Определение производной

Определение. Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ и x_0 — внутренняя точка множества E. Функция f *имеет производную* в точке x_0, если существует

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Этот предел называют *производной* f в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$ или $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Определение. Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ и x_0 — внутренняя точка множества E. Функция f *дифференцируема* в точке x_0, если существует число $A\in\mathbb{R}$, что

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+o(h)\ \text{ при }\ h\to 0.$$

Линейную функцию $h\mapsto Ah$, $h\in\mathbb{R}$, называют *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначают df_{x_0}.

Теорема 1. *Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ и x_0 — внутренняя точка множества E. Следующие условия эквивалентны:*

1) существует $f'(x_0)\in\mathbb{R}$;

2) функция f дифференцируема в точке x_0 с $A=f'(x_0)$;

3) существует функция $h\colon E\to\mathbb{R}$, непрерывная в точке x_0, что $f(x)-f(x_0)=h(x)(x-x_0)$ для всех $x\in E$ и $h(x_0)=f'(x_0)$.

▲ По условию $E\supset(x_0-\delta,x_0+\delta)$ для некоторого $\delta>0$. Определим функцию $r\colon(-\delta,\delta)\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ по формуле $r(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-Ah$. Так как

$$\frac{r(h)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-A,$$

то $r(h)=o(h)$ при $h\to 0\Leftrightarrow\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A\Leftrightarrow\exists f'(x_0)=A$, что доказывает эквивалентность (1) и (2). Докажем эквивалентность (1) и (3). Если f имеет конечную производную в точке x_0, то положим $h(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x\neq x_0$ и $h(x_0)=f'(x_0)$. Тогда функция h будет удовлетворять всем условиям пункта (3). Обратно, при выполнении (3) будет существовать $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=h(x_0)$. ■

Следствие. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.*

▲ По пункту 3 Т1 имеем $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}[h(x)(x-x_0)]=0$. ■

Геометрический смысл производной. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. График функции $\ell_{x_0}(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ называется *касательной* к графику f в точке $(x_0,f(x_0))$.

Определение. Пусть функция f определена на $[x_0,b)$ (на $(a,x_0]$), тогда $f(x)$ *имеет правую (левую) производную* в точке x_0, если существует

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad\left(\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right).$$

Этот предел называют *правой (левой) производной* функции f в точке x_0 и обозначают $f'_+(x_0)$ (соот. $f'_-(x_0)$).

Замечание. По Т об односторонних пределах функция f имеет производную в точке $x_0\Leftrightarrow$ f в x_0 имеет равные левую и правую производные, при этом $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

Функциональная запись дифференциала. По определению дифференциал функции f в точке x — это линейная функция $df_x\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $df_x(h)=f'(x)h$. В частности, для функции $f(x)=x$ имеем $dx(h)=1\cdot h=h$. Поэтому значение дифференциала $df_x(h)=f'(x)dx(h)$ или в функциональной записи $df_x=f'(x)dx$.

Правила дифференцирования

Теорема 2. *Пусть функции $f,\ g\colon E \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке x_0, тогда в этой точке дифференцируемы функции $\alpha f + \beta g$ ($\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$ и, если $g(x) \neq 0$ на E, то также $\frac{f}{g}$, причем*

1) $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$;
2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

▲ 1) Перейдем к пределу при $x \to x_0$ в равенстве

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} = \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0.$$

По определению производной и дифференцируемости f и g в точке x_0, заключаем существование предела левой части, т.е. существование $(\alpha f + \beta g)'(x_0)$, и справедливость формулы (1).

2) Перейдем к пределу при $x \to x_0$ в равенстве

$$\frac{fg(x) - fg(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0.$$

Тогда, используя определение производной и непрерывность функции f в точке x_0, установим существование предела левой части, т.е. $(fg)'(x_0)$, и формулу (2).

3) Покажем сначала, что $(1/g)'(x_0) = -g'(x_0)/g^2(x_0)$. Это следует предельным переходом при $x \to x_0$ в равенстве

$$\frac{(1/g)(x) - (1/g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}.$$

Тогда общий случай получаем из (2):

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \ \blacksquare$$

Теорема 3 (производная композиции). *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $g\colon Y \to \mathbb{R}$, где $X,\ Y \subset \mathbb{R}$ и $f(X) \subset Y$. Если f дифференцируема в точке x_0, а g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 и $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$.*

▲ Так как f дифференцируема в точке x_0, то согласно пункту 3 Т1 найдется функция $u : X \to \mathbb{R}$, непрерывная в точке x_0, что $f(x) - f(x_0) = u(x)(x - x_0)$ на X, причем $u(x_0) = f'(x_0)$. Аналогично существует функция $v : Y \to \mathbb{R}$, непрерывная в точке y_0, что $g(y) - g(y_0) = v(y)(y - y_0)$ на Y и $v(y_0) = g'(y_0)$. Тогда для всех $x \in X$ имеет место представление

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = v(f(x))(f(x) - f(x_0)) = v(f(x))u(x)(x - x_0).$$

По Т о непрерывности композиции функция $w : X \to \mathbb{R}$, $w(x) = v(f(x))u(x)(x - x_0)$, непрерывна в точке x_0. Так что по пункту 3 Т1 композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x_0, причем $(g \circ f)'(x_0) = w(x_0) = v(f(x_0))u(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$. ■

Следствие (инвариантность дифференциала). Если функции $y = y(x)$, $z = z(y)$ дифференцируемы в точках x и $y(x)$, то вычисление дифференциала композиции $z = z(y(x))$ прямым способом ($dz = z'_x dx = z'_y y'_x dx$) или последовательным способом ($dz = z'_y dy = z'_y(y'_x dx)$) приводят к одному результату.

Теорема 4 (производная обратной функции). *Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонна на промежутке I. Если f дифференцируема во внутренней точке $x_0 \in I$ и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $f^{-1}\colon f(I) \to I$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

▲ Так как f дифференцируема в точке x_0, то согласно пункту 3 Т1 найдется функция $u : I \to \mathbb{R}$, непрерывная в точке x_0, что всех $x \in I$ выполнено

$$f(x) - f(x_0) = u(x)(x - x_0), \tag{1}$$

причем $u(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. Поскольку f строго возрастает, $u(x) \neq 0$ также и при $x \neq x_0$. Равенство (1) можно переписать в виде $y - y_0 = u(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$ для всех $y \in f(I)$, $y = f(x)$, или

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{u(f^{-1}(y))}(y - y_0).$$

По Т об обратной функции f^{-1} непрерывна на $f(I)$. Поэтому функция $w : f(I) \to \mathbb{R}$, $w(y) = 1/u(f^{-1}(y))$, непрерывна в точке y_0. Следовательно, по пункту 3 Т1 функция f^{-1} дифференцируема в точке y_0 и $(f^{-1})'(y_0) = w(y_0) = 1/f'(x_0)$. ■

Теорема 5. *Во внутренних точках областей определения функций справедливы формулы (таблица производных).*

Производные высших порядков

Производные высших порядков определяются индукцией по порядку.

Определение. Положим $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$. Если $(n-1)$-я производная $f^{(n-1)}$ функции f определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует $(f^{(n-1)})'(x_0)$, то эту производную называют *n-й производной* f в точке x_0 и обозначают $f^{(n)}(x_0)$.

Определение. Функцию, имеющую в точке x (на множестве E) конечные производные до порядка n включительно называет *n раз дифференцируемой в точке x* (на множестве E).

Замечание. Из пункта 1 Т2 по индукции следует, что если функции f и g n раз дифференцируемы в точке x (т.е. $\exists f^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$ и $\exists g^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$), то функция $\alpha f + \beta g$ (где $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$) также n раз дифференцируема в этой точке и справедлива формула $(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)$.

Теорема 6 (формула Лейбница). *Если $\exists f^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$ и $\exists g^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$, то $\exists (fg)^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$,*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

▲ Докажем индукцией по n. При $n = 1$ утверждение верно по пункту 2 Т2. Предположим оно верно при $n \geqslant 1$. Покажем, что равенство верно и для $n+1$. Используя результат для $n = 1$,

$$(f^{(k)} g^{(n-k)})' = f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)},$$

где $0 \leqslant k \leqslant n$, имеем

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \left((fg)^{(n)}\right)'(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n-(k-1))}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) =$$

$$= f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x).$$

Так как $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, то $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$, что и требовалось. ■

Определение. Пусть функция f дифференцируема в окрестности точки x_0. Для фиксированного $h \in \mathbb{R}$ в этой окрестности определена функция $\varphi(x) = df_x(h)$. Если эта функция дифференцируема в точке x_0, то *вторым дифференциалом* функции f в точке x_0 называют функцию $d^2 f_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d^2 f_{x_0}(h) = d\varphi_{x_0}(h)$.

Из определения вытекает, что $d^2 f_{x_0}(h) = \varphi'(x_0) h = (f'(x)h)'\big|_{x=x_0} h = f''(x_0) h^2$ или, в функциональной записи $d^2 f_{x_0} = f''(x_0) dx^2$.

Теоремы о среднем

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального максимума (строго локального максимума)* функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, если x_0 внутренняя точка множества E и $\exists \delta > 0\ \forall x \in B'_\delta(x_0)\colon$ $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.

Точка x_0 называется *точкой локального минимума (строго локального минимума)* функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, если x_0 внутренняя точка множества E и $\exists \delta > 0\ \forall x \in B'_\delta(x_0)\colon\ f(x) \geqslant f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Все точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума.*

Теорема 7 (Ферма). *Пусть x_0 — точка локального экстремума функции $f\colon E \to \mathbb{R}$. Если f имеет производную в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

▲ Если x_0 — точка локального максимума f, то $\exists \delta > 0\colon B_\delta(x_0) \subset E$ и $\forall x \in B'_\delta(x)\colon\ f(x) \leqslant f(x_0)$. Тогда $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ при $x \in B'_\delta(x_0)$ и, значит, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$. Поскольку $\exists f'(x_0)$, то, с одной стороны, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$, с другой — $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$. Поэтому $f'(x_0) = 0$.

Случай, когда x_0 — точка локального минимума f, рассматривается аналогично. ■

Теорема 8 (Ролль). *Если функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*

1) непрерывна на $[a,b]$,

2) дифференцируема на (a,b),

3) $f(a) = f(b)$,

то $\exists c \in (a,b)\colon f'(c) = 0$.

▲ По Т Вейерштрасса существуют точки $x_s, x_i \in [a,b]$, что $f(x_i) \leqslant f(x) \leqslant f(x_s)$ для всех $x \in [a,b]$. Если $f(x_s) > f(a) = f(b)$, то положим $c = x_s$. Если $f(x_i) < f(a) = f(b)$, то положим $c = x_i$. В любом случае $c \in (a,b)$ и c — точка локального экстремума f, по Т Ферма $f'(c) = 0$.

Если $f(x_s) = f(x_i)$, то f — постоянна на $[a,b]$ и любая точка $c \in (a,b)$ подходит. ■

Теорема 9 (Лагранж). *Если функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*

1) непрерывна на $[a,b]$,

2) дифференцируема на (a,b),

то $\exists c \in (a,b)\colon f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

▲ Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Такая функция непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $g(a) = f(a) = g(b)$. По Т Ролля $\exists c \in (a,b)\colon\ g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, т.е. $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$. ■

Теорема 10 (Коши). *Если функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*

1) непрерывны на $[a,b]$,

2) дифференцируемы на (a,b),

3) $g'(x) \neq 0$ на (a,b),

то $\exists c \in (a,b)\colon \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

▲ Отметим, что $g(b) \neq g(a)$ (иначе по Т Ролля $\exists c \in (a,b)\colon g'(c) = 0$). Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$. Эта функция непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $h(a) = h(b) = f(a)$. По Т Ролля $\exists c \in (a,b)\colon\ h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$. Так как по условию $g'(c) \neq 0$, то $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. ■

Следствия теоремы Лагранжа о среднем

Следствие 1 (условия монотонности). Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех внутренних точках I. Тогда

1) f нестрого возрастает на $I \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$ для любой внутренней точки $x \in I$;

2) f нестрого убывает на $I \Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$ для любой внутренней точки $x \in I$;

3) f постоянна на $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$ для любой внутренней точки $x \in I$;
4) $f'(x) > 0$ для любой внутренней точки $x \in I$, то f строго возрастает на I;
5) $f'(x) < 0$ для любой внутренней точки $x \in I$, то f строго убывает на I.

▲ Докажем пункт 1.

($\Rightarrow$) Пусть f нестрого возрастает на I, x_0 — внутренняя точка I, т.е $\exists \delta > 0$: $B_\delta(x_0) \subset I$. Тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ для всех $x \in B'_\delta(x_0)$. Следовательно, $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$.

($\Leftarrow$) Пусть x, $y \in I$, $x < y$. По Т Лагранжа $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ для некоторой точки $c \in (x, y)$. Поскольку c — внутренняя точка I, значение $f'(c) \geqslant 0$ и, значит, $f(x) \leqslant f(y)$. Следовательно, f нестрого возрастает на I.

Пункт 2 доказывается аналогично. Пункт 3 следует из предыдущих двух утверждений. ■

Следствие 2 (условия экстремума). Пусть функция f определена на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Пусть также f дифференцируема на $(a, b) \setminus \{x_0\}$ и непрерывна в точке x_0. Тогда

1) если $f'(x) \geqslant 0$ на (a, x_0) и $f'(x) \leqslant 0$ на (x_0, b), то x_0 — точка локального максимума f (строгого, если неравенства для производной строгие);
2) если $f'(x) \leqslant 0$ на (a, x_0) и $f'(x) \geqslant 0$ на (x_0, b), то x_0 — точка локального минимума f (строгого, если неравенства для производной строгие).

▲ Если функция f удовлетворяет условиям пункта 1, то по следствию f нестрого возрастает на $(a, x_0]$ и нестрого убывает на $[x_0, b)$. Так что $f(x) \leqslant f(x_0)$ на $(a, b) \setminus \{x_0\}$ и, значит, x_0 — точка локального максимума f. Если неравенства для производной строгие, то возрастание/убывание строгое. Так что $f(x) < f(x_0)$ на $(a, b) \setminus \{x_0\}$ и, значит, x_0 — точка строгого локального максимума f.

Пункт 2 доказывается аналогично. ■

Следствие 3 (о свойстве производной). Пусть функция f определена на полуинтервале $[x_0, b)$ и дифференцируема на (x_0, b). Если $f(x_0) = f(x_0 + 0)$ (т.е. f непрерывна в точке x_0 справа) и $\exists f'(x_0 + 0)$ (предел производной справа), то $\exists f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$. Аналогично для левой производной.

▲ По Т Лагранжа для каждого $x \in (x_0, b)$ имеем $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c(x))$, где $x_0 < c(x) < x$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0+0} c(x) = x_0$ и $c(x) \neq x_0$, то по Т о замене переменной в пределе существует

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{c\to x_0+0} f'(c) = f'(x_0 + 0).$$

Случай левой производной рассматривается аналогично. ■

Следствие 4. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b) с $f' \neq 0$. Тогда f' сохраняет знак на (a, b).

▲ Пусть x, $y \in (a, b)$, $x \neq y$. По Т Лагранжа $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ для некоторой точки c, лежащей между x и y. Так как $f'(c) \neq 0$, то $f(y) \neq f(x)$. Значит, f инъективна на (a, b). Отметим также, что f непрерывна на (a, b) как дифференцируемая функция.

Покажем, что функция f строго монотонна на (a, b). Если это не так, то найдутся точки x, y, $z \in (a, b)$, $x < z < y$, такие что либо $(f(x) \leqslant f(z)$ и $f(z) \geqslant f(y))$, либо $(f(x) \geqslant f(z)$ и $f(z) \leqslant f(y))$. Рассмотрим первый случай. Применяя Т о промежуточных значениях к f на отрезках $[x, z]$ и $[z, y]$, заключаем, что, например, значение $s = \max\{f(x), f(y)\}$ принимается не менее двух раз; противоречие с инъективностью. ■

Правила Лопиталя

Теорема 11 (о неопределенности $\frac{0}{0}$). *Пусть функции* $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$

1) дифференцируемы на (a, b),
2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$,
3) $g'(x) \neq 0$ *на* (a, b),

4) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

▲ Доопределим функции в точке a, положив $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $\forall x \in (a, b)$ по Т Коши о среднем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $c \in (a, x)$, $c = c(x)$.

Так как $\lim\limits_{x\to a+0} c(x) = a$ и $c(x) \neq a$, то по Т о замене переменной в пределе $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c\to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$. ■

Теорема 12 (о неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть функции* $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$

1) дифференцируемы на (a, b),

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \pm\infty$,

3) $g'(x) \neq 0$ *на* (a, b),

4) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

▲ Так как $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \pm\infty$, то можно дополнительно предположить, что $g(x) \neq 0$ на (a, b). Пусть $x, x_0 \in (a, b)$, $x < x_0$, тогда по Т Коши о среднем $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ для некоторой точки $c \in (x, x_0)$. Умножая это равенство на $\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}$ и группируя члены, получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right) \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{2}$$

Случай I. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}$, тогда имеем оценку

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leqslant \left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем такое $\eta > 0$, что $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ для $a < c < a + \eta$. Фиксируем $x_0 \in (a, a+\eta)$ и положим $\delta_1 = x_0 - a > 0$. Далее, найдем $\delta_2 > 0$, что $|g(x)| > \frac{3}{\varepsilon}|f(x_0)|$ для $a < x < a + \delta_2$ и найдем $\delta_3 > 0$, что $|g(x)| > \frac{3}{\varepsilon}(|A| + \frac{\varepsilon}{3})|g(x_0)|$ для $a < x < a + \delta_3$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Тогда для $a < x < a + \delta$ имеем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leqslant \left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left(|A| + \frac{\varepsilon}{3}\right) \frac{\varepsilon}{3|A| + \varepsilon} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Случай II. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$. По уже доказанному существует $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Значит, $\lim\limits_{x\to a+0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$. Из (2) и равенств $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{g(x_0)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x_0)}{g(x)} = 0$ следует, что знак дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ совпадает со знаком $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ на некотором интервале (a, d). Поэтому $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$. ■

Следствие. Правила Лопиталя верны также и при $x \to \pm\infty$.

▲ Сведем случай $a = -\infty$ к уже доказанному. Без ограничения можно считать, что $b < 0$.

Рассмотрим функции $\varphi\colon (0, -\frac{1}{b}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(-\frac{1}{t})$ и $\psi\colon (0, -\frac{1}{b}) \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = g(-\frac{1}{t})$. Эти функции дифференцируемы на $(0, -\frac{1}{b})$ и $\psi'(t) = g'(-\frac{1}{t})\frac{1}{t^2} \neq 0$. По Т о замене переменной в пределе $\lim\limits_{t\to+0} \varphi(t) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{t\to+0} \psi(t) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ и существует $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Осталось применить Т11 (Т12) для $a = 0$. ■

Определение. Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ имеет $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, тогда равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x)$$

называется *формулой Тейлора* функции f в точке x_0. При этом $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ называется *многочленом Тейлора*, $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ — *остаточным членом*.

Пример. Если $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$, то $P^{(m)}(x) = \sum\limits_{k=m}^{n} \frac{k!}{(k-m)!} a_k (x-x_0)^{k-m}$, $0 \leqslant m \leqslant n$, поэтому $P^{(m)}(x_0) = m! a_m$. Таким образом, $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ — формула Тейлора многочлена P.

Теорема 13 (остаточный член в форме Пеано). *Пусть* $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, *тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

т.е. $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ *при* $x \to x_0$.

▲ Пусть $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, тогда $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Поэтому для остаточного члена $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ выполнено $r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$. Используя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

и по определению производной также $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$. Следовательно, $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$. ■

Следствие (условия экстремума). Пусть $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ и $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0, n \in \mathbb{N}$. Тогда

1) если n — четно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого локального максимума f;
2) если n — четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого локального минимума f;
3) если n — нечетно, то f не имеет локального экстремума в точке x_0.

▲ По предыдущей теореме

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right)(x-x_0)^n,$$

где $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to x_0$. Найдется такое $\delta > 0$, что $|\alpha(x)| < \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|$ для всех $x \in B'_\delta(x_0)$, поэтому знак выражения $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)$ совпадает в $B'_\delta(x_0)$ со знаком $f^{(n)}(x_0)$.

Если n четно, то всегда $(x-x_0)^n > 0$. Поэтому в случае 1 $f(x) < f(x_0)$ при всех $x \in B'_\delta(x_0)$, и, значит, x_0 — точка строго локального максимума f; в случае 2 $f(x) > f(x_0)$ при всех $x \in B'_\delta(x_0)$ и, значит, x_0 — точка строго локального минимума f.

Если n нечетно, то знак $f(x) - f(x_0)$ в $B'_\delta(x_0)$ зависит от знака $x - x_0$ и, значит, f не имеет экстремума в точке x_0. ■

Теорема 14 (остаточный член в форме Лагранжа). *Пусть функция* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *имеет* $(n+1)$*-ю производную на интервале* (a,b) *и пусть* $a < x_0 < b$. *Тогда для любого* $x \in (a,b)$ *существует точка* c, *лежащая между* x_0 *и* x, *что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

т.е. $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

▲ Зафиксируем точки x_0 и $x \in (a,b)$. Пусть для определенности $x > x_0$. Для функций

$$r(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad \varphi(x) = (x-x_0)^{n+1}.$$

точка x_0 является нулем порядка n, в том смысле, что

$$r(x_0) = r'(x_0) = \ldots = r^{(n)}(x_0) = 0, \qquad \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0.$$

Отметим, что производные φ', φ'', …, $\varphi^{(n+1)}$ не обнуляются на (x_0, x). Это позволяет $n+1$ раз воспользоваться Т Коши о среднем: применяя ее к функциям r и φ на отрезке $[x_0, x]$, имеем

$$\frac{r(x)}{\varphi(x)} = \frac{r(x) - r(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{r'(c_1)}{\varphi'(c_1)}$$

для некоторой точки $c_1 \in (x_0, x)$. Далее, применяя теорему к сужениям функций r' и φ' на отрезок $[x_0, c_1]$, имеем

$$\frac{r'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{r'(x) - r'(x_0)}{\varphi'(x) - \varphi'(x_0)} = \frac{r''(c_2)}{\varphi''(c_2)}$$

для некоторой точки $c_2 \in (x_0, c_1)$ и т.д.

В итоге получим точки $c_1, \ldots, c_{n+1}$, $x_0 < c_{n+1} < c_n < \ldots < c_1 < x$, что

$$\frac{r(x)}{\varphi(x)} = \frac{r'(c_1)}{\varphi'(c_1)} = \ldots = \frac{r^{(n+1)}(c_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}.$$

В частности, полагая $c = c_{n+1}$, имеем $c \in (x_0, x)$ и $\frac{r(x)}{\varphi(x)} = \frac{r^{(n+1)}(c)}{\varphi^{(n+1)}(c)}$, что эквивалентно

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

и требуемое равенство установлено. ■

Основные разложения

Формулы разложений в окрестности нуля e^x,...

Теорема 15 (о единственности разложения). *Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots + b_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

при $x \to x_0$. Тогда $a_0 = b_0$, …, $a_n = b_n$.

▲ Вычитая из второго равенства первое, имеем:

$$(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)(x - x_0) + \ldots + (b_n - a_n)(x-x_0)^n = o((x-x_0)^n).$$

Переходя в нем к пределу при $x \to x_0$, получим $b_0 = a_0$. Учитывая это, делим полученное вычитанием равенство на $(x - x_0)$ и снова переходим к пределу при $x \to x_0$, получим $b_1 = a_1$ и т.д. ■

Следствие 1. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ и $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$. Тогда $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Следствие 2. Пусть $\exists f^{(n+1)}(x_0) \in \mathbb{R}$ и $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{n+1}), \quad x \to x_0.$$

▲ По предыдущему следствию $a_k = \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, и, значит, $f^{(k+1)}(x_0) = a_k k!$. По Т13

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{n+1}), \quad x \to x_0.$$

Откуда $f(x) = f(x_0) + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{n+1})$, $x \to x_0$. ■

Выпуклые функции

Определение. Пусть f определена на конечном или бесконечном интервале (a, b). Функция f называется *выпуклой* (выпуклой вниз) на (a, b), если $\forall x,\ y \in (a, b)$, $x \neq y$ и $\forall t \in (0, 1)$:

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Если неравенство строгое, то говорят, что f *строго выпуклая* на (a, b). Функция f называется *вогнутой* (выпуклой вверх) на (a, b), если функция $(-f)$ выпуклая на (a, b). Аналогично определяется строгая вогнутость.

Геометрический смысл. Каждая точка хорды с концами $(x, f(x))$ и $(y, f(y))$ может быть записана в виде $((1-t)x + ty, (1-t)f(x) + tf(y))$, $t \in [0, 1]$. Тогда условие (строгой) выпуклости функции f на (a, b) означает, что график f лежит не выше (строго ниже) любой его хорды (исключая концы).

Лемма (о трех хордах). *Пусть функция f определена на интервале (a, b). Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) функция f выпукла на (a, b);

2) для любых $x,\ y,\ z \in (a, b)$, $x < z < y$, выполнено

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}; \tag{1}$$

3) для любых $x,\ y,\ z \in (a, b)$, $x < z < y$, выполнено

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}; \tag{2}$$

4) для любых $x,\ y,\ z \in (a, b)$, $x < z < y$, выполнено

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}. \tag{3}$$

Если в (1)–(3) знак неравенства $<$, то каждое из полученных условий эквивалентно строгой выпуклости f на (a, b).

▲ Пусть $x,\ y \in (a, b)$, $x < y$. Точка $z \in (x, y) \Leftrightarrow z = (1-t)x + ty$ для единственного $t \in (0, 1)$. Перепишем (1) в виде

$$(y - x)(f(z) - f(x)) \leqslant (z - x)(f(y) - f(x)).$$

Подставляя сюда $z - x = t(y - x)$ и приводя подобные слагаемые, получим, что (1) эквивалентно неравенству $f(z) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$, т.е. условию выпуклости функции f на (a, b). Рассуждения остаются верными, если в них $\leqslant$ заменить на строгое неравенство $<$.

Аналогично устанавливается, что каждое из условий (3)–(4) эквивалентно (1). ■

Теорема 16. *Если функция f выпукла на интервале (a,b), то она непрерывна и в каждой точке $x_0 \in (a,b)$ существуют односторонние производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, причем $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$.*

Кроме того, если $a < x < y < b$, то $f'_+(x) \leqslant f'_-(y)$, а для строго выпуклых функций $f'_+(x) < f'_-(y)$.

▲ Фиксируем $x \in (a,b)$ и рассмотрим на множестве $(a,b)\setminus\{x\}$ функцию $\varphi(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$. Если t_1, $t_2 \in (a,b)\setminus\{x\}$, $t_1 < t_2$, то $\varphi(t_1) \leqslant \varphi(t_2)$ и, значит, функция φ нестрого возрастает на $(a,b)\setminus\{x\}$. Действительно, если $x < t_1 < t_2$, то это следует из неравенства (1), если $t_1 < t_2 < x$, то — из неравенства (2), а если $t_1 < x < t_2$, то — из неравенства (3). По Т о пределах монотонной функции существуют конечные $\lim\limits_{t\to x+0} \varphi(t)$ и $\lim\limits_{t\to x-0} \varphi(t)$, т.е. $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$. Причем, $f'_+(x) \leqslant f'_-(x)$.

Из существования в каждой точке интервала (a,b) обеих односторонних производных вытекает непрерывность функции f на (a,b).

Пусть x, y, $z \in (a,b)$ и $x < z < y$. Переходя в неравенстве (1) к пределу при $z \to x+0$ и в (2) к пределу при $z \to y-0$, получим

$$f'_+(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'_-(y).$$

Наконец, если функция f строго выпукла, то при убывании t дробь $\varphi(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ строго убывает и, значит, левое неравенство строгое. Так что $f'_+(x) < f'_-(y)$. ■

Теорема 17. *Пусть функция f дифференцируема на интервале (a,b), тогда*

1) f выпукла на $(a,b) \Leftrightarrow f'$ нестрого возрастает на (a,b);

2) f строго выпукла на $(a,b) \Leftrightarrow f'$ строго возрастает на (a,b).

▲ ($\Rightarrow$) Вытекает из Т16.

($\Leftarrow$) Пусть f' нестрого возрастает на (a,b) и x, y, $z \in (a,b)$, $x < z < y$. По Т Лагранжа о среднем существует точка $c_1 \in (x,z)$, что $f(z) - f(x) = f'(c_1)(z-x)$ и существует точка $c_2 \in (z,y)$, что $f(y) - f(z) = f'(c_2)(y-z)$. Так как $c_1 < c_2$, то $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$ и, значит,

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

По лемме функция f выпукла на (a,b). Если f' строго возрастает на (a,b), то последние два неравенства строгие и, значит, функция f строго выпукла на (a,b). ■

Следствие. Пусть f дважды дифференцируема на (a,b), тогда

1) f выпукла на $(a,b) \Leftrightarrow f'' \geqslant 0$ на (a,b);

2) $f'' > 0$ на $(a,b) \Rightarrow f$ строго выпукла на (a,b).

Теорема 18. *Если функция f выпукла на интервале (a,b), то она дифференцируема во всех точках (a,b), за исключением не более чем счетного множества.*

▲ По Т16 на (a,b) определена функция $g(x) = f'_-(x)$, причем g нестрого возрастает на (a,b). По Т о разрывах монотонной функции g может иметь не более чем счетное множество точек разрыва и эти точки являются точками разрыва I-го рода.

Покажем, что в точках непрерывности g функция f дифференцируема. В самом деле, согласно Т16, если $x_0 < x$, то $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0) \leqslant f'_-(x)$ откуда

$$0 \leqslant f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leqslant f'_-(x) - f'_-(x_0).$$

Если $g = f'_-$ непрерывна в точке x_0, то разность $f'_-(x) - f'_-(x_0)$ выбором точки x можно сделать сколь угодно малой. Поэтому $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. ■