite eine große Dämpfung aufweist, angenähert werden. Allerdings müsste hierfür wieder der Lagrange-Formalismus herangezogen werden, wobei zusätzlich noch Reibungsterme berücksichtigt werden müssen.

## 2.5 Chaotisches Verhalten

### 2.5.1 Stabilität

Die zeitliche Entwicklung vieler Systeme in der Mechanik kann durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden. Bei bekannten Anfangswerten können diese Gleichungen analytisch oder numerisch gelöst werden und damit die zeitliche Entwicklung des Systems komplett vorhergesagt werden, d.h. für exakte Anfangswerte gibt es exakte Vorhersagen für die zukünftige Entwicklung des Systems. Systeme dieser Art nennt man **stark deterministisch**. Wenn kleine Änderungen der Anfangswerte auch nur kleine Änderungen der zeitlichen Entwicklung nach sich ziehen, was mit Hilfe der Störungsrechnung bestimmt werden kann, nennt man die Lösung der Bewegungsgleichung **stabil**. Bei anderen Systemen treten nichtlineare Differentialgleichungen als Bewegungsgleichungen auf. Bei diesen Systemen kommt es vor, dass kleine Änderungen der Anfangsbedingungen große Änderungen in der zeitlichen Entwicklung bewirken. Solche Lösungen nennt man **instabil**, die Systeme bezeichnet man als **chaotisch**. Dies macht z.B. die Vorhersage von Vorgängen in der Natur sehr schwierig, da die Anfangsbedingungen schon allein aufgrund der Messungenauigkeit und der Menge an Informationen nicht genau bestimmt werden können. Trotzdem lassen sich im Rahmen der Chaosforschung einige interessante Aussagen über solche Systeme treffen, z.B. kann ein Maß für die Stabilität einer Lösung definiert werden und damit Vorhersagen getroffen werden.

Ein sehr anschauliches Beispiel aus der Natur ist das Ringsystem des Saturn. Das Ringsystem hat einige gut sichtbare Lücken (Abbildung 2), in denen sich keine der Staub- und Felsteinchen, aus denen die Ringe bestehen, befinden. Diese Lücken sind die Bereiche, in denen die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Gravitationspotential des Saturn und seiner Monde keine stabile Lösung hat, sodass eine Umlaufbahn in diesen Bereichen nicht auf längere Zeit gehalten werden kann.

### 2.5.2 Phasenraumkurven und Attraktoren

Der Phasenraum eines Systems ist der Raum, dessen Koordinaten die Zustandsgrößen des Systems sind. (z.B.  $x, \dot{x}$ ) Eine Kurve  $X(t) = (x(t), \dot{x}(t))^T$  im Phasenraum heißt **Trajektorie** und beschreibt die zeitliche Entwicklung des Systems. Zeitlich konstante Punkte im Phasenraum, an denen die Geschwindigkeit des Massenpunkts  $\dot{X}(t) = 0$  ist, nennt man **Fixpunkte**. Kurven im Phasenraum können sich nur in Fixpunkten schneiden, da die zeitliche Entwicklung des Systems eindeutig durch die Anfangsbedingungen vorgegeben ist. Da in Fixpunkten mehrere (im Allgemeinen sogar unendlich viele) Trajektorien zusammenlaufen können, nennt man solche Fixpunkte auch **Attraktoren**. In nichtlinearen Systemen können Attraktoren auch andere Formen (z.B. Flächen oder Kurven) annehmen, sind dann aber keine Fixpunkte mehr.

Phasenraumkurven sind ein praktisches Mittel, um das Verhalten von (chaotischen)

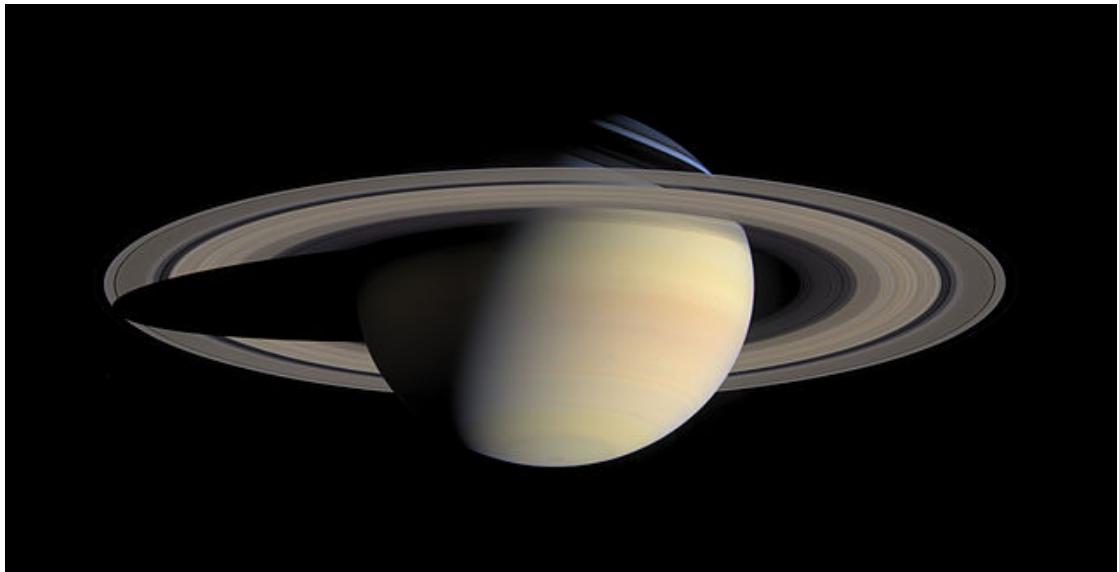


Abbildung 2: Die Ringe des Saturn, aufgenommen von der Cassini-Sonde

Systemen zu zeigen, wie man in den folgenden Beispielen sehen kann.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>[Dem] Seite 386 ff.

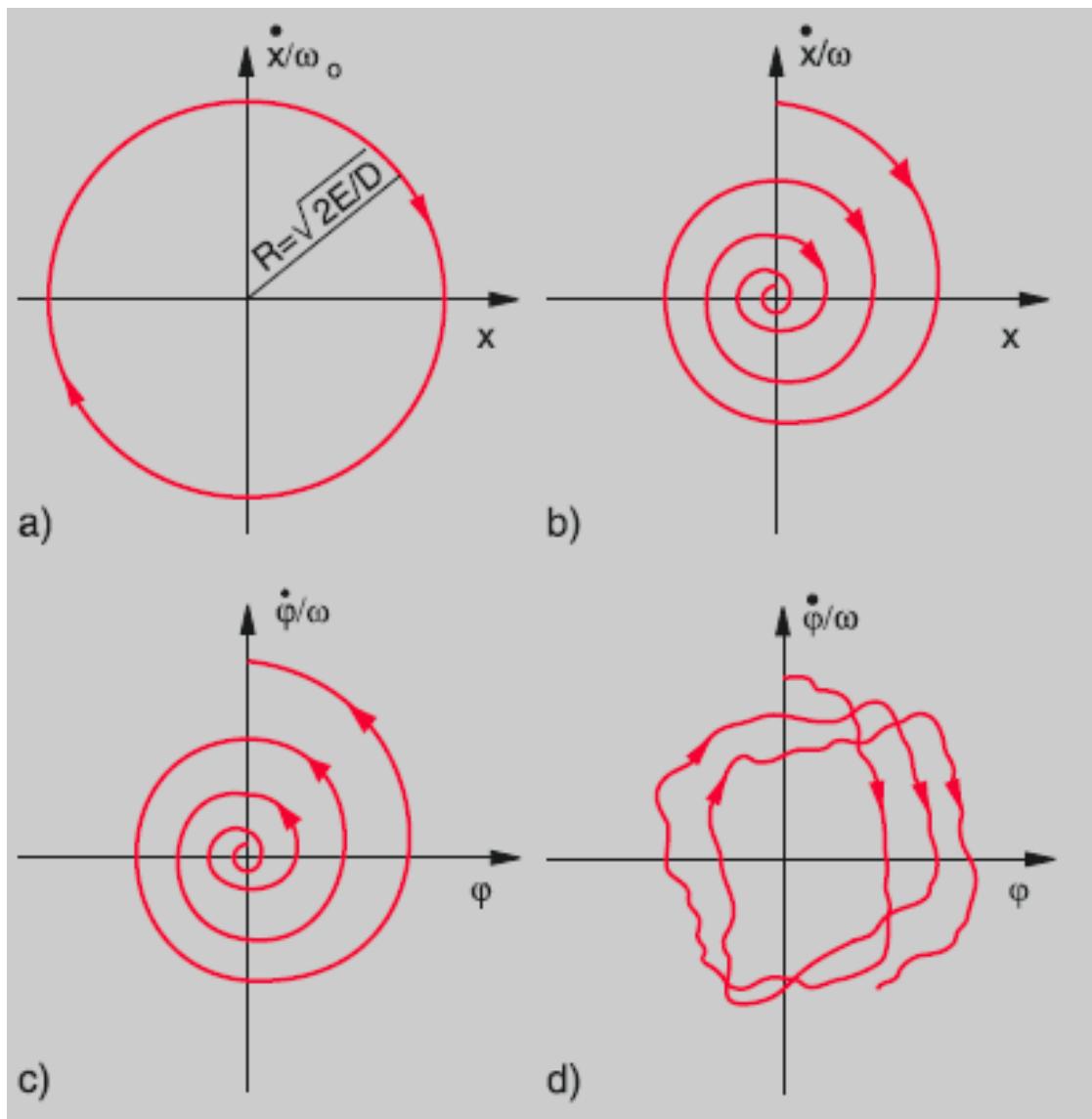


Abbildung 3: Phasenraumkurven von:

- a) ungedämpfter harmonischer Oszillatior
  - b) gedämpfter harmonischer Oszillatior
  - c) harmonischer Oszillatior mit negativer Dämpfung
  - d) nichtlinearer angeregter Oszillatior im chaotischen Bereich
- Herleitung siehe [Dem] Seite 388

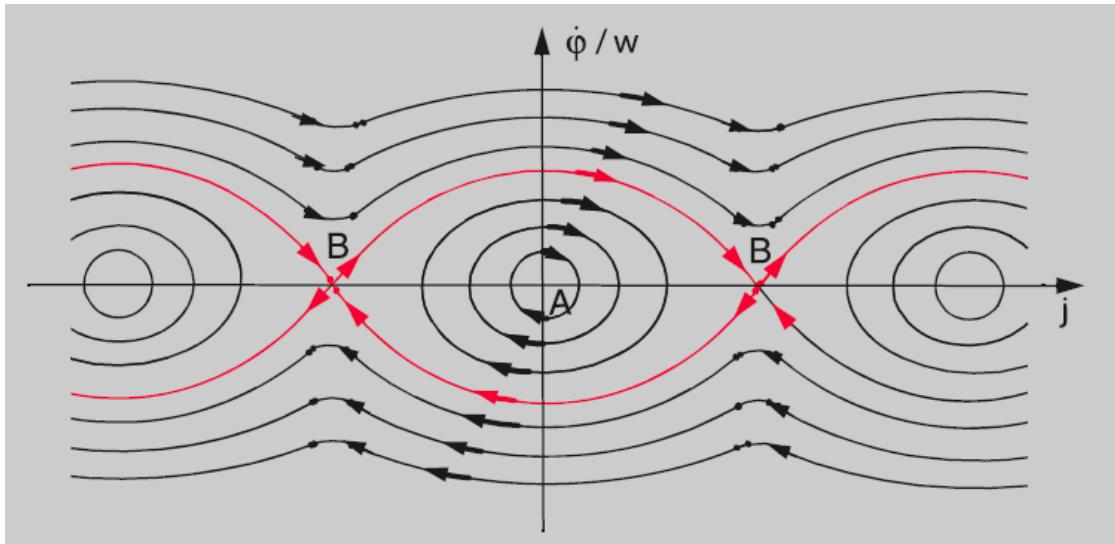


Abbildung 4: Phasenraumkurven eines ungedämpften Fadenpendels. Der Punkt A ist Attraktor für alle Winkel  $|\phi| < \pi$ . Die rote Kurve stellt eine 'Grenzkurve' zwischen stabilen und instabilen Lösungen dar. Die Punkte B ( $|\phi| = 180^\circ, \dot{\phi} = 0$ ) sind instabile Fixpunkte, eine minimale Änderung des Winkels wird eine stabile Pendelbewegung erzeugen, eine minimale Änderung der Winkelgeschwindigkeit wird eine Rotationsbewegung erzeugen, bei der der Winkel unbegrenzt ansteigt.

Herleitung siehe [Dem] Seite 389

## 3 Versuchsaufbau

### 3.1 Aufbau des Pendels

Eine Skizze des Versuchsaufbaus ist auf Seite 27 im Anhang zu finden. Für ein Doppelpendel, das auch Überschläge des unteren Pendelglieds erlaubt, mussten die Verbindungen der Pendelmassen als Stäbe gebaut werden. Dabei galt es zu beachten, dass ein möglichst geringer Teil der Gesamtmasse in den Pendelstäben liegt. Die Wahl des Materials fiel auf Acryl, da es bei relativ geringem Gewicht die erforderliche Steifigkeit liefern kann. Das obere Pendelglied wurde symmetrisch auf beiden Seiten des Pendels gebaut um Kräfte zu vermeiden, die in Schwingungen außerhalb der gewünschten Ebene verursacht hätten. Für den unteren Stab wurde eine Materialstärke von  $5\text{mm}$  gewählt, für den oberen Stab war aufgrund der doppelten Ausführung eine Stärke von  $3\text{mm}$  ausreichend. Auch diese dünne Materialstärke liefert ein Gewicht von  $70\text{g}$  pro Stab konnte aber aufgrund der Anforderungen an die Steifigkeit und Kosteneffizienz nicht unterschritten werden.

Um ein möglichst einfaches Modell zu erhalten wurde versucht die Reibung in den Achsen des Pendels zu minimieren. Die Lagerung wurde durch Kugellager der Firma FAG realisiert. Es wurden zwei Lager in der Aufhängung des Pendels integriert sowie ein weiteres Kugellager in der oberen Masse. Die Gewindestange, das Kugellager sowie die sechs Schrauben und Muttern der oberen Masse kommen zu einer Masse  $m_1$  von  $301\text{g}$  zusammen. Um das Modell zu vereinfachen wurde versucht eine möglichst gleiche Masse für  $m_2$  zu finden. Hier kam ein Gewicht aus dem Lager des Projektpraktikums mit einer Masse von  $297\text{g}$  zum Einsatz.

### 3.2 Messung der Pendelbewegung

Um den Aufenthaltsort der Massen in der Pendelebene mit einem geringem zeitlichen Intervall aufzunehmen wurde eine Kamera eingesetzt. Um nach dem Versuch die X, Y Daten in einer Tabelle zu erhalten wurde die Videotracking Software "Tracker" von Open Source Physics eingesetzt. Bei Testaufnahmen stellte sich heraus, dass das Programm dazu neigte, sofern kein optimaler Kontrast des Objekts zum Hintergrund herrschte, in einigen Frames Punkte im Hintergrund statt dem Objekt zu fokussieren. Als eine weitere Hürde stellte sich die Bewegungsunschärfe dar, besonders in Phasen mit hoher Geschwindigkeit verschwamm der Trackingpunkt mehr zu einer Linie, die die Software dann nicht mehr zuordnen kann. Um einen hohen Kontrast zum Hintergrund zu erhalten wurden die Massen mit LED markiert und der Versuch wurde in einem sonst dunklen Raum durchgeführt. Um die Bewegungsunschärfe zu minimieren wurde eine Kamera mit möglichst geringer Minimalverschlusszeit bei gleichzeitig guter Lichtausbeute gesucht. Diese Anforderungen konnten von einer Spiegelreflexkamera mit Videomodus erreicht werden. Auf den Einzelbildern des Videos erschienen die Marker des Pendels bei einer Verschlusszeit von  $\frac{1}{2000}\text{s}$  zu allen Zeiten als Punkte. Die Punkte ließen sich im Allgemeinen gut durch die Video Tracking Software analysieren, abgesehen von Spezialfällen in denen sich eine der Massen über der Tischkante und damit außerhalb des für die Kamera sichtbaren Bereichs befand. Als Nachteil der Spiegelreflex Kamera kann gesehen werden,

dass eine Aufnahme von 30 Bilder pro Sekunde die maximale Framerate der Kamera darstellt.

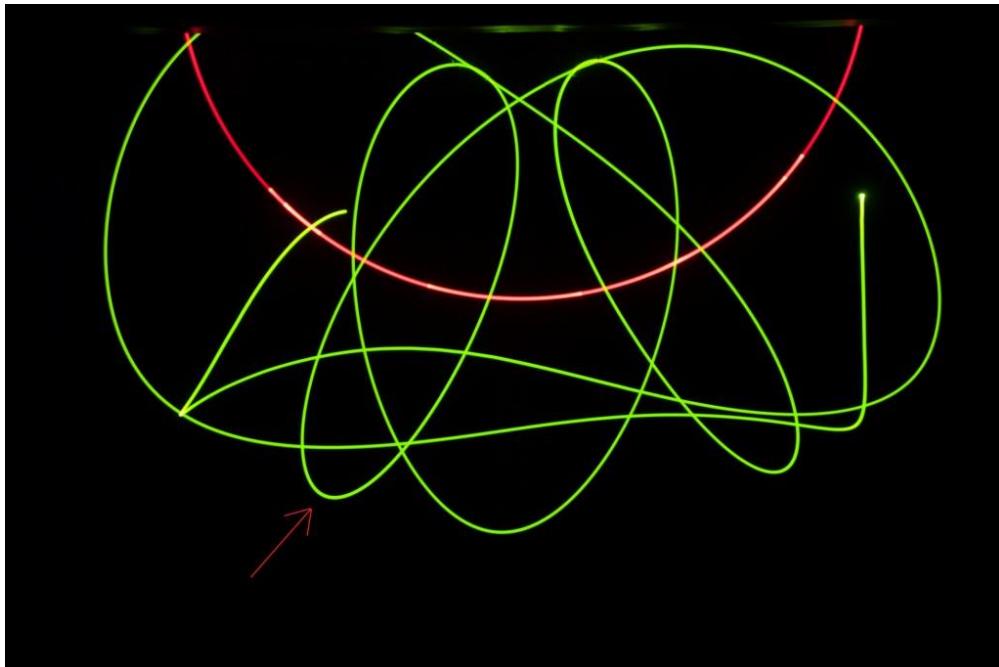


Abbildung 5: 1. Verlauf

## 4 Darstellung der Ergebnisse und Auswertung

### 4.1 Untersuchung des chaotischen Verhaltens

Zunächst wurde das Pendel aus, soweit händisch möglich, gleichen Anfangsbedingungen gestartet. Der Startpunkt wurde hier mittels einer an einem der beiden Tische befestigten Gewindestange festgehalten, wobei das Pendel dann in Ruhe und derart, dass sich die untere Achse des Pendels ( $m_1$ ) direkt neben der Gewindestange befand. Aufgrund dieser Anordnung kann ein geschätzter Fehler von 5mm für den Ort der oberen Masse und dementsprechend auch für den Ort der unteren Masse angenommen werden.

Vergleicht man drei exemplarisch ausgewählte Aufnahmen (5, 6, 7), so zeigt sich, dass der Verlauf der Leuchtspur des unteren Pendels zumindest der groben Form nach gleich ist bis zu dem mit einem roten Pfeil markierten Punkt. Danach differierten die Wege der unteren Masse deutlich, bis nach etwa einer halben weiteren Schwingung überhaupt kein sichtbarer Zusammenhang mehr zwischen den Leuchtspuren besteht. Während in 5 und 7 die Spur von dem markierten Punkt ausgehend einen Bogen nach rechts beschreibt, wird in 6 die untere Masse abgebremst, sodass sie, wie an der deutlich helleren Färbung der Leuchtspur zu erkennen, fast zum Stehen kommt und danach annähernd senkrecht nach unten weiterführt. Der Grund für die hellere Färbung bei langsameren Geschwindigkeiten und insbesondere Punkten, bei denen sich die Geschwindigkeitsrichtung umkehrt, ist, dass ein Punkt auf der Leuchtspur umso heller ist, je länger sich die an der Masse befestigte Diode im Abstand der halben Breite der Leuchtspur (des „optischen Radius“ der Diode)

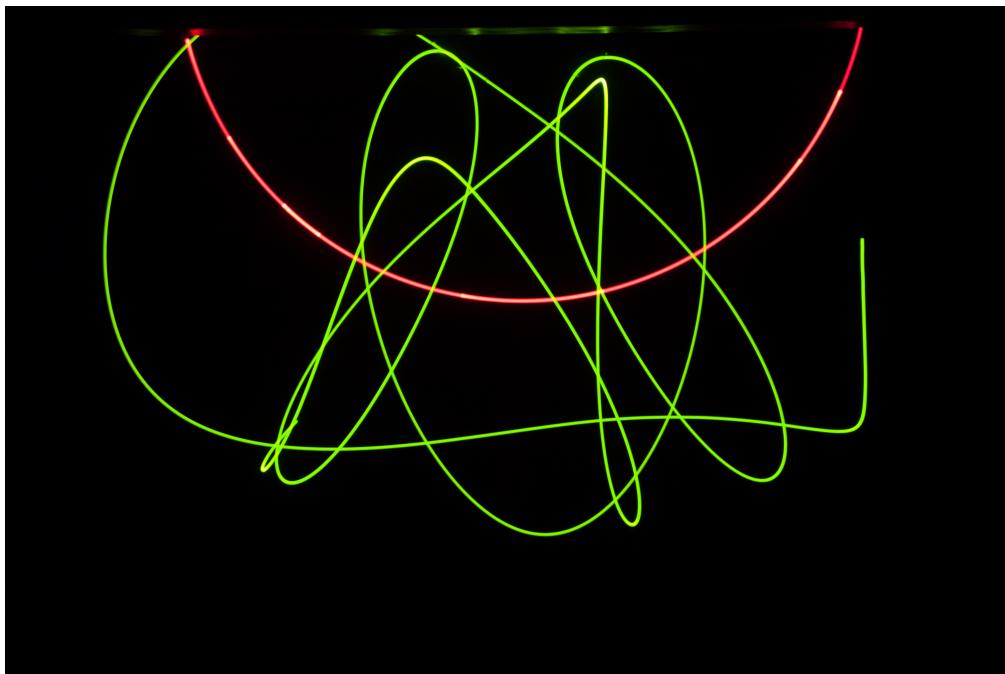


Abbildung 6: 2. Verlauf

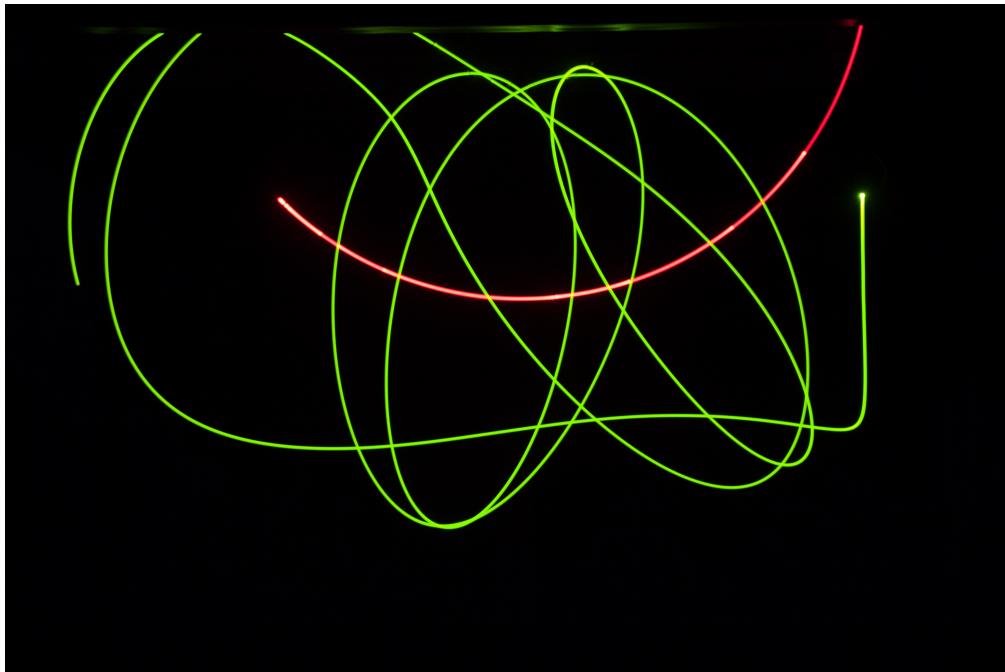


Abbildung 7: 3. Verlauf

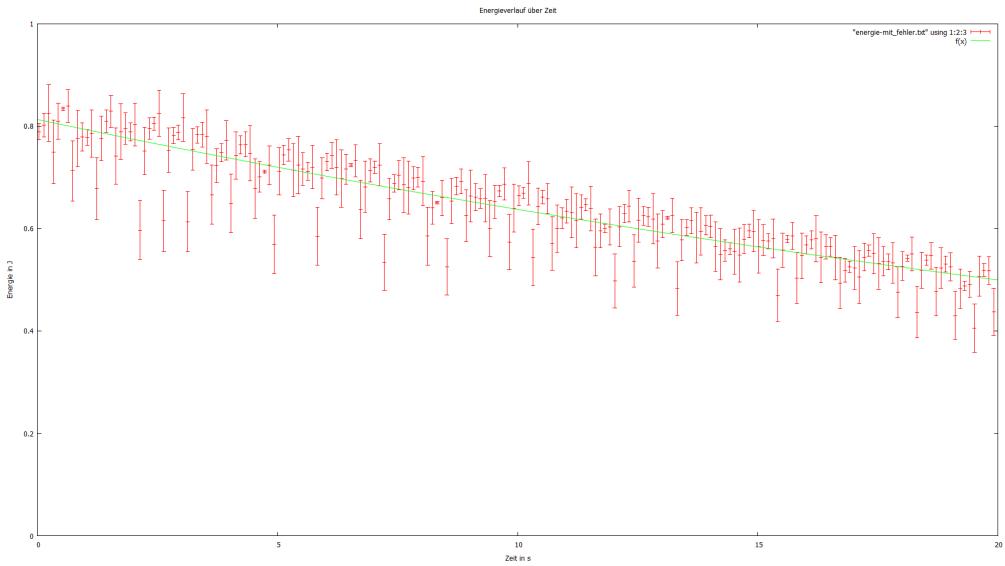


Abbildung 8: Energie des Pendels über der Zeit

von diesem Punkt befindet. Weiter divergiert auch der Verlauf von 5 und 7 bald, wie in den Abbildung gut zu erkennen ist. Dieses Verhalten entspricht dem in der Theorie dargestellten chaotischen Verhalten, sodass das Doppelpendel als ein chaotisches System bezeichnet werden kann.

## 4.2 Betrachtung der Reibung

### 4.2.1 Allgemeines zur Auswertung

Für die Betrachtung der Reibung wurde ein Video aufgenommen und mittels eines Tracking-Programms nachträglich ausgewertet. Da aus den Tracking-Daten nur die einzelnen Koordinaten der Massepunkte hevor gehen, aber nicht die Koordinaten des Ursprungs, muss dieser noch separat ermittelt werden. Dies wurde mittels einer Berechnung in python erreicht, wobei ein Algorithmus implementiert wurde, der für jeden Punkt  $(x, y)$  eines Rasters die Abstände zu den Messpunkten  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$  ermittelt und die Varianz dieser Abstände berechnet. Als Koordinatenursprung wird dann der Punkt mit minimaler Varianz des Abstandes verwendet, sodass sich die „Länge“ des ersten Pendels im Rahmen der Messgenauigkeit als konstant ergibt.

### 4.2.2 Betrachtung der Messergebnisse

Zunächst fällt auf, dass die Energiewerte (Abb. 8) deutlich streuen und vom einem monotonen Verlauf abweichen. Der Grund hierfür besteht darin, dass das ausgewertete Video lediglich mit einer Aufnahmerate von 30 Bildern pro Sekunde aufgezeichnet wurde. Aus diesem Grund tritt der Effekt auf, dass die Spitzen der Geschwindigkeit bei der Auswertung „abgeflacht“ werden. Dies ist insbesondere dann sichtbar, wenn das Pendel

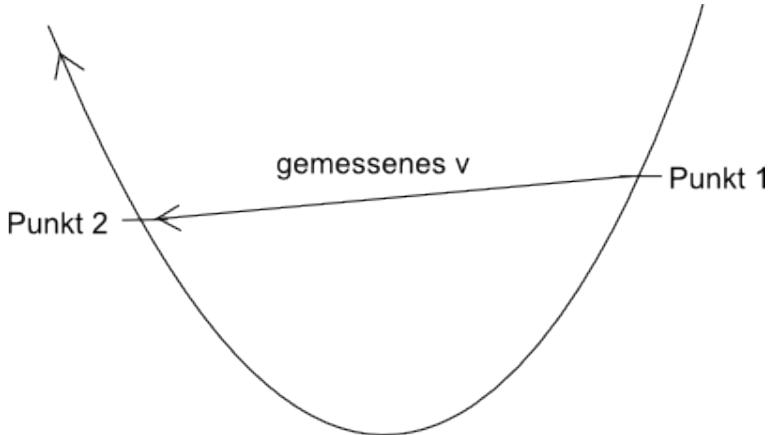


Abbildung 9: Schematische Darstellung der fehlerhaften Auswertung

ein Minimum der Höhe durchläuft und ein Bild vor und das darauffolgende nach dem Durchlauf aufgenommen wird. Die errechnete Geschwindigkeit ist dann kleiner als die tatsächliche (Abb. 9).

Verstärkt wird dies dadurch, dass bei der Auswertung die Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  mittels  $|\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t - \Delta t)|$  bestimmt wurde. Somit verhindert man die „Verschiebung“ zwischen den Ortskoordinaten  $\vec{x}(t)$  und  $\vec{v}$ , der sich ergeben würde, wenn man nur das Intervall  $[t - \Delta t, t]$  betrachtet. Hier würde man einem Ort (und der damit verbundenen kinetischen Energie) eine „frühere“ und damit falsche Geschwindigkeit zuordnen. Dieser Fehler ist schwer abzuschätzen, da korrekterweise eine stochastische Betrachtung nötig wäre, die aber insbesondere aufgrund des chaotischen Verhalts des Doppelpendels problematisch ist. Es soll deshalb angenommen werden, dass die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  jeweils mit einem Fehler von  $0.1 \frac{m}{s}$  bestimmt werden kann. Mittels einer Fehlerfortpflanzung ergibt sich:

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial v_1} \cdot \Delta v_1\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial v_2} \cdot \Delta v_2\right)^2} = \sqrt{(m_1|v_1| \cdot \Delta v_1)^2 + (m_2|v_2| \cdot \Delta v_2)^2} = \sqrt{(\Delta v)^2 \cdot (m_1^2|v_1|^2 + m_2^2|v_2|^2)} \quad (25)$$

Damit ergeben sich die eingezeichneten Fehlerbalken.

#### 4.2.3 Luftreibung

Da sich die Geschwindigkeit im Bereich von etwa null bis zwei Metern pro Sekunde bewegt, siehe 10, eine der verwendeten Akrylplatten eine Projektionsfläche von  $1.5 \cdot 10^{-3}$  (unten: 25 cm Länge, 6 mm Stärke) bzw.  $1.4 \cdot 10^{-3}$  (oben: 35 cm Länge, 4 mm Stärke) hat, ergibt sich die Kraft bei einer Luftdichte von  $1.2 \frac{kg}{m^2}$  eine abbremende Kraft von  $1.8 N$  (mit  $v = 1 \frac{m}{s}$ ,  $c_W = 2$ ,  $A_S = 1.5 \cdot 10^{-3} m^2$ ).

Für die drei verwendeten Platten ergibt sich somit eine Kraft in der Größenordnung von  $5.4 \cdot 10^{-3} N$ . Mit einer Gesamtmasse von  $0.7 kg$  inklusive der Akrylplatten folgt eine durchschnittliche Beschleunigung von etwa  $7.7 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$ . Bei einer Dauer der Messung

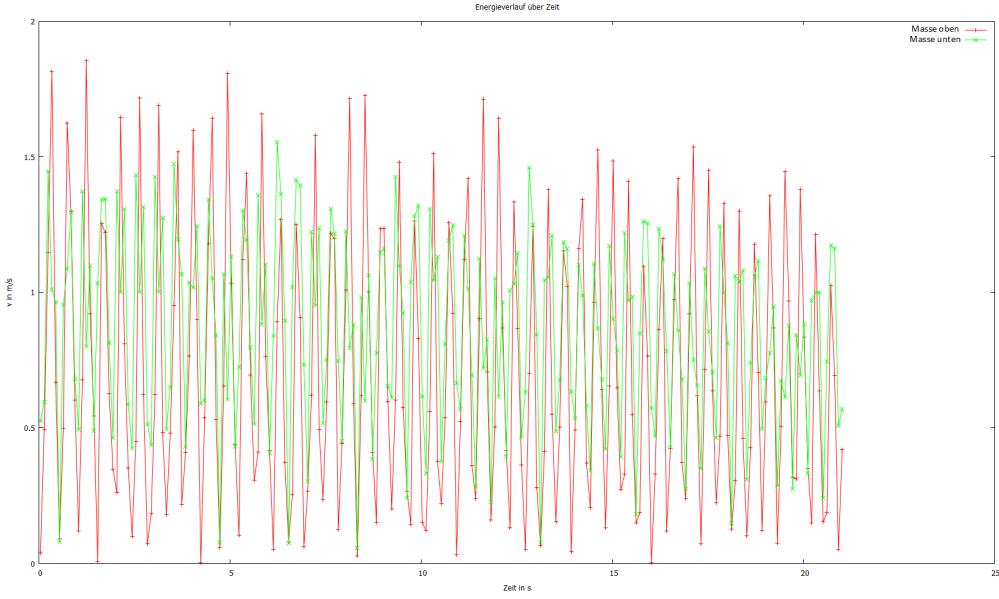


Abbildung 10: Geschwindigkeit der beiden Massepunkte über der Zeit

von  $30 \text{ s}$  ergibt sich hiermit also lediglich eine Geschwindigkeitsänderung von  $0.03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , also von etwa  $10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , was nicht wesentlich beiträgt.

#### 4.2.4 Reibung in den Kugellagern

Laut [Reib] liegt  $c_R$  für Kugellager im Bereich von etwa  $0.5$  bis  $1 \cdot 10^{-3}$ . Damit ergäbe sich bei einer Gesamtmasse von etwa  $0.7 \text{ kg}$  eine abbremsende Kraft von der Größenordnung  $10^{-3}$  bis  $10^{-2} \text{ N}$ .

#### 4.2.5 Energieübertrag auf die Aufhängung

Da sowohl die Luftreibung als auch der Rollwiderstand vernachlässigbar klein sind, dürfte dieser Effekt wesentlich verantwortlich für die Abbremsung des Pendels sein. Es bietet sich an, in grober Näherung eine lineare Abhängigkeit des Energieverlustes des Systems von der momentanen Energie anzunehmen.

Nimmt man einen exponentiellen Abfall der Energie  $E(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$  an, so ergibt sich mittels eines Fits in den Verlauf von

$$a = 0.813J$$

und

$$b = -0.024s^{-1}$$

mit Fehlern von  $1.26\%$  und  $4.89\%$ .

Allerdings kann aus den hier dargestellten Daten nicht verifiziert werden, ob der Verlauf

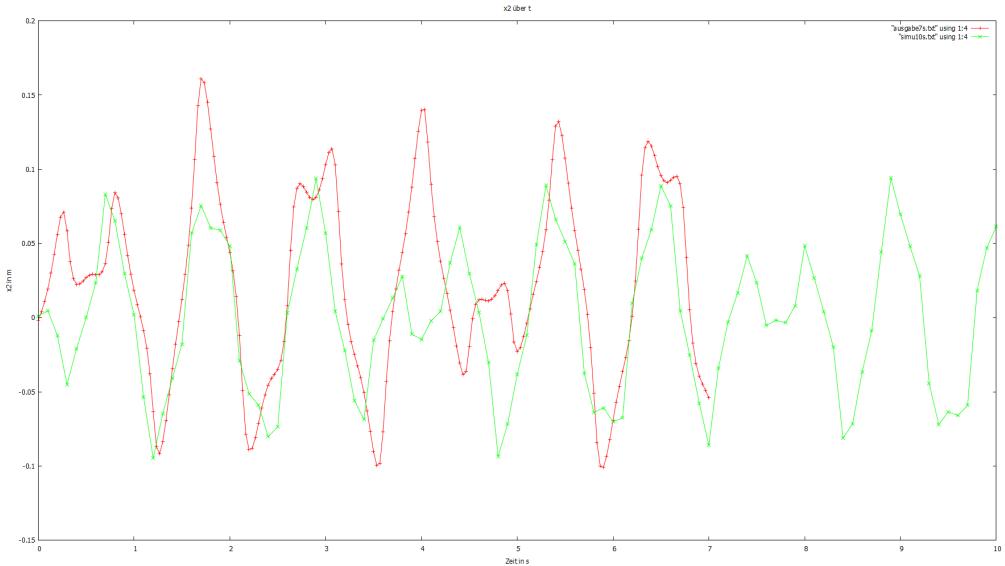


Abbildung 11: Auftragung der  $x_2$ -Koordinate bei einer Simulation mit Start zu etwa dem Zeitpunkt des Loslassens

tatsächlich einem exponentiellen Abfall folgt, da auch etwa ein Abfall mit dem inversen Quadrat der Zeit denkbar wäre.

### 4.3 Simulation des Doppelpendels

Die gemessenen Daten sollen nun mit einer Simulation, die entsprechend der Beschreibung in der Theorie durchgeführt wurde, verglichen werden. Da das Pendel händisch gestartet wurde, ist davon auszugehen, dass sich die ersten Werte eher schlecht mit der Simulation nachvollziehen lassen.

Tatsächlich ist dies der Fall, wie in Abb. 11 zu sehen ist. Hier ist die  $x_2$ -Koordinate, also die x-Koordinate des unteren Pendels über der Zeit aufgetragen. Man erkennt, dass sich Simulation und Messung schon zu Beginn sehr deutlich unterscheiden. Zwar verlaufen ab etwa 0.8s Simulation und Messung ähnlich, allerdings dürfte dies auf einen Zufall beziehungsweise darauf zurückzuführen sein, dass die Auslenkung des Pendels hier relativ klein ist und das Pendel ein leicht periodisches Verhalten aufweist. Aus diesem Grund wurde die Simulation erst bei 0.8s begonnen. Dieser spezielle Wert wurde gewählt, weil hier wie in 11 die Änderungsrate von  $x_2$  in etwa 0 ist, und so Fehler bei der Bestimmung der Geschwindigkeit zu minimieren.

Dabei wurden die in Abb. 12, 13, 14 und Abb. 15 dargestellten Ergebnisse erzielt, wobei der rote Graph die Simulation darstellt und der grüne die tatsächlich gemessenen Werte.

Es ist deutlich sichtbar, dass die Verläufe bis etwa  $t = 2s$  recht gut mit den Messwerten übereinstimmen, danach ergeben sich vor allem bei den  $x_2$ - und  $y_1$ -Koordinaten deutliche Unterschiede, wohingegen bei den anderen beiden Koordinaten noch länger eine deutliche

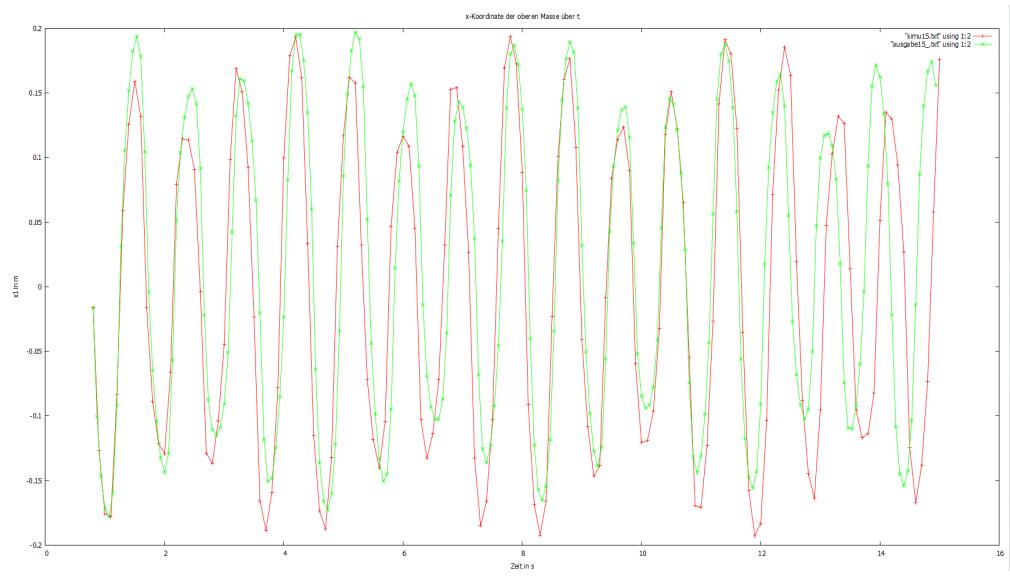


Abbildung 12: Auftragung der  $x_1$ -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start

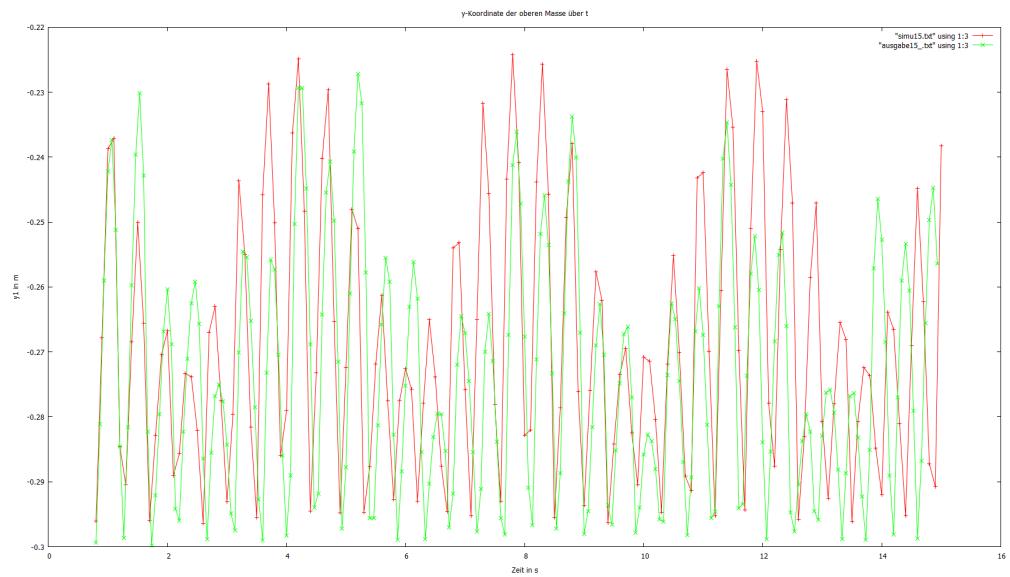


Abbildung 13: Auftragung der  $y_1$ -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start

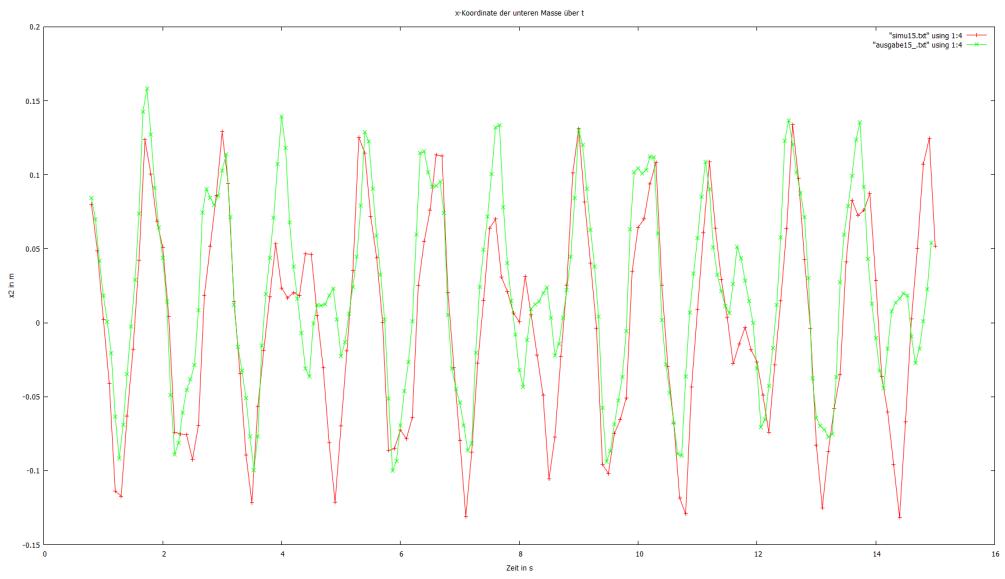


Abbildung 14: Auftragung der  $x_2$ -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start

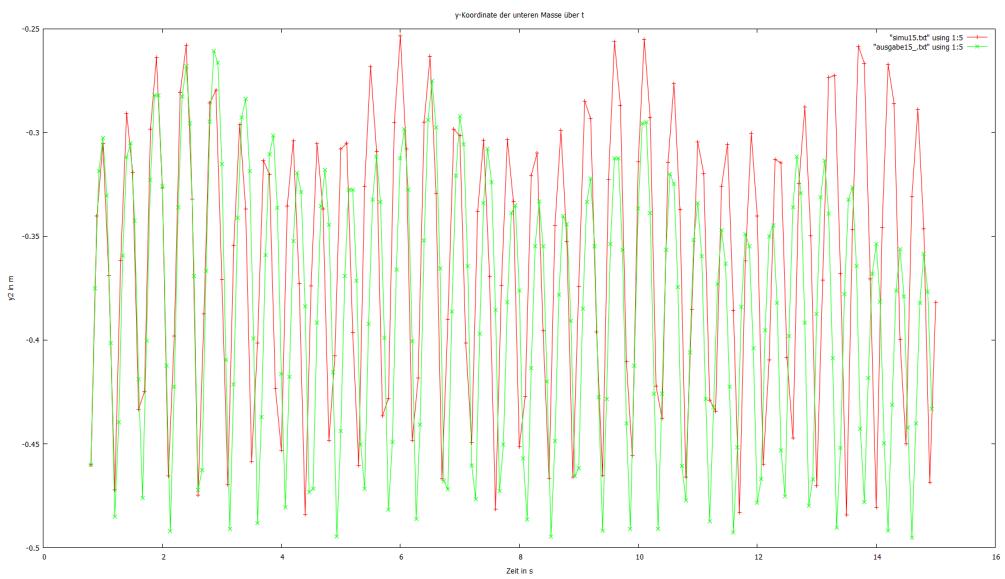


Abbildung 15: Auftragung der  $y_2$ -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start

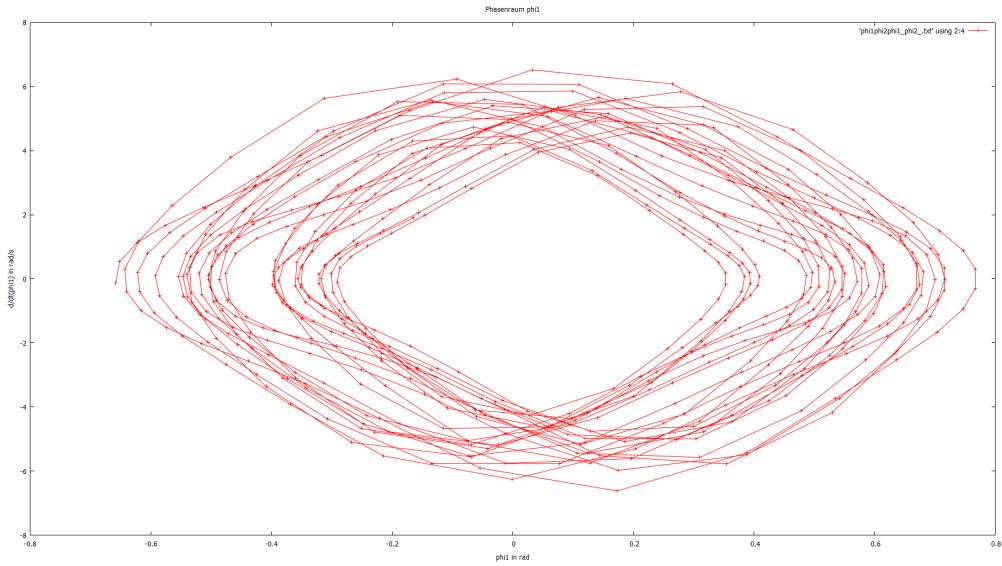


Abbildung 16: Phasenraum  $\dot{\varphi}_1$  über  $\varphi_1$

Ähnlichkeit bestehen bleibt. Die Ähnlichkeit ist zum Teil auch darauf zurückzuführen, dass das Pendel bei dieser Messung kein deutlich ausgeprägtes chaotisches Verhalten besitzt, sondern eher periodische Eigenschaften aufweist.

Trotzdem eignet sich die Simulation scheinbar gut, um die Bewegung des Pendels nachzu vollziehen.

Weiter sind die sich aus den gemessenen Daten ergebenden Phasenraumdiagramme in Abb. 16 und Abb. 17 dargestellt. Es ergibt sich dabei ein Verlauf, der plausibel erscheint, da sie sehr dem in Abb. 4 ähneln, welches das Phasenraumdiagramm eines einfachen Pendels zeigt. Der Grund dafür liegt darin, dass auch das Doppelpendel in dem hier dargestellten Energiebereich lediglich „hin und her schwankt“, sodass eine in Näherung ellipsenförmige, auf jeden Fall aber „geschlossene“ Kurve entsteht.

Trotzdem gibt es Abweichungen zum einfachen Pendel. Zunächst schneiden sich hier die Linien im Phasenraumdiagramm, was allerdings darauf zurückzuführen ist, dass die Auftragungen nur eine Projektion des gesamten, vierdimensionalen Phasenraums darstellen. Weiter erscheint das Diagramm vor allem bei dem oberen Pendel (16) seitlich „unscharf“, was durch die Beeinflussung durch das untere Pendel zu erklären ist.

## 5 Fazit

Es zeigt sich, dass das Doppelpendel, wie zu erwarten, chaotisches Verhalten aufweist. Darüber hinaus ist es möglich, die Bewegung des Doppelpendels in über mehrere „Schwingungen“ nachzu vollziehen, wohingegen eine analytische Lösung der in der Theorie aufgestellten Bewegungsgleichung unmöglich ist.

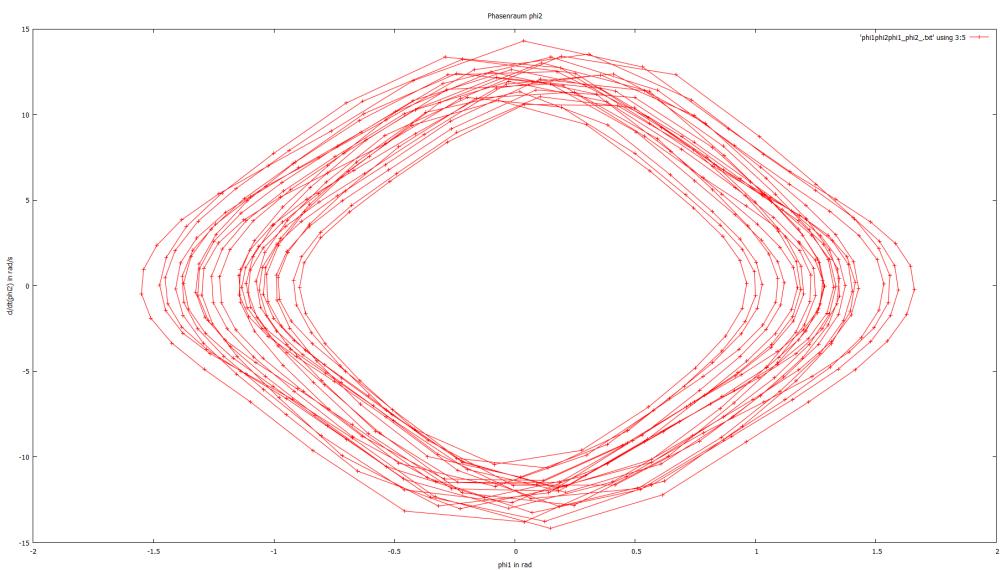


Abbildung 17: Phasenraum  $\dot{\varphi}_2$  über  $\varphi_2$

## **Literatur**

[Dem] DEMTRÖDER, Wolfgang. Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme. Springer DE, 2005.

[Reib] Wikipedia. Tabellarische Auflistung von Rollreibungskoeffizienten. <http://de.wikipedia.org/wiki/Rollreibung>. (11. Januar 2014)

[Eul] Wikipedia. Tabellarische Auflistung von Rollreibungskoeffizienten. <http://de.wikipedia.org/wiki/Rollreibung>. (11. Januar 2014)

## 6 Anhang

Listing 1: Implementierung der Simulation in python

```
1 from math import* # Einbinden von mathematischen Funktionen
2
3 def quadr(a): # Quadratfunktion
4     return(a*a)
5
6 def simu(t0, x1, y1, x2, y2, phi_1, phi_2, intervall, laenge_sim,
7 anz_schritte_pro_ausgabe):
8     m1 = 0.3 # obere Masse
9     m2 = 0.3 # untere Masse
10    l1 = sqrt(quadr(x1) + quadr(y1)) # Länge des oberen Pendels
11    l2 = sqrt(quadr(x2-x1) + quadr(y2-y1)) # Länge des unteren Pendels
12    phi1 = atan(-x1/y1) # Winkel des ersten Pendels zur Senkrechten,
13    Konvention: Winkel im 4. Quadranten sind positiv
14    phi2 = atan((x1-x2)/(y2-y1))
15    t = t0 # Startzeitpunkt
16    g = 9.81 # Ortsfaktor
17    M = m1+m2 # Gesamtmasse
18    phi_1 = 0 # zur anfänglichen Berechnung werden
19    die Winkelbeschleunigungen auf Null gesetzt
20    phi_2 = 0
21    zaehler = anz_schritte_pro_ausgabe
22    while t < laenge_sim:
23        if(zaehler == anz_schritte_pro_ausgabe):
24            print(t,
25                  '\t', sin(phi1)*l1,
26                  '\t', -cos(phi1)*l1,
27                  '\t', sin(phi1)*l1+sin(phi2)*l2,
28                  '\t', -cos(phi1)*l1- cos(phi2)*l2)
29        zaehler = 0 # Ausgabeschleife
30        zaehler += 1
31        phi_1_alt = phi_1
32        phi_2_alt = phi_2
33        phi_1_alt = phi_1
34        phi_2_alt = phi_2
35        dphi = phi1 - phi2
36        phi_1 = (-m2*l2*quadr(phi_2)*sin(dphi) - g*M*sin(phi1) -
37        m2*l1*quadr(phi_1)*sin(dphi)*cos(dphi) +
38        g*m2*sin(phi2)*cos(dphi))/(M*l1-m2*l1*quadr(cos(dphi)))
39        phi_2 = (-m2*l2*quadr(phi_2)*sin(dphi)*cos(dphi)
40        -g*M*sin(phi1)*cos(dphi)-M*l1*quadr(phi_1)*sin(dphi) +
41        g*M*sin(phi2))/(m2*l2*quadr(cos(dphi)) - M*l2)
42        phi_1 += (phi_1+phi_1_alt)/2 * intervall
43        phi_2 += (phi_2_alt + phi_2)/2 * intervall
44        phi1 += (phi_1 + phi_1_alt)/2 * intervall
45        phi2 += (phi_2 + phi_2_alt)/2 * intervall
46        t += intervall
```

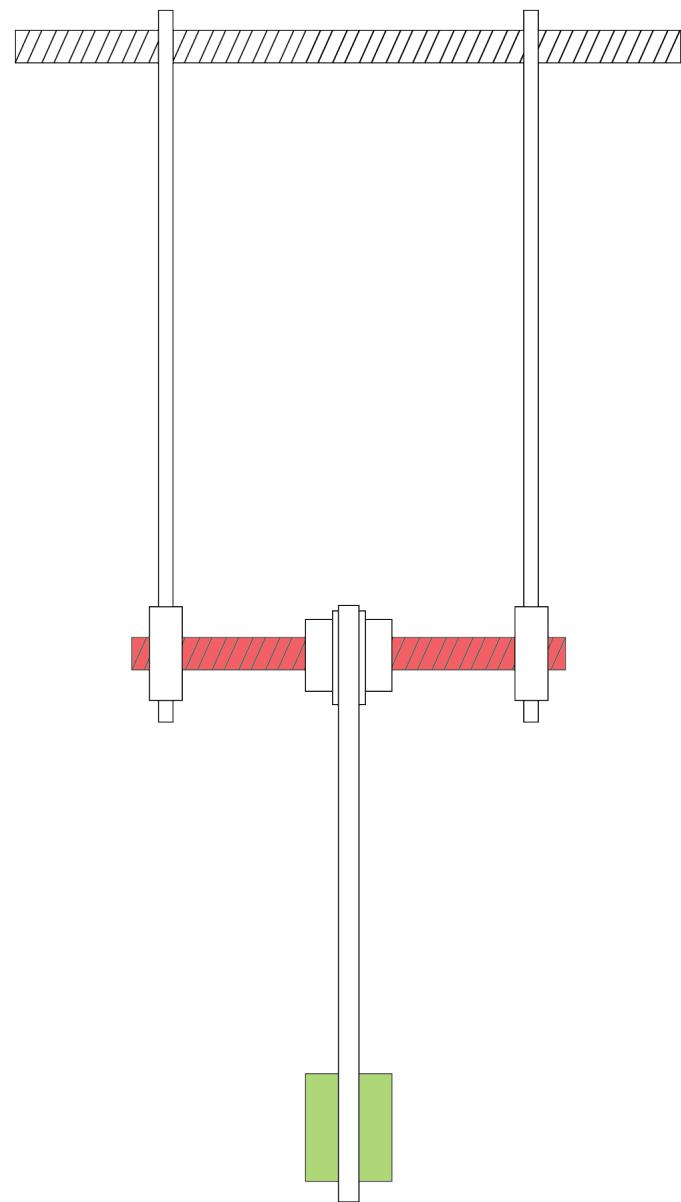


Abbildung 18: Technische Zeichnung des Pendels

Tabelle 1: Verlauf der Position der beiden Massen über die Zeit des Versuchs. Dabei wird t in s und die Position in m gemessen. (Jeder 10. Messpunkt wird dargestellt.)

t	x-Pos. $m_1$	y-Pos. $m_1$	x-Pos. $m_2$	y-Pos. $m_2$
0.0	-0.178	-0.237	-0.002	-0.332
0.333	0.078	-0.29	0.038	-0.475
0.667	0.179	-0.242	0.031	-0.382
1	-0.172	-0.242	0.018	-0.302
1.334	0.106	-0.282	-0.069	-0.359
1.668	0.105	-0.282	0.143	-0.476
2.002	-0.144	-0.26	0.044	-0.326
2.335	0.131	-0.271	-0.061	-0.283
2.669	-0.022	-0.299	0.074	-0.463
3.003	-0.091	-0.284	0.103	-0.315
3.336	0.16	-0.255	-0.032	-0.293
3.670	-0.118	-0.273	-0.016	-0.437
4.004	-0.023	-0.298	0.14	-0.416
4.337	0.175	-0.245	-0.007	-0.329
4.671	-0.166	-0.245	0.012	-0.335
5.005	0.086	-0.288	-0.023	-0.444
5.338	0.155	-0.258	0.079	-0.45
5.672	-0.151	-0.256	0.033	-0.333
6.006	0.12	-0.275	-0.069	-0.312
6.339	-0.014	-0.299	0.114	-0.441
6.673	-0.087	-0.285	0.095	-0.366
7.007	0.139	-0.267	-0.054	-0.292
7.340	-0.125	-0.27	0.024	-0.397
7.674	0.036	-0.298	0.134	-0.473
8.008	0.138	-0.268	-0.032	-0.376
8.341	-0.166	-0.246	0.014	-0.333
8.675	0.144	-0.264	-0.014	-0.378
9.009	0.032	-0.298	0.13	-0.462
9.342	-0.124	-0.27	0.004	-0.428
9.676	0.137	-0.267	-0.053	-0.312
10.01	-0.085	-0.286	0.104	-0.336
10.34	0.046	-0.296	0.06	-0.491
10.67	0.088	-0.287	-0.089	-0.374
11.01	-0.131	-0.267	0.057	-0.334
11.34	0.18	-0.24	0.032	-0.373
11.67	-0.056	-0.293	0.051	-0.452
12.01	-0.091	-0.284	-0.031	-0.478
12.34	0.164	-0.252	0.012	-0.382
12.67	-0.091	-0.284	0.102	-0.311

*Fortsetzung auf der nächsten Seite*

Tabelle 1 – *Fortsetzung*

<b>t</b>	<b>x-Pos.</b> $m_1$	<b>y-Pos.</b> $m_1$	<b>x-Pos.</b> $m_2$	<b>y-Pos.</b> $m_2$
13.01	0.1	-0.283	-0.064	-0.387
13.34	0.018	-0.299	-0.037	-0.491
13.68	-0.06	-0.292	0.124	-0.364
14.01	0.163	-0.253	-0.01	-0.354
14.34	-0.145	-0.259	0.014	-0.376
14.68	0.087	-0.287	-0.027	-0.44
15.01	0.09	-0.286	0.107	-0.484
15.34	-0.11	-0.277	0.042	-0.407
15.68	0.115	-0.277	-0.073	-0.328
16.01	-0.091	-0.284	0.088	-0.364
16.34	0.103	-0.282	0.066	-0.471
16.68	0.042	-0.297	-0.061	-0.47
17.01	-0.118	-0.273	0.035	-0.404
17.35	0.173	-0.245	0.019	-0.372
17.68	-0.088	-0.285	0.093	-0.357
18.01	0.066	-0.292	-0.086	-0.409
18.35	0.029	-0.298	0.014	-0.495
18.68	-0.043	-0.295	0.13	-0.388
19.01	0.133	-0.269	-0.038	-0.372
19.35	-0.143	-0.261	0.017	-0.378
19.68	0.13	-0.271	-0.008	-0.408
20.02	-0.005	-0.298	0.123	-0.438
20.35	-0.042	-0.296	-0.019	-0.492
20.68	0.092	-0.285	-0.067	-0.403
21.02	-0.076	-0.287	0.11	-0.349