

# Grandezas físicas e suas derivações

## INF2604 – Fundamentos de Computação Gráfica

Waldemar Celes  
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio



# Luz

Luz visível: comprimento de onda  $\lambda$  de 380 nm a 780 nm

- ▶ Azul:  $\lambda \approx 400nm$
- ▶ Verde:  $\lambda \approx 550nm$
- ▶ Vermelho:  $\lambda \approx 650nm$

Grandezas

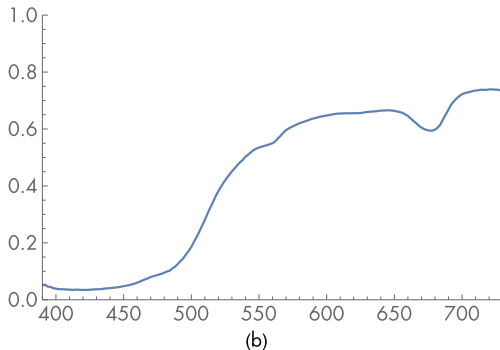
- ▶ Fluxo
- ▶ Intensidade
- ▶ Irradiância
- ▶ Radiância



# Distribuição espectral

Grandezas variam conforme comprimento de onda: espectro

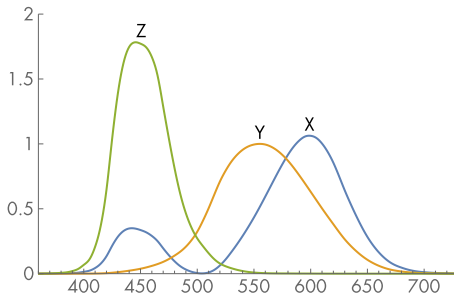
- ▶ Exemplo: refletância de uma casca de limão
  - ▶ Relação entre luminosidade refletida da superfície e o fluxo luminoso incidente



# Representação do espectro

## Funções bases

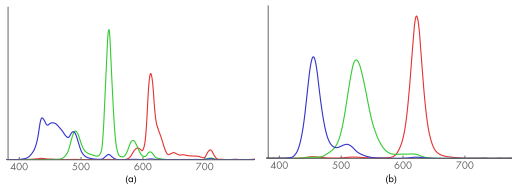
- ▶ Modelo de cor XYZ
  - ▶ Cobre o espectro visível pelo ser humano
  - ▶ Correspondem à resposta dos três cones do ser humano sensível a cores



# Representação do espectro

- ▶ Modelo de cor RGB
  - ▶ Diferença entre displays LCD e LED
  - ▶ Diferença de resposta para o valor  $(r, g, b) = (0.6, 0.3, 0.2)$

## ▶ Curvas de emissão RGB: LCD e LED

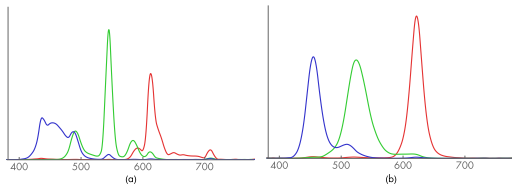


# Representação do espectro

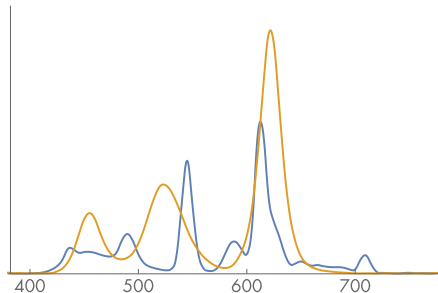
## ► Modelo de cor RGB

- Diferença entre displays LCD e LED
- Diferença de resposta para o valor  $(r, g, b) = (0.6, 0.3, 0.2)$

## ► Curvas de emissão RGB: LCD e LED



## ► Distribuição espectral: LCD e LED



# Modelos de cores

## Conversão entre modelos: XYZ e sRGB

```
inline void XYZToRGB(const float xyz[3], float rgb[3]) {  
    rgb[0] = 3.240479f*xyz[0] - 1.537150f*xyz[1] - 0.498535f*xyz[2];  
    rgb[1] = -0.969256f*xyz[0] + 1.875991f*xyz[1] + 0.041556f*xyz[2];  
    rgb[2] = 0.055648f*xyz[0] - 0.204043f*xyz[1] + 1.057311f*xyz[2];  
}  
  
inline void RGBToXYZ(const float rgb[3], float xyz[3]) {  
    xyz[0] = 0.412453f*rgb[0] + 0.357580f*rgb[1] + 0.180423f*rgb[2];  
    xyz[1] = 0.212671f*rgb[0] + 0.715160f*rgb[1] + 0.072169f*rgb[2];  
    xyz[2] = 0.019334f*rgb[0] + 0.119193f*rgb[1] + 0.950227f*rgb[2];  
}
```



# Radiometria

Descreve propagação e reflexão da luz

- ▶ Baseado em um modelo de partículas (não trata polarização)

Propriedades da luz

- ▶ Linearidade: a combinação de efeitos é igual a soma dos efeitos
- ▶ Conservação de energia: a dispersão da luz não pode ser maior que a incidência
- ▶ Sem fluorescência: cada comprimento de onda do espectro é independente
- ▶ Estado de equilíbrio: a luz no ambiente em equilíbrio, não se altera com o tempo





# Grandezas

Energia  $Q$  (joules,  $J$ )

- ▶ Fótons emitidos por uma fonte de luz carregam energia

Fluxo radiante ou Potência (watts,  $W = J/s$ )

- ▶ Quantidade de energia emitida por unidade de tempo

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}$$



# Grandezas

Irradiância  $E$  ( $W/m^2$ )

- Quantidade de fluxo por unidade de área

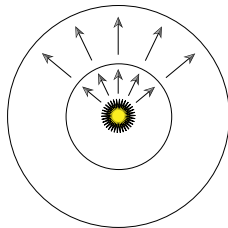


# Grandezas

Irradiância  $E$  ( $W/m^2$ )

- ▶ Quantidade de fluxo por unidade de área
  - ▶ De uma fonte de luz pontual

$$E = \frac{\Phi}{4\pi r^2}$$



# Grandezas

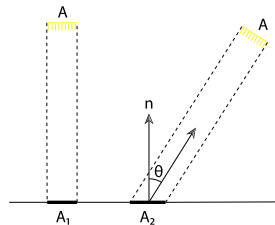
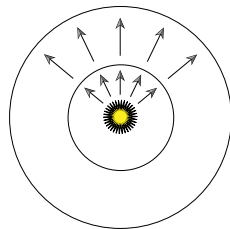
Irradiância  $E$  ( $W/m^2$ )

- ▶ Quantidade de fluxo por unidade de área
  - ▶ De uma fonte de luz pontual

$$E = \frac{\Phi}{4\pi r^2}$$

- ▶ Atenuação com o ângulo de incidência
  - ▶ Lei de Lambert

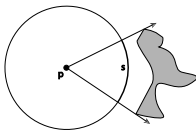
$$E = \frac{\Phi \cos \theta}{4\pi r^2}$$



# Ângulo sólido

## Ângulo planar

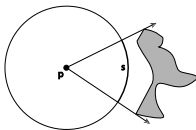
- Comprimento de arco projetado em um círculo unitário (em radianos  $r$ )



# Ângulo sólido

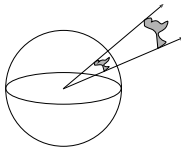
## Ângulo planar

- ▶ Comprimento de arco projetado em um círculo unitário (em radianos  $r$ )



## Ângulo sólido

- ▶ Área projetada em um hemisfério unitário (em esferorradiano (*steradian*)  $sr$ )
  - ▶ Ângulo sólido de um hemisfério:  $2\pi sr$



# Intensidade

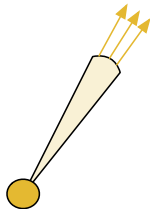
Mede a distribuição direcional da luz

- ▶ Densidade de energia por unidade de ângulo sólido ( $W/sr$ )
  - ▶ Em todas as direções de um esfera:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}$$

- ▶ Na direção de um cone diferencial

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$$



# Radiância

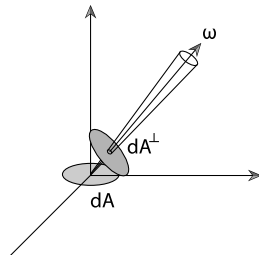
Mede irradiância em relação a um ângulo sólido ( $W/(m^2 sr)$ )

$$L(\mathbf{p}, \omega) = \frac{dE_\omega}{d\omega}$$

► onde  $E_\omega$  representa a irradiância na superfície perpendicular a  $\omega$

Radiância é a densidade de fluxo por unidade de área e unidade de ângulo sólido

$$L = \frac{d\Phi}{d\omega dA^\perp}$$





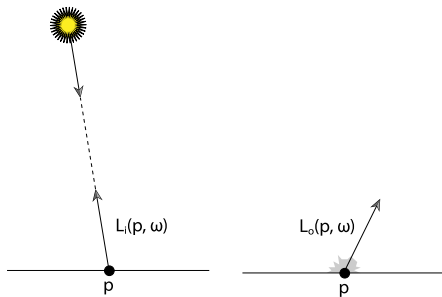
# Radiância

Radiância incidente (de entrada):  $L_i(\mathbf{p}, \omega)$

- ▶ Radiância que chega em um ponto na superfície

Radiância de saída:  $L_o(\mathbf{p}, \omega)$

- ▶ Radiância que sai de um ponto na superfície



# Integrando grandezas radiométricas

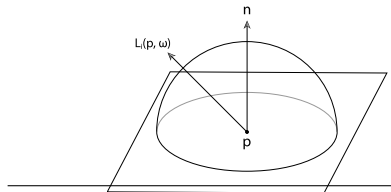
Irradiância em torno de um ponto  $\mathbf{p}$  com normal  $\hat{n}$

► Como:

$$L(\mathbf{p}, \omega) = \frac{dE_\omega}{d\omega}$$

► Temos:

$$E(\mathbf{p}, \hat{n}) = \int_{\Omega} L_i(\mathbf{p}, \omega) \cos \theta \, d\omega$$



Imagens extraídas de Physically Based Rendering, Pharr et al. ([www.pbr-book.org](http://www.pbr-book.org))

# Integrando grandezas radiométricas

Irradiância em torno de um ponto  $\mathbf{p}$  com normal  $\hat{n}$

► Como:

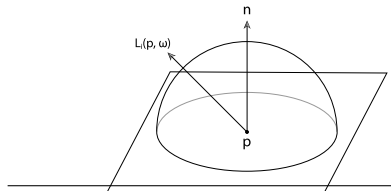
$$L(\mathbf{p}, \omega) = \frac{dE_\omega}{d\omega}$$

► Temos:

$$E(\mathbf{p}, \hat{n}) = \int_{\Omega} L_i(\mathbf{p}, \omega) \cos \theta d\omega$$

## Integral no hemisfério

► Por que integral em relação ao ângulo sólido? Temos outras alternativas?



Imagens extraídas de Physically Based Rendering. Pharr et al. ([www.pbr-book.org](http://www.pbr-book.org))

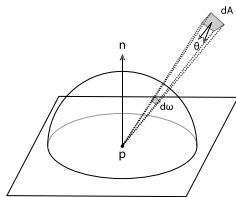
# Integrando sobre área

Muitas vezes é mais adequado integrar sobre a área  
(antes da projeção para ângulo sólido)

- Relação entre ângulo sólido diferencial e área diferencial

$$d\omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2}$$

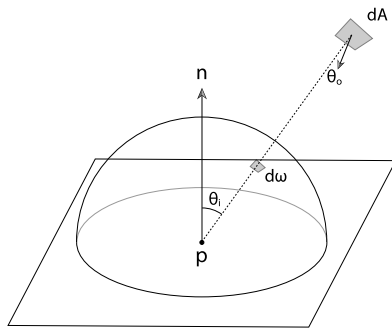
- onde  $\theta$  é o ângulo entre a normal de  $dA$  e o vetor em direção à  $p$



# Integrando sobre área

Integral da irradiância:

$$E(\mathbf{p}, \hat{n}) = \int_A L \cos \theta_i \frac{\cos \theta_o}{r^2} dA$$



Imagens extraídas de Physically Based Rendering, Pharr et al. ([www.pbr-book.org](http://www.pbr-book.org))

# Integrando sobre coordenadas esféricas

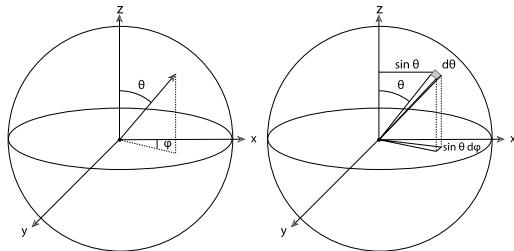
Muitas vezes é mais adequado integrar usando coordenadas esféricas (em especial, quando se deseja avaliar a integral analiticamente)

$$x = \sin \theta \cos \phi$$

$$y = \sin \theta \sin \phi$$

$$z = \cos \theta$$

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$$



Vamos trabalhar trocando  $x$  com  $y$ , invertendo  $\phi$

Logo:

$$E(\mathbf{p}, \hat{n}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L_i(\mathbf{p}, \theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

# Integrando sobre coordenadas esféricas

Exemplo:

- Distribuição constante em todo o hemisfério:  $L_i(\mathbf{p}, \theta, \phi) = k$
- Tem-se:

$$E(\mathbf{p}, \hat{n}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} k \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

$$E(\mathbf{p}, \hat{n}) = k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

$$E(\mathbf{p}, \hat{n}) = k 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$E(\mathbf{p}, \hat{n}) = k 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$E(\mathbf{p}, \hat{n}) = k 2\pi \frac{1}{2} = k \pi$$



# Reflexão da superfície

Interação luz-matéria

- ▶ Reflexão de parte da luz de volta para o ambiente

Modelagem da reflexão

- ▶ Distribuição espectral da luz refletida
- ▶ Distribuição direcional

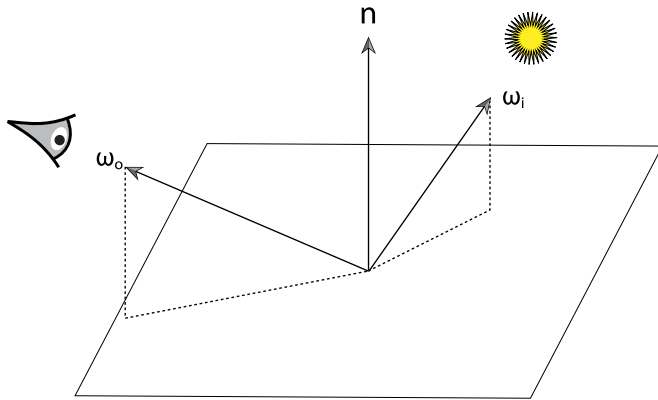




# BRDF

## *Bidirectional reflectance distribution function (BRDF)*

- Mede a radiância refletida na direção  $\omega_o$  devido a luz incidente na direção  $\omega_i$



# BRDF

Considerando uma direção diferencial  $d\omega_i$ , a irradiância diferencial  $dE(\mathbf{p}, \omega_i)$  é:

$$dE(\mathbf{p}, \omega_i) = L_i(\mathbf{p}, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Propriedade de linearidade

- ▶ A radiância diferencial refletida é proporcional à irradiância diferencial

$$dL_o(\mathbf{p}, \omega_o) \propto dE(\mathbf{p}, \omega_i)$$

A constante de proporcionalidade define o BRDF:

$$f_r(\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i) = \frac{dL_o(\mathbf{p}, \omega_o)}{dE(\mathbf{p}, \omega_i)} = \frac{dL_o(\mathbf{p}, \omega_o)}{L_i(\mathbf{p}, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i}$$



# BRDF

BRDF tem duas propriedades físicas importantes:

- ▶ Reciprocidade: para qualquer par de direção  $\omega_i$  e  $\omega_o$

$$f_r(\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i) = f_r(\mathbf{p}, \omega_i, \omega_o)$$

- ▶ Conservação de energia
  - ▶ A energia de toda a luz refletida é menor ou igual à energia da luz incidente

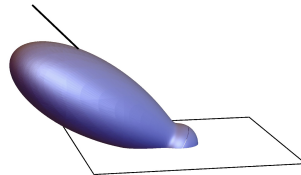
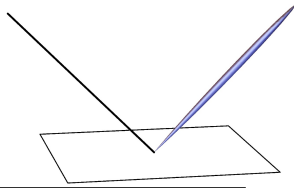
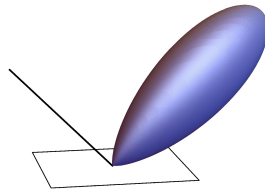
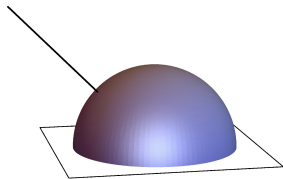
$$\int_{\Omega} f_r(\mathbf{p}, \omega_o, \omega') \cos \theta' d\omega' \leq 1$$



# BRDF

## Categorias

- *Diffuse, Glossy specular, Perfect specular e Retro-reflexive*



Imagens extraídas de *Physically Based Rendering*, Pharr et al. ([www.pbr-book.org](http://www.pbr-book.org))



# BRDF

Função básica: retorna o valor da função de distribuição

- Em geral, independente da posição

$$[r, g, b] = f_r(\omega_o, \omega_i)$$



# Materiais translúcidos

*Bidirectional Transmittance distribution function (BTDF)*

- ▶ A propriedade de reciprocidade não é observada

$$f_t(\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i)$$

Unindo reflexão e refração

- ▶ BSTF: *bidirectional scattering distribution function*
  - ▶ Integrando sobre toda a esfera ao redor do ponto

$$L_o(\mathbf{p}\omega_o) = \int_{S^2} f(\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i) L_i(\mathbf{p}, \omega_i) |\cos \theta_i| d\omega_i$$

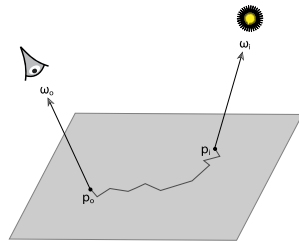


# BSSRDF

## *Bidirectional scattering surface reflectance distribution function*

- Descreve dispersão em materiais que apresentam quantidade significativa de transporte de luz na subsuperfície

$$S(\mathbf{p}_o, \omega_o, \mathbf{p}_i, \omega_i) = \frac{dL_o(\mathbf{p}_o, \omega_o)}{d\Omega(\mathbf{p}_i, \omega_i)}$$



Generalização envolve também integrar sobre a área

$$L_o(\mathbf{p}_o, \omega_o) = \int_A \int_{\Omega} S(\mathbf{p}_o, \omega_o, \mathbf{p}_i, \omega_i) L_i(\mathbf{p}_i, \omega_i) |\cos \theta_i| d\omega_i dA$$

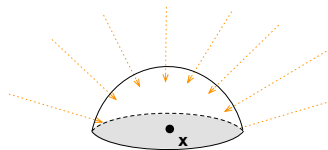


# Transporte de luz

Luz total recebida em um ponto  $\mathbf{x}$

- Integral de luz recebida de todo o hemisfério normal à superfície em  $\mathbf{x}$

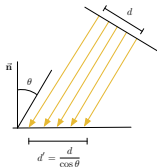
$$L_i(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} L_i(\mathbf{x}, w) \cos \theta_x dw$$



- Onde:

- $L_i(\mathbf{x})$ : luz no ponto  $\mathbf{x}$
- $L_i(\mathbf{x}, w)$ : luz no ponto  $\mathbf{x}$  proveniente de  $w$
- $w$ : ângulo sólido

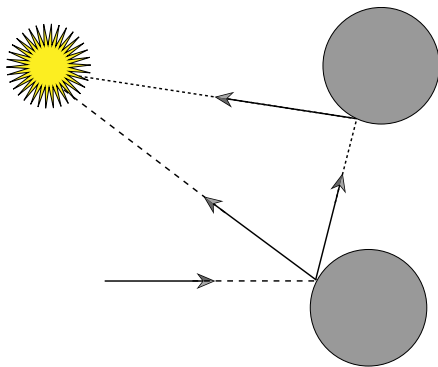
- Regra do cosseno:





# Equação de renderização

$$L_o(\mathbf{p}, \hat{w}_o) = L_e(\mathbf{p}, \hat{w}_o) + \int_{\Omega} f_r(\mathbf{p}, \hat{w}_o, \hat{w}_i) L_i(\mathbf{p}, \hat{w}_i) \cos \theta \, dw_i$$



# Modelos de iluminação

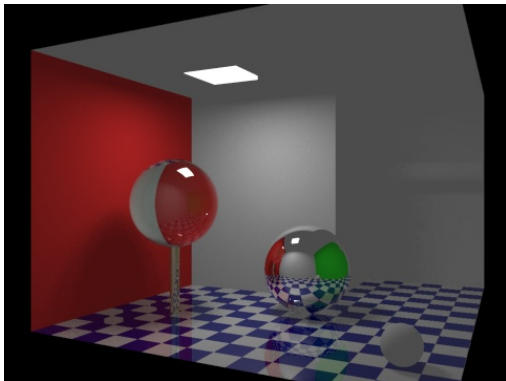


---

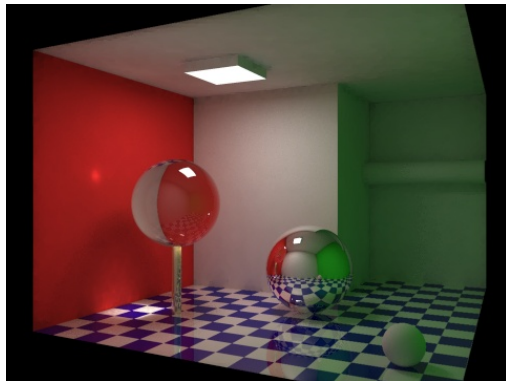
*Imagens extraídas da Wikipedia*



# Modelos de iluminação



Modelo local: Traçado de Raios



Modelo global: Traçado de Caminhos