UNAP
FINESI

Series de Tiempo

VI Semestre
Grupo: B

MODELOS LINEALES ESTACIONARIO (ARMA)

Mtr. Alcides Ramos Calcina
FINESI

Introducción

Definición

El modelo ARMA es un modelo autorregresivo **estacionario** donde las variables independientes siguen tendencias estocásticas y el término de error es estacionario.

- El modelo ARMA, del inglés, Auto Regressive Moving Average se divide en dos partes:
  - ✓ Autorregresivo: La variable dependiente se regresa en sí misma en un período de tiempo t.
  - ✓ Media móvil: Los retrocesos son representados por procesos aleatorios.

- Se examinarán los siguientes modelos lineales estacionarios:
  - ✓ Autorregresivos (AR)
  - ✓ Medias Móviles (MA)
  - ✓ mixtos (ARMA) no estacionales en particular.

- Estos modelos son aplicables a series estacionarias, caracterizadas por tener una **media y varianza constantes**.

1. Estacionariedad en Media y Varianza

Un proceso es estacionario en sentido amplio si:

- su media es constante e independiente del tiempo,

$$E(Y_t) = \mu, \quad \forall t = 1,2,3\ldots$$

- su varianza es finita y constante, y

$$Var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2, \quad \forall t = 1,2,3\ldots$$

- el valor de la covarianza entre dos periodos no depende del tiempo en el cual se ha calculado, sino de la distancia o desfase entre aquellos

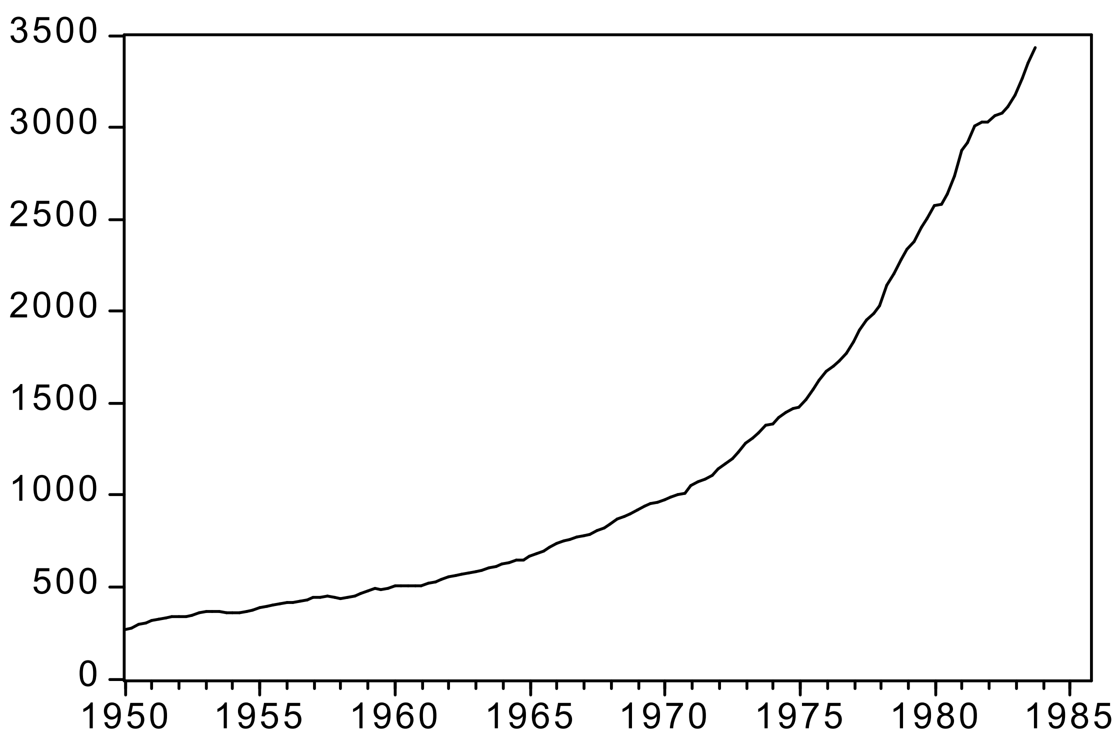
$$\gamma_{t,\,t+k} = \gamma_{t-k,\,t} = \gamma_k, \quad \forall t = 1,2,3\ldots$$

γ_k es la covarianza entre dos variables del proceso separadas k períodos.

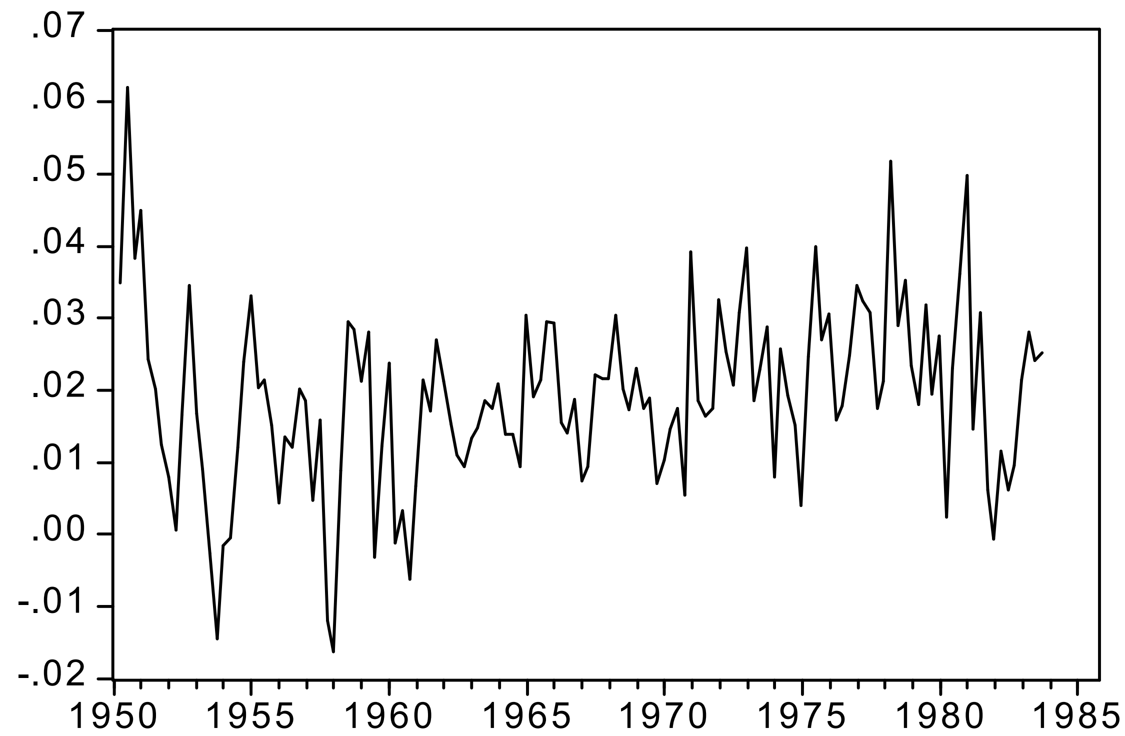
- Los modelos de predicción de series temporales están diseñados para procesos estacionarios.

1. Estacionariedad en Media y Varianza

Series temporales no estacionarias y estacionarias.



Serie no estacionaria en media



Serie estacionaria en media y varianza

1.1. Análisis de la Estacionariedad

Con el fin de determinar las propiedades de estacionariedad de las series se pueden utilizar distintos procedimientos:

- Método de Box-Jenkins.
- Prueba de la raíz unitaria.
    - ✓ El Test de Dickey-Fuller (DF) Normal.
    - ✓ Otros más avanzados:
        - El Test de Dickey-Fuller (DF) Aumentado.
        - Prueba de Phillips-Perron
        - Prueba de Dickey-Fuller con eliminación de la tendencia (DFGLS)
        - Prueba de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (KPSS)

1.1. Análisis de la Estacionariedad

A) Método de Box-Jenkins

- Apoyándonos en las características comunes de la serie, podríamos utilizar la representación gráfica de una serie para el análisis de su estacionariedad.

- Uno de los métodos que suelen proponerse como suficientes para la detección de la no estacionariedad de una serie es, tal vez erróneamente, el del análisis de representaciones gráficas de la misma.

- El procedimiento para verificar la estacionariedad de la serie es:

    1) El examen visual de la trayectoria de la serie a lo largo del tiempo. Si existe algún valor entorno a la serie que va oscilando, pero sin alejarse de forma permanente de dicho valor, entonces se puede considerar que la serie es estacionaria en media.

    2) Si los coeficientes de Autocorrelación (AC) no decaen rápidamente sería un indicio claro de que la serie es no estacionaria.

    3) El primer coeficiente de Autocorrelación Parcial (PAC) es significativo (es decir, mayor o igual a 0.9) entonces la serie es no estacionaria.

Ejemplo 1

En la Tabla 4.1 se muestra las ventas mensuales (en miles) de casas unifamiliares de nueva construcción vendidas en Estados Unidos desde enero de 2010 a noviembre de 2022 y en la Tabla 4.2 tenemos la población total (en miles) de mayores de 16 años en un determinado país, desde el primer trimestre de 1997 al tercer trimestre de 2015. Se pide realizar el análisis de la estacionariedad a través de los distintitos procedimientos que se mencionaron anteriormente.

Tabla 4.1

Ventas mensuales (en miles) de casas unifamiliares de nueva construcción vendidas en EEUU desde enero de 2010 a noviembre de 2022.

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
2010	44	46	57	59	64	59	51	50	48	51	45	48
2011	52	58	63	61	59	58	52	48	53	55	42	38
2012	48	55	67	60	65	65	63	61	54	52	51	47
2013	55	59	89	84	75	66	57	52	60	54	48	49
2014	53	59	73	72	62	58	55	56	52	52	43	37
2015	43	55	68	68	64	65	57	59	54	57	43	42
2016	52	51	58	60	61	58	62	61	49	51	47	40
2017	45	50	58	52	50	50	46	46	38	37	34	29
2018	30	40	46	46	47	47	43	46	37	41	39	36
2019	48	55	56	53	52	53	52	56	51	48	42	42
2020	44	50	60	66	58	59	55	57	57	56	53	51
2021	45	58	74	65	65	55	52	59	54	57	45	40
2022	47	47	60	58	63	64	64	63	55	54	44	

Ejemplo 1

Tabla 4.2
Población total trimestral (en miles) de mayores de 16 años de un determinado país, desde el primer trimestre de 1997 al tercer trimestre de 2015.

Año	I	II	III	IV
1997	29358.8	29452.5	29547.1	29740.2
1998	29835.9	29932	30027.7	30124.2
1999	30221.4	30318.9	30363	30407.8
2000	30451.7	30496.4	30574.2	30651.5
2001	30727.8	30805.5	30880.3	30953.4
2002	31026.2	31099	31169.4	31238.2
2003	31306.1	31374.6	31447.4	31520.1
2004	31592.8	31665.5	31738.2	31810.9
2005	31883.6	31956.3	32061.1	32166
2006	32270.8	32375.6	32480.5	32549.8
2007	32619.2	32688.6	32760.7	32835.4
2008	32910.2	32985	33064.4	33148.2
2009	33232.1	33315.9	33416.6	33534.2
2010	33651.9	33769.5	33888	34007.4
2011	34126.9	34246.3	34383.1	34537.4
2012	34691.7	34846	34996.2	35142.2
2013	35288.3	35434.3	35583.4	35735
2014	35886.6	36038.3	36187.6	36334.6
2015	36489.6	36652.1	36800.3	

Ejemplo 1 - Detección de la Estacionariedad

- **Gráfico**

Serie temporal de Ventas

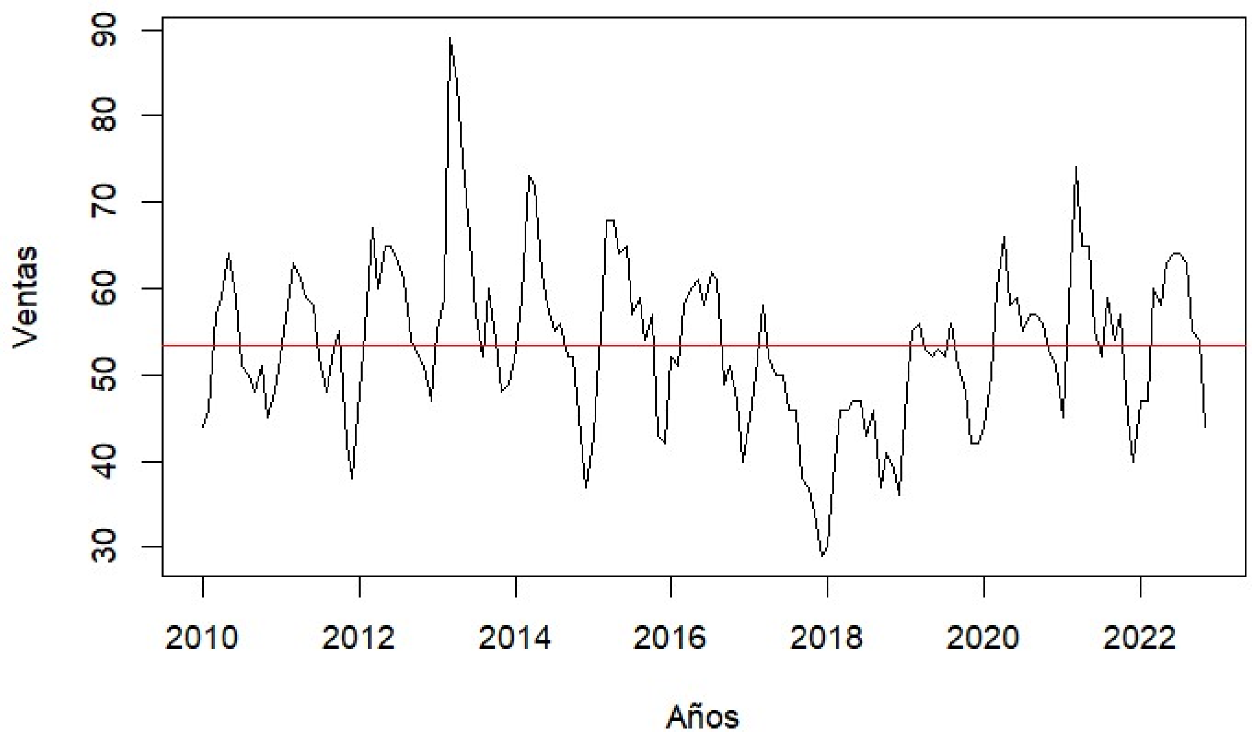
```
library(readxl)
casas <- read_excel("Ejm_4_1-Casas.xlsx")
View(casas)
Y_cas <- ts(casas$ventas, star = c(2010, 1), frequency = 12)

# Grafico
plot(Y_cas, type = "l", xlab = "Años", ylab = "Ventas")
abline(h = mean(Y_cas), col = "red")
```

Serie temporal de Población

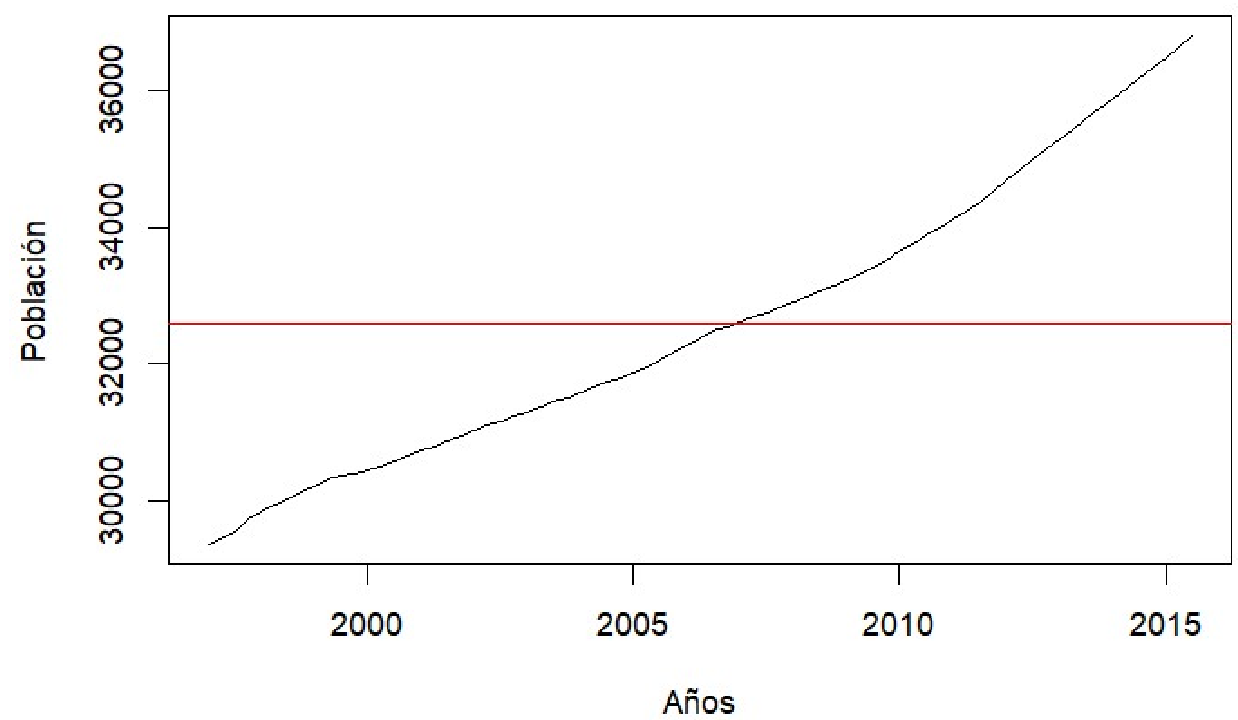
```
pob <- read_excel("Ejm_4_1-Poblacion.xlsx")
View(pob)
Y_pob <- ts(pob$poblacion, star = c(1997, 1), frequency = 4)

# Grafico
plot(Y_pob, type = "l", xlab = "Años", ylab = "Población")
abline(h = mean(Y_pob), col = "red")
```

Ejemplo 1 - Detección de la Estacionariedad

Serie temporal ventas mensuales (en miles) de casas y su promedio.



Serie temporal población total trimestral (en miles) y su promedio.



1.1. Análisis de la Estacionariedad

Correlograma

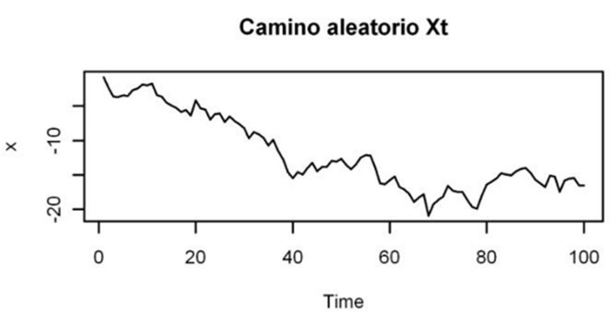
❑ Los valores de la función de autocorrelación (FAC) de una serie:

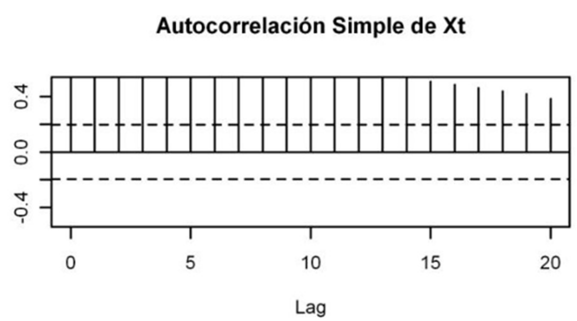
Sin ESTACIONARIEDAD

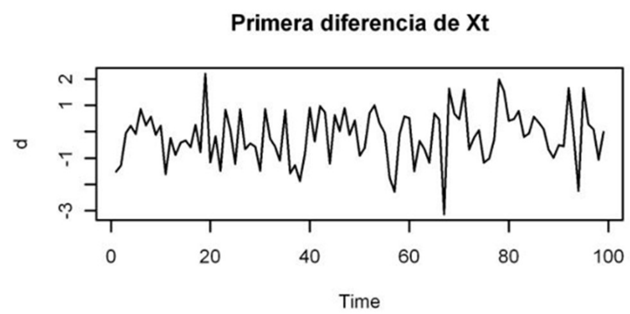
(con raíz unitaria) descienden muy suavemente hacia el cero.

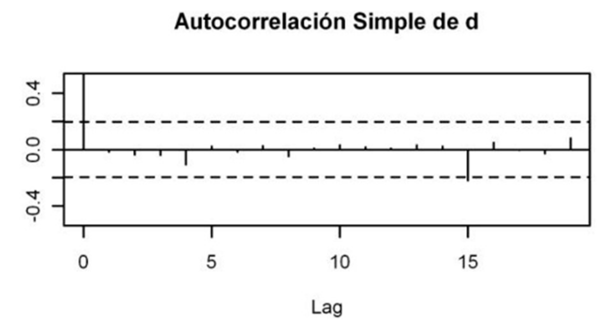
Presencia de ESTACIONARIEDAD

(sin raíz unitaria) el descenso es exponencial.



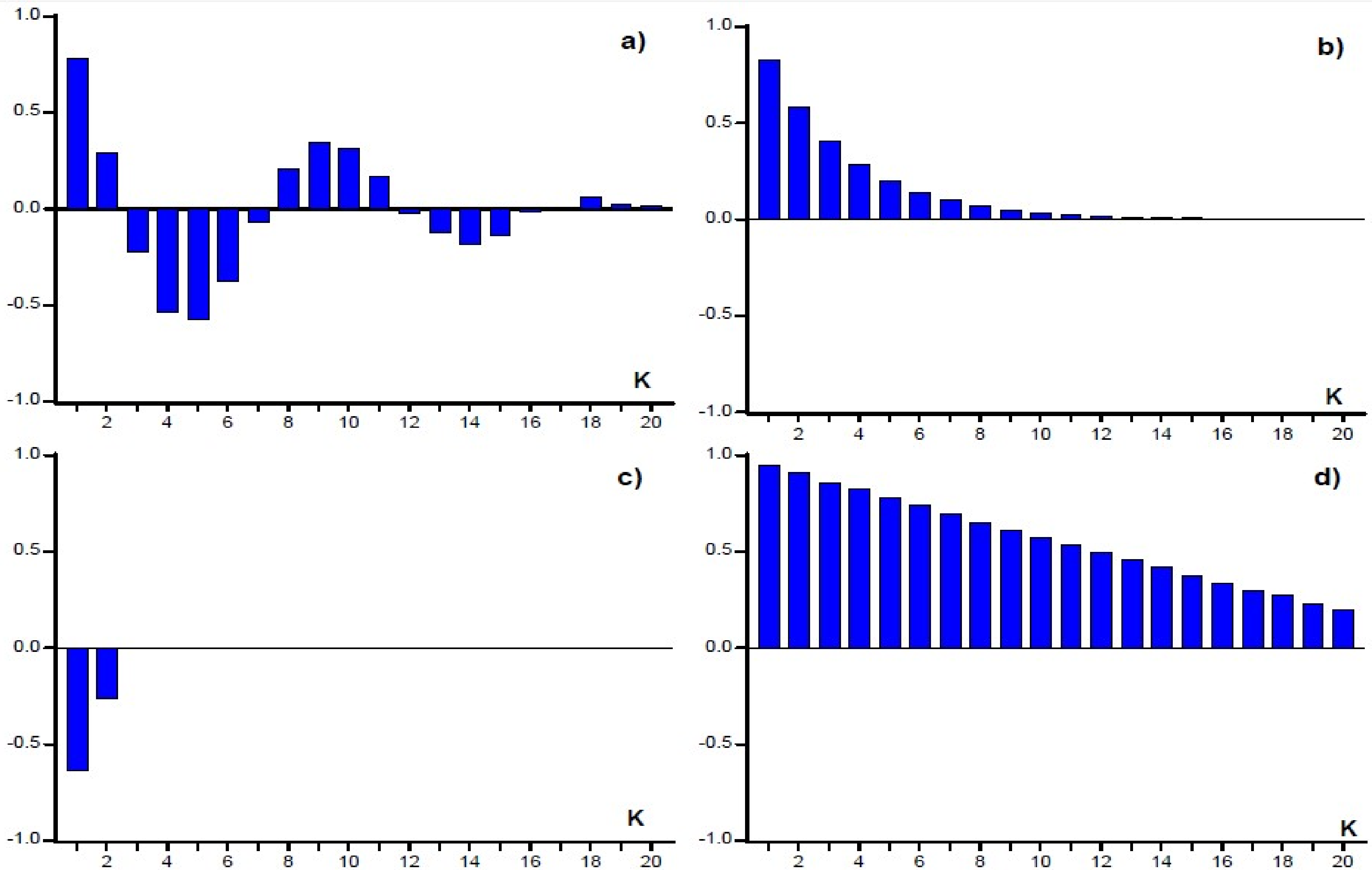






1.1. Análisis de la Estacionariedad

Funciones de autocorrelación.



Los correlogramas a), b) y c) decrecen rápidamente hacia cero conforme aumenta *k,* por tanto, son series…

ESTACIONARIAS

Los coeficientes de AC del correlograma d) decrecen lentamente, de forma lineal, por lo que corresponden a una serie..,

NO ESTACIONARIA

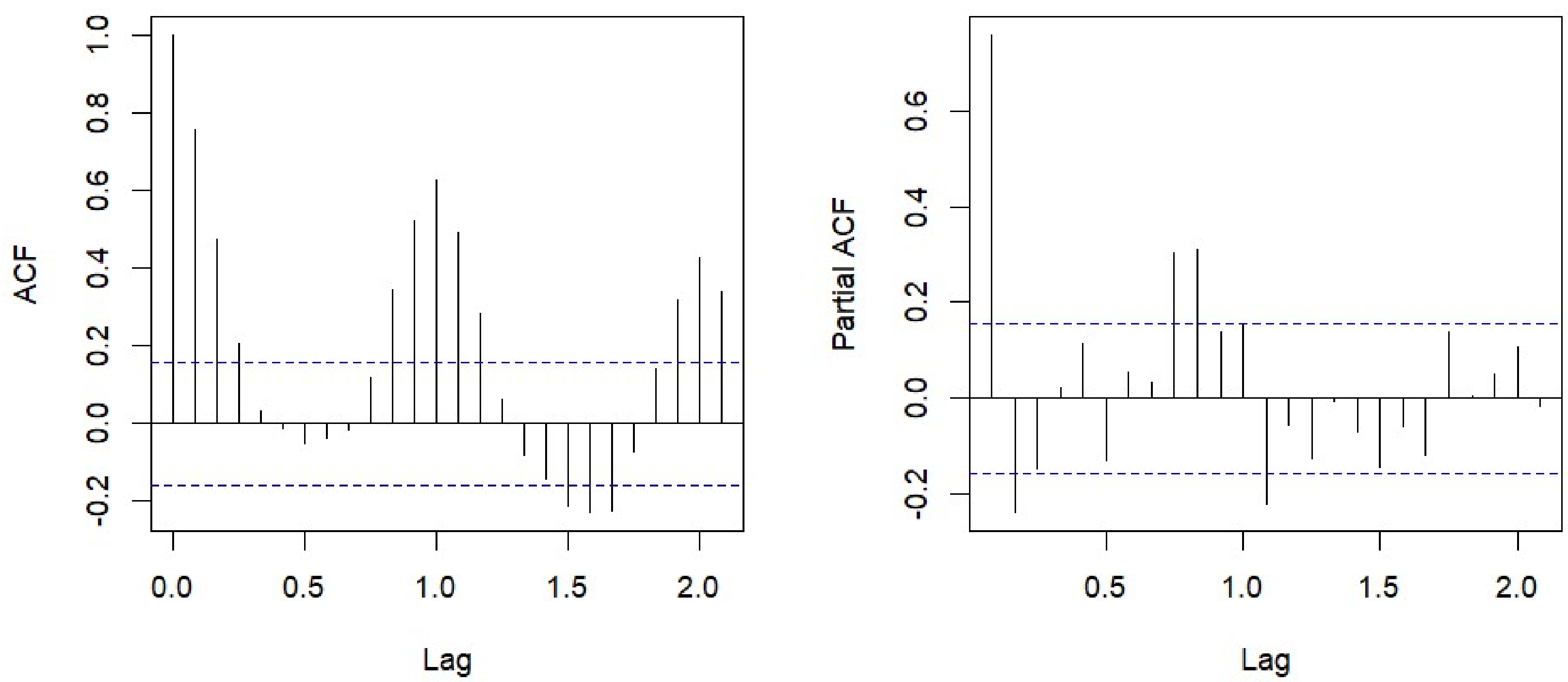
Ejemplo 1 - Detección de la Estacionariedad

Funciones de autocorrelación.

```
Yc_acf <- acf(Y_cas, lag.max = 25, main="")
Yc_pcf <- pacf(Y_cas, lag.max = 25, main="")
Yc_pcf$acf)
```

```
, , 1

               [,1]
 [1,]   0.759040695
 [2,] -0.240489934
 [3,] -0.148715348
 [4,]   0.019969486
 [5,]   0.112207837
 ...
[24,]   0.106462953
[25,] -0.016093535
```

Correlograma de la serie de ventas (Y_cas).



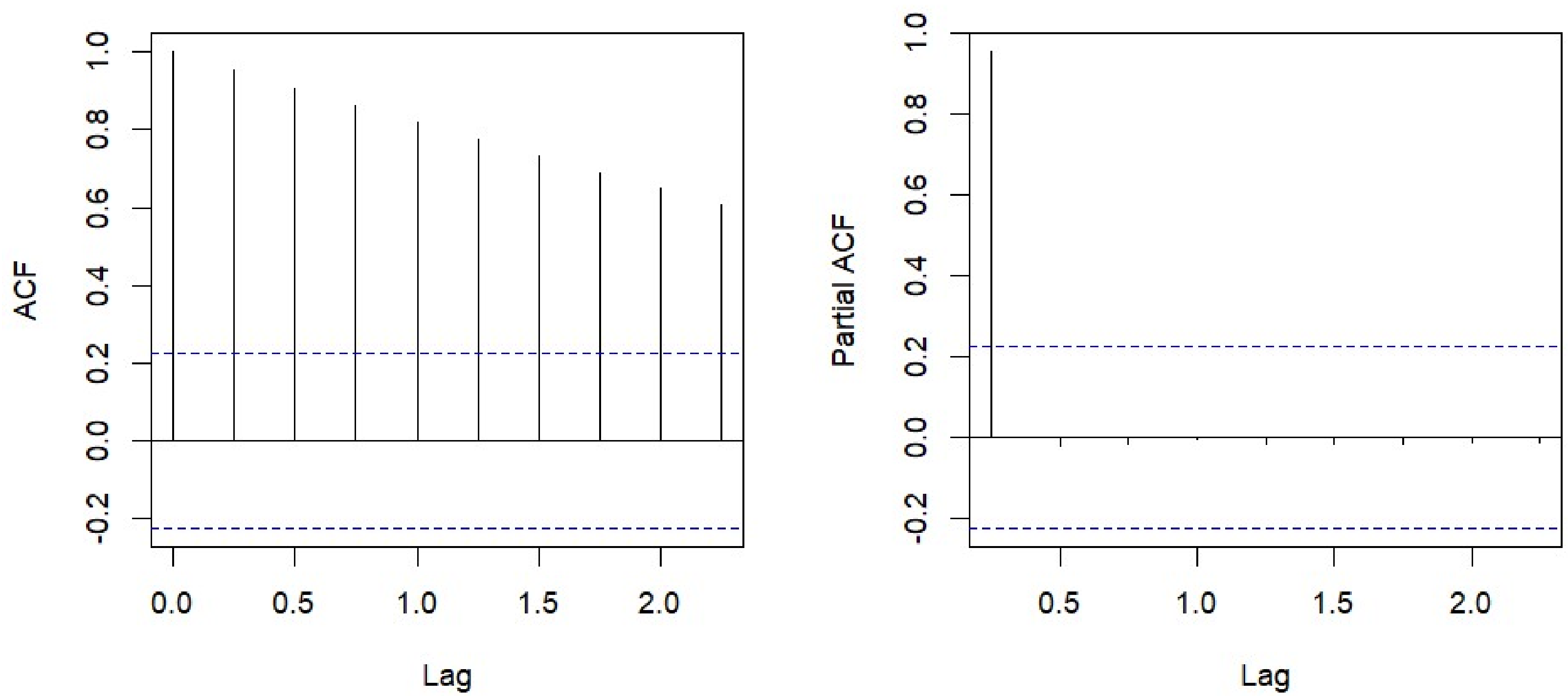
Ejemplo 1 - Detección de la Estacionariedad

Funciones de autocorrelación.

```
Yp_acf <- acf(Y_pob, lag.max = 9, main="")
Yp_pcf <- pacf(Y_pob, lag.max = 9, main="")
Yp_pcf$acf
```

```
, , 1

             [,1]
 [1,]  0.953272622
 [2,] -0.019741049
 [3,] -0.017096244
 [4,] -0.006077444
 [5,] -0.017284490
 [6,] -0.016399019
 [7,] -0.015505067
 [8,] -0.014843524
 [9,] -0.014153682
```

Correlograma de la serie Población (Y_pob).



1.1. Análisis de la Estacionariedad

B) Prueba de Raiz Unitaria

- Una raíz unitaria (también llamada proceso estacionario de diferencia) es una tendencia estocástica en una serie de tiempo, a veces llamada "caminata aleatoria con deriva".

- Si una serie de tiempo tiene una raíz unitaria, muestra un patrón sistemático que es impredecible.

- Las pruebas de raíz unitaria son pruebas de **estacionariedad** en una serie de tiempo. Una serie de tiempo tiene estacionariedad si un cambio en el tiempo no provoca un cambio en la forma de la distribución; las raíces unitarias son una de las causas de la no estacionariedad.

- Existen muchas pruebas, en este capítulo presentaremos:

  - ✓ la prueba de Dickey – Fuller
  - ✓ la prueba de Dickey – Fuller Aumentado (ADF),
  - ✓ la Prueba Phillps – Perron (PP),
  - ✓ la Prueba de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (KPSS)
  - ✓ el contraste de Eliott, Rothenberg y Stock Point Optimal (ERS) que es alternativo a la prueba de Perron.

1.1. Análisis de la Estacionariedad

- Consideremos el siguiente modelo:

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t$$

- Donde *e* es el término del error estocástico que sigue los supuestos clásicos, es decir, tienen media cero y varianza constante (σ^2) y no esta autocorrelacionada; por tanto, el término es un ruido blanco.

- Si el coeficiente de Y_{t-1} es en realidad igual a 1, surge lo que se conoce como el problema de la raíz unitaria, o sea, una situación de **no estacionariedad**.

- Una serie de tiempo que tiene una raíz unitaria se conoce como un camino aleatorio "Random Walks". Por lo tanto, se estima la regresión:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t$$

1.1. Análisis de la Estacionariedad

El Test de Dickey Fuller (DF)

- Sin duda alguna, el test más habitual a la hora de determinar la estacionariedad de una serie temporal, consiste en la aplicación del conocido como test de Dickey–Fuller (Test DF).

- Éste es un contraste de "No estacionariedad" ya que la hipótesis nula es precisamente la presencia de una raíz unitaria en el proceso generador de datos de la serie analizada.

H_0: $\rho = 1$ (Hay raíz unitaria "PROCESO NO ESTACIONARIO")
H_1: $\rho < 1$ (No hay raíz unitaria "PROCESO ESTACIONARIO")

- Si: $p \leq \alpha$, se rechaza la hipótesis nula H_0.

- *p* es el valor de probabilidad asociado al estadístico de contraste.

Ejemplo 2

Retomamos el **Ejemplo 1**, para realizar las pruebas de Raíz Unitaria a las series de ventas mensuales de casas (Y_cas) y a la población total (Y_pob) con el propósito de confirmar lo mencionado con el método gráfico.

- **Prueba de Raíz Unitaria de Dickey - Fuller.**

```
library(urca)
Yc_df <- ur.df(Y_cas, type = "drift", lags = 0)
summary(Yc_df)
```

```
###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################
Test regression drift
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1)
...
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 12.63626    2.84539   4.441 1.71e-05 ***
z.lag.1     -0.23602    0.05234  -4.510 1.29e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 6.142 on 152 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.118,    Adjusted R-squared:  0.1122
F-statistic: 20.34 on 1 and 152 DF,  p-value: 1.29e-05

Value of test-statistic is: -4.5097 10.1688
```

Usaremos la librería **urca**, y la función **ur.df()**

El tipo "drift", indica que se agrega el intercepto (β_0).

Ejemplo 2 – Raiz unitaria

```
Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
phi1  6.52  4.63  3.81
```

En este caso para tomar la decisión, se utiliza los valores de Tau (τ), si:

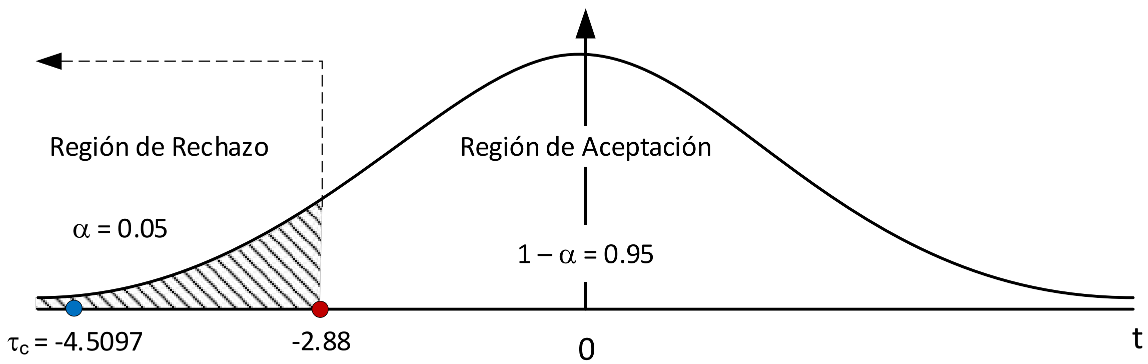
$\tau_{calculado} < \tau_{crítico}$, se rechaza Ho

$\tau_{calculado} > \tau_{crítico}$, se acepta Ho

Se obtiene el test de Dickey-Fuller con un valor de -4.5097.

Este valor es comparado con los valores críticos, por tanto:

$$\tau_{calculado} = -4.5097 \quad < \tau_{crítico} = -2.88$$



entonces se rechaza la hipótesis nula (H_0) y aceptamos la hipótesis alterna (H_1), con lo cual podemos concluir que la serie es **ESTACIONARIA**.

Ejemplo 2 – Raiz unitaria

Otra forma es haciendo uso de la función adf.test() de la librería **tseries**.

```
adf.test(Y_cas, k = 0)

          Augmented Dickey-Fuller Test

data:  Y_cas
Dickey-Fuller = -4.5918, Lag order = 0, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

Ahora es de interés fijarnos en el valor de probabilidad que se tiene en dicho test, por tanto, podemos decir, como p-value = 0.01 < α = 0.05 (Nivel de significancia), entonces se rechaza la hipótesis nula, por tanto, igual que la prueba anterior, concluimos que la serie es **ESTACIONARIA**.

Ejemplo 2 – Raiz unitaria

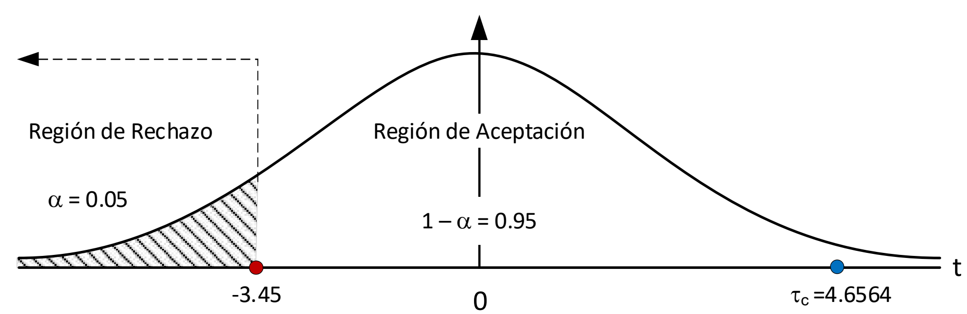
Continuamos con la serie Y_pob:

```
Yp_df <- ur.df(Y_pob, type = "trend", lags = 0)
summary(Yp_df)
###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################
Test regression trend

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt)
...
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.238e+03  2.790e+02  -4.439 3.24e-05 ***
z.lag.1      4.465e-02  9.589e-03   4.656 1.46e-05 ***
tt          -3.042e+00  8.922e-01  -3.410  0.00108 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 23.19 on 71 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5687,      Adjusted R-squared:  0.5565
F-statistic:  46.8 on 2 and 71 DF,  p-value: 1.087e-13

Value of test-statistic is: 4.6564 495.027 46.8008
```

```
Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau3 -4.04 -3.45 -3.15
phi2  6.50  4.88  4.16
phi3  8.73  6.49  5.47
```

Se tiene que, $\tau_{calculado} = 4.6564 > \tau_{crítico} = -3.45$, entonces se acepta la hipótesis nula (H_0) y rechazamos la hipótesis alterna (H_1), con lo cual podemos concluir que la serie es:

NO ESTACIONARIA.



Ejemplo 2 – Raiz unitaria

Del mismo modo, utilizamos la función adf.test().

```
adf.test(Y_pob, k = 0)

         Augmented Dickey-Fuller Test

data:  Y_pob
Dickey-Fuller = 4.6564, Lag order = 0, p-value = 0.99
alternative hypothesis: stationary
```

Como p-value = 0.99 > α = 0.05, entonces se acepta la hipótesis nula, por tanto, confirmamos lo anterior, la serie es **NO ESTACIONARIA**.

1.1. Análisis de la Estacionariedad

Prueba de Raíz Unitaria de Dickey – Fuller Aumentada (ADF)

- En esta prueba se puede excluir la constante e incluir una tendencia lineal. La prueba ADF consiste en la estimación del siguiente modelo:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \rho Y_{t-1} + \alpha_i \sum_{i=1}^{m} \Delta Y_{t-i} + e_t$$

- El contraste es similar al caso de la prueba Dickey-Fuller:

H_0: $\rho = 1 \rightarrow$ Existe raíz unitaria, Yt **no es estacionaria**.
H_1: $\rho \neq 1 \rightarrow$ No existe raíz unitaria, Yt **es estacionaria.**

- Para hacer la estimación de esta prueba en R se usan las mismas funciones que para el Dickey-Fuller simple, pero especificando en el número de rezagos igual a 1.

Ejemplo 2 – Raiz unitaria

- **Prueba de Dickey – Fuller Aumentada (ADF).**

```
Yc_adf <- ur.df(Y_cas, type = "drift", lags = 1)
summary(Yc_adf)

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression drift

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)

...

Value of test-statistic is: -5.4524 14.8652

       1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
phi1  6.52  4.63  3.81
```

```
adf.test(Y_cas, k = 1)

        Augmented Dickey-Fuller Test

data:  Y_cas
Dickey-Fuller = -5.5568, Lag order = 1, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

Se puede observar que con ambas funciones la hipótesis nula es rechazada y esto da razón a la no existencia de raíz unitaria en la serie, por lo tanto, esta **es estacionaria**.

Ejemplo 2 – Raiz unitaria

A continuación, las pruebas para la serie Y_pob

```
Yp_adf <- ur.df(Y_pob, type = "trend", lags = 1)
summary(Yp_adf)

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression trend

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)

...

Value of test-statistic is: 1.0111 4.3837 3.8933

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau3 -4.04 -3.45 -3.15
phi2  6.50  4.88  4.16
phi3  8.73  6.49  5.47
```

```
adf.test(Y_pob, k = 1)

	Augmented Dickey-Fuller Test

data:  Y_pob
Dickey-Fuller = 1.0111, Lag order = 1, p-value = 0.99
alternative hypothesis: stationary
```

También para esta serie, con ambas funciones se acepta la hipótesis nula, concluyéndose que, la serie Y_pob **no es estacionaria** en media.

Ejemplo 2 – Raiz unitaria

Prueba de Phillps – Perron (PP)

En el caso de la prueba Phillips-Perron (PP.test), las hipótesis y la regla de decisión son iguales a la prueba de Dickey-Fuller.

```
PP.test(Y_cas, lshort = TRUE)

           Phillips-Perron Unit Root Test

data:  Y_cas
Dickey-Fuller = -4.8805, Truncation lag parameter = 4, p-value = 0.01

PP.test(Y_pob, lshort = TRUE)

           Phillips-Perron Unit Root Test

data:  Y_pob
Dickey-Fuller = 2.5775, Truncation lag parameter = 3, p-value = 0.99
```

Se mantiene el mismo criterio de decisión. En el caso de la serie Y_cas el p-value = 0.01 < 0.05, por lo que con estos resultados vamos a rechazar la hipótesis nula y afirmamos que nuestra serie no cuenta con raíz unitaria (Estacionaria).

Para la serie Y_pob el p-value = 0.99 > 0.05 por ende aceptamos la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria (No estacionaria).

Ejemplo 2 – Raiz unitaria

Prueba de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (KPSS)

Para la prueba KPSS utilizamos la función **kpss.test()** es otra prueba para verificar la estacionariedad de una serie de tiempo. Las hipótesis nula y alternativa para la prueba KPSS son opuestas a las de la prueba ADF. Es decir,

H_0: La serie es ESTACIONARIA en tendencia.
H_1: La serie tiene una raíz unitaria (la serie NO es ESTACIONARIA)

Con esta prueba queremos que el p-value sea mayor al nivel de significancia (0.05) para no rechazar H_0.

.

```
kpss.test(Y_cas)

          KPSS Test for Level Stationarity

data:  Y_cas
KPSS Level = 0.31116, Truncation lag parameter = 4, p-value = 0.1
```

Ejemplo 2 – Raiz unitaria

```
kpss.test(Y_pob)

          KPSS Test for Level Stationarity

data:  Y_pob
KPSS Level = 1.9339, Truncation lag parameter = 3, p-value = 0.01
```

Para la serie Y_cas el p-value = 0.1 > 0.05, de acuerdo a su criterio, aceptamos la hipótesis nula y afirmamos que la serie es Estacionaria.

Pero en el caso de la serie Y_pob el p-value = 0.01 < 0.05 por consiguiente rechazamos la hipótesis nula, es decir, existe raíz unitaria (No estacionaria).

Ejemplo 2 – Raiz unitaria

Contraste de Eliott, Rothenberg y Stock Point Optimal (ERS)

```
Yc_ers <- ur.ers(Y_cas, type = "P-test", model = "constant", lag.max = 1)
summary(Yc_ers)

###############################################
# Elliot, Rothenberg and Stock Unit Root Test #
###############################################

Test of type P-test
detrending of series with intercept

Value of test-statistic is: 0.7674

Critical values of P-test are:
               1pct 5pct 10pct
critical values 1.91 3.17  4.33
```

Se observa que $t_{calculado} = 0.7674 < t_{crítico} = 3.17$, entonces se rechaza la hipótesis nula (H_0), es decir, que la serie es ESTACIONARIA.

Ejemplo 2 – Raiz unitaria

```
Yp_ers <- ur.ers(Y_pob, type = "P-test", model = "constant", lag.max = 1)
summary(Yp_ers)

###############################################
# Elliot, Rothenberg and Stock Unit Root Test #
###############################################

Test of type P-test
detrending of series with intercept

Value of test-statistic is: 2881.021

Critical values of P-test are:
                1pct 5pct 10pct
critical values 1.95 3.11  4.17
```

En este caso el $t_{calculado}$ = 2881.021 > $t_{crítico}$ = 4.17, entonces se acepta la hipótesis nula (H_0), entonces la serie es NO ESTACIONARIA

2. Función de Autocorrelación

- La función de autocorrelación simple (FAS o ACF en inglés) mide la dependencia de una variable con sus propios valores retardados en distintos periodos de tiempo.

- El análisis de autocorrelación es de gran utilidad en el análisis, ajuste y validación de series temporales.

- La fórmula del coeficiente de autocorrelación de orden 1:

$$\rho_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T}\left(Y_t - \overline{Y}\right)\left(Y_{t-1} - \overline{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t - \overline{Y}\right)^2}$$

- El coeficiente de autocorrelación de orden *k*, considerando las variables Y_t y Y_{t-k}, es decir, la variable *Y* retrasada *k* periodos:

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T}\left(Y_t - \overline{Y}\right)\left(Y_{t-k} - \overline{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t - \overline{Y}\right)^2}$$

2. Función de Autocorrelación

- El rango de un coeficiente de autocorrelación de orden 1 es [-1,1], donde:
  - Si $\rho_1 > 0$, la variable *Y(t)* depende de su retardo anterior de forma proporcional.
  - Si $\rho_1 < 0$, la variable *Y(t)* depende de su retardo anterior de forma inversamente proporcional.
  - Si $\rho_1 = 0$, la variable *Y(t)* no depende de su retardo anterior.

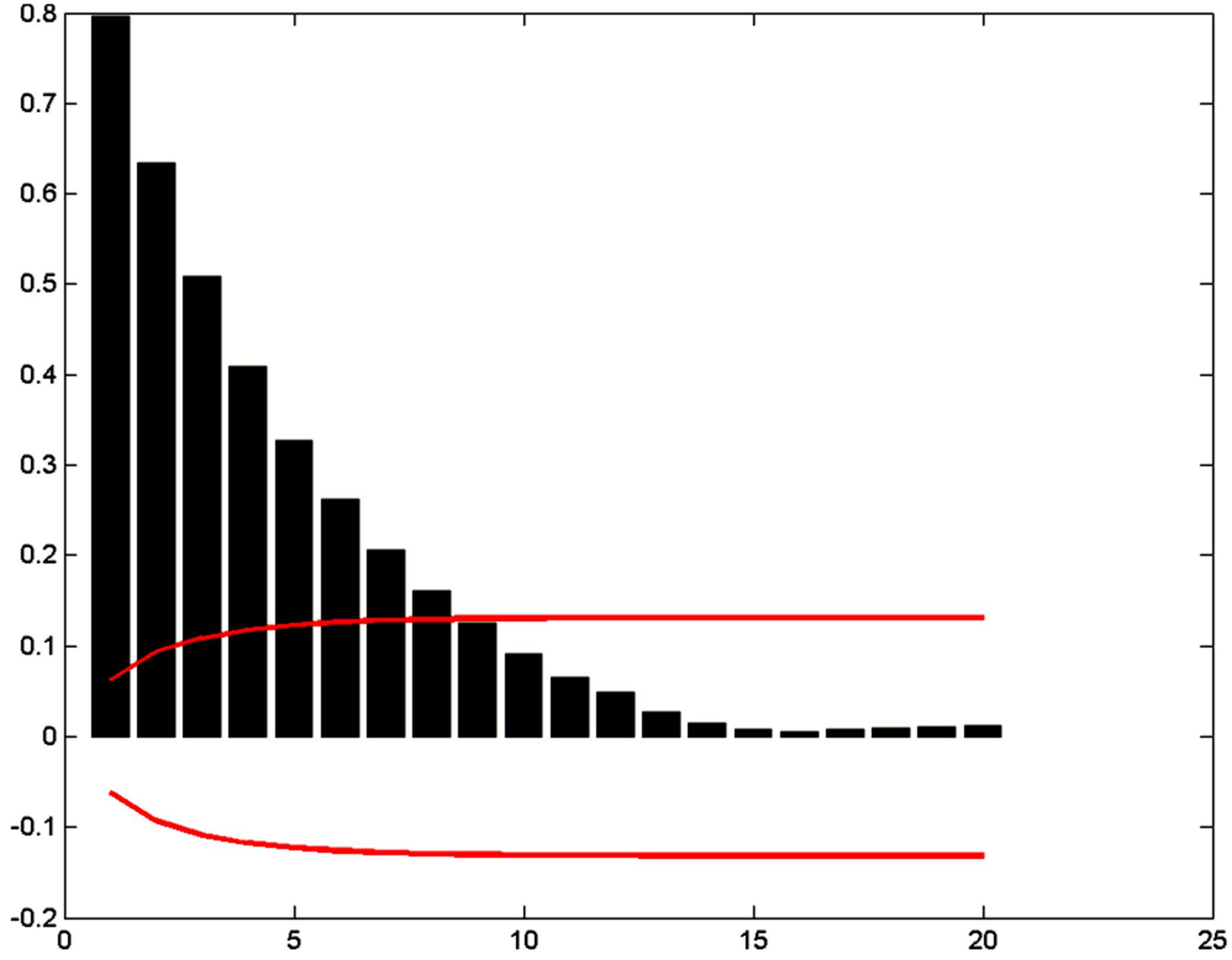
Correlograma

- Es la representación gráfica de los coeficientes de la FAS para distintos retardos de la variable Y_t.
- En el correlograma se define un intervalo de confianza del 95% que permite determinar si los coeficientes son o no significativamente distintos de cero.

$$I_{0.95} \approx \left[-1.96 \cdot \sqrt{1/N} \,,\; 1.96 \cdot \sqrt{1/N} \right]$$

2. Función de Autocorrelación

- Función de Autocorrelación Simple (FAS) o (ACF)



3. Proceso Ruido Blanco

- El proceso estocástico más sencillo es el denominado *Ruido Blanco* que es una secuencia de variables aleatorias de media cero, varianza constante y covarianzas nulas. Se denotará habitualmente por a_t, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$E(a_t) = 0, \quad \forall t \qquad V(a_t) = \sigma^2, \quad \forall t \qquad Cov(a_t a_s) = 0, \quad \forall t \neq s$$

- Así, un proceso ruido blanco, $a_t \sim N(0, \sigma^2)$, es estacionario si la varianza σ^2 es finita con función de autocovarianzas (FACV):

$$\gamma_k = \sigma^2 \,,\quad k = 0 \ \text{ y } \ \gamma_k = 0 \,,\quad k > 0$$

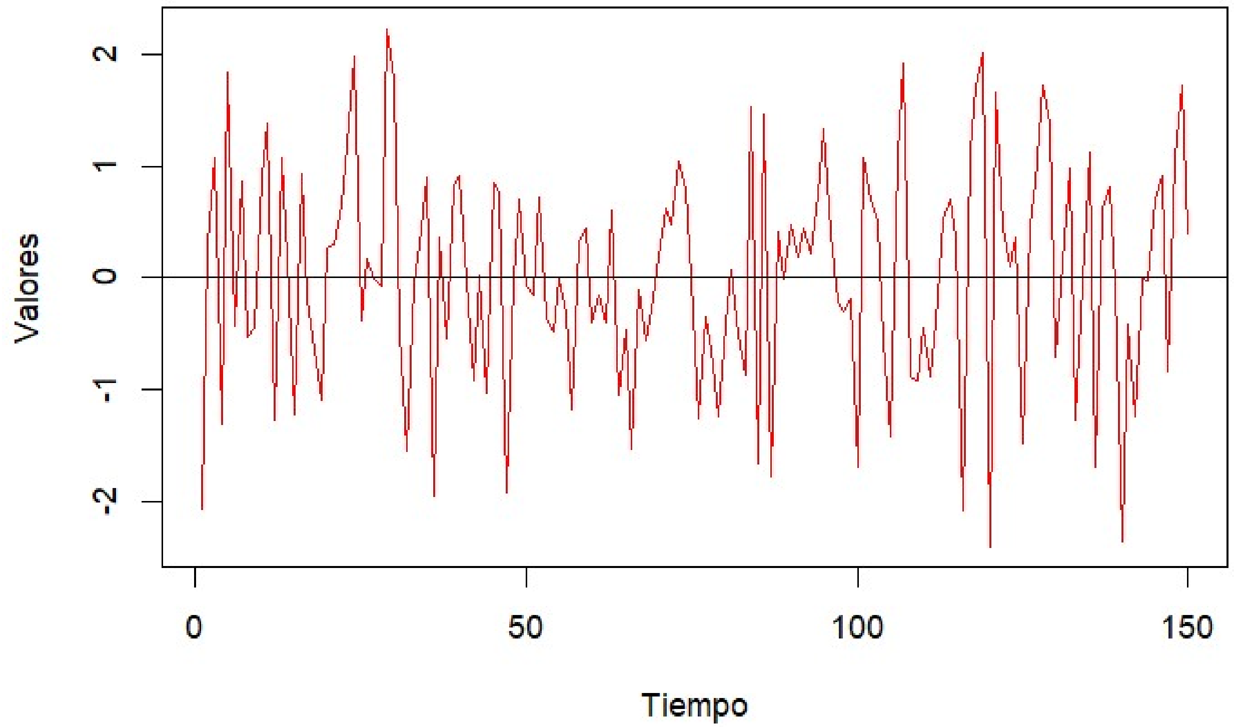
y función de autocorrelación (FAS):

$$\gamma_k = 1 \,,\quad k = 0 \ \text{ y } \ \gamma_k = 0 \,,\quad k > 0$$

Ejemplo 3

Genere un proceso ruido blanco de 150 observaciones independientes que sigan una distribución normal de media 0 y desviación 1, es decir, $Y \sim N(0;\ 1)$. Grafique la serie simulada con su respectivo correlograma.

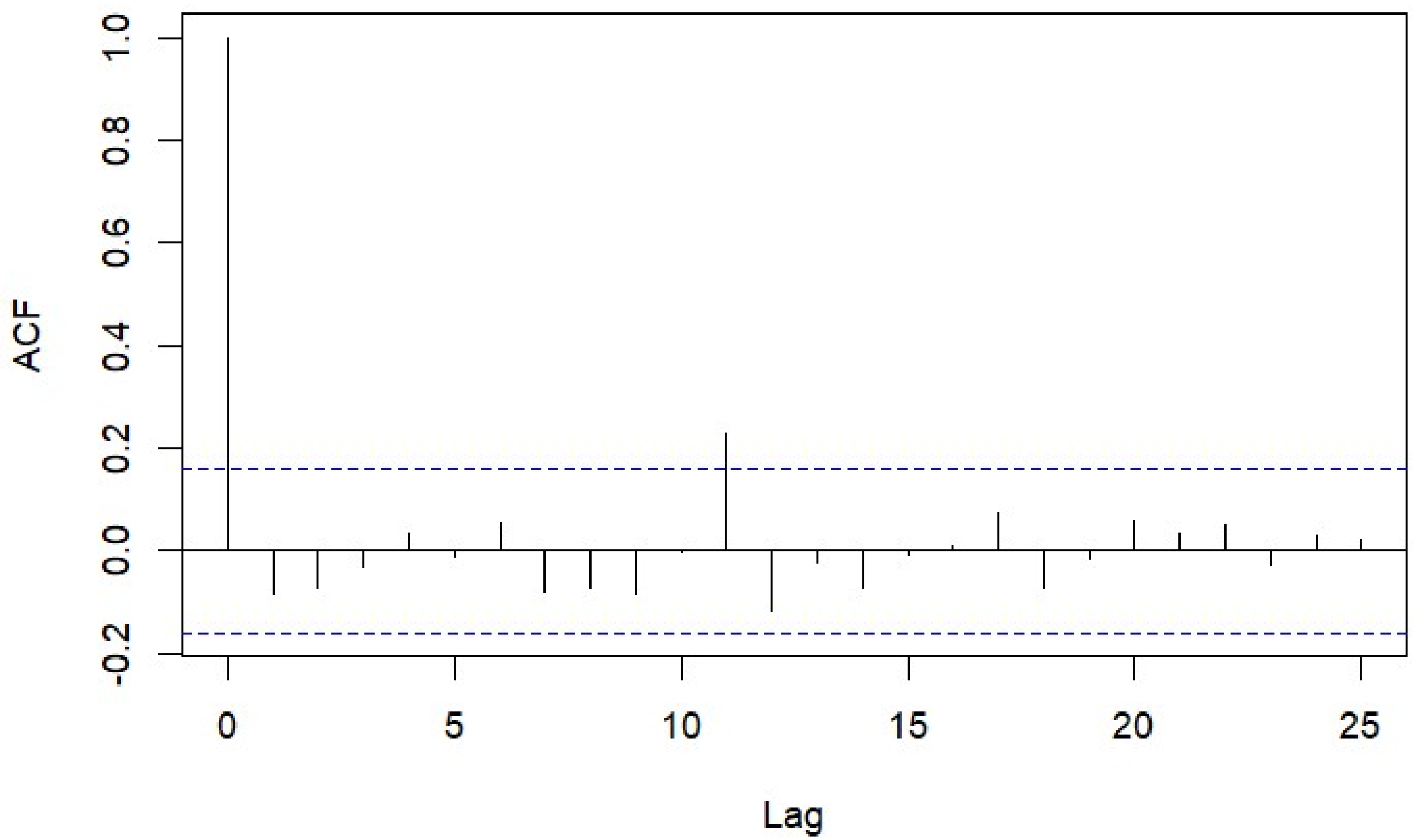
```
Yrb <- rnorm(n = 150, mean = 0, sd = 1)
Yrb_ts <- ts(Yrb)

# Gráfica
plot(Yrb_ts, type = "l", xlab = "Tiempo", ylab = "Valores", col = "red")
abline(h = 0)
```



Ejemplo 3 – Ruido Blanco

Graficamos su correlograma

```
# Correlograma
acf(Yrb_ts, lag.max = 25, main="")
```



4. Operadores de Retardo y Diferencia

Operador de retardo *L*

- El operador de retardos L aplicado a una variable Y_t significa que se retarda en 1 periodo el subíndice a que v a referencia la variable, es decir:

$$LY_t = Y_{t-1}$$

- El significado de L^2Y_t es inmediato, ya que:

$$L^2Y_t = L[LY_t] = L[Y_{t-1}] = Y_{t-2}$$

- En general:

$$L^kY_t = Y_{t-k}$$

4. Operadores de Retardo y Diferencia

PROPIEDADES

a) El operador *L* puede manipularse como si fuera una cantidad algebraica cualquiera:

$$L(cY_t) = cLY_t = cY_{t-1}$$

$$L^k L^s (Y_t) = L^{k+s}(Y_t) = Y_{t-(k+s)} = Y_{t-k-s}$$

b) El operador de retardos identidad es:

$$L^0 = I = 1$$

c) La aplicación del operador de retardos de unidad no altera el periodo de referencia.

$$L^0(Y_t) = Y_t$$

4. Operadores de Retardo y Diferencia

- El operador *L* se puede utilizar para expresar un modelo con retardos. Por ejemplo:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \cdots - \phi_p Y_{t-p} = a_t$$

- Si se aplica el operador *L* se obtendrá

$$\left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p\right) Y_t = a_t$$

- De forma compacta el modelo anterior quedaría expresado del siguiente modo:

$$\phi(L) Y_t = a_t$$

4. Operadores de Retardo y Diferencia

Operador de diferencia Δ

- Si se aplica el operador de diferencia Δ a una variable referida a un momento de tiempo, Y_t :

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

- Si se aplica el operador Δ a ΔY_t se obtendrá:

$$\Delta[\Delta Y_t] = \Delta[Y_t - Y_{t-1}] = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = [Y_t - Y_{t-1}] - [Y_{t-1} - Y_{t-2}]$$

- A este resultado se le denomina segundas diferencias, y se expresa mediante :

$$\Delta^2 Y_t$$

4. Operadores de Retardo y Diferencia

- En general:

t	Y_t	ΔY_t	$\Delta^2 Y_t$	$\Delta^3 Y_t$	$\Delta^4 Y_t$
1	423	-	-	-	-
2	432	9	-	-	-
3	477	45	36	-	-
4	450	-27	-72	-108	-
5	430	-20	7	79	187

- Particularmente en la elaboración de los modelos ARIMA se suele utilizar la terminología "diferencias estacionales de periodo *s*", donde *s* es el intervalo con que se toman las diferencias: 4 en datos trimestrales, 12 en datos mensuales, etc.

- La *s* aparece en este caso como subíndices del símbolo Δ, es decir, Δ_s, para distinguirlos de las diferencias entre periodos consecutivos.

4. Operadores de Retardo y Diferencia

Relación de los operadores

- La relación entre el operador Δ y L es inmediato, ya que $\Delta = 1 - L$.

- Por ejemplo:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - LY_t = (1 - L)Y_t$$

- Igualmente se puede establecer la relación entre el operador estacional de diferencias Δ_s y el operador de retardos, ya que:

$$\Delta_s = 1 - L^s$$

- Por ejemplo:

$$\Delta_{12} Y_t = Y_t - Y_{t-12} = (1 - L^{12})Y_t$$

GRACIAS

https://aulavirtual2.unap.edu.pe/

2024-I