Экзаменационная программа по

Введению в математический анализ

осенний семестр 2016–2017 учебного года

1. Действительные числа. *Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу)*[1]. *Арифметические операции с действительными числами*[2]. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

2. Предел числовой последовательности и его свойства. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число e. Бесконечно большие последовательности и их свойства.

3. Подпоследовательности, частичные пределы. *Верхний и нижний пределы числовой последовательности*[3]. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности.

4. Определения предела числовой функции одной переменной по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Теорема об односторонних пределах монотонной функции.

5. Определение непрерывности функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. *Односторонняя непрерывность. Переход к пределу под знаком непрерывной функции.*[4] Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

6. Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции.

Функция, непрерывная на множестве. Определение непрерывности на множестве через прообраз открытого множества[5].

Равномерная непрерывность функции. Теорема о продолжении равномерно непрерывной функции.[6]

7. Непрерывность элементарных функций. Определение и свойства показательной функции. Замечательные пределы.

8. Производная функции в точке. Односторонние производные. Дифференцируемость функции в точке. Связь понятий непрерывности и дифференцируемости. Дифференциал. Геометрический смысл производной и

---

[1] Кроме потока В.В. Редкозубова.
[2] Для потока Я.М. Дымарского.
[3] Для потока В.В. Редкозубова.
[4] Кроме потока В.В. Редкозубова.
[5] Для потока М.В. Балашова
[6] Для потока В.В. Редкозубова.

дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.

Дифференцирование функций, заданных параметрически [7].

9. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения функций. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменных.

10. Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Маклорена. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида[8] $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема о промежуточных значениях производной (теорема Дарбу) [9].

11. Применение производной к исследованию функций. Необходимые условия и достаточные условия монотонности функции. Достаточные условия существования локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия существования локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость и точки перегиба. Необходимые условия, достаточные условия выпуклости.

12.[10] Теорема о структуре множества первообразных. Теорема о замене переменных и интегрировании по частям для неопределенного интеграла. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных функций.

13. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкая кривая, касательная к гладкой кривой. Допустимая замена параметра. Теорема Лагранжа для вектор-функций. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для вектор-функции. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.

14 [11]**.** *Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано–Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$. Критерий компактности множества.*

Замкнутость замыкания и открытость внутренности множества. Замкнутость дополнения к открытому множеству.[12]

Теорема Гейне–Бореля. Основная теорема алгебры. [13].

Критерий замкнутости, теорема о существовании предельной точки.[14]

---

[7] Кроме потоков М.В. Балашова и В.В. Редкозубова

[8] Для потока Я.М. Дымарского неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ без доказательства.

[9] Для потоков М.В. Балашова, Я.М. Дымарского.

[10] Кроме потока В.В. Редкозубова.

[11] Для потоков М.В. Балашова и Г.Е. Иванова и В.В. Редкозубова

[12] Для потоков М.В. Балашова и Г.Е. Иванова.

[13] Для потока М.В. Балашова.

[14] Для потока В.В. Редкозубова.