Teoría de juegos – Estrategias mixtas

TEORIA DE JUEGOS

1.4. Estrategias Mixtas

Hasta ahora hemos utilizado la palabra estrategia para referirnos a un plan completo de acciones ciertas de cada jugador. Por ejemplo, en el juego de las monedas las únicas estrategias de cada jugador son jugar cara y jugar sello.

A tales estrategias los hemos denominado estrategias puras. La ampliación del concepto de estrategias consiste en permitir que los jugadores no solo puedan elegir entre acciones ciertas y concretas, sino que también puedan seleccionar acciones aleatorias, es decir, pueden tomar acciones inciertas que asignan distintas probabilidades a las distintas acciones ciertas. Por ejemplo, en el juego de las monedas el jugador 1 podría decidir lo siguiente: jugar cara con probabilidad $1/4$ y jugar sello con probabilidad $3/4$. A las estrategias que deciden de manera aleatoria sobre acciones ciertas se les denomina estrategias mixtas.

Entre las estrategias mixtas están aquellas que asigna probabilidad 1 a una de las estrategias puras y probabilidad cero a todas las demás. Por lo tanto, toda estrategia pura es también una estrategia mixta. Así la estrategia pura s_i^1 se puede identificar con la estrategia mixta $(1, 0, 0, \ldots, 0)$. La ampliación del concepto de estrategias para dar cabida a estrategias mixtas supone además convertir en estrategias a toda combinación lineal convexa de al menos dos estrategias puras.

1.5. Ganancias Esperadas en Juegos Bipersonales

Sea G un juego con dos jugadores. Sea S_1 y P_1 los conjuntos de estrategias pura y mixta del primer jugador.

$$S_1 = \{s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^m\} \quad , \quad P_1 = (p_1^1, p_1^2, \ldots, p_1^m)$$

Sea S_2 y P_2 los conjuntos de estrategias pura y mixta del segundo jugador.

$$S_2 = \{s_2^1, s_2^2, \ldots, s_2^n\} \quad , \quad P_2 = (p_2^1, p_2^2, \ldots, p_2^n)$$

Si el jugador 1 juega s_1^i y el jugador 2 juega P_2, las ganancias esperadas son:

$$E_1(s_1^i, P_2) = p_2^1 u_1(s_1^i, s_2^1) + p_2^2 u_1(s_1^i, s_2^2) + \ldots + p_2^n u_1(s_1^i, s_2^n) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} p_2^j u_1(s_1^i, s_2^j)$$

$$E_2(s_1^i, p_2) = p_2^1 u_2(s_1^i, s_2^1) + p_2^2 u_2(s_1^i, s_2^2) + \ldots + p_2^n u_2(s_1^i, s_2^n) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} p_2^j u_2(s_1^i, s_2^j)$$

Si el jugador 1 juega $P_1 = (p_1^1, p_1^2, \ldots, p_1^m)$ y el jugador 2 juega $P_2 = (p_2^1, p_2^2, \ldots, p_2^n)$, las ganancias esperadas son:

$$\begin{aligned}
E_1(P_1, P_2) &= p_1^1 u_1(s_1^1, p_2) + p_1^2 u_1(s_1^2, p_2) + \ldots + p_1^m u_1(s_1^m, p_2) \\
&= p_1^1 \sum_{j=1}^{n} p_2^j u_1(s_1^1, s_2^j) + p_2^2 \sum_{j=1}^{n} p_2^j u_1(s_1^2, s_2^j) + \ldots + p_1^m \sum_{j=1}^{n} p_2^j u_1(s_1^m, s_2^j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_1^i \left(\sum_{j=1}^{n} p_2^j u_1(s_1^i, s_2^j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_1^i p_2^j u_1(s_1^i, s_2^j)
\end{aligned}$$

De igual manera:

$$E_2(P_1, P_2) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_1^i p_2^j u_2(s_1^i, s_2^j)$$

Definición 1.5 ***Definición ampliada de equilibrio de Nash***

En el juego $G = \{s_1, \ldots, s_n; u_i, \ldots, u_n\}$, decimos que el perfil de estrategias mixtas $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_i^*, \ldots, p_n^*)$ es un equilibrio de Nash (EN) si para cada jugador i,

$$E_i(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_i^*, p_{i+1}^*, \ldots, p_n^*) \geq E_i(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \ldots, p_n^*)$$

para todo p_i de $\Delta(s_i)$

Es decir, para cada jugador i, p_i^* es una solución del problema,

$$\max E_i(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \ldots, p_n^*)$$

en la variable p_i, donde $p_i \in \Delta(s_i)$.

O dicho de otro modo, para cada jugador i, p_i^* es la respuesta óptima a p_{-i}^*.

Tomemos en cuenta que una estrategia mixta no es más que una distribución de probabilidad sobre estrategias puras y que la función de pagos o ganancias es lineal, para cada jugador en las probabilidades de sus distintas estrategias puras. Por lo tanto el pago esperado para un jugador de una estrategia mixta, suponiendo fijar las estrategias de los otros jugadores resulta ser una combinación convexa de los pagos de las estrategias puras soporte de dicha estrategia mixta, y en consecuencia, la ganancia esperada de una estrategia mixta tiene como límite inferior y superior las ganancias mínimas y máximas de las estrategias puras, soporte de dicha estrategia mixta.

¿Como resolvemos los problemas de estrategia mixta?

Si juegan los jugadores A y B. La idea consiste en dotar al jugador B de una cierta información privada de manera que, dependiendo de cómo el jugador B entienda dicha información, se incline por una de las estrategias puras posibles. Sin embargo, puesto que el jugador A no dispone de dicha información privada de B, el jugador A continúa con la incertidumbre de no saber cuál será la decisión del jugador B, y representamos dicha incertidumbre del jugador A como una estrategia mixta del jugador B.

Ejemplo 1.7 Juego de las monedas del ejemplo 1.1

Este juego no tiene EN en estrategias pura ¿Existe EN si se permiten estrategias mixtas?

Como ya es usual, la ruta que seguiremos para solucionar este juego es:

- Encontrar las correspondencias de respuesta óptima de los jugadores.
- Encontrar la intersección de las correspondencias óptimas de cada jugador.

Para el jugador 1 Juega "*cara*" con probabilidad "p" y juega "*sello*" con probabilidad "$1-p$" donde su estrategia mixta es $P_1 = \{p, 1-p\}$

Jugador 2

		cara	sello
jugador 1	cara	-1,1	1,-1
	sello	1,-1	-1,1

Para el jugador 2 Juega "*cara*" con probabilidad "q" y juega "*sello*" con probabilidad "$1-q$" donde su estrategia mixta es $P_2 = \{q, 1-q\}$

Al permitir estrategias mixtas, el objetivo del jugador 1 es maximizar su ganancia esperada; teniendo como variable de decisión "p"

$$\begin{aligned}\max_{p} E_1(p_1, p_2) &= pq(-1) + p(1-q)\cdot 1 + (1-p)q\cdot 1 + (1-p)(1-q)(-1) \\ &= (2q-1) + p(2-4p)\end{aligned}$$

donde:

pq es la probabilidad de (cara,cara).

p(1-q) es la probabilidad de (cara,sello)

y así sucesivamente.

Como la ganancia esperada del jugador 1 es lineal en p, el "p" óptimo depende de si $E_1(p_1, p_2)$ es creciente o decreciente en p :

$$\frac{\partial E_1(p_1, p_2)}{\partial p} = 2 - 4q = \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad q < 1/2 \\ = 0 & \text{si} \quad q = \frac{1}{2} \\ < 0 & \text{si} \quad q > 1/2 \end{cases}$$

Puesto que la ganancia esperada del jugador 1 es creciente en $q < 1/2$ entonces la mejor respuesta del jugador 1 es $p = 1$ (es decir cara). Si $q > 1/2$ la ganancia esperada del jugador 1 es decreciente y $p = 0$ (es decir sello).

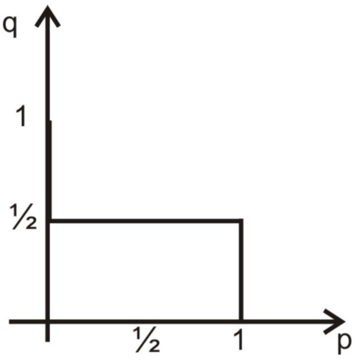
Si $q = \dfrac{1}{2}$ el jugador es indiferente entre las estrategias puras cara y sello y también a las estrategias mixtas P_1 y P_2.

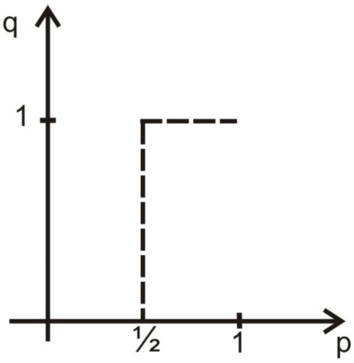
Por lo tanto la correspondencia de respuesta óptima del jugador 1 es:

$$R_1(q) = \begin{cases} 1 & si \quad q < 1/2 \\ [0,1] & si \quad q = \frac{1}{2} \\ 0 & si \quad q > 1/2 \end{cases}$$

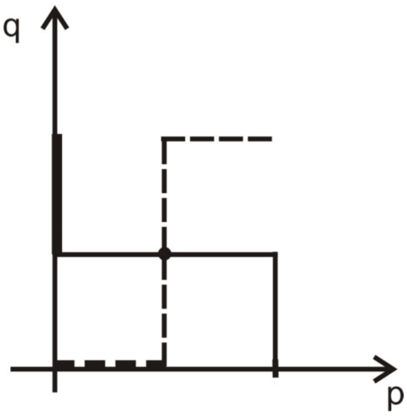
Si seguimos un proceso similar para el jugador 2, llegamos a la siguiente correspondencia de respuesta óptima del jugador 2

$$R_2(p) = \begin{cases} 1 & si \quad p > 1/2 \\ [0,1] & si \quad p = 1/2 \\ 0 & si \quad p < 1/2 \end{cases}$$





Para determinar el equilibrio de Nash en estrategias mixtas intersectamos ambas gráficas y notaremos que el único punto de intersección es $(1/2;\ 1/2)$.



Por lo tanto el equilibrio de Nash en estrategias mixtas es $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

Enlace para el cálculo del equilibrio de Nash en estrategias mixtas: https://simulador-tesis.github.io/