Matemáticas Discretas
Departamento de Matemática
Coordinación

Emanuelle Parra Rodríguez
`emanuelle.parra@ufide.ac.cr`
Coordinador de curso

Lógica y Teoría de Conjuntos

Contenidos

1. Lógica matemática

El objetivo de esta unidad desarrollar un lenguaje formal de simbolización matemática y asignar el valor de verdad (validar) a distintas proposiciones, con la finalidad de obtener conclusiones *válidas* a partir de *supuestos o premisas*. Estas validaciones deben partir de argumentos sólidos que se construyen en correspondencia con el lenguaje matemático.

Definición 1.1: Proposición lógica

Una proposición lógica (o enunciado) corresponde a una expresión a la que se le puede asignar un valor de verdad. Es decir, puede tomar el valor de verdad falso (0), o bien verdadero (1).

Las proposiciones generalmente se denotan con letras mayúsculas y se utilizan los dos puntos (:) para asignar una proposición a una letra. El símbolo $\equiv$ se refiere a una relación de igualdad bajo el criterio de .$^{\text{eq}}$uivalencia", en el caso de proposiciones permite comparar los valores de verdad correspondientes. De modo que, si P es una proposición verdadera y Q una proposición falsa, se denota

$$P \equiv 1 \qquad Q \equiv 0$$

Ejemplo 1.1: Proposiciones lógicas

Son proposiciones lógicas:

- P :Todos los gatos tienen cuatro patas.
- Q : Está lloviendo en este momento.
- $R : 2 - 3 > 0$

Ejemplo 1.2

1. P : En Guanacaste casi siempre hace mucho calor.
2. Q : El hielo es caliente.
3. R : 17 es un número primo.
4. S : Existe un único número real x tal que $x^2 \leq 0$

Solución

1. En el caso de la proposición P se sabe que, bajo el contexto cotidiano, en Guanacaste casi siempre hace mucho calor, de modo que $P \equiv 1$.
2. Dado que el hielo no es caliente, $Q \equiv 0$.
3. Se sabe que los 17 es primo, de modo que $R \equiv 1$. Recuerde que los números primos únicamente se pueden dividir por 1 y por si mismos.

4. La proposición es verdadera, ya que el único número real x que cumple que $x^2 \leq 0$ es $x = 0$; cualquier otro número al cuadrado es mayor que 0.

$\square$

Existen proposiciones más elaboradas que las que se han mostrado hasta el momento, las cuales son denominadas *Proposiciones compuestas.* Estas resultan de la combinación de varias proposiciones simples unidas por las llamadas *conectivas lógicas* que serán descritas a continuación.

1.1. Conectivas lógicas

En lo que se sigue considere P y Q como proposiciones arbitrarias (pueden tomar cualquier valor de verdad).
Se definen a continuación las conectivas lógicas y los respectivos valores de verdad para las proposiciones compuestas, por medio de una *tabla de verdad,* la cual muestra todos los posibles valores para una proposición compuesta.

Definición 1.2: Negación

La negación de P, que se escribe $\neg P$ o bien P' y se lee "no P". Su tabla de verdad es:

P	¬ P
1	0
0	1

La negación de expresiones que utilicen ciertos operadores matemáticos puede ser expresada con otros equivalentes:

Símbolo	$=$	$\leq$	$\geq$	$>$	$<$
Negación	$\neq$	$>$	$<$	$\leq$	$\geq$

Ejemplo 1.3

En cada caso represente la proposición $\neg P$ y determine su valor de verdad.

1. $P : 2^3 - 2 > 10$
2. P : 17 es un número primo
3. P : todos los números enteros x satisfacen que $x - 2 \neq 4$

Solución

1. Para negar $2^3 - 2 > 10$ considere que un número a no es mayor que un número b si a es menor o igual que b, así

$$\neg \left(2^3 - 2 > 10\right) \equiv 2^3 - 2 \leq 10 \equiv 1$$

2. La negación queda dada por $\neg P$: 17 no es un número primo. No podemos asegurar que un número que no sea primo es compuesto, ya que el 0 y el 1 no son primos ni compuestos (el

primer primo es el 2). En este caso $P \equiv 0$

3. En primero lugar, observe que la proposición P es falsa ya que si $x = 6$ no se cumple que $x - 2 \neq 4$, note que $6 - 2 = 4$. Entonces $\neg P \equiv 1$ para

$$\neg P : \text{algún número entero } x \text{ satisfacen que } x - 2 = 4$$

□

Definición 1.3: Conjunción

La conjunción de P y Q, denotada $P \wedge Q$, se lee "P y Q", y su tabla de verdad es:

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Definición 1.4: Disyunción inclusiva

La disyunción de P y Q, que se escribe $P \vee Q$, se lee "P o Q" . Su tabla de verdad es:

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ejemplo 1.4

En cada uno de los siguientes enunciados:

1. Determine las proposiciones simples involucradas.
2. Simbolice el enunciado como una proposición compuesta, a partir las proposiciones simples determinadas.
3. Determine el valor de verdad de cada proposición compuesta.

   a) *Los perros no vuelan o los gatos ladran, y los caballos comen fuego.*

   b) *La luna es de queso o, el sol no está mojado y los perros ladran.*

Solución

Para la proposición P :*Los perros no vuelan o los gatos ladran, y los caballos comen fuego*, podemos definir las proposiciones simples:

$$\begin{aligned} P_1 &: \textit{Los perros vuelan.} \\ P_2 &: \textit{Los gatos ladran.} \\ P_3 &: \textit{Los caballos comen fuego.} \end{aligned}$$

Otra alternativa es definir las proposiciones como negaciones, por ejemplo, considerar P_1 como los perros no vuelan, en lugar de considerarla afirmativa; sin embargo, el resultado que se obtiene en el análisis será equivalente. En este caso, para evitar ambiguedades, vamos a definir las proposiciones de forma afirmativa, según el contexto cotidiano.
Se puede simbolizar P de la forma

$$P : (\neg P_1 \vee P_2) \wedge P_3$$

donde se satisface que $P_1 \equiv 0,\ P_2 \equiv 0,\ P_3 \equiv 0,$ por lo que

$$\begin{aligned} P &\equiv (\neg P_1 \vee P_2) \wedge P_3 \\ &\equiv (\neg 0 \vee 0) \wedge 0 \\ &\equiv (1 \vee 0) \wedge 0 \\ &\equiv 1 \wedge 0 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

Para la proposición Q :*La luna es de queso o, el sol no está mojado y los perros ladran*, podemos definir las proposiciones simples:

$$\begin{aligned} Q_1 &: \textit{La luna es de queso.} \\ Q_2 &: \textit{el sol está mojado.} \\ Q_3 &: \textit{Los perros ladran.} \end{aligned}$$

Se puede simbolizar Q de la forma

$$Q : Q_1 \vee (\neg Q_2 \wedge Q_3)$$

donde se satisface que $Q_1 \equiv 0,\ Q_2 \equiv 0,\ Q_3 \equiv 1,$ por lo que

$$\begin{aligned} Q &\equiv Q_1 \vee (\neg Q_2 \wedge Q_3) \\ &\equiv 0 \vee (\neg 0 \wedge 1) \\ &\equiv 0 \vee (1 \wedge 1) \\ &\equiv 0 \vee 1 \\ &\equiv 1 \end{aligned}$$

□

Definición 1.5: Implicación o condicional

La implicación (o condicional) de P a Q, denotada $P \to Q$, se lee "si P entonces Q", "P implica Q", "P solo si Q". Su tabla de verdad es:

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

En este caso a P se le denomina *hipótesis, antecedente o causa,* y respectivamente a Q, *conclusión, consecuente o efecto.* En algunos casos la proposición $P \to Q$ se lee "P es suficiente para Q" o "Q es necesario para P"

Definición 1.6: Bicondicional o doble implicación

El bicondicional de P y Q, denotado $P \leftrightarrow Q$, se lee "P si y solo si Q", o bien "P es necesario y suficiente para Q". Esta conectiva genera la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ejemplo 1.5

Dadas las siguientes proposiciones

$$\begin{aligned} P &: \text{ Hay vida en la luna} \\ Q &: \ 2+1=3 \end{aligned}$$

Valide la proposición compuesta $(P \vee \neg Q) \leftrightarrow [(Q \wedge P) \to Q]$

Solución
Se sabe que $P \equiv 0$ y $Q \equiv 1$, de modo que

$$\begin{aligned} (P \vee \neg Q) &\leftrightarrow [(Q \wedge P) \to Q] \\ &\equiv (0 \vee \neg 1) \leftrightarrow [(1 \wedge 0) \to 1] \\ &\equiv (0 \vee 0) \leftrightarrow [(1 \wedge 0) \to 1] \\ &\equiv 0 \leftrightarrow [0 \to 1] \\ &\equiv 0 \leftrightarrow 1 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.6

Determine una asignación de valores de verdad para P, Q, R, S y T, que haga falsa la proposición:

$$(\neg P \to Q) \to \neg\,[[P \to (R \vee S)] \wedge \neg\,[S \to (Q \vee T)]]$$

Solución

La proposición tiene como última conectiva una implicación, de modo que será falsa si $\neg P \to Q \equiv 1$ (*) y $\neg\,[[P \to (R \vee S)] \wedge \neg\,[S \to (Q \vee T)]] \equiv 0$.
Para que $\neg\,[[P \to (R \vee S)] \wedge \neg\,[S \to (Q \vee T)]] \equiv 0$ se debe cumplir que

$$[P \to (R \vee S)] \wedge \neg\,[S \to (Q \vee T)] \equiv 1$$

; es decir, que

$$P \to (R \vee S) \equiv 1 \text{ y } \neg\,[S \to (Q \vee T)] \equiv 1$$

Ahora, $\neg\,[S \to (Q \vee T)] \equiv 1$ si $S \to (Q \vee T) \equiv 0$, lo que se cumple si $S \equiv 1$ y $Q \vee T \equiv 0$. En este caso se cumple que

$$S \equiv 1,\ Q \equiv 0 \text{ y } T \equiv 0$$

De (*) $\neg P \to Q \equiv 1$, con $Q \equiv 0$, se tiene que $\neg P \equiv 0$; así, $P \equiv 1$.
Dado que $S \equiv 1$, entonces $P \to (R \vee S) \equiv 1$ se cumple independientemente de R; es decir, R es arbitraria (puede ser 1 o bien 0, sin que afecte). $\square$

Ejemplo 1.7

Considere las siguientes proposiciones

$$\begin{array}{lcl} S & : & \text{Si hay elefantes en Marte y el fuego es frío, entonces 2+1=4} \\ T & : & \text{Hay elefantes en Marte, y si el fuego es frío entonces 2+1=4} \end{array}$$

De acuerdo con los datos de las proposiciones anteriores, desarrolle lo que se le solicita en cada caso.

a) Identifique las proposiciones simples y simbolice las proposiciones compuestas.

b) Valide las proposiciones compuestas S y T.

Solución

Considere S_1 : *Hay elefantes en marte,* S_2 : *El fuego es frío* y $S_3 : 2+1=4$. Se tiene que $S : (S_1 \wedge S_2) \to S_3$. Para validar a S considere:

$$\begin{aligned} S &\equiv (S_1 \wedge S_2) \to S_3 \\ &\equiv (0 \wedge 0) \to 0 \\ &\equiv 0 \longrightarrow 0 \\ &\equiv 1 \end{aligned}$$

Considere que $T : S_1 \wedge (S_2 \to S_3)$, de modo que

$$\begin{aligned} T &\equiv 0 \wedge (0 \to 0) \\ &\equiv 0 \wedge 1 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

□

1.2. Construcción de tablas de verdad

Para mostrar todos los posibles resultados de una proposición compuesta se emplean *tablas de verdad.* Este método facilita el análisis de resultados según las características de interés y la clasificación de la proposición en estudio.
Las proposiciones compuestas se pueden clasificar según los valores de verdad de la siguiente forma.

Clasificación de proposiciones compuestas

Tautología: Si la proposición es verdadera para todos los posibles valores de las proposiciones simples que la conforman.
Falacia o contradicción:Si la proposición es falsa para todos los posibles valores de las proposiciones simples que la conforman.
Contingencia o eventualidad: Cualquier otro caso que no sea Tautología ni Falacia.

Ejemplo 1.8

Construya la tabla de verdad correspondiente a la proposición lógica y clasifique en tautología, contradicción o contingencia.

$$[P \to (Q \to R)] \leftrightarrow [(P \wedge \neg R) \to \neg Q]$$

Solución
Para efectos de simplificar la dimensión de la tabla de verdad vamos a definir $A : [P \to (Q \to R)]$ y $B : [(P \wedge \neg R) \to \neg Q]$, de modo que debemos analizar los valores de verdad de $A \leftrightarrow B$.

P	Q	R	$\neg Q$	$\neg R$	$Q \to R$	$P \wedge \neg R$	A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1

Se concluye que $[P \to (Q \to R)] \leftrightarrow [(P \wedge \neg R) \to \neg Q]$ es una tautología. □

Ejemplo 1.9

Construya la tabla de verdad correspondiente a la proposición lógica y clasifique en tautología, contradicción o contingencia.

$$[P \to (Q \vee R)] \wedge [\neg (P \to Q) \wedge R]$$

Solución
Para efectos de simplificar la dimensión de la tabla de verdad vamos a definir $A : [P \to (Q \vee R)]$ y $B : [\neg (P \to Q) \wedge R]$, de modo que debemos analizar los valores de verdad de $A \wedge B$.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \to Q$	$\neg (P \to Q)$	A	B	$A \wedge B$
0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0

Se concluye que $[P \to (Q \vee R)] \wedge [\neg (P \to Q) \wedge R]$ es una contingencia; basta con que haya un resultado que sea distinto a los demás para tener esta conclusión. $\square$

Ejemplo 1.10

Construya la tabla de verdad correspondiente a la proposición lógica y clasifique en tautología, contradicción o contingencia.

$$(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$$

Solución
Para efectos de simplificar la dimensión de la tabla de verdad vamos a denotar $A : (P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$, de modo que debemos analizar los valores de verdad de A.

P	Q	$\neg Q$	$P \to Q$	$P \wedge \neg Q$	A
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0

Se concluye que $(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$ es una falacia o contradicción. $\square$
A partir de estas clasificaciones se tiene la siguiente definición.

Definición 1.7

1. Se dice que **P implica lógicamente a Q** si y solo si $P \to Q$ es una tautología. En tal caso se escribe $P \Rightarrow Q$.
2. Se dice que **P es lógicamente equivalente a Q** si y solo si $P \leftrightarrow Q$ es una tautología. En tal caso se escribe $P \Leftrightarrow Q$ o $P \equiv Q$.

Ejemplo 1.11

Determine, por medio de tablas de verdad, si $P \to Q$ es lógicamente equivalente a $\neg P \vee Q$.

Solución

Para confirmar la equivalencia lógica debemos determinar si $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ es una tautología. Veamos:

P	Q	$\neg P$	$P \to Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

En efecto, $P \to Q$ es lógicamente equivalente a $\neg P \vee Q$. En este caso la expresión $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ o bien, $(P \to Q) \equiv (\neg P \vee Q)$, es verdadera. □

Ejemplo 1.12

Muestre que $P \to Q$ implica lógicamente $\neg Q \to \neg P$.

Prueba

Mostremos que $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ es una tautología. Veamos:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$\neg Q \to \neg P$	$(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Por lo que se satisface que $P \to Q$ implica lógicamente $\neg Q \to \neg P$. En este caso la proposición $(P \to Q) \Rightarrow (\neg Q \to \neg P)$ es verdadera. ■

Ejemplo 1.13:

Verifique si $P \wedge Q \wedge R$ implica lógicamente $P \wedge (Q \vee \neg R)$.

Solución

Para que se cumpla la implicación lógica se debe comprobar que $(P \wedge Q \wedge R) \rightarrow [P \wedge (Q \vee \neg R)]$ es una tautología. Veamos:

Sean $A : P \wedge Q \wedge R$ y $B : P \wedge (Q \vee \neg R)$

P	Q	R	$\neg R$	$Q \vee \neg R$	A	B	$A \rightarrow B$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1

Se verifica que $(P \wedge Q \wedge R) \Rightarrow [P \wedge (Q \vee \neg R)]$ es válida. $\square$

Ejercicio 1.1

Muestre que $\neg Q \rightarrow \neg P$ implica lógicamente $P \rightarrow Q$

1.3. Leyes de la lógica

A partir del concepto de tautología es posible generalizar ciertos resultados que son expresados en leyes o fórmulas, que permiten simplificar expresiones lógicas y conjeturar nuevos resultados. Estas leyes se exponen en la siguiente tabla.

Leyes de la lógica

Sean P, Q y R proposiciones arbitrarias. Se satisfacen las siguientes leyes.

Nombre	**Ley**
Implicación y disyunción (ID)	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
Contrapositiva (CP)	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$
Doble Negación (DN)	$\neg\neg P \equiv P$
De Morgan (DM)	$\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Conmutatividad (Con)	$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Asociatividad (Aso)	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$ $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$
Distributividad (Dis)	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Idempotencia (Idem)	$P \wedge P \equiv P$ $P \vee P \equiv P$
Neutro (Ne)	$P \vee 0 \equiv P$ $P \wedge 1 \equiv P$
Inverso (Inv)	$P \vee \neg P \equiv 1$ $P \wedge \neg P \equiv 0$
Dominación (Dom)	$P \vee 1 \equiv 1$ $P \wedge 0 \equiv 0$
Absorción (Abs)	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$ $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$

Ejemplo 1.14

Simplifique al máximo la siguiente expresión

$$[P \vee \neg (\neg Q \vee \neg S)] \vee \neg (Q \vee \neg S)$$

Solución

$[P \vee \neg(\neg Q \vee \neg S)] \vee \neg(Q \vee \neg S)$	Justificación
$\equiv [P \vee (\neg\neg Q \wedge \neg\neg S)] \vee (\neg Q \wedge \neg\neg S)$	DM
$\equiv [P \vee (Q \wedge S)] \vee (\neg Q \wedge S)$	DN
$\equiv P \vee [(Q \wedge S) \vee (\neg Q \wedge S)]$	Aso
$\equiv P \vee [(Q \vee \neg Q) \wedge S]$	Dis
$\equiv P \vee [1 \wedge S]$	Inv
$\equiv P \vee S$	Ne

□

Ejemplo 1.15

Demuestre la siguiente equivalencia lógica.

$$[[Q \to (R \wedge S)] \vee \neg[Q \to (R \wedge S)]] \to P \equiv P$$

Prueba
Partimos de un miembro y por medio de equivalencias llegamos al otro.

$[[Q \to (R \wedge S)] \vee \neg[Q \to (R \wedge S)]] \to P$	Justificación
$\equiv 1 \to P$	Inv
$\equiv \neg 1 \vee P$	ID
$\equiv 0 \vee P$	
$\equiv P$	Ne

■

Ejemplo 1.16

Demuestre la siguiente equivalencia lógica.

$$[(Q' \vee P) \wedge [(P' \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]']' \equiv P' \wedge Q$$

Prueba
Partimos de un miembro y por medio de equivalencias llegamos al otro.

$[(Q' \vee P) \wedge [(P' \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]']'$	Justificación
$\equiv [(Q' \vee P) \wedge [(P' \wedge Q) \wedge (R \wedge (P \vee R))]']'$	Aso
$\equiv [(Q' \vee P) \wedge [(P' \wedge Q) \wedge R]']'$	Abs
$\equiv [(Q' \vee P) \wedge [(P' \wedge Q)' \vee R']]'$	DM
$\equiv [(Q' \vee P) \wedge [(P \vee Q') \vee R']]'$	DM y DN
$\equiv [\boxed{(Q' \vee P)} \wedge [\boxed{(Q' \vee P)} \vee R']]'$	Con
$\equiv (Q' \vee P)'$	Abs
$\equiv P' \wedge Q$	DM y Con

■

Observación: recuerde que la negación de una proposición P puede escribirse P' o bien $\neg P$

1.4. Inferencias Lógicas

La inferencia es un proceso de razonamiento lógico que consiste en validar una conclusión, a partir de una o más hipótesis (premisas) sujetas a un conjunto de reglas de deducción (leyes lógicas y leyes inferenciales).
Utilizaremos el símbolo $\therefore$ para denotar *conclusión,* este se lee "por lo tanto".
En general el procedimiento para probar la proposición

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

se puede esquematizar:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

donde P_1, P_2,..., P_n denotan las hipótesis (se suponen verdaderas) necesarias para probar Q, a partir de pasos que se apoyen de las siguientes inferencias lógicas elementales.

Inferencias lógicas

Nombre	**Inferencia**
Simplificación (Simp)	$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$ o bien $\dfrac{P \wedge Q}{\therefore Q}$
Adjunción (Adj)	$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline \therefore P \wedge Q \end{array}$
Adición (Adi)	$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$ para cualquier Q
Modus Ponens (MP)	$\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ P \\ \hline \therefore Q \end{array}$
Modus Tollens (MT)	$\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline \therefore \neg P \end{array}$
Silogismo disyuntivo (SD)	$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline \therefore Q \end{array}$
Silogismo hipotético (SH)	$\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow R \\ \hline \therefore P \rightarrow R \end{array}$

Ejemplo 1.17

Represente el siguiente enunciado usando para ello notación lógica, identifique cada proposición simple y enuncie en forma de teorema la inferencia lógica dada.

Si Juan participa como jurado, entonces saldrá de viaje y deberá comprar un traje nuevo. Pero salió de viaje o no compra un traje nuevo. Por lo tanto, Juan participa como jurado.

Solución
Para representar el enunciado en notación lógica primero identificamos las proposiciones simples involucradas. Defina

$$\begin{array}{lcl} P & : & \textit{Juan participa como jurado.} \\ Q & : & \textit{Juan sale de viaje.} \\ R & : & \textit{Juan compra un traje nuevo.} \end{array}$$

De este modo podemos representar el enunciado por medio de la inferencia:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow (Q \wedge R) \\ Q \vee \neg R \\ \hline \therefore P \end{array}$$

□

Ejemplo 1.18

Represente el siguiente enunciado usando para ello notación lógica, identifique cada proposición simple y enuncie en forma de teorema la inferencia lógica dada.

Si Tomás tiene diecisiete años, entonces Tomás tiene la misma edad que Juana. Si Joaquín tiene distinta edad que Tomás, entonces Joaquín tiene distinta edad que Juana. Tomás tiene diecisiete años y Joaquín tiene la misma edad que Juana. Por tanto, Joaquín tiene la misma edad que Tomás y Tomás la misma que Juana.

Solución
Para representar el enunciado en notación lógica primero identificamos las proposiciones simples involucradas. Defina:

$$\begin{array}{lcl} P & : & \textit{Tomás tiene diecisiete años.} \\ Q & : & \textit{Tomás tiene la misma edad que Juana.} \\ R & : & \textit{Joaquín tiene la misma edad que Tomás.} \\ S & : & \textit{Joaquín tiene la misma edad que Juana.} \end{array}$$

De este modo podemos representar el enunciado por medio de la inferencia:

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ \neg R \to \neg S \\ P \wedge S \\ \hline \therefore R \wedge Q \end{array}$$

□

Ejemplo 1.19

Demuestre S a partir de $R \to Q$, P, $\neg(P \wedge Q)$ y $R \vee S$.

Prueba

Desarrollo	**Justificación**
1. $R \to Q$	Hipótesis
2. P	Hipótesis
3. $\neg(P \wedge Q)$	Hipótesis
4. $R \vee S$	Hipótesis
5. $\neg P \vee \neg Q$	DM de 3.
6. $\neg Q$	SD de 2. y 5.
7. $\neg R$	MT de 1. y 6.
8. S	SD de 4. y 7.

■

Ejemplo 1.20

Muestre mediante leyes de inferencia y equivalencia la inferencia:

$$\begin{array}{l} P \to (Q \vee R) \\ Q \to R \\ P \vee S \\ \neg R \\ \hline \quad \therefore T \to S \end{array}$$

Prueba

Desarrollo	**Justificación**
1. $P \to (Q \vee R)$	Hipótesis
2. $Q \to R$	Hipótesis
3. $P \vee S$	Hipótesis
4. $\neg R$	Hipótesis
5. $\neg Q$	MT de 2. y 4.
6. $\neg Q \wedge \neg R$	Adj de 4. y 5.
7. $\neg (Q \vee R)$	DM de 6. (ley lógica)
8. $\neg P$	MT de 1. y 7.
9. S	SD de 3. y 8.
10. $S \vee \neg T$	Adi de 9.
11. $\neg T \vee S$	Con de 10 (ley lógica)
12. $T \to S$	ID de 11. (ley lógica)

■

Ejemplo 1.21

Utilizando proposiciones simples, escriba el siguiente enunciado en forma simbólica y demuestre la validez de la conclusión.

Si no estudio esta noche, entonces iré a la fiesta de Carlos. Pero, no entiendo la materia. No pasaré el examen, si no entiendo la materia. No ire a la fiesta de Carlos o pasaré el examen. Por lo tanto, estudio esta noche

Solución
Considere las proposiciones simples:

$$\begin{aligned} P &: \text{Estudio en la noche.} \\ Q &: \text{Iré a la fiesta de Carlos.} \\ R &: \text{Entiendo la materia.} \\ S &: \text{Pasaré el examen.} \end{aligned}$$

Podemos representar a partir de estas, el enunciado como la siguiente inferencia.

$$\begin{array}{l} \neg P \to Q \\ \neg R \\ \neg R \to \neg S \\ \neg Q \vee S \\ \hline \quad \therefore P \end{array}$$

Validación:

Desarrollo	**Justificación**
1. $\neg P \to Q$	Hipótesis
2. $\neg R$	Hipótesis
3. $\neg R \to \neg S$	Hipótesis
4. $\neg Q \vee S$	Hipótesis
5. $\neg S$	MP de 2. y 3.
6. $\neg Q$	SD de 4. y 5.
7. $\neg\neg P$	MT de 1. y 6.
8. P	DN de 7. (ley lógica)

□

1.5. Cuantificadores

En esta unidad se estudia la cuantificación de elementos que satisfacen ciertas proposiciones. Esto a partir de la formalización del lenguaje matemático y las proposiciones lógicas vistas anteriormente.

Definición 1.8: Predicado

Un predicado o proposición abierta es una proposición que depende del valor de asignación de una o más variables en un conjunto específico.

Ejemplo 1.22

Determine el valor de verdad para el predicado $P(x) : x^2 - 4 = 0$ definido para $x \in \mathbb{R}$, cuando $x = 1$, y $x = 2$

Solución
Se tiene que:

$$\begin{aligned} P(1) &: \quad 1^2 - 4 = 0 \Rightarrow P(1) \equiv 0 \\ P(2) &: \quad 2^2 - 4 = 0 \Rightarrow P(2) \equiv 0 \end{aligned}$$

De estos valores únicamente $x = 1$ hace verdadera la proposición. $\square$

Ejemplo 1.23

Considere el predicado $P(n) : 2n + 1$ es impar, definido para n con $n \in \mathbb{N}$. Determine el valor de verdad que el predicado adquiere cuando $n = 2, n = 3$ y $n = 10$.

Solución
Se tiene que:

$$\begin{aligned} P(2) &: \quad 2\,(2) + 1 = 5 \text{ es impar} \Rightarrow P(2) \equiv 1 \\ P(3) &: \quad 2\,(3) + 1 = 7 \text{ es impar} \Rightarrow P(3) \equiv 1 \\ P(10) &: \quad 2\,(10) + 1 = 21 \text{ es impar} \Rightarrow P(10) \equiv 1 \end{aligned}$$

En general para cualquier número natural se satisface que P es verdadera. $\square$
Note que en el ejemplo anterior para $P(x) : x^2 - 4 = 0$ solamente existen dos valores reales ($x = 2$ y $x = -2$) que lo hacen verdadero; mientras que para $P(n) : 2n + 1$ todos los números naturales hacen que P sea verdadero.

Los cuantificadores más utilizados son:

Cuantificadores

- **Cuantificador existencial**: Establece que existe al menos un elemento x en D para el cual $P(x)$ es verdadera. Se denota $\exists$ y se lee "existe", o "para algunos". Se suele representar por la proposición verdadera:

$$(\exists x \in D)\,[P(x)] \quad \text{o bien } \exists x \in D/P(x)$$

- **Cuantificador universal**: Establece que todos los elementos x en D satisfacen que $P(x)$ es verdadera. Se denota $\forall$ y se lee "para todos", "para cualquier", o "para cada". Se suele representar por la proposición verdadera:

$$(\forall x \in D)\,[P(x)] \;\text{ o bien } \forall x \in D/P(x)$$

- **Cuantificador existencial con unicidad**: Establece que existe un único elemento x en D para el cual $P(x)$ es verdadera. Se denota $\exists!$ y se lee "existe un único". Se suele representar por la proposición verdadera:

$$(\exists! x \in D)\,[P(x)] \;\text{ o bien } \exists! x \in D/P(x)$$

Nota: el símbolo $\in$ denota que un elemento pertenece a un conjunto.

Ejemplo 1.24

Sea x un número entero y el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Considere las proposiciones:

$$\begin{aligned} P(x) &: \; 2 < x \leq 10 \\ Q(x) &: \; x \text{ es un número impar.} \\ R(x) &: \; x \text{ es un número primo.} \end{aligned}$$

Establezca el valor de verdad de:

1. $(\exists! x \in A)\,[P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x)]$
2. $(\forall x \in A)\,[P(x) \Rightarrow (Q(2x) \vee \neg R(x))]$

Solución

1. $(\exists! x \in A)\,[P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x)]$ es verdadera si solamente hay un valor x en A que satisfaga que $(P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x)) \equiv 1$. Veamos:

   Considere un valor $x \in A$

   $$\begin{array}{l} P(x) \text{ es verdadera si } x \text{ toma un valor en el conjunto } \left\{3,4,5,6,7,8,\boxed{9},10\right\} \\ Q(x) \text{ es verdadera si } x \text{ toma un valor en el conjunto } \left\{1,3,5,7,\boxed{9},11\right\} \\ \neg R(x) \text{ es verdadera si } x \text{ toma un valor en el conjunto } \left\{4,6,8,\boxed{9},10,12\right\} \end{array}$$

   Note que el único valor de A que satisface simultáneamente la proposición compuesta es $x = 9$, de modo que $(\exists! x \in A)\,[P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x)]$ es verdadera.

2. $(\forall x \in A)\,[P(x) \Rightarrow (Q(2x) \vee \neg R(x))]$ es verdadera si todos los elementos de A verifican que $[P(x) \Rightarrow (Q(2x) \vee \neg R(x))] \equiv 1$; sin embargo, analizar cada uno de los elementos de A puede volverse una tarea muy compleja y extensa, de modo que es más simple determinar si algún elemento no satisface la condición para que la proposición compuesta sea falsa. En caso de que ningún elemento haga falsa la implicación, entonces el "para todo"debe ser verdadero.

   Veamos: un elemento $x \in A$ hace falsa la proposición $(\forall x \in A)\,[P(x) \Rightarrow (Q(2x) \vee \neg R(x))]$ si verifica que $[P(x) \to (Q(2x) \vee \neg R(x))] \equiv 0$; es decir, si $P(x) \equiv 1$ y $(Q(2x) \vee \neg R(x)) \equiv 0$, lo que es equivalente a afirmar que $P(x) \equiv 1$, $Q(2x) \equiv 0$ y $\neg R(x) \equiv 0$. Considere $x \in A$

   $$\begin{array}{rcl} P(x) & \equiv & 1 \text{ si } x \text{ toma un valor en el conjunto } \{3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ Q(2x) & \equiv & 0 \text{ si } x \text{ toma un valor en el conjunto } \{1,2,\ldots,12\} = A \\ \neg R(x) & \equiv & 0 \text{ si } x \text{ toma un valor en el conjunto } \{2,3,5,7,11\} \end{array}$$

   Basta considerar $x = 3$ para que se tenga que $P(x) \to (Q(2x) \vee \neg R(x))$ es falsa:

   $$\begin{array}{rcl} P(3) & \to & (Q(2(3)) \vee \neg R(3)) \\ & \equiv & P(3) \to (Q(6) \vee \neg R(3)) \\ & \equiv & 1 \to (0 \vee \neg 1) \\ & \equiv & 1 \to (0 \vee 0) \\ & \equiv & 1 \to 0 \\ & \equiv & 0 \end{array}$$

   De modo que $(\forall x \in A)\,[P(x) \Rightarrow (Q(2x) \vee \neg R(x))]$ es falsa.

$\square$

Ejemplo 1.25

Suponga que se tiene un universo $\mathcal{U}$ de discurso de 5 gatos llamados: Mini, Black, Soko, Balin y Terrón. Sólo los tres primeros son de pura raza [R(x)]. Mini y Soko solo comen atún [CA(x)], Black y Balin sólo pollo [CP(x)], Terrón come pollo y atún, pero no toma leche [TL(x)], los otros sí. Excepto Black ninguno tiene collar [TC(x)].

1. Construya una tabla de asignación de predicados.

	R(x)	CA(x)	CP(x)	TL(x)	TC(x)
Mini					
Black					
Soko					
Balín					
Terrón					

2. Valide cada una de las siguientes proposiciones cuantificadas.

   $(\forall x \in \mathcal{U})\ [CA(x) \wedge TC(x)]$

   $(\exists x \ \in \mathcal{U})\, [CP(x) \vee TL(x)]$

Solución

	$R(x)$	$CA(x)$	$CP(x)$	$TL(x)$	$TC(x)$
Mini	1	1	0	1	0
Black	1	0	1	1	1
Soko	1	1	0	1	0
Balín	0	0	1	1	0
Terrón	0	1	1	0	0

$(\exists x \in \mathcal{U})\ [CA(x) \wedge TC(x)]$ es falsa, ya que los gatos verifican $CA(x)$ o $TC(x)$, pero no ambas proposiciones a la vez.

$(\forall x \ \in \mathcal{U})\, [CP(x) \vee TL(x)]$ es verdadera, en todos los casos se cumple al menos una de las condiciones.
Se pueden justificar estas condiciones extendiendo la tabla de valores de verdad:

	$R(x)$	$CA(x)$	$CP(x)$	$TL(x)$	$TC(x)$	$CA(x) \wedge TC(x)$	$CP(x) \vee TL(x)$
Mini	1	1	0	1	0	0	1
Black	1	0	1	1	1	0	1
Soko	1	1	0	1	0	0	1
Balín	0	0	1	1	0	0	1
Terrón	0	1	1	0	0	0	1

□

1.6. Práctica complementaria

La práctica fue diseñada con la colaboración del Lic. Hernán Viquez Céspedes.

1. Si se sabe que P y Q son verdaderas, y R es falsa, determine el valor de verdad de:

   a) $\neg (P \wedge R) \rightarrow Q$

   b) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$

2. Determine los valores de verdad para P, Q, y R para que sea falsa

$$\neg (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow [(R \wedge P) \vee Q]$$

3. Considere los siguientes enunciados

$$\begin{array}{lcl} P & : & \textit{Si hay monos en la luna y camellos en marte, entonces } 3-2=1 \\ Q & : & \textit{Hay monos en la luna, y si hay camellos en marte entonces } 3-2=1 \end{array}$$

   De acuerdo con las proposiciones anteriores, desarrolle lo que se le solicita en cada caso.

   a) Identifique y simbolice las proposiciones simples presentes.

   b) Construya una tabla de verdad para las proposiciones compuestas P y Q.

   c) Use la tabla del apartado anterior para validar la proposición $(P \rightarrow Q) \vee P$.

4. Use tablas de verdad para clasificar las proposiciones dadas en tautología, contradicción o contingencia.

   a) $(\neg P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \vee P)$

   b) $[(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg R)] \rightarrow P$

   c) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

   d) $[(P \wedge Q) \rightarrow \neg R] \leftrightarrow [\neg (P \wedge Q) \vee \neg R]$

5. Aplique las propiedades lógicas para simplificar y verificar la siguiente expresión:

$$[[\neg(P \wedge Q) \rightarrow R] \wedge \neg Q] \vee Q \equiv (R \vee Q)$$

6. Simplifique al máximo las siguientes expresiones.

   a) $\left[(P' \wedge Q) \vee (Q \vee P)'\right] \wedge [(P' \rightarrow R) \wedge (P \vee R')]$

   b) $Q' \vee \left[\left[[(P \wedge Q) \vee (P \wedge Q')]' \vee Q\right] \wedge P\right]'$

7. Use las propiedades de la lógica para verificar cada una de las siguientes equivalencias.

   a) $P' \vee (Q' \vee R) \equiv (P \wedge Q)' \vee R$

   b) $\left[(Q \vee P) \wedge [[P' \wedge (Q' \wedge R)] \wedge (P \vee R)]'\right]' \equiv P' \wedge Q'$

c) $[(P \vee Q) \wedge (P' \wedge Q)']' \to [[Q \wedge (R \vee Q)]' \wedge (P \vee Q')] \equiv (P \vee Q')$

d) $[(P \vee Q) \wedge (P \to \neg R) \wedge R] \to Q \equiv 1$

e) Inferencias lógicas

8. Represente cada enunciado usando para ello notación lógica, identifique cada proposición simple y enuncie en forma de teorema la inferencia lógica dada.

   a) Si Héctor y Felipe juegan al Futbol, entonces ni Héctor ni Felipe estudian.

   b) Si la enmienda no fue aprobada entonces la Constitución queda como estaba. Si la Constitución queda como estaba entonces no podemos añadir nuevos miembros al comité. O podemos añadir nuevos miembros al comité o el informe se retrasará un mes. Pero el informe no se retrasará un mes. Por tanto, la enmienda fue aprobada.

   c) Si el rey no se enroca y el peón avanza, entonces o el alfil queda bloqueado o la torre inmovilizada. Si el rey no se enroca, entonces, si el alfil queda bloqueado entonces el juego es tablas. O el rey se enroca o si la torre es inmovilizada se pierde el cambio. El rey no se enroca y el peón avanza. Por lo tanto, o el juego es tablas o se pierde el cambio.

9. En cada una de las siguientes proposiciones, Utilice las leyes de inferencia y de la lógica para obtener la conclusión indicada a partir de las premisas.

   a) Demuestre $Q \vee R$ a partir de $P \to Q$ y $\neg P \to R$.

   b) Deduzca T a partir de $(P \vee Q) \to R$, $(R \vee S) \to T$, $S \vee P$ y $\neg S$.

   c) Demuestre $P \wedge Q$ a partir de $Q \to \neg R$, $P \vee R$ y Q

10. Verifique la validez de cada inferencia.

    a)

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ (R \vee P) \to T \\ \neg T \\ S \to R \\ \hline \therefore \neg (Q \to S) \end{array}$$

    b)

$$\begin{array}{l} R \\ (R \vee Q) \to (P \vee S) \\ \neg S \wedge T \\ P \to U \\ \hline \therefore U \wedge T \end{array}$$

11. Simbolice el siguiente enunciado como teorema a partir de las proposiciones simples involucradas y demuestre la validez utilizando inferencias lógicas.

    Voy de paseo con mi familia. Si no pido vacaciones no iré de paseo con mi familia. El viaje es a Guanacaste o a Limón. Pero, el viaje no será a Guanacaste y será de una semana. Por lo tanto, pido vacaciones y el viaje es a Limón.

12. Simbolice las siguientes proposiciones y determine su valor de verdad.

    a) Existen números enteros cuyos cuadrados son primos.

    b) Para todo número real, si el cuadrado menos 10 veces el número aumentadas en 21 es igual a cero, entonces el número es positivo.

    c) Existen dos números naturales cuyo producto es un valor entre 5 y 7.

13. Considere cada una de las siguientes proposiciones.

$$\begin{array}{rcl} P(x) & : & 3 < x < 9 \\ Q(x) & : & x \text{ es un nḿero par} \\ R(x) & : & x \text{ es un número compuesto} \\ S(x) & : & 2x \text{ es divisible por } 3 \end{array}$$

    De acuerdo con los datos de las proposiciones anteriores, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

    a) $[\exists\, x \in \mathbb{N} \;/\; (P(x) \wedge Q(x)) \vee R'(x)]$

    b) $[\forall\, x \in \mathbb{N} \;/\; S(x) \wedge P'(x)]$

14. Suponga que se tiene un universo de discurso formado por cinco personas: Juan, Raquel, Pedro, Rosa y Francis. Solamente las tres primeras son casadas. Pedro y Raquel tienen casa propia, mientras que Juan, Rosa y Francis alquilan casa. Solo Pedro y Rosa tienen automóvil propio. Todos, excepto Pedro, estudian en la universidad.

    a) Presente la tabla de asignación de los predicados $C(x)$: x es casado, $CP(x)$: x tiene casa propia, $AC(x)$: x alquila casa, $AP(x)$: x tiene automóvil propio, $E(x)$: x estudia en la universidad.

    b) Valide las proposiciones:

    - $\exists x\, [C(x) \wedge CP(x) \wedge AP(x)]$
    - $\forall x\, [CP(x) \vee E(x)]$
    - $\forall x\, [CP(x)] \vee \forall x\, [E(x)]$
    - $\forall x\, [C(x) \rightarrow (CP(x) \vee AC(x))]$

15. Usando tablas de verdad determine si la proposición dada es una tautología, una contradicción o una contingencia.

    a) $[(\neg p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)] \leftrightarrow \neg(\neg q \vee \neg r) \wedge r$

    b) $[(r \vee q) \rightarrow q'] \wedge (r \vee q) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow [q' \wedge (q' \vee r)]$

    c) $(\neg P \vee \neg R) \leftrightarrow [\neg(P \wedge Q) \vee \neg R]$

    d) $(p \rightarrow q) \vee [(\neg q \rightarrow \neg p) \wedge \neg r] \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

16. Simbolice las proposiciones simples involucradas y exprese en forma de teorema la siguiente inferencia lógica.

    Si, hay guerras o hay investigación nuclear, entonces no hay una correcta distribución de la riqueza en el mundo. Pero, no hay investigación nuclear o hay guerras. Además, hay indiferencia de mucha gente a los verdaderos problemas de la humanidad o hay investigación nuclear. Si hay indiferencia a los problemas de la humanidad entonces, hay guerras y se invierte el dinero en armas destructivas. Por lo tanto, hay mala distribución de la riqueza en el mundo.

17. Represente por medio de teorema la siguiente inferencia lógica usando para ello notación lógica.

    Si Pablo no entiende en clase o no estudia en casa, fracasará en los exámenes y no será aplaudido. Si no es el caso que Pablo entiende en clase y estudia en casa, entonces fracasará en los exámenes o no será aplaudido. Pablo entiende en clase y estudia en casa o, fracasa en los exámenes y no es aplaudido. Por lo tanto si Pablo entiende en clase y estudia en casa, no se dará que fracase en los exámenes y no sea aplaudido.

18. Considere las siguientes proposiciones lógicas

    $$P : \textit{Si hay monos en la luna y las jirafas vuelan, entonces } 2^0 = 0.$$
    $$Q : \textit{Hay monos en la luna, y si las jirafas vuelan entonces } 2^0 = 0.$$

    De acuerdo con las proposiciones anteriores, determine lo que se le solicita en cada caso.

    a) Identifique cada proposición simple y simbolice las proposiciones compuestas P y Q utilizando conectivas lógicas.

    b) Establezca (sin usar tablas de verdad) la validez de las proposiciones $\neg P \vee Q$, $P \to Q$ y $P \leftrightarrow Q$.

19. Use las propiedades lógicas para verificar la siguiente equivalencia

    $$\neg[(\neg Q \vee P) \wedge \neg[(\neg P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]] \equiv \neg P \wedge Q$$

20. Considere el siguiente enunciado

    Si sigue lloviendo, entonces el río se crece. Si sigue lloviendo y el río se crece, entonces el puente será arrastrado por las aguas. Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado por las aguas, entonces no será suficiente un solo camino para toda la ciudad. O bien un solo camino es suficiente para toda la ciudad o los ingenieros han cometido un error. Por tanto, los ingenieros han cometido un error.

    De acuerdo con los datos anteriores:

    a) Identifique cada proposición simple y enuncie en forma de teorema la inferencia lógica dada.

    b) Demuestre la validez de la inferencia a partir de las leyes de la lógica y las leyes inferenciales.

21. Para x un número entero, considere los siguientes predicados

$$\begin{aligned} P(x) &: \; 2 < x \leqslant 10 \\ Q(x) &: \; x \text{ es un número impar.} \\ R(x) &: \; x \text{ es un número primo.} \\ S(x) &: \; 4x-1 \text{ es divisible por 3.} \end{aligned}$$

De acuerdo con los predicados anteriores, determine el valor de verdad de cada proposición cuantificada, brinde un contraejemplo en caso de que la proposición sea falsa.

a) $(\exists x \in \mathbb{N})[P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x)]$
b) $(\forall x \in \mathbb{N})[P(x) \wedge R(x) \wedge S(x)]$

22. Considere la siguiente proposición lógica

P: Si no está lloviendo y no hay nubes en el cielo, entonces el sol está brillando

De acuerdo con la proposición compuesta anterior, determine lo que se le solicita en cada caso.

a) Identifique cada proposición simple y represente la proposición P utilizando conectivas lógicas.
b) Construya una tabla de verdad para establecer la validez de la proposición P.

23. Considere el siguiente enunciado

.

Si la enmienda no fue aprobada entonces la constitución queda como estaba. Si la constitución queda como estaba entonces no podemos añadir nuevos miembros al comité. Podemos añadir nuevos miembros al comité o el informe se retrasará un mes. Pero el informe no se retrasará un mes. Por tanto la enmienda fue aprobada.

De acuerdo con los datos anteriores, identifique cada proposición simple y enuncie en forma de teorema la inferencia lógica dada. Demuestre la validez de esta inferencia.

24. Use las propiedades lógicas para verificar la siguiente equivalencia

$$[(p' \wedge q) \vee (q \vee p)'] \wedge [(p \vee r) \wedge (p \vee r')] \equiv 0$$

25. Para x un número entero, considere los siguientes predicados

$$\begin{aligned} P(x) &: \; 5 < x \leq 12 \\ Q(x) &: \; 2x-1, \text{es un número impar.} \\ R(x) &: \; x, \text{es un número compuesto.} \\ S(x) &: \; x, \text{es divisible por 2.} \end{aligned}$$

De acuerdo con los predicados anteriores, determine el valor de verdad de cada proposición cuantificada, justifique su respuesta.

a) $(\exists x \in \mathbb{N})[P(x) \wedge (Q(x) \vee R'(x))]$

b) $(\exists! x \in \mathbb{N})[P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)]$

c) $(\forall x \in \mathbb{N})[R(x) \wedge S(x)]$

26. Verifique si la proposición $[(P \to Q') \to (Q \vee R \wedge P')]$ es lógicamente equivalente a

$$[(Q \to P)' \to R]$$

27. Representar en forma de teorema y usando notación lógica, demuestre la validez de la siguiente inferencia.

Si tengo conocimientos de computación y domino el inglés, entonces no tendré problemas para encontrar trabajo. Si tengo problemas para encontrar trabajo, entonces tengo más de 40 años o no me preparé lo su.ciente. Por lo tanto, si me preparo lo suficiente y no tengo más de 40 años y domino el inglés, entonces no tendré problemas para encontrar trabajo.

28. Considere el siguiente enuenciado

O la Tierra gira alrededor del Sol o el Sol alrededor de la Tierra. Si la Tierra gira alrededor del Sol entonces deberíamos apreciar una variación en el brillo de las estrellas a lo largo de los años o en su posición con respecto a un observador terrestre. No se aprecia variación en el brillo de las estrellas a lo largo del año y no se aprecia una variación en su posición con respecto a un observador terrestre. Por tanto, el Sol gira alrededor de la Tierra.

De acuerdo con los datos anteriores, identifique cada proposición simple y enuncie en forma de teorema la inferencia lógica dada.

29. Use las propiedades lógicas para verificar la siguiente equivalencia

$$\neg[p \wedge [\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q)]] \equiv 1$$

30. Considere la siguiente proposición lógica

$$[(p \to q) \vee [(\neg q \wedge r)] \leftrightarrow (r \to q)$$

Usando tablas de verdad clasifique la proposición compuesta anterior como una tautología, contradicción o contingencia.

31. Para x un número natural, considere los siguientes predicados

$$\begin{aligned} P(x) &: \ 2 < x < 9 \\ Q(x) &: \ x, \text{es un número primo.} \\ R(x) &: \ x, \text{es un número impar.} \\ S(x) &: \ x^2 + 3x + 2, \text{es divisible por 2.} \end{aligned}$$

De acuerdo con los predicados anteriores, determine el valor de verdad de cada proposición cuantificada, justifique su respuesta.

a) $(\exists! x \in \mathbb{N})[P(x) \wedge Q'(x) \wedge R'(x)]$

b) $(\exists x \in \mathbb{N})[(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)) \to S'(x)]$

c) $(\forall x \in \mathbb{N})[P(x) \to (Q'(x) \vee R(x))]$

32. Considere el siguiente enunciado

    Si compro un carro o me levanto más temprano entonces no llegaré tarde a la universidad. Reprobaré el cuatrimeste si y solo si llego tarde a la universidad. Por tanto, si llegué tarde a la universidad y reprobé el cuatrimestre entonces no compré un carro o no me levanté temprano.

    De acuerdo con los datos anteriores, identifique cada proposición simple y enuncie en forma de teorema la inferencia lógica dada.

33. Considere los siguientes enunciados

$$\begin{array}{lcl} P & : & \textit{Si hay cabras en el sol y camellos en marte, entonces } 10 - 15 = 25 \\ Q & : & \textit{Hay cabras en el sol, y si hay camellos en marte entonces } 10 - 15 = 25 \end{array}$$

De acuerdo con las proposiciones anteriores, desarrolle lo que se le solicita en cada caso.

a) Identifique las proposiciones simples presentes.

b) Construya una tabla de verdad para las proposiciones compuestas P y Q.

c) Use la tabla del apartado anterior para validar las proposiciones P y Q.

34. Considere el siguiente enunciado donde se ha realizado una asignación de predicados.

    Suponga que se tiene un universo de discurso formado por 5 viajeros: Hernán, Cinthya, Carlos, Adrián y Arturo. Sólo los tres primeros tienen visa americana [TV(x)]. Hernán y Carlos viajan sólo a Europa [VA(x)], mientras que Cinthya y Adrián sólo viajan a Oceanía [VO(x)]. Arturo viaja a Asia y a Oceanía, pero no a Estados Unidos [VE(x)] y los otros sí. Excepto Cinthya, ninguno se ha vacunado contra la fiebre amarilla [VF(x)].

    De acuerdo con los datos del enunciado, desarrolle lo que se le solicita en cada caso.

a) Por medio de una tabla, represente la asignación de los valores de verdad para los predicados anteriores.

b) Valide las siguientes proposiciones cuantificadas, justifique su respuesta.

- $\star$ $\exists! x\, [VA(x) \wedge VF(x)]$
- $\star$ $\forall x\, [VO(x)]$

35. Considere el siguiente enunciado

    Si tengo conocimiento de computación y domino el inglés, entonces no tendré problemas para encontrar trabajo. Si tengo problemas para encontrar trabajo, entonces tengo más de 40 años o no me preparé lo suficiente. Por lo tanto, si me preparo lo suficiente y no tengo más de 40 años y domino el inglés, entonces no tendré problemas para encontrar trabajo.

    Represente en forma de teorema el enunciado anterior, use para ello notación lógica.

36. Suponga que se tiene un universo de discurso de 5 gatos llamados: Goose, Emy, Gauss, Newton y Sophie. Sólo los tres últimos fueron adoptados $[AD(x)]$. Goose y Emy sólo comen pescado $[CP(x)]$. Newton y Sophie sólo alimento $[CA(x)]$, Gauss come alimento y pescado, pero no toma leche $[TL(x)]$, los otros sí. Excepto Emy, todos tienen collar $[TC(x)]$.

    a) Construya una tabla de asignación de predicados.

	$AD(x)$	$CP(x)$	$CA(x)$	$TL(x)$	$TC(x)$
Goose					
Emy					
Gauss					
Newton					
Sophie					

    b) Valide cada una de las siguientes proposiciones cuantificadas

    1) $\exists! x[CA(x) \wedge TC(x)]$.
    2) $\forall x[CP(X) \vee TL(X)]$.
    3) $\exists x[AD(x) \Rightarrow TL(x)]$
    4) $\forall x[\neg (AD(x)) \wedge CP(x)]$

37. Construya una tabla de asignación de predicados, para validar las proposiciones cuantificadas, relacionadas a la siguiente información:

    Para un universo de discurso de cuatro infantes: María José, Aylin, Carlos y Kendall, tenemos que María José y Carlos usan pañal, pero Aylin y Kendall ya aprendieron ir al baño. Carlos, Aylin y Kendall toman chupón, pero todos tienen el hábito morder sus juguetes, pero Aylin es la única que no tiene dientes. Sean $P(x)$, $CH(x)$, $M(x)$ y $D(x)$ los respectivos predicados para estos infantes: usan pañal, toman chupón, muerden juguetes y tienen dientes, respectivamente.

    Valide cada una de las siguientes proposiciones cuantificadas usan la información anterior.

    a) $\forall x[P(x)]$

    b) $\exists x[CH(x) \wedge D(x) \wedge M(x)]$

    c) $\exists x[D(x) \Rightarrow CH(X)]$

38. La floristería *"La frescura"* seleccionó nuevos géneros y para sus clientes exhibe un universo de discurso de cinco tipos de flores: rosas, girasoles, claveles, magnolias y azucenas. De esta variedad de flores podemos decir que todas son bellas. La azucena, la magnolia y el girasol son de tallo largo. Tanto la azucena como la magnolia son blancas y el girasol amarillo, pero las rosas y los claveles son de diferentes colores. Las magnolias, al igual que las azucena, nacen de un bulbo. Sean $B(x), TL(x), VC(x), NB(x)$ los predicados: bellas, tallo largo, variados colores y nacen de bulbos, respectivamente,

    a) Presente la tabla de asignación de predicados: $B(x), TL(x), VC(x), NB(x)$.

    b) Valide las siguientes expresiones:

    - $\forall x[TL(x) \vee NB(x)]$
    - $\exists x[(TL(x) \wedge NB(x)] \Rightarrow VC(x)$
    - $\exists[B(x) \wedge VC(x) \wedge NB(x)]$

39. Sea un universo de discurso de cuatro dinosaurios: tiranosaurio, braquiosaurio, velociraptor y triceratops. El tiranosaurio y el velociraptor eran carnívoros y andaban sobre sus dos patas traseras. El braquiosaurio y el triceratops eran herbívoros y andaban sobre sus cuatro patas.

    Sean los predicados: $C(x)$: es carnívoro, $H(x)$: es hervíboro, $DP(x)$: andaba sobre sus dos patos, $CP(x)$: andaba sobre sus cuatro patas.

    a) Escriba la tabla de asignación para los predicados: $C(x), H(x), DP(x), CP(x)$

    b) Valide las siguientes proposiciones:

    - $\forall x[C(x) \wedge DP(x) \wedge H(x)]$
    - $\exists x[\neg(H(x)) \Rightarrow CP(x)]$

40. Considere los siguientes enunciados.

    P: Hay vida en el planeta Marte si y sólo si $\sqrt{10} = 5$

    Q: Hay agua en la luna y hay arena en la playa, entonces $2^3 = 6$

    De acuerdo con las proposiciones anteriores, desarrollo lo que se le solicita en cada caso.

    a) Identifique y simbolice las proposiciones simples presentes.

    b) Construya una tabla de verdad para las proposiciones compuestas P y Q.

    c) Use la tabla del apartado apartado anterior para validar las proposiciones P y Q.

41. Verifique si la proposición $M \wedge N$ implica lógicamente a $\neg[(M \vee N) \rightarrow \neg M]$.

2. Teoría de conjuntos

2.1. Conceptos básicos

Definición 2.1: Conjunto

Un conjunto es un concepto primitivo que se caracteriza de manera intuitiva como una colección de objetos, denomiados *elementos,* sin orden establecido.
Generalmente los conjuntos se denotan con letras mayúsculas y se utilizan llaves para delimitar los elementos que pertenecen al conjunto.

Notaciones particulares

1. Para denotar que un elemento x pertenece a un conjunto A utilizaremos la notación $x \in A$. En caso contrario, se denota $x \notin A$.

2. Llamamos *conjunto vacío* al conjunto que no posee elementos y se denota $\varnothing$, o bien, $\{\}$. De este modo afirmar que $x \in \varnothing$ es una falacia.

3. La *notación por extensión de un conjunto* A es aquella que expresa todos los elementos de forma explícita.

4. La *notación por comprensión de un conjunto* A es aquella que expresa todos los elementos a través de una proposición que los caracterice.

5. Se define el *conjunto universal* (generalmente denotado $\mathcal{U}$) como el conjunto que contiene todos los objetos que tienen sentido en una discusión.

Ejemplo 2.1

Determine la notación por extensión del conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, x^2 < 12\}$ y valide las siguientes proposiciones.

1. $0 \notin B$
2. $2^3 \in B$
3. $2 \in B$
4. $4 \in B$

Solución
Sea $x \in B$. De este modo x debe ser un entero positivo que verifique que $x^2 < 12$. Aplicando este criterio a números enteros mayores o iguales que 1 tenemos:

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow 1^2 = 1 < 12 \\ x &= 2 \Rightarrow 2^2 = 4 < 12 \\ x &= 3 \Rightarrow 3^2 = 9 < 12 \\ x &= 4 \Rightarrow 4^2 = 16 \not< 12 \end{aligned}$$

La notación por extensión de B es $B = \{1, 2, 3\}$. Así, $0 \notin B \equiv 1$, $2^3 \in B \equiv 0$, $2 \in B \equiv 1$ y $4 \in B \equiv 0$. $\square$

Ejemplo 2.2

Determine si una posible notación por comprensión del conjunto $A = \{0, 1\}$ corresponde a $A = \{x \in \mathbb{R}/x^2 \leq 0 \vee x - 1 = 0\}$

Solución

Para verificar lo que se solicita en el enunciado basta con determinar si $\{x \in \mathbb{R}/x^2 \leq 0 \vee x - 1 = 0\} = \{0, 1\}$.

Veamos:

Sea x un elemento del conjunto $\{x \in \mathbb{R}/x^2 \leq 0 \vee x - 1 = 0\}$. Así, x es un real que verifica $x^2 \leq 0 \vee x - 1 = 0$. Luego

$$x^2 \leq 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$$

$\square$

Para efectos del curso, en lo que resta, se definen los siguientes conjuntos numéricos.

Algunos conjuntos numéricos

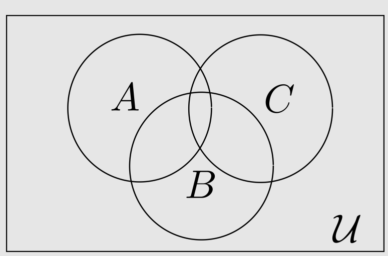
En este curso trabajaremos con uno de los principales conjuntos numéricos que se conocen, los **numeros reales** denotados por $\mathbb{R}$. Este conjunto está conformado por:

- El conjunto de los números naturales: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- El conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- El conjunto de los números racionales: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}/a, b \in \mathbb{Z} \text{ con } b \neq 0\right\}$
- El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I} = \{x \notin \mathbb{Q}\}$

Definición 2.2: Diagramas de Venn-Euler

Es el medio de representación de uno o más conjuntos de manera gráfica. Usualmente se emplean círculos y se ilutran los elementos dentro de cada uno.

Se ilustra a continuación un diagrama de Venn para tres conjuntos A, B, y C, donde $\mathcal{U}$ es el conjunto universo.



2.2. Cardinalidad de conjuntos

Definición 2.3: Cardinalidad

La *cardinalidad de un conjunto A* se define como la cantidad de elementos que posee. Esta se denota $\text{card}(A)$ o bien $|A|$.
En este contexto cabe destacar que $|\varnothing| = 0$

Ejemplo 2.3

Defina $A = \{\varnothing, \{3\}, \{9,3\}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / 1 < 3x < 15\}$. Calcule el valor de:

$$3 \cdot |A| - \frac{|B|}{|A|^2}$$

Observe que en el conjunto A se consideran tres conjuntos como elementos, de modo que $|A| = 3$ (aquí el vacío es un elemento). Para calcular la cardinalidad de B es necesario determinar su forma extendida:

$$\begin{array}{rcl} x & \in & B \\ & \Leftrightarrow & 1 < 3x < 15, \text{ con } x \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow & x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4 \\ & \Leftrightarrow & x \in \{1,2,3,4\} \end{array}$$

De modo que $B = \{1,2,3,4\} \Rightarrow |B| = 4$.
Finalmente

$$3 \cdot |A| - \frac{|B|}{|A|^2} = 3 \cdot 3 - \frac{4}{3^2} = \frac{77}{9}$$

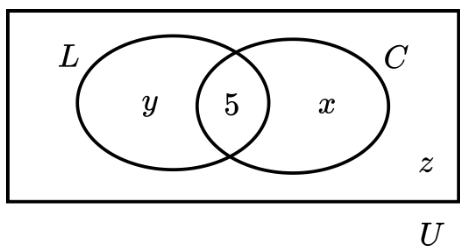
Ejemplo 2.4

De 34 programas revisados en programación $C++$, 23 marcaron error en la compilación, 12 tuvieron fallas en lógica y 5 en lógica y compilación. Empleando un diagrama de Venn, responda: ¿Cuántos programas tuvieron al menos un tipo de error? ¿Cuántos programas no presentan error?

Solución
Defina los conjuntos

$$\begin{aligned} U &= \{\text{Todos los programas revisados en } C++\} \\ C &= \{\text{Programas que marcaron error en compilación}\} \\ L &= \{\text{Programas que tuvieron fallas en lógica}\} \end{aligned}$$

Denote x : cantidad de elementos que están en C pero no de L; y : cantidad de elementos de L que no están en C; z : cantidad de elementos que no están en L ni en C.
Utilizamos un diagrama de Venn para visulalizar los conjuntos que se determinan y sus relaciones (ver figura).



Dado que $x + 5 = |C| = 23$ y $y + 5 = |L| = 12$, se tienen los valores $x = 18$ y $y = 7$. En total se revisaron $|U| = 34$ programas, de los cuales $x + 5 + y = 18 + 5 + 7 = 30$ presentaron al menos un tipo de error (solo en lógica, solo en compilación, o en las dos), de modo que 4 no presentaron ningún error. $\square$

Ejemplo 2.5

Se realiza una encuesta a 35 estudiantes que desean ingresar a la universidad y en una de las preguntas se consulta sobre las carreras de preferencia a cursar. En las respuestas se obtuvo que: 13 estudiantes prefieren ingeniería civil, 10 estudiantes ingeniería eléctrica, y 19 estudiantes, ingeniería en computación. Además, a 4 estudiantes únicamente les gustaría estudiar ingeniería civil e ingeniería en computación; a 2 estudiantes, únicamente ingeniería eléctrica; a 2, únicamente ingeniería civil, y a 9 únicamente ingeniería en computación. 5 estudiantes indicaron que tienen preferencia por las tres carreras mencionadas.
De acuerdo con la información anterior desarrolle lo que se le solicita en cada caso.

a) Dibuje un diagrama de Venn que modele la situación planteada, además ubique los valores respectivos en cada región.

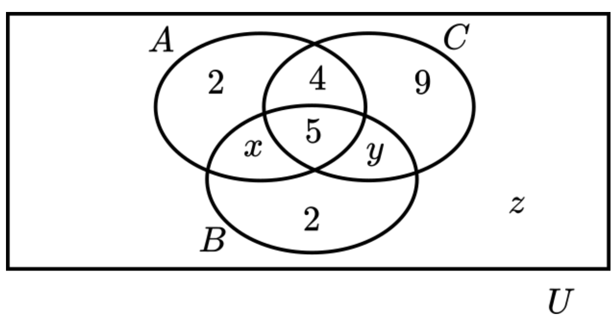
b) Determine el número de estudiantes que no tienen preferencia por ninguna de las carreras mencionadas en el texto.

c) ¿Cuántos prefieren estudiar únicamente ingeniería eléctrica e ingeniería en computación?

Solución
Defina los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &: \{\text{Estudiantes que prefieren ingeniería civil}\} \\ B &: \{\text{Estudiantes que prefieren ingeniería eléctrica}\} \\ C &: \{\text{Estudiantes que prefieren ingeniería en computación}\} \end{aligned}$$

a) Sean x : cantidad de estudiantes que únicamente desean estudiar ingeniería civil e ingeniería eléctrica; y : cantidad de estudiantes que únicamente desean estudiar ingeniería eléctrica e ingeniería en computación; z : estudiantes que no desean estudiar ninguna de las tres carreras mencionadas. Así, tenemos el siguiente diagrama.



Se cumplen las siguientes ecuaciones.

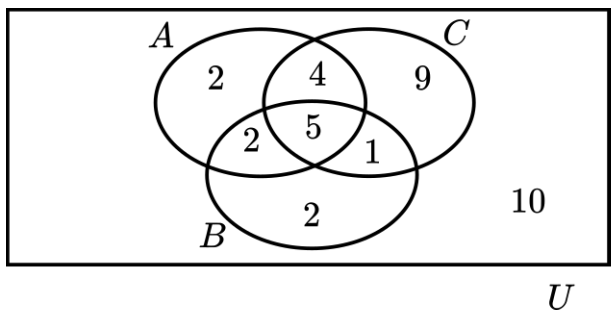
$$
\begin{cases}
2+4+5+x=|A|=13\\
5+4+9+y=|C|=19\\
|A|+9+y+2+z=|U|=35
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
11+x=13\\
18+y=19\\
24+y+z=35
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
x=2\\
y=1\\
24+y+z=35
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
x=2\\
y=1\\
25+z=35
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
x=2\\
y=1\\
z=10
\end{cases}
$$

De modo que el diagrama obtenido es



b) Hay 10 estudiantes que no tienen preferencia por ninguna de las carreras mencionadas.

c) Un estudiante prefiere estudiar únicamente ingeniería eléctrica e ingeniería en computación.

□

Ejemplo 2.6

Se realizó una encuesta de preferencia a 4065 músicos, en la cual se obtuvo la siguiente información: a 2500 les gusta tocar guitarra; a 2200, tocar la batería; 1400 prefieren el saxofón. También se obtuvo que a 50 no les gustó ninguno de estos instrumentos, pues prefieren el piano, y 15 músicos no tienen preferencia por ninguno de los instrumentos mencionados. Además, hay 300 músicos a quienes les gusta la guitarra, la batería y el saxofón; 1000 prefieren solamente la batería, y 400 prefieren solamente la batería y el saxofón.

a) Construya el diagrama de Venn para esta situación y encuentre el número de personas para cada región.

b) ¿Cuántos músicos prefieren solamente la guitarra?

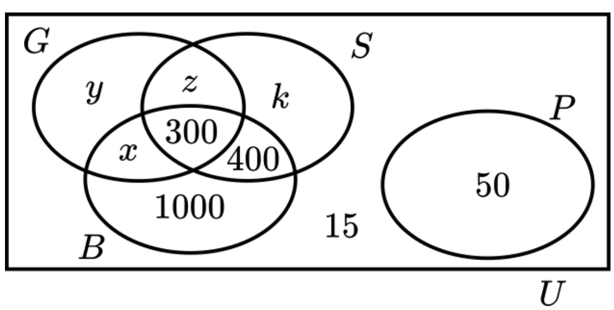
c) ¿A cuántos músicos les gusta sólo un instrumento?

Solución

Defina los conjuntos Defina los conjuntos

$$
\begin{aligned}
U &= \{\text{músicos encuestados}\} \\
G &= \{\text{músicos que prefieren la guitarra}\} \\
B &= \{\text{músicos que prefieren la batería}\} \\
S &= \{\text{músicos que prefieren el saxofón}\} \\
P &= \{\text{músicos que prefieren el piano}\}
\end{aligned}
$$

a) Note que hay ciertas regiones en común al representar los conjuntos en un diagrama de Venn, para esto denote las cantidades desconocidas: x : cantidad músicos que únicamente prefieren guitarra y batería ; y: cantidad de músicos que únicamente tienen preferencia por la guitarra; z : cantidad de músicos que únicamente prefieren el saxofón y la guitarra; y k : cantidad de músicos que únicamente prefieren el saxofón. El diagrama correspondiente se presenta a continuación.



En este caso $x+300+400+1000 = |B| = 2200$ de donde $x+1700 = 2200 \Rightarrow x = 2200-1700 = 500$. Observe que tenemos tres incógnitas, por lo que se deben generar tres ecuaciones para poder resolverlas:

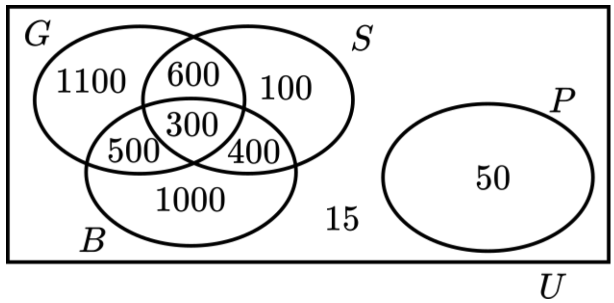
$$
\begin{aligned}
&(1): \qquad x+y+z+300 = |G| = 2500 \Rightarrow 800+y+z = 2500 \Rightarrow \boxed{y+z = 1700} \\
&(2): \qquad 300+400+z+k = |S| = 1400 \Rightarrow 700+z+k = 1400 \Rightarrow \boxed{z+k = 700}
\end{aligned}
$$

Por otro lado (3): $15+|P|+|B|+y+z+k = |U| \Rightarrow 15+50+2200+y+z+k = 4065 \Rightarrow$

$2265 + y + z + k = 4065 \Rightarrow \boxed{y + z + k = 1800}$. Si se sustituye (1) en (3) tenemos

$$y + z + k = 1800 \Rightarrow 1700 + k = 1800 \Rightarrow k = 100$$

Sustituyendo $\underline{k = 100}$ en $z + 100 = 700 \Rightarrow \underline{z = 600}$ y de (1) $y + z = 1700 \Rightarrow y + 600 = 1700 \Rightarrow \underline{y = 1100}$. Finalmente tenemos el diagrama que se sigue.



b) 1100 músicos prefieren solamente la guitarra.

c) A $\underbrace{1100}_{\text{solo guitarra}} + \underbrace{1000}_{\text{solo batería}} + \underbrace{100}_{\text{solo saxofón}} + \underbrace{50}_{\text{solo piano}} = 2250$ músicos solo les gusta un instrumento.

$\square$

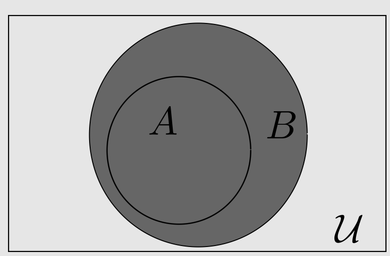
2.3. Comparación entre conjuntos

Definición 2.4: Subconjunto

Se dice que A es *subconjunto* de B y se denota si se satisface la proposición:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,[x \in A \Rightarrow x \in B]$$

En caso de que no se cumpla la condición se escribe $A \nsubseteq B$
La representación en diagrama de Venn es:



Ejemplo 2.7

Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 5\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Observe que se cumple lo siguiente: $B \subseteq A, C \subseteq A, B \subseteq C$ pero $A \nsubseteq B, A \nsubseteq C$ y $C \nsubseteq B$.

De manera similar, se satisface que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}$ y $\mathbb{R} \nsubseteq \mathbb{N}$

Definición 2.5: Igualdad de conjuntos

Se dice que los conjuntos A y B son iguales y se denota $A = B$ si se satisface la proposición:

$$A = B \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A]$$

o dicho de otro modo

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

Es decir, se debe demostrar la doble inclusión para que haya igualdad.

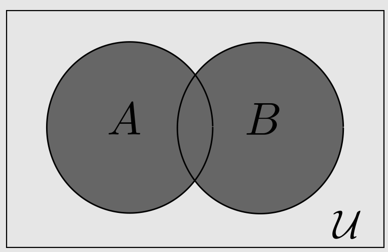
2.4. Operaciones entre conjuntos

Definición 2.6: Unión

Se define *la unión* de A y B, denotada $A \cup B$, como el conjunto que contiene tanto los elementos de A como los de B. Es decir:

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} / x \in A \vee x \in B\}$$

Gráficamente

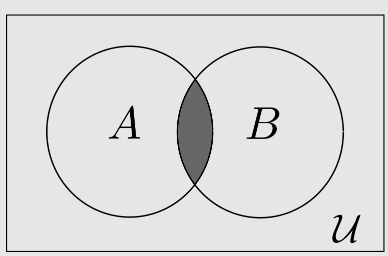


Definición 2.7: Intersección

Se define *la intersección* de A y B, denotada $A \cap B$, como el conjunto que contiene los elementos de A que a la vez son elementos de B. Es decir:

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} / x \in A \wedge x \in B\}$$

Gráficamente

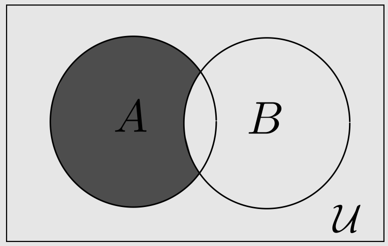


Definición 2.8: Diferencia

Se define *la diferencia* de A y B, denotada $A-B$, como el conjunto que contiene los elementos de A que no pertenecen a B. Es decir:

$$A - B = \{x \in \mathcal{U} / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Gráficamente

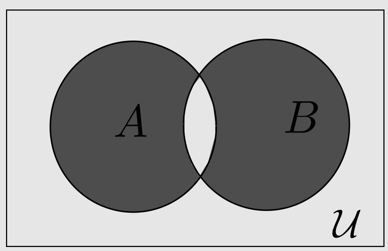


Definición 2.9: Diferencia simétrica

Se define *la diferencia simétrica* de A y B, denotada $A \triangle B$, o bien $A \oplus B$, como el conjunto que contiene los elementos de A o de B, pero no de ambos. Es decir:

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{x \in \mathcal{U} / x \in (A \cup B) \wedge x \notin A \cap B\} \end{aligned}$$

Gráficamente

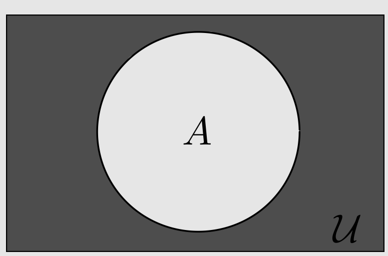


Definición 2.10: Complemento

Se define *el complemento de A*, denotado $\overline{A}$, A^c , o bien A', como el conjunto que contiene los elementos de $\mathcal{U}$ que no están en A. Es decir:

$$\overline{A} = \{x \in \mathcal{U} / x \notin A\}$$

Gráficamente



Cabe destacar que se tiene que $\overline{A} = \mathcal{U} - \mathcal{A}$, $\overline{\varnothing} = \mathcal{U}$, $\overline{\mathcal{U}} = \varnothing$, $A - B = A \cap \overline{B}$

Ejemplo 2.8

Suponga que $\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, P = \{1,3,7,8\}, Q = \{1,2,3,7,9\}$, $R = \{x \in \mathcal{U}/x > 6\}$. Determine el conjunto que resulta al efectuar las operaciones:

$$(\overline{P} \cap \overline{R \triangle \overline{Q}}) \cup ((\overline{R} \cup P) \triangle Q)$$

Solución
Se cumple que la representación por extensión de R es $R = \{7,8,9,10\}$; Además,

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= \{2,4,5,6,9,10\} \\
\overline{Q} &= \{4,5,6,8,10\} \\
&\Rightarrow R \triangle \overline{Q} = \{4,5,6,7,9\} \\
&\Rightarrow \overline{R \triangle \overline{Q}} = \{1,2,3,8,10\} \\
&\Rightarrow \overline{P} \cap \overline{R \triangle \overline{Q}} = \{2,10\}
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\overline{R} &= \{1,2,3,4,5,6\} \\
&\Rightarrow \overline{R} \cup P = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \\
&\Rightarrow (\overline{R} \cup P) \triangle Q = \{4,5,6,8,9\}
\end{aligned}$$

Se concluye que $(\overline{P} \cap \overline{R \triangle \overline{Q}}) \cup ((\overline{R} \cup P) \triangle Q) = \{2,4,5,6,8,9,10\}$ □

Ejemplo 2.9

Sea $\mathcal{U} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ el conjunto universal y considere los subconjuntos de U definidos por: $X = \{x \in \mathcal{U}/0 \leq 2x \leq 8 \wedge x \neq 4\}, Y = \{0,2,5,7\}, Z = \{8,9\}, W = \emptyset$. Verifique si se cumple la igualdad siguiente:

$$(\overline{\overline{X} \cap Z} \oplus (Y \cup \overline{W})) - (X - Y) = Z$$

Solución
Expresamos los conjuntos por extensión para un manejo más práctico: $X = \{0,1,2,3\}, Y = \{0,2,5,7\}, Z = \{8,9\}$ y $W = \emptyset$.
calculamos el conjunto $\overline{\overline{X} \cap Z} \oplus (Y \cup \overline{W})$. Veamos:

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \{4,5,6,7,8,9\} \\
&\Rightarrow \overline{X} \cap Z = \{8,9\} \\
&\Rightarrow \overline{\overline{X} \cap Z} = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{W} &= \{0,1,2,\ldots,9\} \\
&\Rightarrow Y \cup \overline{W} = \{0,1,2,\ldots,9\}
\end{aligned}$$

Así

$$\overline{\overline{X} \cap Z} \oplus (Y \cup \overline{W}) = \{8, 9\}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} X - Y &= \{1, 3\} \\ &\Rightarrow (\overline{\overline{X} \cap Z} \oplus (Y \cup \overline{W})) - (X - Y) = \{8, 9\} = Z \end{aligned}$$

De modo que se cumple la igualdad. □

Ejemplo 2.10

Considere el conjunto universal definido por $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ y los subconjunto de $\mathcal{U}$ dados por $P = \{1, 4, 5, 7, 10, 11\}, Q = \{1, 2, 6, 7, 12\}, R = \{2, 5, 6, 13\}$ y $S = \{1, 2, 3\}$. Calcule el conjunto definido por las siguientes operaciones:

$$(Q' - (R \cap P)) \oplus [S - (P \oplus R)]'$$

Solución

$$\begin{aligned} Q' &= \{3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 13\} \\ R \cap P &= \{5\} \\ Q' - (R \cap P) &= \{3, 4, 8, 9, 10, 11, 13\} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} P \oplus R &= \{1, 2, 4, 6, 7, 10, 11, 13\} \\ S - (P \oplus R) &= \{3\} \\ [S - (P \oplus R)]' &= \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \end{aligned}$$

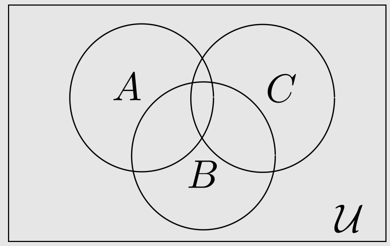
Finalmente

$$(Q' - (R \cap P)) \oplus [S - (P \oplus R)]' = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 12\}$$

□

Ejemplo 2.11

Considere el siguie.nte diagrama de Venn para los conjuntos A, B y C.

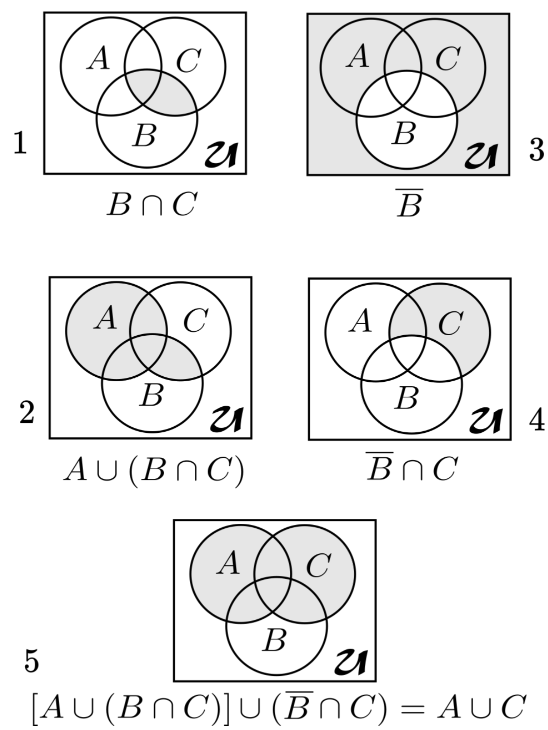


Utilizando este diagrama, verifique, por medio de sombreo de regiones, que se satisface la igualdad:

$$[A \cup (B \cap C)] \cup \left(\overline{B} \cap C\right) = A \cup C$$

Solución

Se descompone la proposición lógica por medio de proposiciones más simples, que se puedan representar en el diagrama de Venn. El objetivo es contruir gradualmente la proposición completa y verificar la igualdad. Se tiene la secuencia de regiones:



□

Definición 2.11: Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos A y B *son disjuntos* si no tienen elementos en común. Es decir son disjuntos si $A \cap B = \varnothing$.

Definición 2.12: Conjunto potencia o conjunto de partes

El *conjunto de partes o conjunto potencia* de A se define como el conjunto conformado por todos los subconjuntos de A. Se denota $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y se puede expresar como

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{R/R \subseteq A\}$$

Cabe destacar que $\varnothing \subseteq A$, para cualquier conjunto A, de modo que $\varnothing \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$.
Se satisface que la cardinalidad de $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ está asociada con potencias de 2 :

$$|\mathcal{P}(\mathcal{A})| = 2^{|A|}$$

Ejemplo 2.12

Sea $\mathcal{A} = \{a, b\}$ y $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$. Determine los conjuntos $\mathcal{P}(\mathcal{A}),\ \mathcal{P}(\mathcal{B})$ y determine el valor de $|\mathcal{P}(\mathcal{A})| - |\mathcal{P}(\mathcal{B})|^2$.

Solución
El conjunto de partes de A viene dado por

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

de modo que $|\mathcal{P}(\mathcal{A})| = 4$. Note que $\mathcal{A} = \{a, b\} \Rightarrow |\mathcal{A}| = 2$ y se da la relación $|\mathcal{P}(\mathcal{A})| = 4 = 2^2$.
En el caso de $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ debería cumplirse que $|\mathcal{P}(\mathcal{B})| = 2^{|\mathcal{B}|} = 2^3 = 8$. Veamos si esto es verdadero al epresar el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ por extensión:

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

En efecto este conjunto posee 8 elementos.
Luego $|\mathcal{P}(\mathcal{A})| - |\mathcal{P}(\mathcal{B})|^2 = 4 - 8^2 = -60$ $\square$

2.5. Leyes de conjuntos

A partir de las operaciones entre conjuntos que se han definido hasta ahora, es posible establecer varias leyes de conjuntos que son útiles para simplificar expresiones. A continuación se presentan dichas propiedades.

Leyes de conjuntos

Nombre	**Ley**
Doble complemento (DC)	$\overline{\overline{A}} = A$
De Morgan (DM)	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Conmutatividad (Con)	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Asociatividad (Aso)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributividad (Dis)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotencia (Ide)	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Neutro (Ne)	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap \mathcal{U} = \mathcal{A}$
Inversos (Inv)	$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$ $A \cap \overline{\mathcal{A}} = \varnothing$
Dominación (Dom)	$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Absorción (Abs)	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$

2.5.1. Simplificación de operaciones con leyes de conjuntos

Ejemplo 2.13

Usando las leyes de conjuntos, demostrar la igualdad

$$(A' \cap B) \cup [A' \cap (B \cap C)'] \cup (A' \cap C) = A'$$

Prueba
Partimos de un miembro de la igualdad para llegar al otro.

$$\begin{array}{ll}
(A' \cap B) \cup [A' \cap (B \cap C)'] \cup (A' \cap C) & \\
= A' \cap [B \cup (B \cap C)' \cup C] & \text{Dis} \\
= A' \cap [B \cup (B' \cup C') \cup C] & \text{DM} \\
= A' \cap [(B \cup B') \cup (C' \cup C)] & \text{Aso} \\
= A' \cap [\mathcal{U} \cup \mathcal{U}] & \text{Inv} \\
= A' \cap \mathcal{U} & \text{Ide} \\
= A' & \text{Ne}
\end{array}$$

Queda demostrado. ■

Ejemplo 2.14

Usando las leyes de conjuntos, demostrar la igualdad

$$(A' \cap B) \cup [(B \cap C)' \cap A'] \cup (A \cap C') = A' \cup C'$$

Prueba

$$\begin{array}{ll}
(A' \cap B) \cup [(B \cap C)' \cap A'] \cup (A \cap C') & \\
= (B \cap A') \cup [(B \cap C)' \cap A'] \cup (A \cap C') & \text{Con} \\
= [(B \cup (B \cap C)') \cap A'] \cup (A \cap C') & \text{Dis} \\
= [(B \cup (B' \cup C')) \cap A'] \cup (A \cap C') & \text{DM} \\
= [((B \cup B') \cup C') \cap A'] \cup (A \cap C') & \text{Aso} \\
= [(\mathcal{U} \cup C') \cap A'] \cup (A \cap C') & \text{Inv} \\
= [\mathcal{U} \cap A'] \cup (A \cap C') & \text{Dom} \\
= A' \cup (A \cap C') & \text{Ne} \\
= (A' \cup A) \cap (A' \cup C') & \text{Dis} \\
= \mathcal{U} \cap (A' \cup C') & \text{Inv} \\
= A' \cup C' & \text{Ne}
\end{array}$$

Queda demostrado. ■

Ejemplo 2.15

Usando las leyes de conjuntos, demostrar la igualdad

$$(A \oplus B') \cap (B - C) = (A \cap B) \cap C'$$

Prueba

$$\begin{array}{ll}
(A \oplus B') \cap (B - C) & \\
= [(A \cup B') - (A \cap B')] \cap (B \cap C') & \text{Equivalencias por definición} \\
= \left[(A \cup B') \cap (A \cap B')'\right] \cap (B \cap C') & \text{Equivalencia por definición} \\
= [(A \cup B') \cap (A' \cup B'')] \cap (B \cap C') & \text{DM} \\
= [(A \cup B') \cap (A' \cup B)] \cap (B \cap C') & \text{DN} \\
= (A \cup B') \cap [(A' \cup B) \cap (B \cap C')] & \text{Aso} \\
= (A \cup B') \cap [((A' \cup B) \cap B) \cap C'] & \text{Aso} \\
= (A \cup B') \cap [B \cap C'] & \text{Abs} \\
= [(A \cup B') \cap B] \cap C' & \text{Aso} \\
= [(A \cap B) \cup (B' \cap B)] \cap C' & \text{Dis} \\
= [(A \cap B) \cup \emptyset] \cap C' & \text{Inv} \\
= (A \cap B) \cap C' & \text{Ne}
\end{array}$$

■

2.6. Práctica complementaria

Práctica elaborada con la colaboración del Lic. Hernán Víquez Céspedes

1. Sean $A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e\}$ y $C = \{c, e, f, g\}$. Calcule:

   a) $P(A - B)$
   b) $(A \triangle C) \cap B$
   c) $|(A \cup B) - (B \cap C)|$

2. Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 5, 6\}$ y $C = \{2, 5, 6\}$, calcule:

   a) $A \cup \left(\overline{\overline{B} - C}\right)$
   b) $|P(A \cup C)| - 2$
   c) $[(A - B) \cup C] \cap \overline{(B \triangle C) \cup \{d\}}$

3. Represente en un Diagrama de Venn el conjunto $(A - B) \cup (B \cap C)$

4. Sean A, B, C conjuntos arbitrarios, tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Verifique por medio de Diagramas de Venn la validez de las siguientes igualdades.

   a) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
   b) $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = A$

5. Sean A, B y C conjuntos cualesquiera de un conjunto universal $\mathcal{U}$. Use las leyes de conjuntos para simplificar la siguiente expresión

$$(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B \cap C} \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C})$$

6. Sean A, B, C y D subconjuntos cualesquiera de un conjunto universal $\mathcal{U}$. Use las leyes de conjuntos para verificar la siguiente igualdad

$$\overline{A} \cap B \cup \overline{A \cap B \cap C} \cup C \cap (\overline{B} \cup A) = \mathcal{U}$$

7. Sean A, B y C conjuntos arbitrarios de un conjunto universal $\mathcal{U}$. Simplifique la siguiente expresión que involucra operaciones con conjuntos

$$\overline{(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{B} \cup A)} \cap (\overline{B} \cup C)$$

8. Se realiza una encuesta a 200 personas, para conocer el periódico de preferencia en la comunidad de Paraíso centro, la misma arrojó los siguientes resultados:

   - 40 personas leen el diario La Extra.
   - 42 personas leen el periódico La Nación.
   - 45 personas leen La Teja.
   - 13 personas leen La Extra y La Nación.

- 20 personas leen La Nación y La Teja.
- 18 personas leen La Extra y La Teja.
- 7 personas leen los tres periódicos.

Realice un diagrama de Venn que modele la situación planteada y determine el número de personas que no leen ninguno de los tres periódicos.

9. Al consultar a 45 estudiantes sobre su actividad física, durante la semana, se obtuvo los siguientes resultados: 15 caminan, 14 hacen ciclismo, 18 corren, 7 caminan y hacen ciclismo, 7 hacen ciclismo y corren, 4 caminan y corren y 3 practican los tres ejercicios. Realice el diagrama de Venn para la situación planteada y encuentre el número de personas que no practican ninguno de los tres ejercicios.

10. Un estudiante posee una biblioteca en la cual tiene 3 libros de matemática, dos libros de ciencias y 4 libros de estudios sociales. Si desea elegir un libro de cada materia, ¿ de cuántas maneras puede realizar la selección.

11. Si se lanza un dado tres veces, ¿cuál es el número de resultados posibles que se obtendrá?

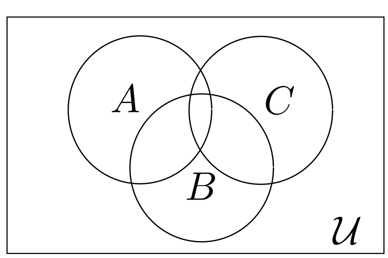
12. Considere el conjunto universo definido por $U = \{a, b, c, e, g, h, m, n, p, r, s, x, y, z\}$ y los subconjuntos de U siguientes: $A = \{a, b, c, e, p, x, y\}$, $B = \{a, c, g, h, r, s\}$ y $C = b, e, h, n, s, p, x, z$. Calcule el conjunto resultante al efectuar las operaciones siguientes:

    a) $(A \oplus B)' - [(A \cap C)' \cup B]$
    b) $P\,(A \cap B)$
    c) $P(B - A)$
    d) $P\,(A \cap B) \cup P(B - A)$
    e) $|(A \oplus B)' - [(A \cap C)' \cup B]| - 4 + |P(B - A)|$

13. Determine los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos representados por comprensión.

    a) $A = \{1 + (-1)^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$
    b) $B = \left\{ \dfrac{1}{n^2 + n} \middle/ \text{n positivo impar y n} \leq 11 \right\}$
    c) $C = \left\{ x = \dfrac{a}{b} \middle/ a, b \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } a^2 + b^2 < 20 \right\}$

14. Considere el diagrama de Venn que se representa en la siguiente figura.



Considerando el diagrama brindado:

a) Represente cada uno de los siguientes conjuntos.

- $(A \oplus B)'$
- $(A \cap B \cap C) \cup A$
- $\overline{(B - A)} \cap C$
- $\overline{(A \cap B \cap C)} - B$

b) Verifique si se cumplen cada una de las siguientes igualdades.

- $\left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left[\overline{\left(A \cup \overline{B}\right)} \cup \overline{B}\right] = \overline{B}$
- $(A \oplus B) \cap B = B - A$
- $\left[\overline{\left(\overline{A} \cup B\right)} \cup C\right] \cup \left(\overline{B} \cap C\right) \cup A = C$

c) Demuestre que se satisfacen las siguientes igualdades.

- $\left[A \cup \overline{\left(\overline{B} \cup \overline{C}\right)}\right] \cup \left(\overline{B} \cap C\right) = A \cup C$
- $B \cup \overline{\left[\left[(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right] \cup B\right] \cap A} = \mathcal{U}$

15. Considere el conjunto universal $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y los subconjuntos de $\mathcal{U}$ de finidos por $P = \{1, 3, 7, 8\}$, $Q = \{1, 2, 3, 7, 9\}$ y $R = \{7, 8, 9, 10\}$. Calcule la siguiente operación con conjuntos $(\overline{P} \cap \overline{R \oplus \overline{Q}}) - ((\overline{R} \cup P) \oplus Q)$

16. Use las propiedades de los conjuntos para simplificar cada una de las siguientes expresiones.

    a) $[\overline{A} \cup (B \cap A)] \cup [\overline{B} \cap (A \cup B)]$

    b) $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{B} \cup A)} \cap (\overline{B} \cup C)$

17. Demuestre, a partir de las leyes de conjuntos, las siguientes igualdades.

    a) $\overline{\left[\left(\overline{A} \cup B\right) \cap A\right]} \cup B = \mathcal{U}$

    b) $\left[A \cup \overline{\left(\overline{B} \cup \overline{C}\right)}\right] \cup \left(\overline{B} \cap C\right) = A \cap C$

    c) $\overline{\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{B} \cup A\right)} \cap \left(\overline{B} \cup C\right) = \overline{\left(\overline{B} \cup \overline{C}\right)}$

18. Un grupo de 40 alumnos del Tecnologico de Morelia, están estudiando para presentar examen como se indica a continuación: 28 Teoría de la Computación. 18 Redes de Computadoras, 20 de Inteligencial Artificial, 13 de Teoría de la Computación y Redes de computadoras, 8 Redes de computadoras e inteligencial artificial, 10 Teoría de la computación e inteligencial artificial, 4 estudian las tres asignaturas.

    a) Dibuje un diagrama de Venn que modele la situación planteada, además ubique los valores respectivos en cada región.

    b) ¿Cuántos de ellos no estudian para ninguna de las tres asignaturas?

    c) ¿Cuántos de ellos estudian únicamente para inteligencia artificial?

d) ¿Cuántos de ellos están estudiando teoría de la computación y redes pero no inteligencia artificial?

19. Se realizó una encuesta a 4800 niños, en la cual se obtuvo la siguiente información:a 2300 les gusta los juegos de acción; a 2000 los juegos de aventura; a 1250 los juegos de deportes. También, se obtuvo que a 550 no les gustó ninguno de esos juegos, pues les gusta los de estrategias, y 50 niños no tienen preferencia por ninguno de los juegos mencionados. Además, hay 100 niños a quienes les gusta los tres juegos; 300 de aventuras y deporte, y a 800 solamente les gusta de aventuras.

    a) Dibuje un diagrama de Venn que modele la situación planteada, además ubique los valores respectivos en cada región.
    b) ¿a cuántos niños les gusta solo los juegos de acción?
    c) ¿a cuántos niños les gusta solo los juegos de acción y deportes?
    d) ¿a cuántos niños les gusta solo un deporte?

20. Lea la siguiente información

    La secretaría de la sede de San Pedro de la Universidad Fidélitas requiere la provisión de 29 cargos docentes en las siguientes áreas: 13 profesores en matemáticas, 13 profesores en física y 15 en sistemas. Para el cubrimiento de los cargos se requiere que: 6 dicten matemáticas y física, 4 dicten física y sistemas y 5 profesores dicten matemáticas y sistemas.

    De acuerdo con la información anterior desarrolle lo que se le solicita en cada caso.

    a) Construya un diagrama de Venn que modele la situación expuesta y determine el valor presente en cada región disjunta.
    b) ¿Cuántos profesores se requiere que dicten las 3 áreas?
    c) ¿Cuántos profesores se requiere para dictar matemáticas únicamente?
    d) ¿Cuántos profesores se requiere para dictar matemáticas y sistemas pero no física?

21. Se ha emprendido un estudio sobre los métodos de viaje con transbordo. A cada participante en la encuesta se le pidió que marcara AUTOBÚS, TREN o AUTOMÓVIL. Según fuera el medio principal de transporte para ir al trabajo. Se permitió aceptar más de una respuesta. Los resultados obtenidos fueron los siguientes: AUTOBÚS, 30 personas; TREN, 35 personas; AUTOMÓVIL, 100 personas; AUTOBÚS y TREN, 15 personas; AUTOBÚS y AUTOMÓVIL, 15 personas; TREN y AUTOMÓVIL, 20 personas; y los TRES medios, 5 personas. ¿Cuántas personas llenaron el cuestionario de la encuesta?

22. En un estudio que se hizo con 260 estudiantes de universidad, se obtuvo los siguientes datos:

    - 64 habían tomado un curso de matemáticas.
    - 94 habían tomado un curso de ciencias de la computación.
    - 58 habían tomado un curso de administración de empresas.
    - 28 habían tomado un curso de matemáticas y uno de administración de empresas.
    - 26 habían tomado un curso de matemáticas y un curso de ciencias de la computación.

- 22 habían tomado un curso de ciencias de la computación y un curso de administración de empresas.
- 14 habían tomado los tres tipos de cursos.

a) ¿Cuántos estudiantes cuyos registros fueron analizados no habían tomado ninguno de los tres tipos de cursos?

b) De los estudiantes cuyos registros fueron estudiados, ¿cuántos habían tomado solo un curso de ciencias de la computación?

23. Demuestre que $\overline{A} \cup \overline{\overline{B} - C} = \overline{A - B} \cup C$
24. Demuestre que $A \cap (C - B) = (A \cap C) - (B \cap C)$
25. Demuestre que $A = (A \cup B) \cap \left[(A \cup C) - \overline{A}\right]$
26. Demuestre que $A \cup \overline{(B \cup C)} = \overline{\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap C\right)}$