Аналитическая механика

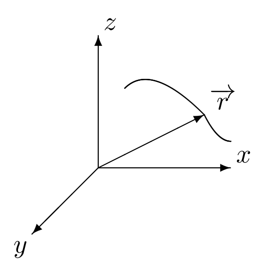
Муницина Валерия Александровна

6 сентября 2017 г.

Кинематика точки

Определение. *Материальная точка - точка, размером которой можно пренебречь.*

Мы будем полагать, что время меняется равномерно и непрерывно.



Векторное описание движения

Зависимость координат от времени назовем законом движения.

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) \in C^2$$

Определение. $\gamma = \{\overrightarrow{r}(t),\ t \in (0,\ +\infty)\}$ - *траектория*

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$$

$$\overrightarrow{w} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}$$

Декартовы координаты

$$\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{e_x} + y(t)\overrightarrow{e_y} + z(t)\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{v}(t) = \dot{x}(t)\overrightarrow{e_x} + \dot{y}(t)\overrightarrow{e_y} + \dot{z}(t)\overrightarrow{e_z}$$

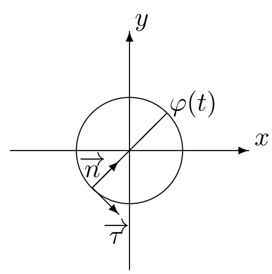
$$\overrightarrow{w}(t) = \ddot{x}(t)\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}(t)\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}(t)\overrightarrow{e_z}$$

Движение по окружности

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - R\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + R\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{cases}$$



$$\overrightarrow{v} = R\dot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \overrightarrow{e_x} + \cos\varphi \cdot \overrightarrow{e_y}) = R\dot{\varphi}\overrightarrow{\tau}$$

$$\overrightarrow{w} = R\ddot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \overrightarrow{e_x} + \cos\varphi \cdot \overrightarrow{e_y}) + R\dot{\varphi}^2(-\cos\varphi \cdot \overrightarrow{e_x} - \sin\varphi \cdot \overrightarrow{e_y}) = R\ddot{\varphi}\overrightarrow{\tau} + R\dot{\varphi}^2\overrightarrow{n}$$

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\varphi}\overrightarrow{\tau} = v\overrightarrow{\tau}$$

$$\overrightarrow{w} = R\ddot{\varphi}\overrightarrow{\tau} + R\dot{\varphi}^2\overrightarrow{n} = \dot{v}\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{n}$$

Естественное описание движения

Кривая задана параметрически естественным параметром s. $ds = |\overrightarrow{dr}| \neq 0$

Определение.

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{d\overrightarrow{r}}{ds} = \dot{\overrightarrow{r}} \text{ - } \textit{касательный вектор} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{n} = \frac{\dot{\overrightarrow{r}}}{|\dot{\overrightarrow{\tau}}|} \text{ - } \textit{вектор главной нормали} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{t}; \overrightarrow{n}] \text{ - } \textit{вектор бинормали} \tag{3}$$

Утверждение 1. $\{\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}\}$ - *тройка ортогональных единичных векторов.*

Доказательство.

$$|\overrightarrow{\tau}| = \frac{|d\overrightarrow{r}|}{|ds|} = 1 \tag{4}$$

$$|\overrightarrow{n}| = \frac{|\dot{\overrightarrow{r}}|}{|\dot{\overrightarrow{\tau}}|} = 1 \tag{5}$$

$$|\overrightarrow{\tau}| = 1 \Rightarrow (\tau, \tau) = 1 \tag{6}$$

$$(\dot{\overrightarrow{\tau}}, \overrightarrow{\tau}) + (\overrightarrow{\tau}, \dot{\overrightarrow{\tau}} = 0 \tag{7}$$

$$2(\dot{\overrightarrow{\tau}}, \overrightarrow{\tau}) = 0 \Rightarrow \dot{\overrightarrow{\tau}} \perp \overrightarrow{\tau} \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\tau} \tag{8}$$

■

Этот трехгранник называют репер Ферне. (Дарбу, сопровождающий трехгранник).

Теорема 1. *$\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{w} = \dot{v}\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n}$, где $v = \dot{s}$.*

Доказательство.

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\overrightarrow{\tau} \tag{9}$$

$$\dot{\overrightarrow{\tau}} = \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \overrightarrow{n}kv, \text{ по формуле (\textbf{??})} \tag{10}$$

$$\overrightarrow{w} = \dot{\overrightarrow{v}} = \dot{v}\overrightarrow{\tau} + v\dot{\overrightarrow{\tau}} = \dot{v}\overrightarrow{\tau} + v^2k\overrightarrow{n} = \dot{v}\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n} \tag{11}$$

$$\dot{v}\overrightarrow{\tau} \text{ - касательное ускорение}$$

$$\frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n} \text{ - нормальное ускорение}$$

$$\rho = \frac{1}{|\dot{r}|} \text{ - радиус кривизны}$$

$$k = |\dot{\overrightarrow{r}}| \text{ - кривизна}$$

$$\dot{\overrightarrow{r}} \text{ - вектор кривизны}$$

■

Формулы Френе:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\tau}' = k\overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n}' = -k\overrightarrow{\tau} + \varkappa\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{b}' = -\varkappa\overrightarrow{n} \end{cases}$$

где $\varkappa$ - коэффициент кручения.

Доказательство.
$$|\overrightarrow{n}| = 1 \Rightarrow (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}) = 0$$
$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\tau} \Rightarrow (\overrightarrow{n}', \overrightarrow{\tau}) + (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{\tau}') = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{n}', \overrightarrow{\tau}) + k = 0$$

$$\overrightarrow{b}' = [\overrightarrow{\tau}', \overrightarrow{n}] + [\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}'] = [k\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}] + [\overrightarrow{\tau}, -k\overrightarrow{\tau} + \varkappa\overrightarrow{b}] = 0 + \varkappa[\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{b}] = -\varkappa\overrightarrow{n}$$

■

Ортогональные векторные координаты

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t)) \tag{12}$$
$$\overrightarrow{v} = \dot{\overrightarrow{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i \tag{13}$$
$$\overrightarrow{H}_i = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} = H_i \overrightarrow{e_i}, \text{ где } H_i \text{ - коэффициенты Ламе.} \tag{14}$$
$$\tag{15}$$

Геометрический смысл

$$ds_i = H_i dq_i$$

s_i - длина дуги i-й к-ой линии.

$$H_i = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

$$\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{3} H_i \dot{q}_i \overrightarrow{e_i}, \quad v^2 = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = \sum H_i^2 \dot{q}_i^2$$

Теорема 2. *Копоненты вектора ускорения в ортогональном криволинейном базисе определяются равенством:*

$$w_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right)$$

Доказательство.

$$(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{H_i}) = \left(\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}, \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{v}, \frac{\overrightarrow{r}}{\partial q_i}\right) - \left(\overrightarrow{v}, \frac{d}{dt}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i}\right) \triangleq \tag{16}$$

$$1)\ \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial q_i'} \text{ - из определения скорости} \tag{17}$$

$$2)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \overrightarrow{r}}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \overrightarrow{r}}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j = \tag{18}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right) = \frac{\partial \overrightarrow{\dot{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial q_i} \tag{19}$$

$$\triangleq \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{v}, \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial q_i}\right) - \left(\overrightarrow{v}, \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = \tag{20}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) \tag{21}$$

$$w_i = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{e_i}) = \frac{1}{H_i}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{H_i}) \tag{22}$$

$\blacksquare$