Explicación Completa del Jacobiano para Cambios de Variable

August 29, 2025

1 ¿Por qué $dx\,dy = |J|\,d\xi\,d\eta$?

Imagina que tienes un chicle cuadrado pegado en una mesa. Si lo estiras con tus dedos, el área que cubre cambia. Eso es exactamente lo que hace el Jacobiano: mide cómo se "estira" o "comprime" el área cuando cambiamos de variables.

- **Fundamento físico**: El Jacobiano cuantifica cómo se distorsiona el espacio bajo transformaciones.
- **Relación con integrales**: Es el factor que preserva el valor de la integral al cambiar variables.
- **Caso general**: Para n dimensiones, el Jacobiano es el determinante de la matriz de derivadas parciales de orden $n \times n$.

2 El Jacobiano en Profundidad

El Jacobiano es una matriz que contiene todas las derivadas parciales:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

$$\text{Interpretación geométrica: } |J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| = \text{Área del paralelogramo generado por los vectores } \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \text{ y } \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}$$

Su determinante $|J|$ nos dice cuánto se escala el área:

- Si $|J| = 2$, el área se duplica (como estirar el chicle al doble)
- Si $|J| = 0.5$, el área se reduce a la mitad (como aplastar el chicle)

- **Singularidades**: Si $|J| = 0$, la transformación colapsa dimensiones.
- **No linealidades**: Para transformaciones no lineales, J varía punto a punto.

3 Ejemplos Detallados

3.1 Ejemplo Básico

Cambio de variables:

$$x = 2\xi$$
$$y = 3\eta$$

El Jacobiano es:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad |J| = 6$$

Un cuadrado de 1×1 en (ξ, η) se convierte en un rectángulo de 2×3 en (x, y), con área 6 veces mayor.

3.2 Ejemplo Avanzado

$$x = \xi \cos \eta$$
$$y = \xi \sin \eta$$

Jacobiano en coordenadas polares:

$$J = \begin{pmatrix} \cos \eta & -\xi \sin \eta \\ \sin \eta & \xi \cos \eta \end{pmatrix}, \quad |J| = \xi$$

Interpretación: El factor ξ explica por qué anillos más alejados del origen (mayor ξ) tienen mayor área.

4 ¡Cuidado! Errores Comunes

El error más común es olvidar el valor absoluto:

- El área siempre es positiva
- Si el determinante es negativo, usamos $|J|$ igual

- **Orden de variables**: Intercambiar ξ y η cambia el signo del determinante, pero no su valor absoluto.
- **No conmutatividad**: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \neq \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$ (son inversos multiplicativos).

5 Aplicaciones Importantes

- **Integrales múltiples**: Cambio a coordenadas polares, cilíndricas o esféricas.
- **Geometría diferencial**: Cálculo de áreas y volúmenes en variedades.
- **Física**: Transformaciones entre sistemas de referencia en mecánica.

6 Resumen

El Jacobiano corrige la distorsión del área cuando cambiamos de variables, como cuando estiramos un chicle. Solo recuerda usar su valor absoluto $|J|$.

- Es el factor de escala diferencial para áreas/volúmenes
- Preserva la invariancia de las integrales bajo cambios de variable
- Su determinante mide la preservación de orientación (signo) y escala (magnitud)