Conception et Pratique de l'Algorithmique

http://www-apr.lip6.fr/~buixuan/cpa2020

Binh-Minh Bui-Xuan

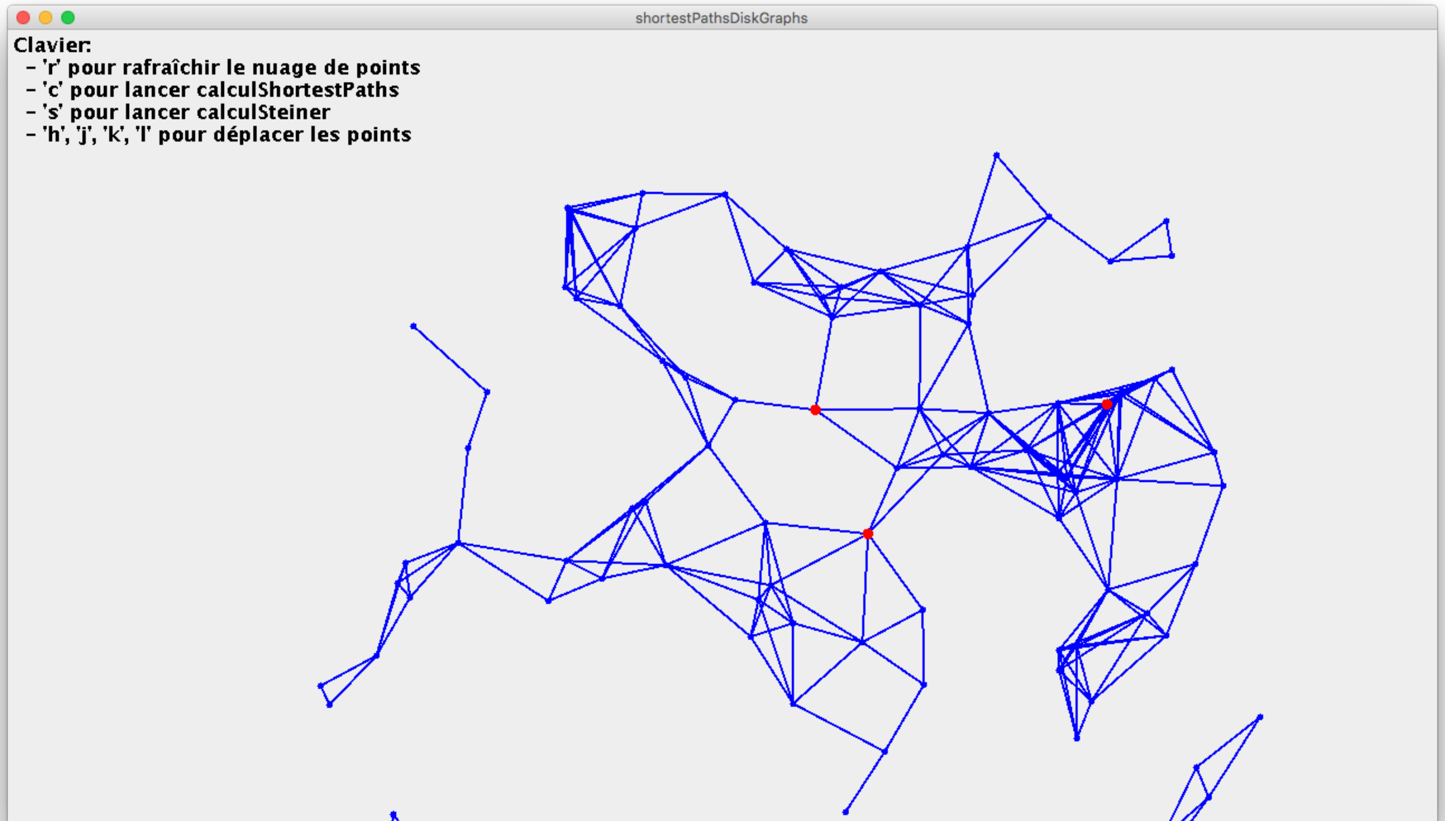
Paris, Avril 2021

Résumé

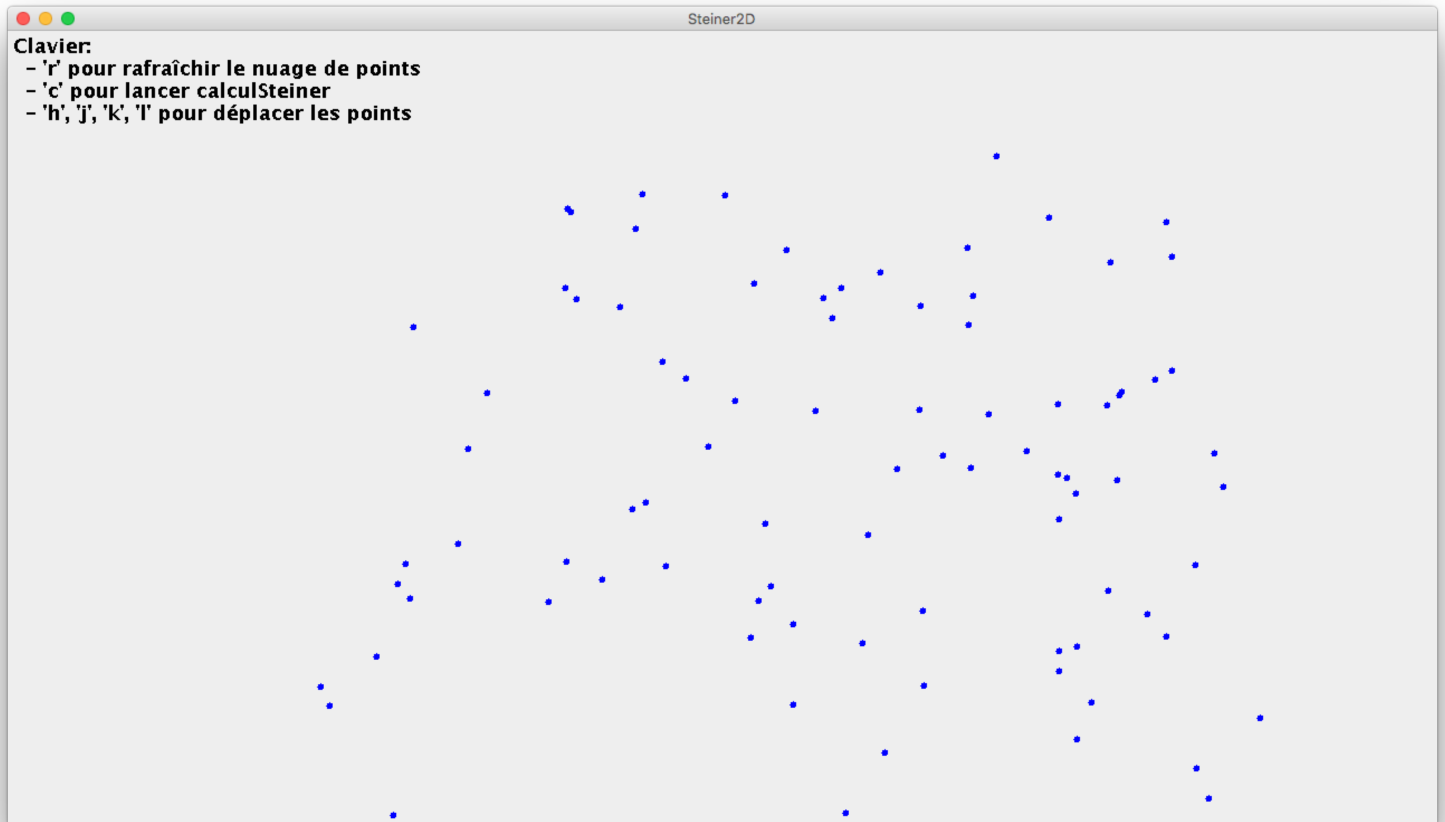
Construction d'arbre :

– arbre couvrant, arbre de Steiner, décomposition arborescente
– programmation dynamique, recherche locale
– concours de programmation

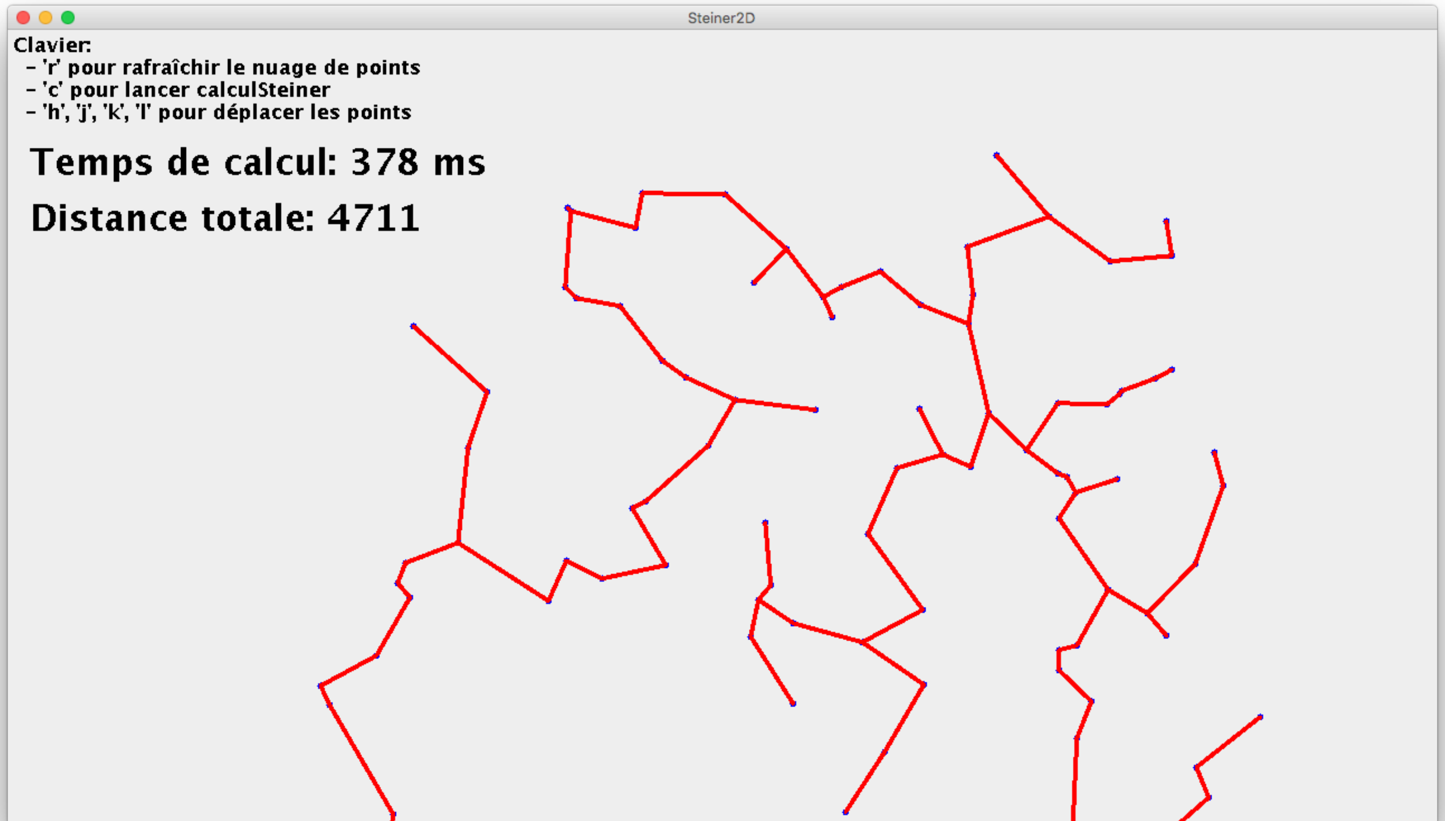
Réseaux connexe



Réseaux connexe



Réseaux connexe



Problème d'arbre couvrant classique

IN : `Points`, une liste de coordonnées de points en 2D

OUT : arbre `MSTree` couvrant tous les points de la liste, de poids total minimum (somme de la distance entre toutes les arêtes). De plus, tous les sommets de `MSTree` doivent appartenir à la liste `Points`.

Problème d'arbre couvrant classique

IN : `Points`, une liste de coordonnées de points en 2D

OUT : arbre `MSTree` couvrant tous les points de la liste, de poids total minimum (somme de la distance entre toutes les arêtes). De plus, tous les sommets de `MSTree` doivent appartenir à la liste `Points`.

EXERCICE : Structure de graphe ?

Solution Kruskal (glouton)

PRINCIPE : trier les arêtes par ordre croissant selon leur poids. Tant que l'ajout d'une arête de cette liste ne crée pas de cycle dans la solution (initialement vide), effectuer cet ajout dans la solution.

Solution Kruskal (glouton)

Principe : trier les arêtes par ordre croissant selon leur poids. Tant que l'ajout d'une arête de cette liste ne crée pas de cycle dans la solution (initialement vide), effectuer cet ajout dans la solution.

Exercice : Pseudo-code ?

Structure de données

Graphe :

- matrice d'adjacence
- liste d'adjacence
- liste des arêtes

Arbre :

- matrice d'adjacence
- liste d'adjacence
- liste des arêtes
- hiérarchie (`noeud`, `sousarbres`)

Structure de données

Graphe :

– matrice d'adjacence
– liste d'adjacence
– liste des arêtes

Arbre :

– matrice d'adjacence
– liste d'adjacence
– liste des arêtes
– hiérarchie (`noeud`, `sousarbres`)

Structure de données : Kruskal

PRINCIPE : avec graphe G en input et arbre T en output :

$$G \rightarrow \text{liste d'arêtes de } G \rightarrow \text{liste d'arêtes de } T \rightarrow \text{hiérarchie}$$

Structure de données : Kruskal

PRINCIPE : avec graphe G en input et arbre T en output :

$$G \to \text{liste d'arêtes de } G \to \text{liste d'arêtes de } T \to \text{hiérarchie}$$

EXERCICE : liste d'arêtes de $T \to$ hiérarchie ?

Problème d'arbre de Steiner

IN : `Points`, une liste de coordonnées de points en 2D

OUT : arbre `Tree` couvrant tous les points de la liste, de poids total minimum (somme de la distance entre toutes les arêtes).

Problème d'arbre de Steiner

IN : `Points`, une liste de coordonnées de points en 2D

OUT : arbre `Tree` couvrant tous les points de la liste, de poids total minimum (somme de la distance entre toutes les arêtes).

EXERCICE : différence avec arbre couvrant classique ?

Rappel express de la théorie de la complexité

P, NP, et *co*-NP

Classe P : l'ensemble de tous les problèmes de décision dont on peut calculer en temps polynomial en la taille de l'entrée (Input) et de la sortie (Output) la réponse (Oui/Non) au problème.

Classe NP : l'ensemble de tous les problèmes de décision dont on peut vérifier en temps polynomial en la taille de l'entrée (Input) et de la sortie (Output), moyennant un certain certificat, si la réponse est bien positive (Oui) au problème.

P, NP, et *co*-NP

Classe P : l'ensemble de tous les problèmes de décision dont on peut calculer en temps polynomial en la taille de l'entrée (Input) et de la sortie (Output) la réponse (Oui/Non) au problème.

Classe *co*-NP : l'ensemble de tous les problèmes de décision dont on peut vérifier en temps polynomial en la taille de l'entrée (Input) et de la sortie (Output), moyennant un certain certificat, si la réponse est bien négative (Non) au problème.

NP-complétude

Propriété triviale : $P \subseteq NP \cap co\text{-}NP$.

Théorème : $P = NP \cap co\text{-}NP$.

Question : qu'y a-t-il dans $NP \setminus P$?

NP-complétude

Propriété triviale : $P \subseteq NP \cap co\text{-}NP$.

Théorème : $P = NP \cap co\text{-}NP$.

Question : qu'y a-t-il dans $NP \setminus P$?

Théorème (Cook) : ***Si*** $SAT \in P$ ***alors*** $NP \subseteq P$.

Définition : $NP\text{-}complet = \{Prob : \textbf{\textit{Si}}\ Prob \in P\ \textbf{\textit{alors}}\ NP \subseteq P\}$.

Wanted (1m\$) : $P = NP$ ou $P \neq NP$?

Revenons à nos moutons (arbres)

Problème d'arbre de Steiner – décision

IN : `Points`, une liste de coordonnées de points en 2D ; et `B` un réel.

OUT : existe-t-il un arbre `Tree` couvrant tous les points de la liste, de poids inférieur à `B` ?

EXERCICE : appartenance à NP ? à *co*-NP ?

Problème d'arbre de Steiner – décision

In : `Points`, une liste de coordonnées de points en 2D ; et `B` un réel.

Out : existe-t-il un arbre `Tree` couvrant tous les points de la liste, de poids inférieur à `B` ?

Exercice : appartenance à NP ? à *co*-NP ?

Théorème : ***la version de décision du problème d'arbre de Steiner est NP-complet.***

Problème d'arbre de Steiner

IN : `Points`, une liste de coordonnées de points en 2D

OUT : arbre `Tree` couvrant tous les points de la liste, de poids total minimum (somme de la distance entre toutes les arêtes).

EXERCICE : implémentation du test d'appartenance à NP ?

N.B. : problème de décision NP-complet $\rightarrow$ problème d'optimisation associé est appelé NP-difficile

Heuristiques gloutonnes

PRINCIPE : ajouter des points à la liste `Points`, appeler Kruskal et comparer le résultat avec `CurrentTree`. Mettre à jour. Répéter...

NAÏF : essayer tous les coordonnées possibles.

Heuristiques gloutonnes

PRINCIPE : ajouter des points à la liste `Points`, appeler Kruskal et comparer le résultat avec `CurrentTree`. Mettre à jour. Répéter...

NAÏF : essayer tous les coordonnées possibles.

NAÏF AMÉLIORÉ : pour tout triangle qui ne contient aucun autre point, essayer tous les coordonnées possibles.

EXERCICE : mieux ?

Conclusion, question

CONCLUSION :

- ARBRECOUVRANTMIN algorithme Kruskal en $O(m \log n)$
- ARBRESTEINER NP-difficile
  - heuristique : recherche locale
  - optimisation locale : à l'aveugle, barycentre, Torricelli-Fermat

QUESTION :

- implantation ? (voir TME)