Теорема 4. *$K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт $\iff$ K — замкнуто и ограничено.*

▲ ($\Rightarrow$) Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$. Фиксируем точку $x \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k(x) = \mathbb{R}^n$, совокупность $\{B_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ является открытым покрытием K. Выделим из нее конечное покрытие $\{B_{k_i}(x)\}_{i=1}^m$. Тогда $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_{k_i}(x) = B_N(x)$, где $N = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} k_i$, и значит, K ограничено.

Покажем, что K замкнуто. Фиксируем точку $y \in \mathbb{R}^n \setminus K$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим $O_k = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x-y| > 1/k\}$. Так как $O_k = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{1/k}(y)$ и $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{y\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} O_k$, то совокупность $\{O_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ образует открытое покрытие K. Выделим из нее конечное покрытие $\{O_{k_j}\}_{j=1}^l$. Тогда $K \subset O_M$, где $M = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant l} k_j$. Поэтому $|x-y| > 1/M$ для всех $x \in K$ и, значит, $B_{1/M}(y) = \{z \in \mathbb{R}^n\colon\ |z-y| < 1/M\} \subset \mathbb{R}^n \setminus K$. Откуда заключаем, что множество $\mathbb{R}^n \setminus K$ открыто.

($\Leftarrow$) Так как K ограничено, то $\exists B_r(x) \supset K$ для некоторой точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Брус $\Pi = \prod\limits_{k=1}^{n} [x_k - r, x_k + r] \supset B_r(x)$. Следовательно, K — замкнутое подмножество компакта Π. Значит, по лемме 5 K — компакт. ■

Теорема 5. *Любое бесконечное подмножество компакта имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую этому компакту.*

▲ Пусть $A \subset K$ не имеет предельной точки в K. Тогда $\forall x \in K\ \exists \varepsilon_x > 0\colon\ B'_{\varepsilon_x}(x) \cap A = \varnothing$. Совокупность шаров $\{B_{\varepsilon_x}(x)\}_{x\in K}$ образует открытое покрытие K. Так как K компакт, из этого покрытия можно выделить конечное покрытие $\{B_{\varepsilon_{x_k}}(x_k)\}_{k=1}^m$. Тогда $A \subset K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_{\varepsilon_{x_k}}(x_k)$. Следовательно, $A \subset \{x_1, \ldots, x_m\}$, т.е. A конечно. ■

Теорема 6. *Из любой последовательности точек компакта можно выбрать сходящуюся к точке компакта подпоследовательность.*

▲ Пусть $\{x^{(k)}\}$ — последовательность точек компакта K, $E = \{x^{(k)}\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ — множество значений $\{x^{(k)}\}$. Возможны 2 случая:

1) Множество E конечно. Тогда $\exists a \in E\ \exists \{k_i\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, что $x^{(k_i)} = a$. Следовательно, $\{x^{(k_i)}\}$ — подпоследовательность $\{x^{(k)}\}$ и $\lim\limits_{i\to\infty} x^{(k_i)} = a$.
2) Множество E бесконечно. Тогда по Т5 E имеет предельную точку $a \in K$. Найдем $k_1 \in \mathbb{N}$, что $x^{(k_1)} \in B_1(a)$. Если уже выбран номер k_m, что $x^{(k_m)} \in B_{\frac{1}{m}}(a)$, то определим номер k_{m+1} условием $k_{m+1} > k_m$ и $x^{(k_{m+1})} \in B_{\frac{1}{m+1}}(a)$. Так будет построена подпоследовательность $\{x^{(k_i)}\}$, сходящаяся к a. Действительно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 1/\varepsilon\ \forall i \geqslant N\colon\ x^{(k_i)} \in B_{1/i}(a) \subset B_\varepsilon(a)$. ■

Следствие (Теорема Больцано – Вейерштрасса). В $\mathbb{R}^n$ из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся последовательность.

▲ Действительно, члены ограниченной последовательности принадлежат некоторому замкнутому шару, который по критерию компактности является компактом. ■