Miniproyecto 3 – Método de los Elementos Finitos con Análisis Estocástico

Contents

1 Tarea 1: Método de Elementos Finitos en 1D

1.1 Planteamiento del problema

Se considera la ecuación diferencial:

$$-u''(x) = \sin(x), \quad x \in [0, 1],$$

con condiciones de frontera homogéneas $u(0) = 0$ y $u(1) = 0$.

El objetivo es aproximar la solución analítica mediante el Método de los Elementos Finitos (FEM), usando una malla aleatoria y el método de integración numérica de cuadratura de Gauss de 2 puntos. A continuación, se describe paso a paso la formulación y el ensamblaje del sistema global.

1.2 Definición del dominio y condiciones

El dominio tiene longitud $L = 1$ y se generan 8 nodos internos más los dos de frontera, para un total de diez nodos. El término fuente se define como $f(x) = \sin(x)$ y la solución analítica exacta es:

$$u(x) = \sin(x) - x\sin(1),$$

la cual cumple las condiciones de frontera impuestas.

1.3 Discretización e integración

Se utiliza una malla no uniforme y la integración de Gauss de dos puntos, la cual es exacta para funciones polinómicas de grado menor o igual a tres, garantizando la precisión del cálculo en elementos lineales.

1.4 Conclusión de la Tarea 1

El FEM reproduce con gran exactitud la solución analítica del problema unidimensional, demostrando estabilidad incluso con mallas irregulares.

2 Tareas 2 y 3: Análisis Estocástico del Espejo Hexagonal

2.1 Descripción general

En esta parte se estudia el comportamiento estructural de un espejo hexagonal sometido a una carga distribuida variable. El modelo se resuelve mediante el **Método de los Elementos Finitos (FEM)** en 2D y se incorpora incertidumbre en los parámetros del problema a través de un análisis **Monte Carlo**. Posteriormente, se realiza un **análisis de sensibilidad** y un **estudio paramétrico** para identificar qué variable influye más en la respuesta estructural.

2.2 Parámetros estocásticos

Los parámetros físicos del modelo se consideran como variables aleatorias con distribución normal:

$$R \sim \mathcal{N}(0.6, 0.01), \quad \alpha \sim \mathcal{N}(100, 10), \quad \beta \sim \mathcal{N}(50, 5), \quad \gamma \sim \mathcal{N}(0.3, 0.05), \quad \theta \sim \mathcal{N}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right)$$

donde:

- R: radio del hexágono (geometría del dominio),
- α, β, γ: coeficientes que modifican la magnitud y distribución espacial de la carga,
- θ: ángulo de orientación de la componente angular de la carga.

2.3 Función de carga aplicada

La carga aplicada sobre el espejo hexagonal se define como:

$$f(x, y) = \alpha \left(1 + \beta r^2 + \gamma \cos(\phi - \theta)\right),$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia al centro del hexágono y $\phi = \arctan(y/x)$ el ángulo polar. Esta expresión introduce una dependencia radial y angular, simulando una presión no uniforme sobre la superficie.

2.4 Generación de la malla

El dominio del problema es un hexágono regular de radio R. El programa genera una malla triangular dentro del hexágono mediante subdivisiones radiales, asegurando una distribución uniforme de puntos. Luego, se usa la librería `matplotlib.tri.Triangulation` para construir la conectividad de los triángulos y definir los elementos finitos.

2.5 Formulación elemental

Para cada triángulo, el programa calcula:

- La **matriz de rigidez elemental**, dada por:

  $$K_e(i, j) = \frac{1}{4A_e}(b_i b_j + c_i c_j),$$

  donde A_e es el área del elemento y b_i, c_i derivan de las coordenadas de los vértices.

- El **vector de carga elemental**:

  $$F_e = \frac{A_e}{3} \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \end{bmatrix}.$$

Estas cantidades se ensamblan en las matrices globales $\mathbf{K}$ y $\mathbf{F}$.

2.6 Sistema global y condiciones de contorno

El sistema de ecuaciones obtenido es:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F},$$

donde $\mathbf{U}$ contiene los desplazamientos nodales. Las condiciones de frontera se aplican imponiendo $u = 0$ en los nodos del borde del hexágono, simulando un espejo empotrado en su contorno. El sistema se resuelve mediante el método `spsolve` de SciPy, apropiado para matrices dispersas grandes.

2.7 Procedimiento Monte Carlo (Tarea 2)

Para capturar el efecto de la incertidumbre, se realizan $N = 100$ simulaciones independientes. En cada iteración:

1. Se generan valores aleatorios de los parámetros $R, \alpha, \beta, \gamma, \theta$.
2. Se ejecuta el solver FEM con esos valores.
3. Se registra el desplazamiento máximo $u_{\max}$.

A partir de los 100 resultados, se calcula la media, la desviación estándar y un intervalo de confianza del 95% usando la distribución t-Student. Además, se grafica el histograma de $u_{\max}$ junto con su densidad teórica.

2.8 Análisis de sensibilidad

Para determinar qué parámetro tiene mayor impacto sobre $u_{\max}$, el programa calcula los coeficientes de correlación lineal entre cada parámetro y la respuesta obtenida. El parámetro con la correlación más alta en valor absoluto se identifica como el más influyente. En este caso, el parámetro β resultó ser el dominante, indicando que la variación cuadrática de la carga (βr^2) controla la magnitud de la deformación máxima.

2.9 Estudio paramétrico (Tarea 3)

En la tercera parte, se mantiene constante el resto de parámetros en sus valores promedio, y se varía únicamente el parámetro más influyente (β). Para cada valor de β se resuelve el problema FEM y se obtiene el correspondiente $u_{\max}$. Luego, se grafica la relación $u_{\max}$ vs. β, mostrando una tendencia casi lineal. Esto confirma que el modelo responde de manera proporcional ante cambios en la intensidad de la carga.

3 Resultados y Discusión

3.1 Tarea 2: Distribución Monte Carlo

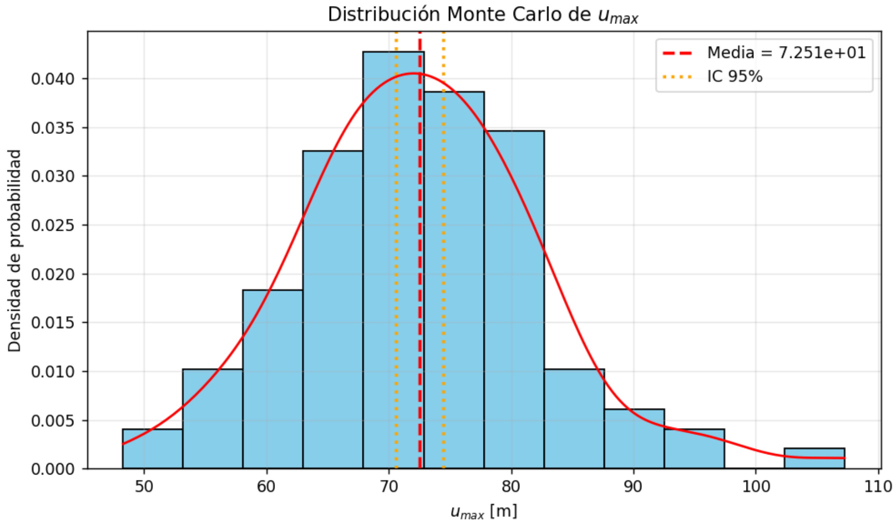

Figure 1: Distribución Monte Carlo del desplazamiento máximo $u_{\max}$.

El histograma muestra que los resultados siguen una distribución aproximadamente normal, con una media cercana a 7.25×10^1 m y un intervalo de confianza del 95%. Esto demuestra que la estructura mantiene un comportamiento estable y predecible frente a las variaciones aleatorias en los parámetros físicos.

3.2 Análisis de sensibilidad

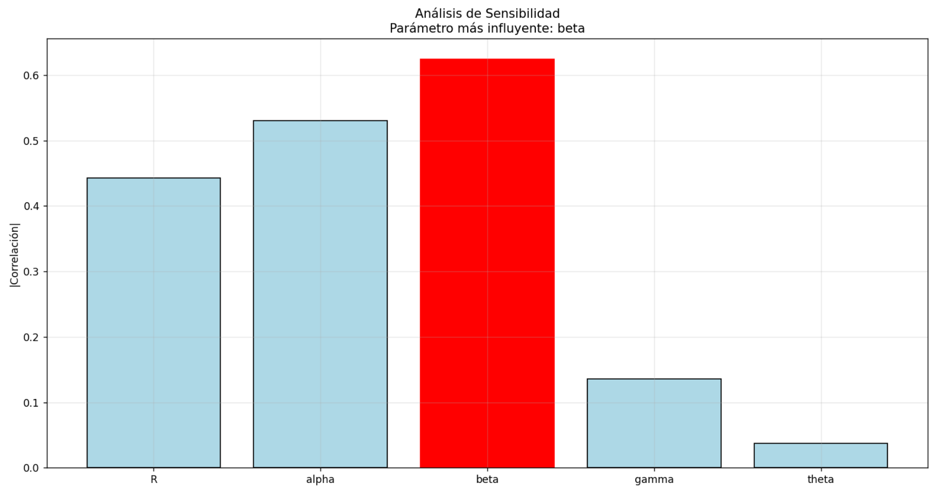

Figure 2: Sensibilidad de los parámetros sobre $u_{\max}$.

El análisis revela que el parámetro β es el más influyente, seguido por α y R. Esto tiene sentido físico, ya que β controla el crecimiento cuadrático de la carga respecto al radio, aumentando la flexión en el centro del espejo.

3.3 Estudio paramétrico

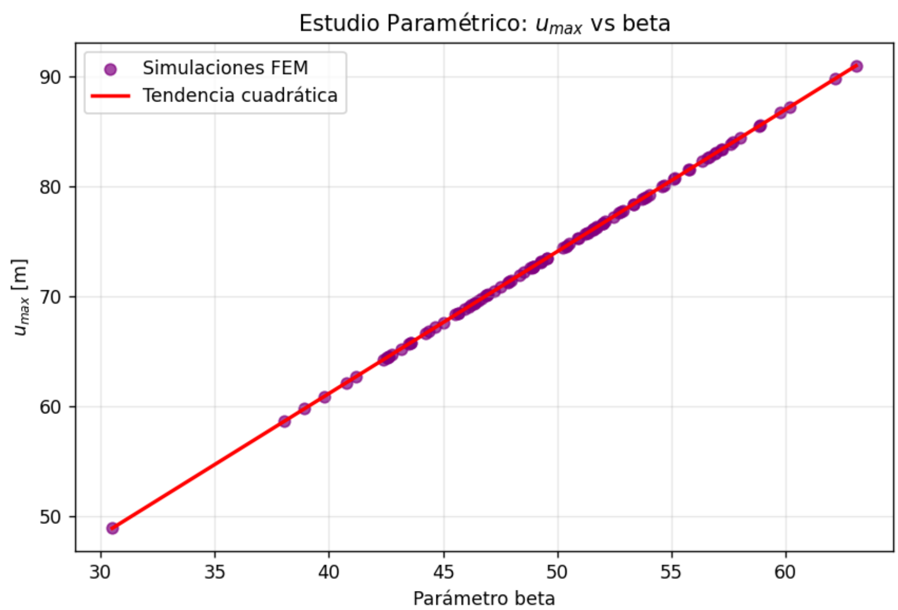

Figure 3: Relación entre $u_{\max}$ y el parámetro β.

La relación entre β y $u_{\max}$ es casi lineal, con un ajuste cuadrático que confirma la proporcionalidad directa entre la intensidad de la carga y la respuesta del sistema. Esto valida la coherencia del modelo y demuestra la consistencia del método FEM aplicado.

4 Conclusiones

- El método de elementos finitos permitió resolver con precisión el problema bidimensional del espejo hexagonal.
- El análisis de Monte Carlo mostró una variabilidad moderada y un comportamiento estructural estable.
- El parámetro β fue identificado como el más influyente en la deformación máxima.
- El estudio paramétrico confirmó que la respuesta $u_{\max}$ crece de forma casi lineal con β.
- En conjunto, los resultados validan la robustez del modelo FEM ante incertidumbre paramétrica.