

Bau eines Doppelpendels als Beispiel für chaotisches Verhalten

PPG8

Udo Beier Leon Brückner Valentin Olpp Marco Zech
 Sebastian Ziegler

Dezember 2013/ Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort	4
2 Theorie	5
2.1 Newtonsche und Lagrange'sche Mechanik	5
2.2 Das Doppelpendel	5
2.3 Simulation des Doppelpendels	7
2.4 Energieverlust des Systems	8
2.4.1 Luftreibung	8
2.4.2 Reibung in den Kugellagern	8
2.4.3 Energieübertrag auf die Aufhängung	8
2.5 Chaotisches Verhalten	8
2.5.1 Stabilität	8
2.5.2 Phasenraumkurven und Attraktoren	9
3 Versuchsaufbau	13
3.1 Aufbau des Pendels	13
3.2 Messung der Pendelbewegung	13
4 Darstellung der Ergebnisse und Auswertung	16
4.1 Untersuchung des chaotischen Verhaltens	16
4.2 Betrachtung der Reibung	17
4.2.1 Allgemeines zur Auswertung	17
4.2.2 Betrachtung der Messergebnisse	18
4.2.3 Luftreibung	20
4.2.4 Reibung in den Kugellagern	21
4.2.5 Energieübertrag auf die Aufhängung	21
4.2.6 Erklärung des Energieverlusts	21
4.3 Simulation des Doppelpendels	21
5 Fazit	26
6 Anhang	28

Abbildungsverzeichnis

1	Schematische Skizze eines Doppelpendels	6
2	Die Ringe des Saturn, aufgenommen von der Cassini-Sonde	9
3	Phasenraumkurven von: a) ungedämpfter harmonischer Oszillatior b) gedämpfter harmonischer Oszillatior c) harmonischer Oszillatior mit negativer Dämpfung d) nichtlinearer angeregter Oszillatior im chaotischen Bereich Herleitung siehe [Dem] Seite 388	11
4	Phasenraumkurven eines ungedämpften Fadenpendels. Der Punkt A ist Attraktor für alle Winkel $ \phi < \pi$. Die rote Kurve stellt eine 'Grenzkurve' zwischen stabilen und instabilen Lösungen dar. Die Punkte B ($ \phi = 180^\circ, \dot{\phi} = 0$) sind instabile Fixpunkte, eine minimale Änderung des Winkels wird eine stabile Pendelbewegung erzeugen, eine minimale Änderung der Winkelgeschwindigkeit wird eine Rotationsbewegung erzeugen, bei der der Winkel unbegrenzt ansteigt. Herleitung siehe [Dem] Seite 389	12
5	Versuchsaufbau mit Kamera	14
6	Tischkante verdeckt LED	15
7	1. Verlauf	15
8	2. Verlauf	16
9	3. Verlauf	17
10	Energie des Pendels über der Zeit	18
11	Schematische Darstellung der fehlerhaften Auswertung	19
12	Geschwindigkeit der beiden Massepunkte über der Zeit	20
13	Auftragung der x_2 -Koordinate bei einer Simulation mit Start zu etwa dem Zeitpunkt des Loslassens	22
14	Auftragung der x_1 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start . .	22
15	Auftragung der y_1 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start .	23
16	Auftragung der x_2 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start .	23
17	Auftragung der y_2 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start .	24
18	Phasenraum φ_1 über φ_1	25
19	Phasenraum φ_2 über φ_2	25
20	Technische Zeichnung des Pendels	29

Tabellenverzeichnis

1	Verlauf der Position der beiden Massen über die Zeit des Versuchs. Dabei wird t in s und die Position in m gemessen. (Jeder 10. Messpunkt wird dargestellt.)	30
---	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

1 Vorwort

Das Doppelpendel, ein Pendel, an dessen Pendelmasse ein weiteres Pendel befestigt wird, mag zunächst nicht sonderlich interessant erscheinen. Bei genauerer Betrachtung hat dieser simple mechanische Aufbau jedoch einige faszinierende und sogar für aktuelle Forschung relevante Eigenschaften. Das Doppelpendel ist ein einfaches Beispiel für ein chaotisches System, d.h. ein System, dessen zeitliche Entwicklung sich schon bei kleinen Variationen der Anfangsbedingungen stark ändert. Chaotische Systeme haben eine wichtige Bedeutung in der Natur und sind der Hauptfokus eines Teilgebiets der modernen Physik, der Chaosforschung. Mithilfe der Chaosforschung lassen sich z.B. Bevölkerungsentwicklungen, die Bildung von Verkehrsstaus oder das Wetter untersuchen. In diesem Versuch soll nun ein Doppelpendel gebaut, die Physik dahinter untersucht und die Bedeutung als chaotisches System am praktischen Beispiel nachvollzogen werden.

2 Theorie

2.1 Newtonsche und Lagrange'sche Mechanik

In folgenden soll die Herleitung der Bewegungsgleichung des Doppelpendels mit Hilfe des Lagrange-Formalismus der klassischen Mechanik beschrieben werden.

Die zu lösende Bewegungsgleichung eines Massepunkts ergibt sich nach Newton bekanntlich zu

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i, \quad (1)$$

wobei $\sum \vec{F}$ die Summe aller am Massepunkt angreifenden Kräfte, \vec{x} die Ortskoordinate und m die Masse des betrachteten Massepunkts ist. In der Praxis, so auch beim Doppelpendel, stellt es sich als äußerst schwierig dar, alle am Massepunkt wirkenden Kräfte zu identifizieren sowie mathematisch zu beschreiben. Als eine Art Verallgemeinerung der Newton'schen Mechanik lässt sich aus ihr der sogenannte Lagrange-Formalismus herleiten. Hier sind die gesuchten Funktionen die Lösungen der Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

mit der Lagrangefunktion $L = E_{kin} - V$. Hierbei sind E_{kin} die kinetische Energie und V das auf den Massepunkt wirkende Potential. Ein weiterer Vorteil dieses Formalismus besteht darin, dass die Langrange-Gleichungen unter Koordinatentransformationen invariant bleiben, es gilt also:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3)$$

Hier seien q_i die sogenannten verallgemeinerten Koordinaten, die so gewählt werden, dass alle geometrischen Einschränkungen, denen das mechanische System unterworfen ist (sog. Zwangsbedingungen) berücksichtigt werden. Dies geschehe in dem Sinne, dass die verallgemeinerten Koordinaten für beliebige Werte nur unter den Zwangsbedingungen erlaubte Zustände liefern. Für jeden Freiheitsgrad muss nun eine Langrange-Gleichung aufgestellt werden. [Sch] Seite 84 ff.

2.2 Das Doppelpendel

Im Ursprungspunkt des Koordinatensystems wird ein Pendel, bestehend aus einem Stab mit fester Länge l_1 und einer Masse m an dessen Ende, befestigt. Das Pendel soll sich nur in der x-z Ebene bewegen können. Am Massenpunkt befindet sich nun ein zweites Pendel mit Stab der Länge l_2 , welches sich ebenso nur in der x-z-Ebene bewegen soll. (siehe Abb. 1)

Es soll nun stets der Index 1 für Größen des oberen Pendels (inklusive der oberen Masse) und der Index 2 für alle Größen des unteren Pendels verwendet werden.

Der erste Schritt besteht nun darin, eine Beschreibung der Ortsvektoren der beiden Massenpunkte zu finden, die alle Zwangsbedingungen berücksichtigt. Derartige verallgemeinerte Koordinaten sind offenbar gegeben durch φ_1 und φ_2 , welche die relativen

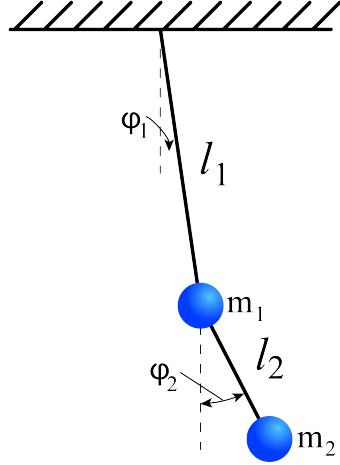


Abbildung 1: Schematische Skizze eines Doppelpendels

Winkel der Stäbe l_1 und l_2 zur Senkrechten (z-Achse) darstellen. Daraus folgt für \vec{x}_1

$$\vec{x}_1 = l_1 \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ -\cos \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Für den Vektor \vec{x}_2 folgt aus einfachen trigonometrischen Überlegungen:

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + l_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi_2 \\ -\cos \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cdot \sin \varphi_1 + l_2 \cdot \sin \varphi_2 \\ -l_1 \cdot \cos \varphi_1 - l_2 \cdot \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Zur Bestimmung von $E_{kin,i} = \frac{m_i}{2} \cdot \dot{\vec{x}}_i^2$ müssen noch die Ableitungen der Ortsvektoren gebildet werden:

$$\dot{\vec{x}}_1 = l_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

und:

$$\dot{\vec{x}}_2 = \dot{\vec{x}}_1 + l_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Für die kinetische Energie ergibt sich:

$$E_{kin} = E_{kin,1} + E_{kin,2} = \frac{m_1}{2} \cdot l_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \cdot (l_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (8)$$

Das auf das Doppelpendel wirkende Potential $V_i = m_i \cdot g \cdot h_i$ ist:

$$V = V_1 + V_2 = m_1 \cdot g \cdot (-l_1 \cdot \cos \varphi_1) + m_2 \cdot g \cdot (-l_1 \cdot \cos \varphi_1 - l_2 \cdot \cos \varphi_2) \quad (9)$$

Das Aufstellen der Lagrange-Gleichung erfolgt nun in mehreren Schritten.

Zuerst für φ_1 :

$$\frac{\partial(E_{kin} - V)}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) \cdot l_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1 + m_2 \cdot (l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (10)$$

$$\frac{\partial(E_{kin} - V)}{\partial\varphi_1} = -m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1 \quad (11)$$

und nun für φ_2 :

$$\frac{\partial(E_{kin} - V)}{\partial\dot{\varphi}_2} = m_2l_2^2\dot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (12)$$

$$\frac{\partial(E_{kin} - V)}{\partial\varphi_2} = m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2gl_2 \sin \varphi_2 \quad (13)$$

Setzt man diese Terme in (3) ein, erhält man die Bewegungsgleichungen des Systems:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\varphi_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2(\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &+ \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\varphi_2} = m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2(\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + m_2gl_2 \sin \varphi_2 = 0 \quad (15)$$

Diese können noch vereinfacht werden durch eine Division durch l_1 bzw. l_2 :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + (m_1 + m_2)g \sin \varphi_1 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$m_2l_2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1(\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + m_2g \sin \varphi_2 = 0 \quad (17)$$

2.3 Simulation des Doppelpendels

Um die Gleichungen mittels eines Standardverfahrens numerisch lösen zu können, muss das Gleichungssystem (16 und 17) auf die Form $\dot{Y} = f(Y)$ gebracht werden. Zunächst werden die obigen Gleichungen nach $\ddot{\varphi}_1$ und $\ddot{\varphi}_2$ aufgelöst. Es ergibt sich unter Beachtung der folgenden abkürzenden Notation: $(m_1 + m_2) =: M; \varphi_1 - \varphi_2 =: \Delta\varphi$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{-m_2l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin \Delta\varphi - gM \sin \varphi_1 - m_2l_1\dot{\varphi}_1^2 \sin \Delta\varphi \cos \Delta\varphi + gm_2 \sin \varphi_2 \cos \Delta\varphi}{Ml_1 - m_2l_1 \cos^2 \Delta\varphi} \quad (18)$$

und

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{-m_2l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin \Delta\varphi \cos \Delta\varphi - gM \sin \varphi_1 \cos \Delta\varphi - Ml_1\dot{\varphi}_1^2 \sin \Delta\varphi + gM \sin \varphi_2}{m_2l_2 \cos^2 \Delta\varphi - Ml_2} \quad (19)$$

Dieses Differenzialgleichungssystem erster Ordnung kann nun mit Hilfe elementarer Algorithmen gelöst werden. Hier wurde das explizite Euler-Verfahren verwendet ([Eul]). Es wurde also ein Vektor $\vec{Y} = \vec{\varphi} = (\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)^T$ definiert, für den sich ergibt:

$$\dot{\vec{\varphi}} = (\dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_2)^T, \quad (20)$$

wobei für $\ddot{\varphi}_1$ und $\ddot{\varphi}_2$ obige Gleichungen eingesetzt werden. Dann wird eine schrittweise Iteration durchgeführt, der Quelltext für das verwendete Python-Skript findet sich im Anhang.

2.4 Energieverlust des Systems

Bei dem hier behandelten Doppelpendel treten im Wesentlichen Luftreibung und Reibung in der Lagerung der zueinander beweglichen Bauteile, also den Kugellagern, auf. Darüber hinaus tritt weiterer Energieverlust auf, indem die Aufhängung des Pendels vom Pendel selbst zu Schwingungen angeregt wird und so ein Energieübertrag stattfindet.

2.4.1 Luftreibung

Für die Luftreibungskraft, die auf einen laminar umströmten Gegenstand wirkt, gilt die in guter Näherung gültige Formel

$$F_R = v^2 \cdot \frac{\rho}{2} \cdot A_S \cdot c_W, \quad (21)$$

wobei F_R die Luftreibungskraft, v die Geschwindigkeit der umströmenden Luft, ρ deren Dichte, A_S die Fläche der Projektion des Gegenstands in Störmungsrichtung und c_W ein von der Form des Gegenstands bestimmter, dimensionsloser Koeffizient ist [Win].

2.4.2 Reibung in den Kugellagern

Für die Reibung in den Kugellagern kann das Modell der Rollreibung verwendet werden. Demnach ergibt sich für die Reibungskraft F_R :

$$F_R = c_R \cdot F_N, \quad (22)$$

wobei c_R ein die verwendeten Materialien und deren Form charakterisierender Parameter ist und F_N der Betrag der Normalkraft, also die senkrecht zur Rollrichtung wirkende Kraft [Rol].

2.4.3 Energieübertrag auf die Aufhängung

Die Betrachtung dieser Art von Energieverlust ist schwierig. Er könnte mit dem Modell zweier gekoppelter schwingfähiger Systeme, bei dem das zweite eine große Dämpfung aufweist, angenähert werden. Allerdings müsste hierfür wieder der Lagrange-Formalismus herangezogen werden, wobei zusätzlich noch Reibungsterme berücksichtigt werden müssten.

2.5 Chaotisches Verhalten

2.5.1 Stabilität

Die zeitliche Entwicklung vieler Systeme in der Mechanik kann durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden. Bei bekannten Anfangswerten können diese Gleichungen analytisch oder numerisch gelöst werden und damit die zeitliche Entwicklung des Systems komplett vorhergesagt werden, d.h. für exakte Anfangswerte gibt es exakte Vorhersagen für die zukünftige Entwicklung des Systems. Systeme dieser Art nennt man **stark**

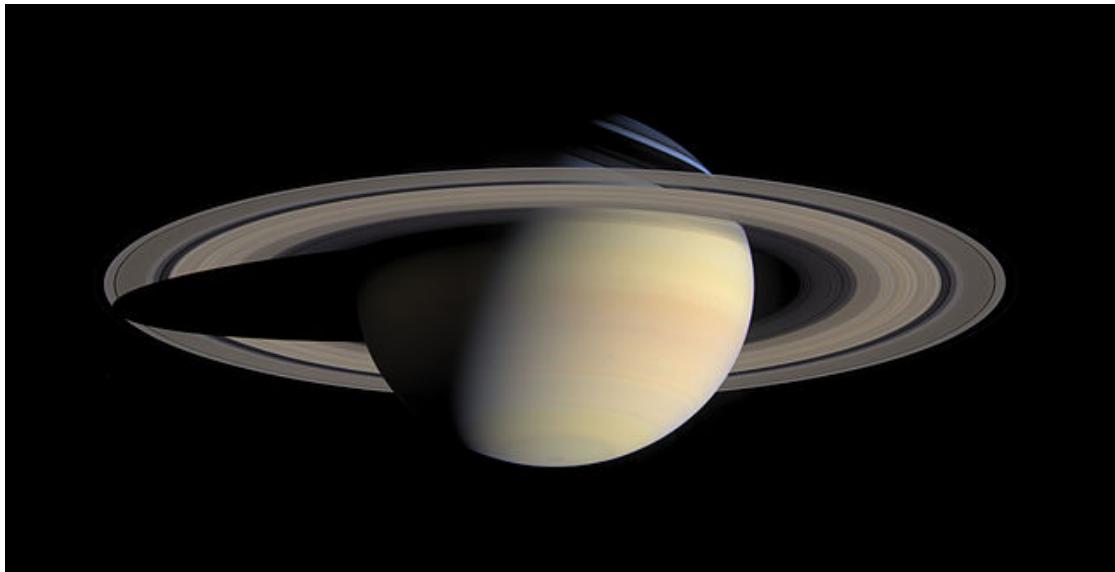


Abbildung 2: Die Ringe des Saturn, aufgenommen von der Cassini-Sonde

deterministisch. Wenn kleine Änderungen der Anfangswerte auch nur kleine Änderungen der zeitlichen Entwicklung nach sich ziehen, was mit Hilfe der Störungsrechnung bestimmt werden kann, nennt man die Lösung der Bewegungsgleichung **stabil**. Bei anderen Systemen treten nichtlineare Differentialgleichungen als Bewegungsgleichungen auf. Bei diesen Systemen kommt es vor, dass kleine Änderungen der Anfangsbedingungen große Änderungen in der zeitlichen Entwicklung bewirken. Solche Lösungen nennt man **instabil**, die Systeme bezeichnet man als **chaotisch**. Dies macht z.B. die Vorhersage von Vorgängen in der Natur sehr schwierig, da die Anfangsbedingungen schon allein aufgrund der Messungenauigkeit und der Menge an Informationen nicht genau bestimmt werden können. Trotzdem lassen sich im Rahmen der Chaosforschung einige interessante Aussagen über solche Systeme treffen, z.B. kann ein Maß für die Stabilität einer Lösung definiert werden und damit Vorhersagen getroffen werden.

Ein sehr anschauliches Beispiel aus der Natur ist das Ringsystem des Saturn. Das Ringsystem hat einige gut sichtbare Lücken (Abbildung 2), in denen sich keine der Staub- und Felsteinchen, aus denen die Ringe bestehen, befinden. Diese Lücken sind die Bereiche, in denen die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Gravitationspotential des Saturn und seiner Monde keine stabile Lösung hat, sodass eine Umlaufbahn in diesen Bereichen nicht auf längere Zeit gehalten werden kann.

2.5.2 Phasenraumkurven und Attraktoren

Der Phasenraum eines Systems ist der Raum, dessen Koordinaten die Zustandsgrößen des Systems sind. (z.B. x, \dot{x}) Eine Kurve $X(t) = (x(t), \dot{x}(t))^T$ im Phasenraum heißt **Trajektorie** und beschreibt die zeitliche Entwicklung des Systems. Zeitlich konstante Punkte im Phasenraum, an denen die Geschwindigkeit des Massenpunkts $\dot{x}(t) = 0$ ist, nennt man

Fixpunkte. Kurven im Phasenraum können sich nur in Fixpunkten schneiden, da die zeitliche Entwicklung des Systems eindeutig durch die Anfangsbedingungen vorgegeben ist. Da in Fixpunkten mehrere (im Allgemeinen sogar unendlich viele) Trajektorien zusammenlaufen können, nennt man solche Fixpunkte auch **Attraktoren**. In nichtlinearen Systemen können Attraktoren auch andere Formen (z.B. Flächen oder Kurven) annehmen, sind dann aber keine Fixpunkte mehr.

Phasenraumkurven sind ein praktisches Mittel, um das Verhalten von (chaotischen) Systemen zu zeigen, wie man in den folgenden Beispielen sehen kann.[Dem] Seite 386 ff.

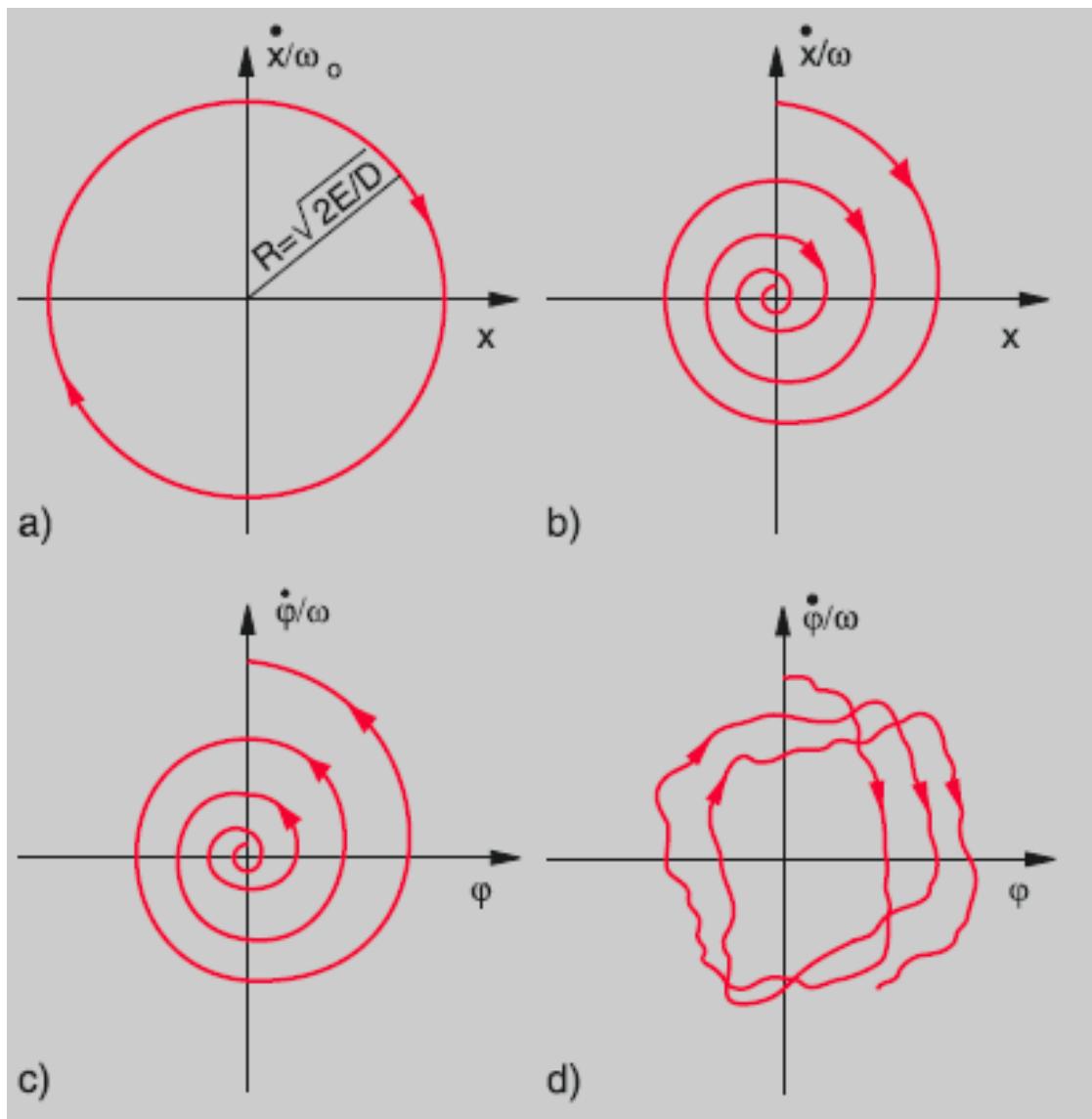


Abbildung 3: Phasenraumkurven von:

- a) ungedämpfter harmonischer Oszillatior
 - b) gedämpfter harmonischer Oszillatior
 - c) harmonischer Oszillatior mit negativer Dämpfung
 - d) nichtlinearer angeregter Oszillatior im chaotischen Bereich
- Herleitung siehe [Dem] Seite 388

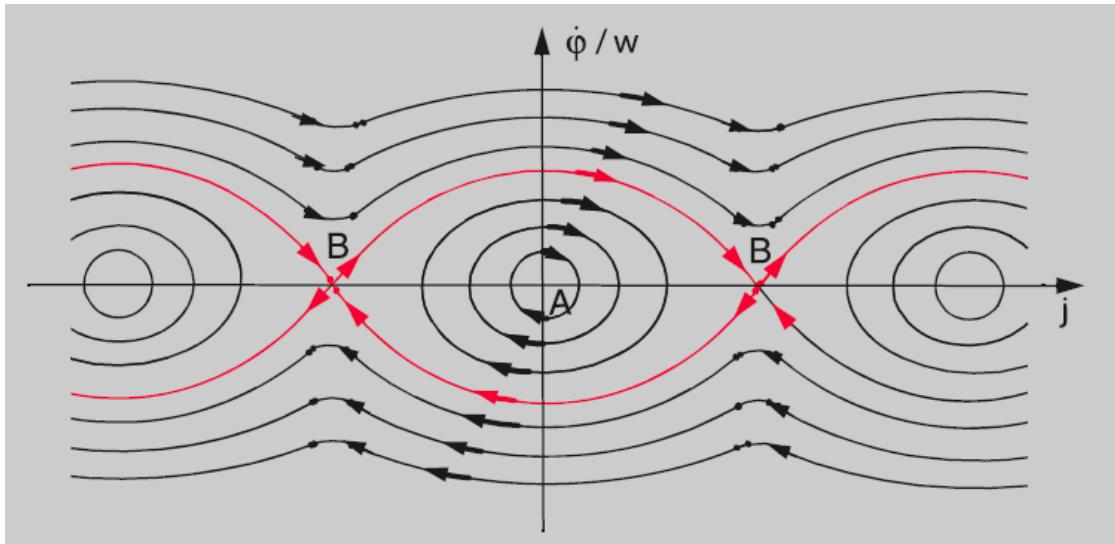


Abbildung 4: Phasenraumkurven eines ungedämpften Fadenpendels. Der Punkt A ist Attraktor für alle Winkel $|\phi| < \pi$. Die rote Kurve stellt eine 'Grenzkurve' zwischen stabilen und instabilen Lösungen dar. Die Punkte B ($|\phi| = 180^\circ, \dot{\phi} = 0$) sind instabile Fixpunkte, eine minimale Änderung des Winkels wird eine stabile Pendelbewegung erzeugen, eine minimale Änderung der Winkelgeschwindigkeit wird eine Rotationsbewegung erzeugen, bei der der Winkel unbegrenzt ansteigt.

Herleitung siehe [Dem] Seite 389

3 Versuchsaufbau

3.1 Aufbau des Pendels

Eine Skizze des Versuchsaufbaus ist auf Seite 29 im Anhang zu finden. Für ein Doppelpendel, das auch Überschläge des unteren Pendelglieds erlaubt, mussten die Verbindungen der Pendelmassen als Stäbe gebaut werden. Dabei galt es zu beachten, dass ein möglichst geringer Teil der Gesamtmasse in den Pendelstäben liegt. Die Wahl des Materials fiel auf Acryl, da es bei relativ geringem Gewicht die erforderliche Steifigkeit liefern kann. Das obere Pendelglied wurde symmetrisch auf beiden Seiten des Pendels gebaut um Kräfte zu vermeiden, die Schwingungen außerhalb der gewünschten Ebene verursacht hätten. Für den unteren Stab wurde eine Materialstärke von 5mm gewählt, für den oberen Stab, war aufgrund der doppelten Ausführung eine Stärke von 3mm ausreichend. Auch diese dünne Materialstärke liefert ein Gewicht von 70g pro Stab konnte aber aufgrund der Anforderungen an die Steifigkeit und Kosteneffizienz nicht unterschritten werden.

Um ein möglichst einfaches Modell zu erhalten, wurde versucht, die Reibung in den Achsen des Pendels zu minimieren. Die Lagerung wurde durch Kugellager der Firma FAG realisiert. Es wurden zwei Lager in der Aufhängung des Pendels integriert sowie ein weiteres Kugellager in der oberen Masse. Die Gewindestange, das Kugellager sowie die sechs Schrauben und Muttern der oberen Masse kommen zu einer Masse m_1 von 301g zusammen. Um das Modell zu vereinfachen wurde versucht, eine möglichst gleiche Masse für m_2 zu finden. Hier kam ein Gewicht aus dem Lager des Projektpraktikums mit einer Masse von 297g zum Einsatz.

3.2 Messung der Pendelbewegung

Um den Aufenthaltsort der Massen in der Pendelebene mit einem geringen zeitlichen Intervall aufzunehmen wurde eine Kamera eingesetzt. Um nach dem Versuch die X, Y Daten in einer Tabelle zu erhalten, wurde die Videotracking Software „Tracker“ von Open Source Physics¹ eingesetzt. Bei Testaufnahmen stellte sich heraus, dass das Programm dazu neigte, sofern kein optimaler Kontrast des Objekts zum Hintergrund herrschte, in einigen Frames Punkte im Hintergrund statt dem Objekt zu fokussieren. Als eine weitere Hürde stellte sich die Bewegungsunschärfe dar, besonders in Phasen mit hoher Geschwindigkeit verschwamm der Trackingpunkt mehr zu einer Linie, die die Software dann nicht mehr zuordnen kann. Um einen hohen Kontrast zum Hintergrund zu erhalten, wurden die Massen mit LED markiert und der Versuch wurde in einem sonst dunklen Raum durchgeführt. Um die Bewegungsunschärfe zu minimieren wurde eine Kamera mit möglichst geringer Minimalverschlusszeit bei gleichzeitig guter Lichtausbeute gesucht. Diese Anforderungen konnten von einer Spiegelreflexkamera mit Videomodus erreicht werden. Auf den Einzelbildern des Videos erschienen die Marker des Pendels bei einer Verschlusszeit von $\frac{1}{2000}\text{s}$ zu allen Zeiten als Punkte. Die Punkte ließen sich im Allgemeinen gut durch die Video Tracking Software analysieren, abgesehen von Spezialfällen in denen

¹<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>



Abbildung 5: Versuchsaufbau mit Kamera

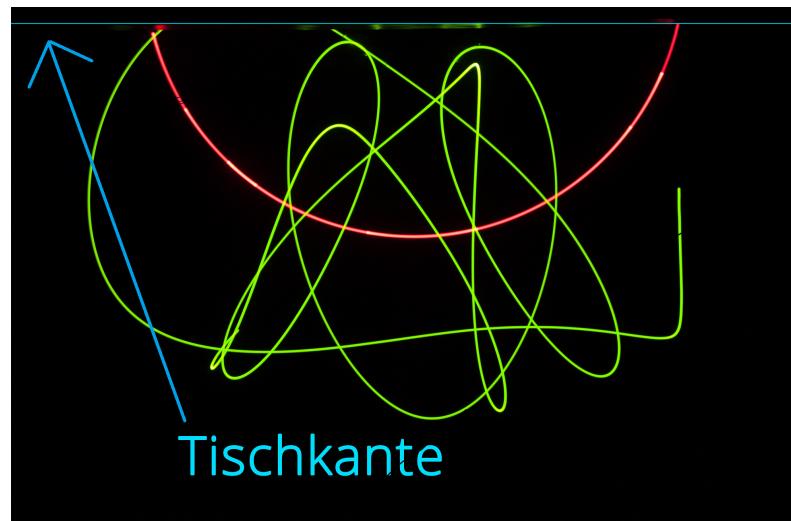


Abbildung 6: Tischkante verdeckt LED

sich eine der Massen über der Tischkante und damit außerhalb des für die Kamera sichtbaren Bereichs befand.(siehe Abb. 6) Als Nachteil der Spiegelreflexkamera kann gesehen werden, dass eine Aufnahme von 30 Bilder pro Sekunde die maximale Framerate der Kamera darstellt.

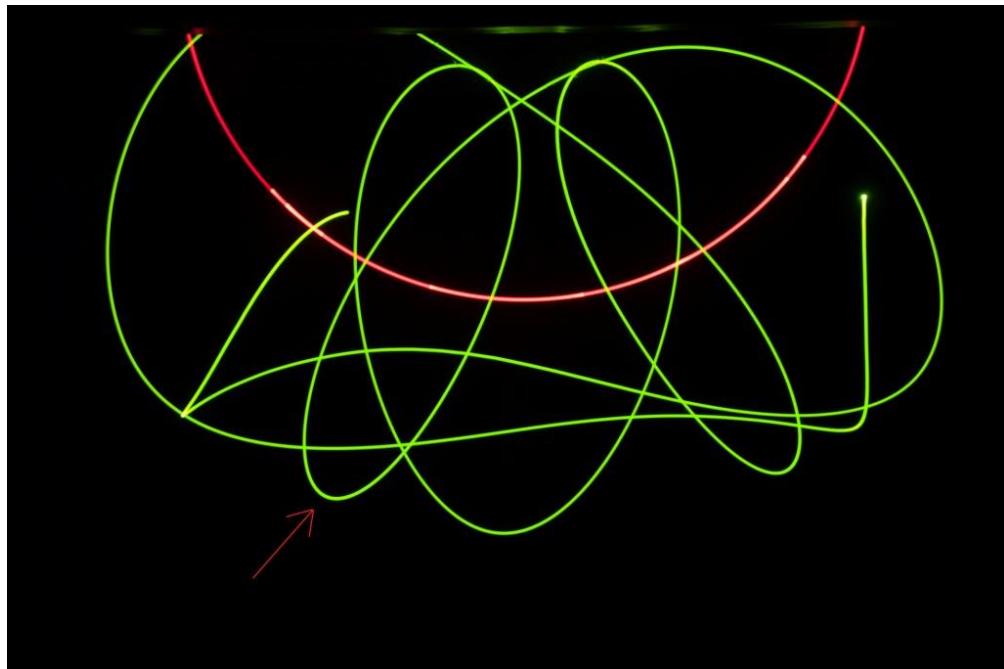


Abbildung 7: 1. Verlauf

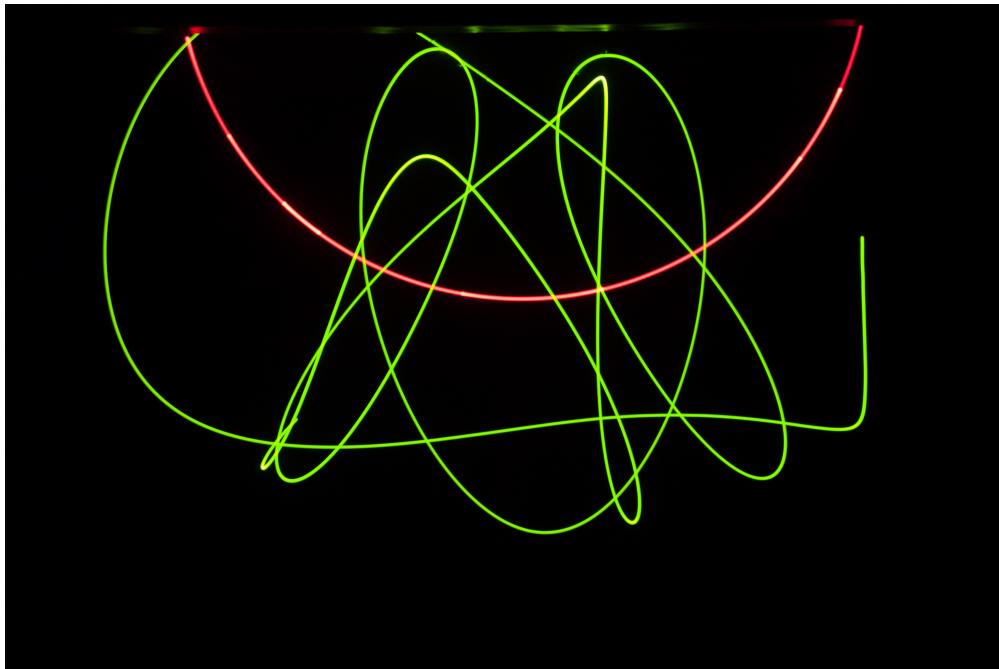


Abbildung 8: 2. Verlauf

4 Darstellung der Ergebnisse und Auswertung

4.1 Untersuchung des chaotischen Verhaltens

Zunächst wurde das Pendel aus, soweit händisch möglich, gleichen Anfangsbedingungen gestartet. Der Startpunkt wurde hier mittels einer an einem der beiden Tische befestigten Gewindestange festgehalten. Das Pendel wurde dann in Ruhe so gestartet, dass sich die obere Masse(m_1) direkt neben der Gewindestange befand. Aufgrund dieser Anordnung kann ein geschätzter Fehler von 5mm für den Ort der oberen Masse und dementsprechend auch für den Ort der unteren Masse angenommen werden.

Vergleicht man drei exemplarisch ausgewählte Aufnahmen (7, 8, 9) (Belichtungszeit jeweils 3.2s), so zeigt sich, dass der Verlauf der grünen Leuchtspur des unteren Pendels zumindest der groben Form nach gleich ist bis zu dem mit einem roten Pfeil markierten Punkt. Danach differierten die Wege der unteren Masse deutlich, bis nach etwa einer halben weiteren Schwingung überhaupt kein sichtbarer Zusammenhang mehr zwischen den Leuchtspuren besteht. Während in 7 und 9 die Spur von dem markierten Punkt ausgehend einen Bogen nach rechts beschreibt, wird in 8 die untere Masse abgebremst, sodass sie, wie an der deutlich helleren Färbung der Leuchtspur zu erkennen, fast zum Stehen kommt und danach annähernd senkrecht nach unten weiterführt. Der Grund für die hellere Färbung bei langsameren Geschwindigkeiten und insbesondere Punkten, bei denen sich die Geschwindigkeitsrichtung umkehrt, ist, dass ein Punkt auf der Leuchtspur umso heller ist, je länger sich die an der Masse befestigte Diode im Abstand der halben

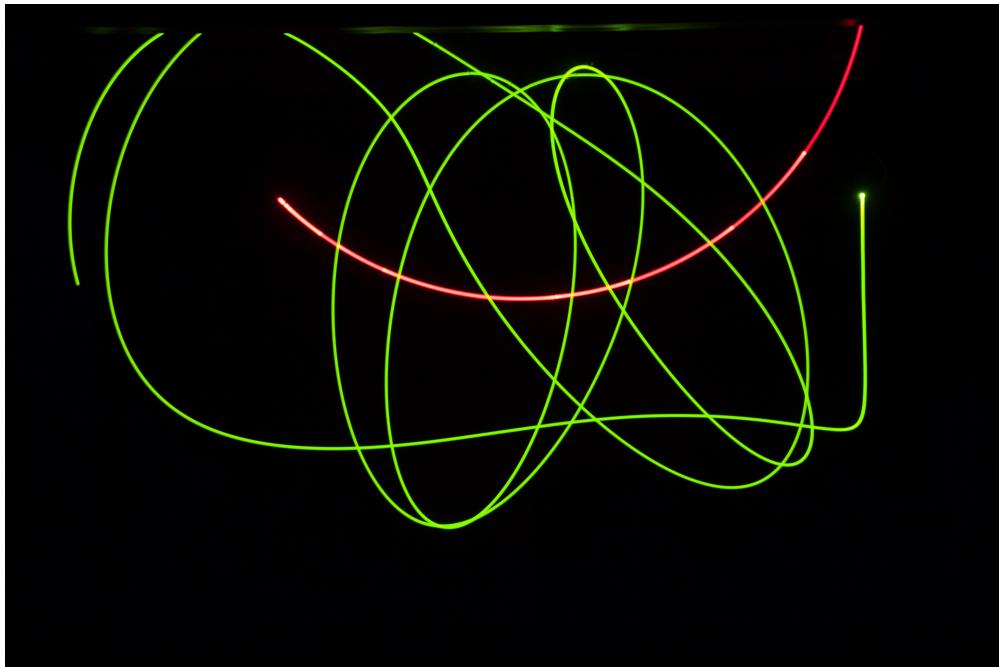


Abbildung 9: 3. Verlauf

Breite der Leuchtpur (des „optischen Radius“ der Diode) von diesem Punkt befindet. Weiter divergiert auch der Verlauf von 7 und 9 bald, wie in den Abbildung gut zu erkennen ist. Dieses Verhalten entspricht dem in der Theorie dargestellten chaotischen Verhalten, sodass das Doppelpendel als ein chaotisches System bezeichnet werden kann.

4.2 Betrachtung der Reibung

4.2.1 Allgemeines zur Auswertung

Gewählt wurde für die Auswertung ein Fall mit kleiner Auslenkung, weil die Messpunkte so durch numerische Berechnung in Näherung nachvollzogen werden konnten. Für die Betrachtung der Reibung wurde ein Video aufgenommen und mittels eines Tracking-Programms nachträglich ausgewertet. Da aus den Tracking-Daten nur die einzelnen Koordinaten der Massenpunkte hervorgehen, aber nicht die Koordinaten des Aufhängepunktes des oberen Pendels, muss dieser noch separat ermittelt werden. Dies wurde mittels einer Berechnung in python erreicht, wobei ein Algorithmus implementiert wurde, der für jeden Punkt (x, y) eines Rasters die Abstände d_1, d_2, \dots zu den Messpunkten des oberen Pendels $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ ermittelt und die stochastische Varianz dieser Abstände berechnet. Als Koordinatenursprung wird dann der Punkt mit minimaler Varianz des Abstandes verwendet, d.h. der Punkt, an dem die Abstände zu allen Messpunkten des oberen Pendels ungefähr gleich sind, sodass sich die „Länge“ des ersten Pendels im Rahmen der Messgenauigkeit als konstant ergibt. Für die weitere Auswertung für jeden Zeitpunkt t einer Aufnahme die Geschwindigkeit von einem Massenpunkt zu dieser Zeit

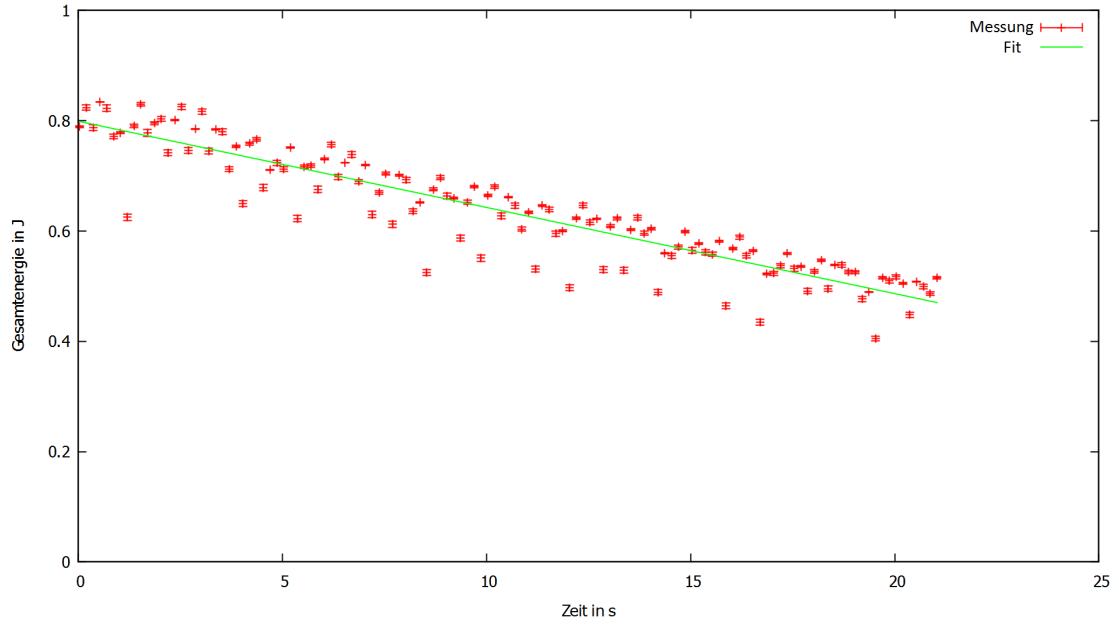


Abbildung 10: Energie des Pendels über der Zeit

mittels

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{(2\Delta t)} \cdot (\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t - \Delta t)) \quad (23)$$

berechnet. Somit verhindert man eine „Verschiebung“ zwischen den Ortskoordinaten $\vec{x}(t)$ und \vec{v} , die sich ergeben würde, wenn man nur das Intervall $[t - \Delta t, t]$ betrachtet. Hier würde man einem Ort (und der damit verbundenen kinetischen Energie) eine „frühere“ und damit falsche Geschwindigkeit zuordnen.

4.2.2 Betrachtung der Messergebnisse

In Abb. 10 wurde die Gesamtenergie des Pendels über der Zeit aufgetragen. Die Energie wurde dabei nach

$$E(t) = E_{kin,1}(t) + E_{kin,2}(t) + E_{pot,1}(t) + E_{pot,2}(t) = \frac{1}{2} (m_1 \cdot \vec{v}_1(t)^2 + m_2 \cdot \vec{v}_2(t)^2) + g(m_1 \cdot h_1(t) + m_2 \cdot h_2(t)) \quad (24)$$

berechnet, wobei $h_1 = y_1 + l_1$ und $h_2 = y_2 + l_1 + l_2$, sodass h_1 und h_2 die Höhe über der Ruhelage des entsprechenden Pendels angeben. Somit ist die Energie im Fall, dass sich das Pendel gänzlich in Ruhe und in der Ruhelage ($\phi_1, \phi_2 = 0$) befindet, auf 0 normiert. Zunächst fällt auf, dass die Energiewerte (Abb. 10) deutlich streuen und vom einem monotonen Verlauf abweichen. Der Grund hierfür besteht darin, dass das ausgewertete Video lediglich mit einer Aufnahmerate von 30 Bildern pro Sekunde aufgezeichnet wurde. Aus diesem Grund tritt der Effekt auf, dass die Spitzen der Geschwindigkeit bei der Auswertung „abgeflacht“ werden. Dies ist insbesondere dann sichtbar, wenn das Pendel

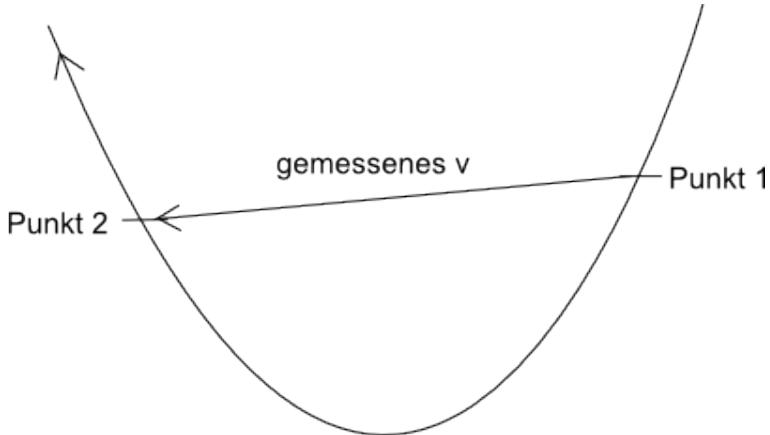


Abbildung 11: Schematische Darstellung der fehlerhaften Auswertung

ein Minimum der Höhe durchläuft und ein Bild vor und das darauffolgende nach dem Durchlauf aufgenommen wird. Die errechnete Geschwindigkeit ist dann kleiner als die tatsächliche (Abb. 11).

Dieser durch die Aufnahmerate von 30 Bildern pro Sekunde bedingte Fehler ist schwer zu quantifizieren. Um in etwa die Größenordnung des Fehlers abzuschätzen, soll folgende Abschätzung betrachtet werden: Aus Abb. 12 geht hervor, dass die obere Masse maximal eine Geschwindigkeit von etwa $1.8 \frac{m}{s}$ hat. Nimmt man an, dass sich diese Masse auf einer Kreisbahn und mit etwa dieser Geschwindigkeit für $\frac{2}{30} s$ bewegt, so kann der in Abb. 11 dargestellte Fehler für diese Idealisierung berechnet werden: Aus $v = 1.8 \frac{m}{s}$ ergibt sich mit $l_1 = 0.3 m$ eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 6 \frac{1}{s}$. Für die Dauer einer Belichtungszeit beträgt der Winkel, um den sich das Pendel also bewegt, etwa $\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t = 6 \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{30} s = 0.2$. Da für die Geschwindigkeitsberechnung zwei Belichtungsintervalle betrachtet werden, ergibt sich aus Abb. 11 und elementarer Geometrie, dass das Verhältnis zwischen tatsächlich zurückgelegter Strecke und der verkürzten Strecke, aus der in der Auswertung die Geschwindigkeit bestimmt wird, sich zu $\frac{2\Delta\phi \cdot l_1}{2 \cdot \sin(\Delta\phi) \cdot l_1} = \frac{\Delta\phi}{\sin(\Delta\phi)}$ ergibt. Für ein $\Delta\phi$ von 0.2 ergibt sich ein Verhältnis von 1.006, was also 0.6% Abweichung entspricht. Bei einem v von maximal $1.8 \frac{m}{s}$ ergibt sich ein Δv von etwa $0.01 \frac{m}{s}$. Da hier maximale Werte verwendet wurden, ist dies ebenfalls der maximale Fehler, der sich aus dem erklärten Effekt ergeben sollte. Mittels einer Fehlerfortpflanzung ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial v_1} \cdot \Delta v_1\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial v_2} \cdot \Delta v_2\right)^2} = \sqrt{(m_1|v_1| \cdot \Delta v_1)^2 + (m_2|v_2| \cdot \Delta v_2)^2} = \\ &= \sqrt{(\Delta v)^2 \cdot (m_1^2|v_1|^2 + m_2^2|v_2|^2)},\end{aligned}\quad (25)$$

wobei $\Delta v_1 = \Delta v_2 = \Delta v = 0.01$, der gleiche Fehler beider Geschwindigkeiten ist. Diese Abschätzung gilt nur für unkorrelierte Fehlergrößen, was hier nicht anzunehmen ist. Da in dem hier betrachteten Fall das Pendel mit sehr kleiner Amplitude schwingt, weißt das Verhalten des Pendels kaum chaotische Charakteristika auf, vielmehr schwingen oberes

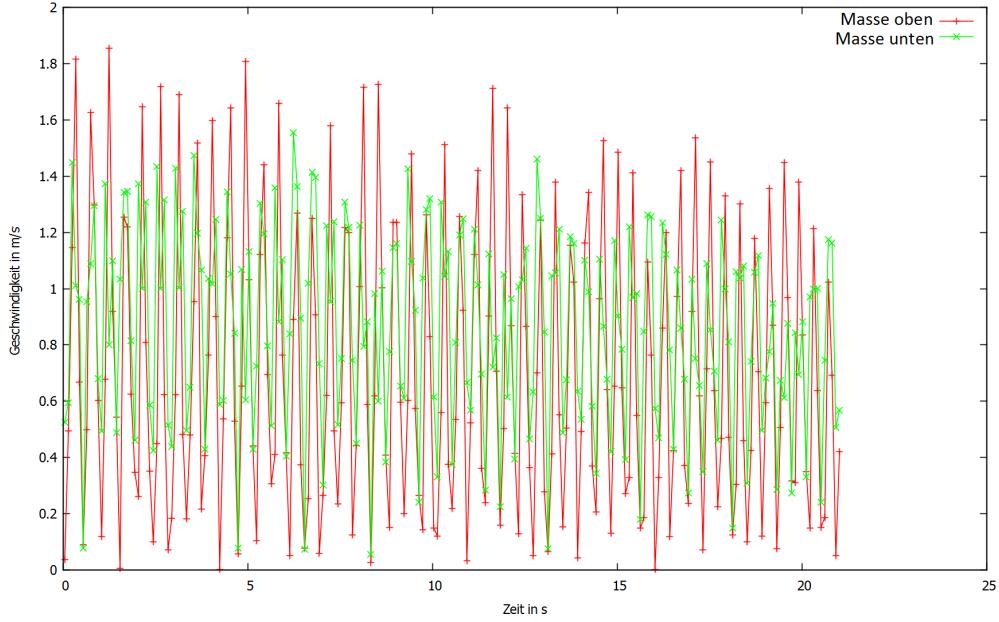


Abbildung 12: Geschwindigkeit der beiden Massepunkte über der Zeit

und unteres Pendel oft synchron, sodass eine klare Korrelation zwischen v_1 und v_2 besteht. Da allerdings nur die Größenordnung des Fehlers abgeschätzt werden soll, kann diese weitere Näherung verwendet werden. Wie deutlich zu erkennen, sind die Fehlerbalken viel zu klein, um die Schwankungen in der Energie zu erklären. Der Grund dafür ist, dass die Annahme einer Kreisbahn falsch ist. Betrachtet man die Daten (...), so fällt auf, dass die Energie immer dann sehr klein ist, wenn sich oberes und unteres Pendel mit hoher Geschwindigkeit in verschiedene Richtungen bewegen. Wie man leicht sieht, ist dadurch der Krümmungsradius der Bahn der unteren Masse zu diesem Zeitpunkt sehr klein, woraus ein deutlich größerer Fehler resultiert.

4.2.3 Luftreibung

Da sich die Geschwindigkeit im Bereich von etwa null bis zwei Metern pro Sekunde bewegt, siehe Abb. 12, eine der verwendeten Acrylplatten eine Projektionsfläche von $1.5 \cdot 10^{-3} m^2$ (unten: 25 cm Länge, 6 mm Stärke) bzw. $1.4 \cdot 10^{-3} m^2$ (oben: 35 cm Länge, 4 mm Stärke) hat, ergibt sich bei einer Luftdichte von $1.2 \frac{kg}{m^2}$ eine abbremsende Kraft von $1.8 \cdot 10^{-3} N$ (mit $v = 1 \frac{m}{s}$, $c_w = 2$, $A_S = 1.5 \cdot 10^{-3} m^2$).

Für die drei verwendeten Platten ergibt sich somit, mit der stark vereinfachten Annahme, dass die gesamte Fläche sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegt und die Beschleunigung über längere Zeit konstant ist, was zur Abschätzung der Größenordnung aber ausreichend ist, eine Kraft von $5.4 \cdot 10^{-3} N$. Mit einer Gesamtmasse von $0.7 kg$ inklusive der Acrylplatten folgt eine durchschnittliche Beschleunigung von etwa $7.7 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$. Bei einer Dauer der Messung von $20 s$ ergibt sich hiermit also eine Geschwindigkeitsänderung von etwa $0.15 \frac{m}{s}$, die also einen wesentlichen Teil des Energieverlusts darstellt.

4.2.4 Reibung in den Kugellagern

Laut [Reib] liegt c_R für Kugellager im Bereich von etwa 0.5 bis $1 \cdot 10^{-3}$. Damit ergäbe sich bei einer Gesamtmasse von etwa 0.7 kg eine abbremsende Kraft von der Größenordnung 10^{-3} bis $10^{-2} N$.

4.2.5 Energieübertrag auf die Aufhängung

Neben dem Energieverlust durch die Luftreibung tritt ein der Energieübertrag auf die Aufhängung als weiterer Effekt auf. Dieser sollte zwar durch eine möglichst starre und unbewegliche Befestigung des Pendels zwischen zwei Tischen minimiert werden, trotzdem fangen vor allem bei Überschlägen des Pendels die Tische deutlich sichtbar zu wackeln an. Es bietet sich hier an, in grober Näherung eine lineare Abhängigkeit des Energieverlustes des Systems von der momentanen Energie anzunehmen.

4.2.6 Erklärung des Energieverlusts

Es kann somit keine Aussage darüber getroffen werden, welche Art des Energieverlusts wesentlich bei dem von uns gebauten Doppelpendel ist. Es kommt sowohl die Luftreibung als auch der Energieübertrag auf die Aufhängung in Frage.

Weiter ist es aufgrund des Fehlers bei der Energie nicht möglich, eine Aussage über den tatsächlichen Energieverlauf zu treffen. Es wäre ein exponentieller Abfall, ein Abfall mit t^k mit einer konstanten k denkbar. Mit den Daten lässt sich nicht einmal ein linearer Energieabfall ausschließen.

4.3 Simulation des Doppelpendels

Die gemessenen Daten sollen nun mit einer Simulation, die entsprechend der Beschreibung in der Theorie durchgeführt wurde, verglichen werden. Da das Pendel händisch gestartet wurde, ist davon auszugehen, dass sich schon die ersten Werte eher schlecht mit der Simulation nachvollziehen lassen und damit auch im weiteren zeitlichen Verlauf keine Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation zu erwarten ist.

Tatsächlich ist dies der Fall, wie in Abb. 13 zu sehen ist. Hier ist die x_2 -Koordinate, also die x-Koordinate des unteren Pendels über der Zeit aufgetragen. Man erkennt, dass sich Simulation und Messung schon zu Beginn sehr deutlich unterscheiden. Zwar verlaufen ab etwa 0.8s Simulation und Messung ähnlich, allerdings dürfte dies auf einen Zufall beziehungsweise darauf zurückzuführen sein, dass die Auslenkung des Pendels hier relativ klein ist und das Pendel ein leicht peroidisches Verhalten aufweist. Aus diesem Grund wurde die Simulation erst bei 0.8s begonnen. Dieser spezielle Wert wurde gewählt, weil hier wie in Abb. 13 die Änderungsrate von x_2 in etwa 0 ist, und so Fehler bei der Bestimmung der Geschwindigkeit zu minimieren.

Dabei wurden die in Abb. 14, 15, 16 und Abb. 17 dargestellten Ergebnisse erzielt, wobei der rote Graph die Simulation darstellt und der grüne die tatsächlich gemessenen

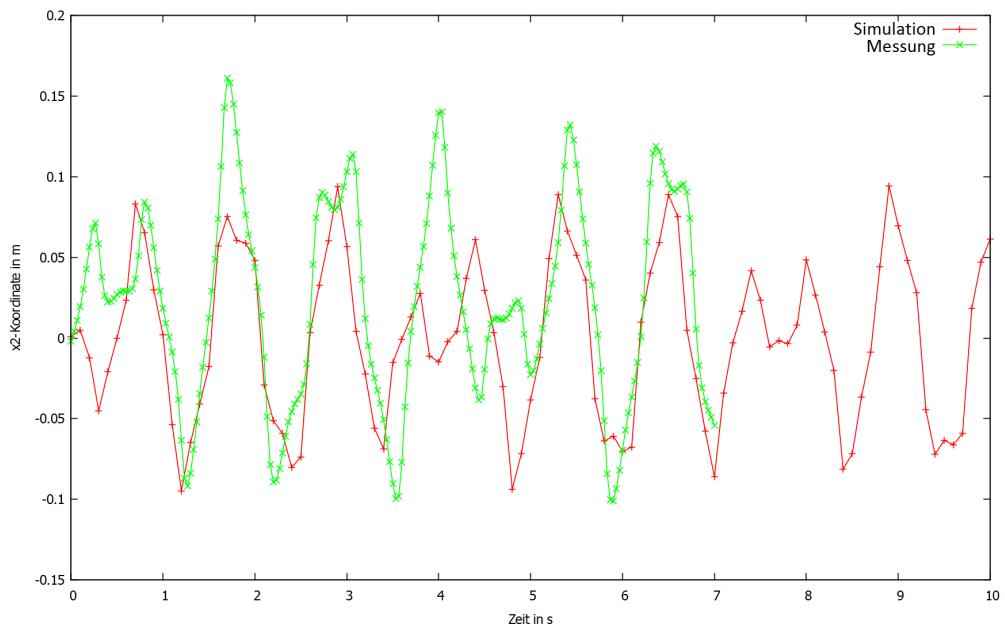


Abbildung 13: Auftragung der x_2 -Koordinate bei einer Simulation mit Start zu etwa dem Zeitpunkt des Loslassens

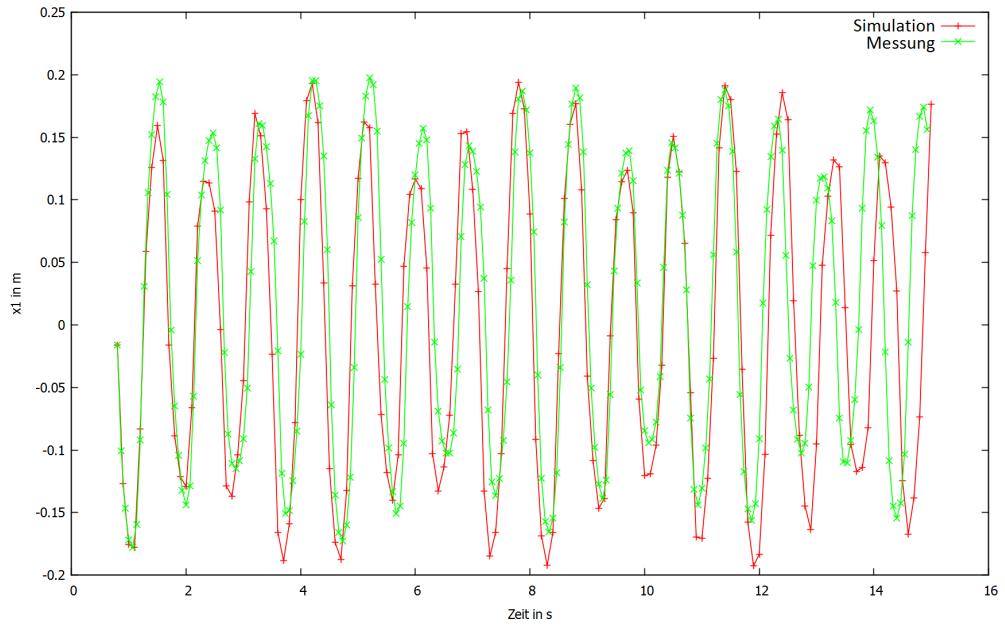


Abbildung 14: Auftragung der x_1 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start

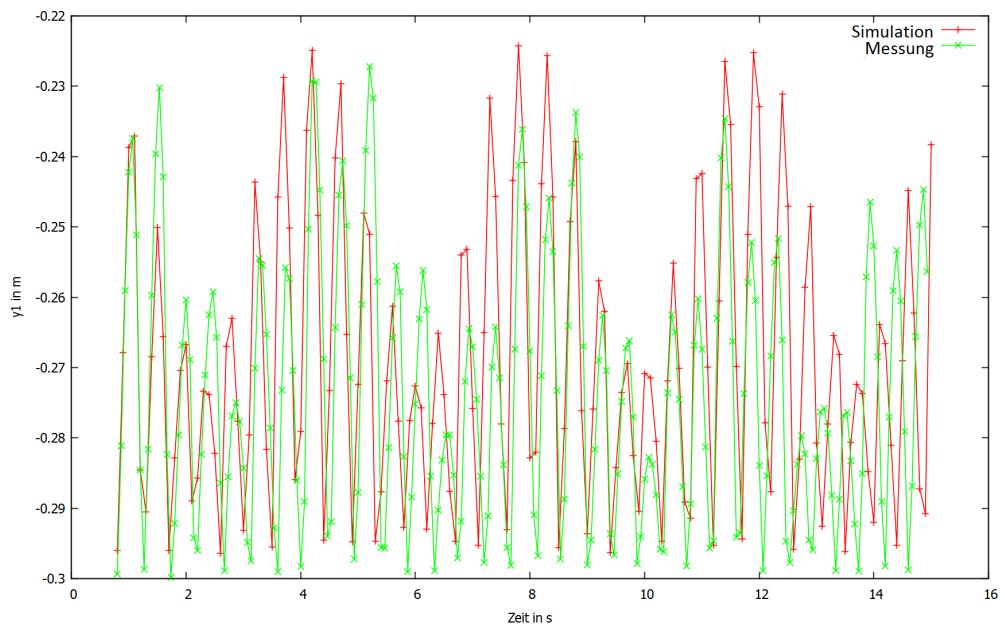


Abbildung 15: Auftragung der y_1 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start

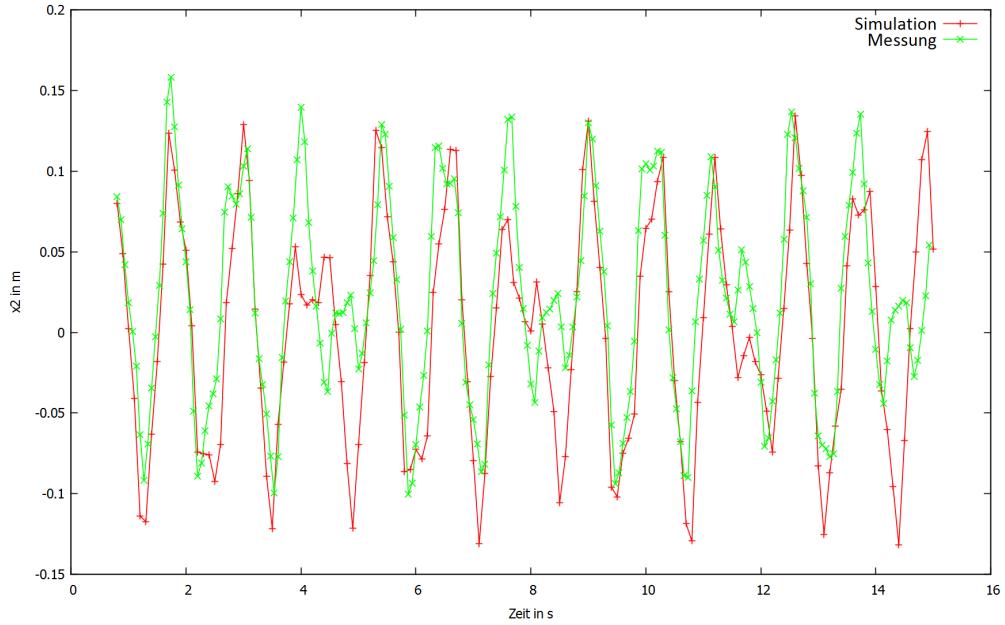


Abbildung 16: Auftragung der x_2 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start

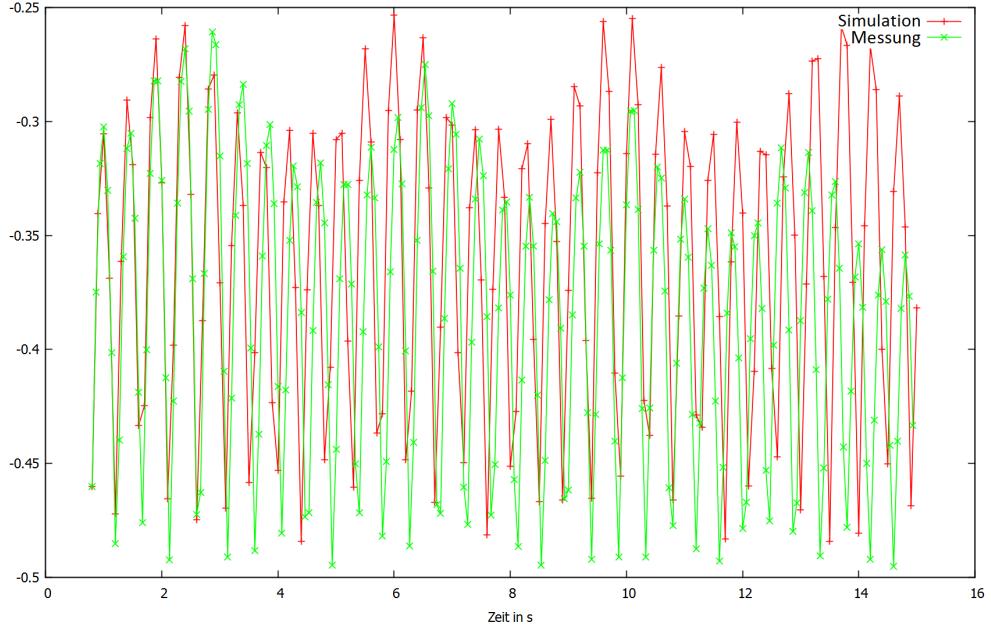


Abbildung 17: Auftragung der y_2 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start

Werte.

Es ist deutlich sichtbar, dass die Verläufe bis etwa $t = 2\text{s}$ recht gut mit den Messwerten übereinstimmen, danach ergeben sich vor allem bei den x_2 - und y_1 -Koordinaten deutliche Unterschiede, wohingegen bei den anderen beiden Koordinaten noch länger eine deutliche Ähnlichkeit bestehen bleibt. Die Ähnlichkeit ist zum Teil auch darauf zurückzuführen, dass das Pendel bei dieser Messung kein deutlich ausgeprägtes chaotisches Verhalten besitzt, sondern eher periodische Eigenschaften aufweist.

Trotzdem eignet sich die Simulation scheinbar gut, um die Bewegung des Pendels nachzu vollziehen.

Weiter sind die sich aus den gemessenen Daten ergebenden Phasenraumdiagramme in Abb. 18 und Abb. 19 dargestellt. Es ergibt sich dabei ein Verlauf, der plausibel erscheint, da sie sehr dem in Abb. 4 ähnelt, welches das Phasenraumdiagramm eines einfachen Pendels zeigt. Der Grund dafür liegt darin, dass auch das Doppelpendel in dem hier dargestellten Energiebereich lediglich „hin und her schwingt“, sodass eine in Näherung ellipsenförmige, auf jeden Fall aber „geschlossene“ Kurve entsteht.

Trotzdem gibt es Abweichungen zum einfachen Pendel. Zunächst schneiden sich hier die Linien im Phasenraumdiagramm, was allerdings darauf zurückzuführen ist, dass die Auftragungen nur eine Projektion des gesamten, vierdimensionalen Phasenraums darstellen. Weiter erscheint das Diagramm vor allem bei dem oberen Pendel (Abb. 18) seitlich „unscharf“, was durch die Beeinflussung durch das untere Pendel zu erklären ist.

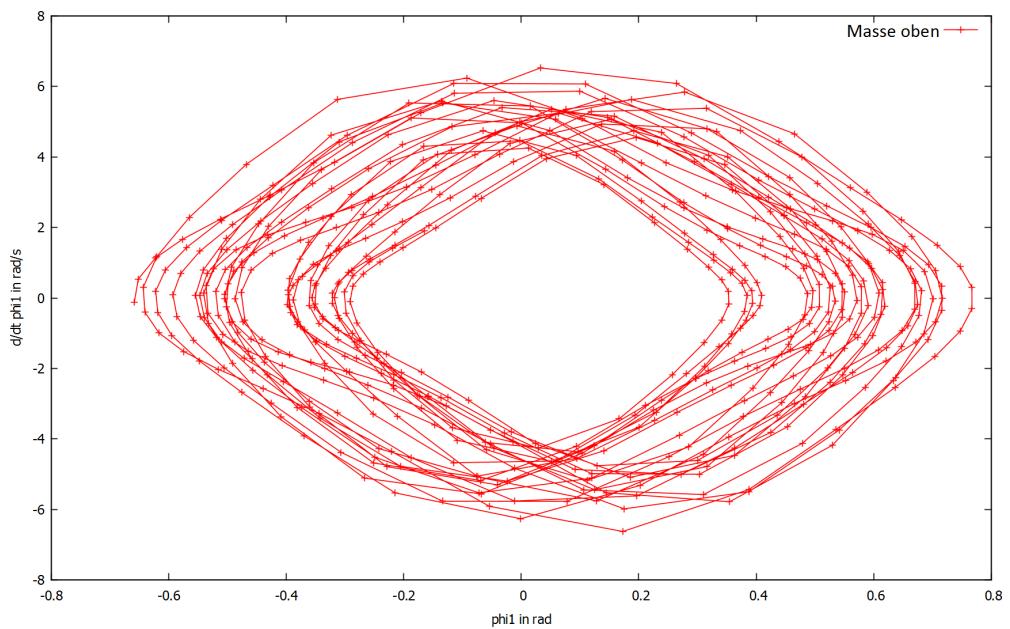


Abbildung 18: Phasenraum $\dot{\varphi}_1$ über φ_1

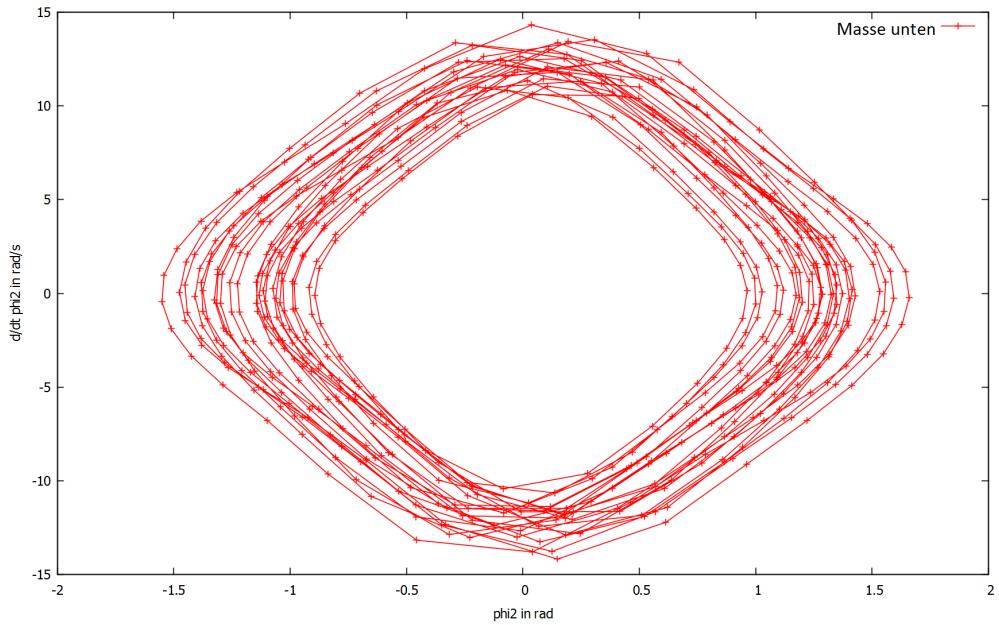


Abbildung 19: Phasenraum $\dot{\varphi}_2$ über φ_2

5 Fazit

Es zeigt sich, dass das Doppelpendel, wie zu erwarten, chaotisches Verhalten aufweist. Darüber hinaus ist es möglich, die Bewegung des Doppelpendels über mehrere „Schwingungen“ nachzuvollziehen, wohingegen eine analytische Lösung der in der Theorie aufgestellten Bewegungsgleichung unmöglich ist.

Literatur

- [Dem] DEMTRÖDER, Wolfgang. Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme. Springer DE, 2005.
- [Sch] SCHECK, Florian. Theoretische Physik 1: Mechanik. Von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos. Springer DE, 2003.
- [Reib] Wikipedia. Tabellarische Auflistung von Rollreibungskoeffizienten. <http://de.wikipedia.org/wiki/Rollreibung>. (11. Januar 2014)
- [Eul] Wikipedia. Tabellarische Auflistung von Rollreibungskoeffizienten. <http://de.wikipedia.org/wiki/Rollreibung>. (11. Januar 2014)
- [Win] Wikipedia. Artikel zu Winddruck und Windlast. <http://de.wikipedia.org/wiki/Winddruck> (19. November 2014)
- [Rol] Wikipedia. Rollwiderstand. <http://de.wikipedia.org/wiki/Rollreibung> (19. November 2014)

6 Anhang

Listing 1: Implementierung der Simulation in python

```
1 from math import* # Einbinden von mathematischen Funktionen
2
3 def quadr(a): # Quadratfunktion
4     return(a*a)
5
6 def simu(t0, x1, y1, x2, y2, phi_1, phi_2, intervall, laenge_sim,
7 anz_schritte_pro_ausgabe):
8     m1 = 0.3 # obere Masse
9     m2 = 0.3 # untere Masse
10    l1 = sqrt(quadr(x1) + quadr(y1)) # Länge des oberen Pendels
11    l2 = sqrt(quadr(x2-x1) + quadr(y2-y1)) # Länge des unteren Pendels
12    phi1 = atan(-x1/y1) # Winkel des ersten Pendels zur Senkrechten,
13    Konvention: Winkel im 4. Quadranten sind positiv
14    phi2 = atan((x1-x2)/(y2-y1))
15    t = t0 # Startzeitpunkt
16    g = 9.81 # Ortsfaktor
17    M = m1+m2 # Gesamtmasse
18    phi_1 = 0 # zur anfänglichen Berechnung werden
19    die Winkelbeschleunigungen auf Null gesetzt
20    phi_2 = 0
21    zaehler = anz_schritte_pro_ausgabe
22    while t < laenge_sim:
23        if(zaehler == anz_schritte_pro_ausgabe):
24            print(t,
25                  '\t', sin(phi1)*l1,
26                  '\t', -cos(phi1)*l1,
27                  '\t', sin(phi1)*l1+sin(phi2)*l2,
28                  '\t', -cos(phi1)*l1- cos(phi2)*l2)
29        zaehler = 0 # Ausgabeschleife
30        zaehler += 1
31        phi_1_alt = phi_1
32        phi_2_alt = phi_2
33        phi_1_alt = phi_1
34        phi_2_alt = phi_2
35        dphi = phi1 - phi2
36        phi_1 = (-m2*l2*quadr(phi_2)*sin(dphi) - g*M*sin(phi1) -
37 m2*l1*quadr(phi_1)*sin(dphi)*cos(dphi) +
38 g*m2*sin(phi2)*cos(dphi))/(M*l1-m2*l1*quadr(cos(dphi)))
39        phi_2 = (-m2*l2*quadr(phi_2)*sin(dphi)*cos(dphi)
40 -g*M*sin(phi1)*cos(dphi)-M*l1*quadr(phi_1)*sin(dphi) +
41 g*M*sin(phi2))/(m2*l2*quadr(cos(dphi)) - M*l2)
42        phi_1 += (phi_1+phi_1_alt)/2 * intervall
43        phi_2 += (phi_2_alt + phi_2)/2 * intervall
44        phi1 += (phi_1 + phi_1_alt)/2 * intervall
45        phi2 += (phi_2 + phi_2_alt)/2 * intervall
46        t += intervall
```

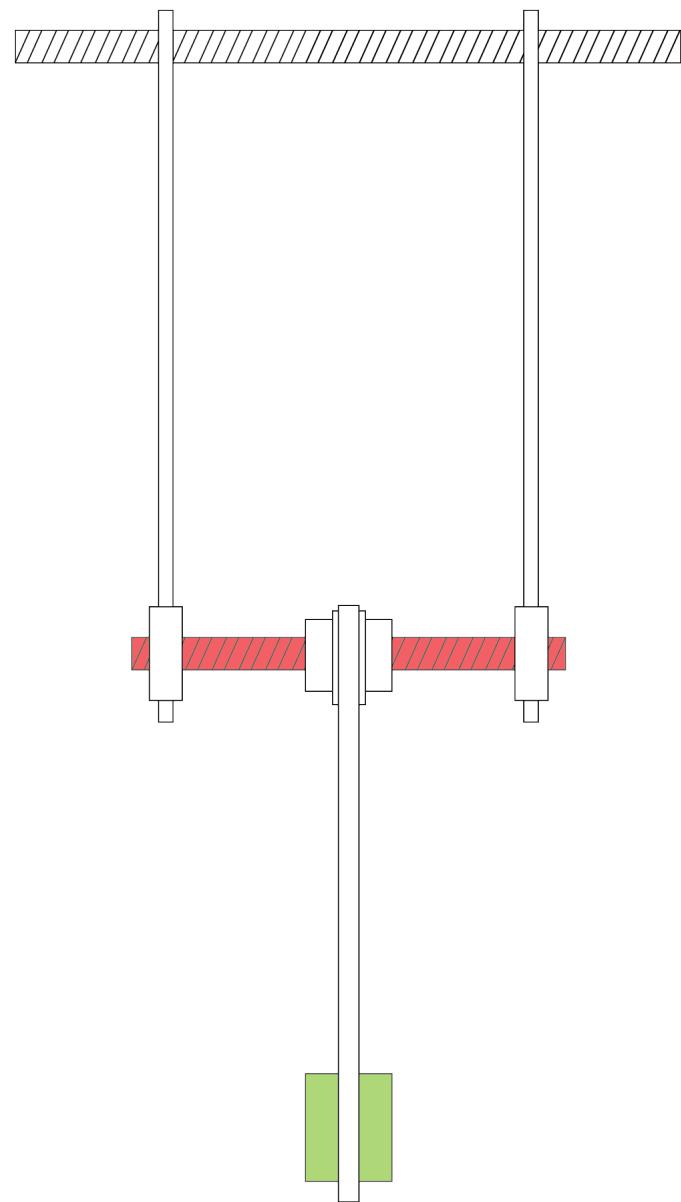


Abbildung 20: Technische Zeichnung des Pendels

Tabelle 1: Verlauf der Position der beiden Massen über die Zeit des Versuchs. Dabei wird t in s und die Position in m gemessen. (Jeder 10. Messpunkt wird dargestellt.)

t	x-Pos. m_1	y-Pos. m_1	x-Pos. m_2	y-Pos. m_2					
0.033	-0.182	-0.235	0.004	-0.311	-0.03	0.023	0.193	0.489	0.789
0.367	0.128	-0.272	0.026	-0.434	1.219	0.527	-0.228	1.26	0.787
0.7	0.153	-0.259	0.037	-0.428	-0.979	-0.546	0.305	-1.386	0.823
1.033	-0.177	-0.238	0.009	-0.311	-0.095	0.072	-0.266	-0.417	0.778
1.367	0.131	-0.271	-0.052	-0.331	0.698	0.328	0.518	0.715	0.79
1.7	0.043	-0.297	0.161	-0.446	-1.629	-0.262	0.233	1.138	0.778
2.033	-0.141	-0.262	0.032	-0.364	0.228	-0.127	-0.445	-1.299	0.803
2.367	0.141	-0.266	-0.052	-0.27	0.243	0.128	0.231	0.216	0.801
2.7	-0.063	-0.292	0.087	-0.414	-0.979	0.2	0.237	1.443	0.746
3.033	-0.075	-0.289	0.111	-0.357	0.603	-0.159	0.161	-1.418	0.816
3.367	0.153	-0.26	-0.041	-0.283	-0.261	-0.147	-0.274	0.134	0.784
3.7	-0.14	-0.262	0.004	-0.395	-0.484	0.261	0.525	1.172	0.712
4.033	0.023	-0.299	0.14	-0.463	1.591	0.138	-0.321	-0.965	0.649
4.367	0.158	-0.256	-0.019	-0.35	-0.603	-0.36	-0.361	-0.829	0.766
4.7	-0.172	-0.241	0.011	-0.322	-0.098	0.072	0.011	0.26	0.71
5.033	0.123	-0.274	-0.02	-0.403	0.952	0.401	0.146	1.122	0.712
5.367	0.114	-0.278	0.107	-0.481	-1.541	-0.568	0.746	-0.321	0.623
5.7	-0.152	-0.255	0.019	-0.361	0.089	-0.055	-0.458	-0.981	0.718
6.033	0.134	-0.269	-0.057	-0.3	0.376	0.182	0.347	0.209	0.73
6.367	-0.047	-0.295	0.119	-0.394	-0.826	0.128	0.019	1.331	0.698
6.7	-0.067	-0.291	0.09	-0.416	0.768	-0.176	-0.319	-1.537	0.738
7.033	0.132	-0.27	-0.061	-0.293	-0.241	-0.112	-0.227	-0.2	0.719
7.367	-0.135	-0.265	0.038	-0.362	-0.164	0.086	0.376	0.943	0.67
7.7	0.093	-0.286	0.106	-0.479	1.541	0.461	-0.83	0.336	0.612
8.033	0.111	-0.28	-0.041	-0.413	-0.945	-0.35	-0.172	-1.214	0.693
8.367	-0.162	-0.248	0.017	-0.338	0.171	-0.114	0.083	-0.323	0.652
8.7	0.163	-0.253	-0.006	-0.354	0.484	0.305	0.265	0.568	0.675
9.033	-0.016	-0.299	0.13	-0.422	-1.236	0.052	-0.15	1.152	0.663
9.367	-0.099	-0.281	-0.023	-0.47	1.026	-0.348	-0.924	-0.964	0.587
9.7	0.141	-0.265	-0.045	-0.329	0.032	0.017	0.237	-0.658	0.68
10.033	-0.091	-0.284	0.102	-0.311	-0.143	0.047	-0.056	0.613	0.664
10.367	0.094	-0.285	0.026	-0.465	1.162	0.338	-0.879	0.98	0.627
10.7	0.063	-0.293	-0.094	-0.415	-0.897	-0.169	-0.016	-1.294	0.646
11.033	-0.117	-0.274	0.071	-0.341	0.481	-0.208	0.419	-0.384	0.634
11.367	0.187	-0.235	0.026	-0.355	0.112	0.084	-0.165	0.389	0.646
11.7	-0.092	-0.284	0.049	-0.415	-0.923	0.296	-0.115	1.012	0.595
12.033	-0.04	-0.296	-0.055	-0.492	1.627	-0.224	-0.592	0.171	0.498
12.367	0.157	-0.256	0.032	-0.415	-0.371	-0.216	0.685	-1.064	0.647
12.7	-0.099	-0.281	0.094	-0.315	-0.166	0.062	-0.21	-0.266	0.622

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle 1 – *Fortsetzung*

t	x-Pos. m_1	y-Pos. m_1	x-Pos. m_2	y-Pos. m_2						
13.033	0.111	-0.279	-0.068	-0.355	0.261	0.1	-0.086	0.841	0.609	
13.367	-0.034	-0.297	-0.001	-0.486	-1.382	0.152	0.962	0.58	0.529	
13.7	-0.036	-0.296	0.133	-0.4	0.842	-0.1	0.177	-1.175	0.624	
14.033	0.151	-0.259	-0.022	-0.362	-0.433	-0.236	-0.33	-0.421	0.604	
14.367	-0.152	-0.254	0.015	-0.361	-0.141	0.085	0.038	0.295	0.56	
14.7	0.118	-0.276	-0.024	-0.408	0.794	0.318	0.152	0.875	0.571	
15.033	0.036	-0.297	0.127	-0.465	-1.473	-0.188	0.358	0.83	0.565	
15.367	-0.095	-0.283	0.022	-0.447	0.657	-0.216	-0.747	-1.153	0.561	
15.7	0.115	-0.277	-0.07	-0.339	-0.041	-0.015	0.101	-0.503	0.582	
16.033	-0.093	-0.283	0.094	-0.341	0.002	-0.0	0.182	0.544	0.568	
16.367	0.133	-0.269	0.039	-0.44	0.688	0.315	-0.703	0.924	0.555	
16.7	-0.007	-0.299	-0.046	-0.493	-1.545	0.064	0.562	-0.159	0.434	
17.033	-0.095	-0.283	0.036	-0.437	0.874	-0.29	-0.041	-1.032	0.523	
17.367	0.173	-0.246	0.027	-0.385	-0.115	-0.078	0.302	-0.552	0.559	
17.7	-0.102	-0.28	0.081	-0.351	-0.34	0.127	-0.352	0.032	0.535	
18.033	0.084	-0.288	-0.086	-0.378	0.455	0.128	0.034	0.811	0.527	
18.367	-0.018	-0.298	0.048	-0.478	-1.219	0.062	0.851	0.793	0.495	
18.7	-0.02	-0.298	0.131	-0.427	0.841	-0.053	-0.154	-1.177	0.539	
19.033	0.117	-0.276	-0.049	-0.387	-0.553	-0.219	-0.29	-0.618	0.525	
19.367	-0.142	-0.261	0.021	-0.375	0.102	-0.058	0.136	-0.049	0.489	
19.7	0.147	-0.262	-0.002	-0.388	0.436	0.247	0.191	0.451	0.515	
20.033	-0.037	-0.295	0.12	-0.405	-0.829	0.097	-0.18	0.865	0.517	
20.367	0.004	-0.299	-0.051	-0.482	1.266	-0.007	-0.779	0.634	0.448	
20.7	0.076	-0.29	-0.054	-0.441	-0.633	-0.15	0.539	-1.123	0.499	
21.033	-0.064	-0.29	0.118	-0.361	0.41	-0.095	0.247	-0.512	0.515	