Аналитическая механика

Муницина Мария Александровна

25 октября 2017 г.

Набор: Александр Валентинов
Об ошибках писать: **https://vk.com/valentiay**

Содержание

Кинематика точки **1**
Векторное описание движения . . . 1
Декартовы координаты . . . 1
Движение по окружности . . . 1
Естественное описание движения . . . 2
Ортогональные векторные координаты . . . 4
Геометрический смысл . . . 4

Кинематика твердого тела **5**
Формулы Пуассона . . . 6
Формула распределения скоростей точек твердого тела . . . 7
Геометрический смысл . . . 8

Классификация движения твердого тела **8**
Поступательное . . . 8
Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси) . . . 8
Плоскопараллельное движение . . . 9
Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки) . . . 10
Винтовое движение . . . 10
Общий случай . . . 10

Кинематика сложного движения **11**
Сложное движение материальной точки . . . 12
Сложное движение твердого тела . . . 13
Кинематические формулы Эйлера . . . 14

Алгебра кватернионов **14**

Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов **16**

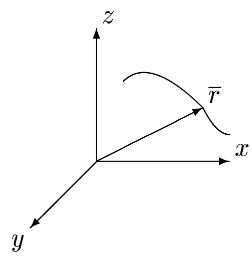
Кинематика твердого тела в кватернионном описании **20**
Интегрирование уравнения Пуассона 22

Динамика **23**
Стационарные силы 25
Позиционные силы 25
Критерий потенциальности 26
Свойства внутренних сил 27

Кинематика точки

Определение. *Материальная точка - точка, размером которой можно пренебречь.*

Мы будем полагать, что время меняется равномерно и непрерывно.



Векторное описание движения

Зависимость координат от времени назовем законом движения.

$$\overline{r} = \overline{r}(t) \in C^2$$

Определение. $\gamma = \{\overline{r}(t),\ t \in (0,\ +\infty)\}$ - *траектория*

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$$

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$$

Декартовы координаты

$$\overline{r}(t) = x(t)\overline{e_x} + y(t)\overline{e_y} + z(t)\overline{e_z}$$

$$\overline{v}(t) = \dot{x}(t)\overline{e_x} + \dot{y}(t)\overline{e_y} + \dot{z}(t)\overline{e_z}$$

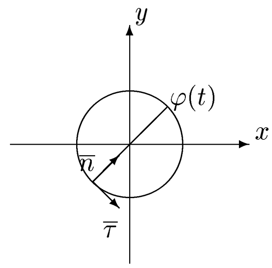
$$\overline{w}(t) = \ddot{x}(t)\overline{e_x} + \ddot{y}(t)\overline{e_y} + \ddot{z}(t)\overline{e_z}$$

Движение по окружности

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - R\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + R\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{cases}$$



$$\overline{v} = R\dot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \overline{e_x} + \cos\varphi \cdot \overline{e_y}) = R\dot{\varphi}\overline{r}$$
$$\overline{w} = R\ddot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \overline{e_x} + \cos\varphi \cdot \overline{e_y}) + R\dot{\varphi}^2(-\cos\varphi \cdot \overline{e_x} - \sin\varphi \cdot \overline{e_y}) = R\ddot{\varphi}\overline{\tau} + R\dot{\varphi}^2\overline{n}$$

$$\overline{v} = R\dot{\varphi}\overline{\tau} = v\overline{\tau}$$
$$\overline{w} = R\ddot{\varphi}\overline{\tau} + R\dot{\varphi}^2\overline{n} = \dot{v}\overline{\tau} + \frac{v^2}{R}\overline{n}$$

Естественное описание движения

Кривая задана параметрически естественным параметром s. $ds = |\overline{dr}| \neq 0$

Определение.

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds} = \dot{\vec{r}} \text{ - *касательный вектор*} \tag{1}$$

$$\overline{n} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{\tau}}|} \text{ - *вектор главной нормали*} \tag{2}$$

$$\overline{b} = [\overline{t}; \overline{n}] \text{ - *вектор бинормали*} \tag{3}$$

Утверждение 1. $\{\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}\}$ *- тройка ортогональных единичных векторов.*

Доказательство.

$|\overline{\tau}| = \dfrac{|d\overline{r}|}{|ds|} = 1$

$|\overline{n}| = \dfrac{|\dot{\vec{r}}|}{|\dot{\overline{\tau}}|} = 1$

$|\overline{\tau}| = 1 \Rightarrow (\tau, \tau) = 1$

$(\dot{\vec{\tau}}, \overline{\tau}) + (\overline{\tau}, \dot{\vec{\tau}}) = 0$

$2(\dot{\overline{\tau}}, \overline{\tau}) = 0 \Rightarrow \dot{\overline{\tau}} \perp \overline{\tau} \Rightarrow \overline{n} \perp \overline{\tau}$

■

Этот трехгранник называют репер Ферне. (Дарбу, сопровождающий трехгранник).

Теорема 1. $\overline{v} = v\overline{\tau}$, $\overline{w} = \dot{v}\overline{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overline{n}$, *где* $v = \dot{s}$.

Доказательство.

$\overline{v} = \dfrac{d\overline{r}}{dt} = \dfrac{d\overline{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = v\overline{\tau}$

$\dot{\overline{\tau}} = \dfrac{d\overline{\tau}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \overline{n}kv$, по формуле (2)

$\overline{w} = \dot{\overline{v}} = \dot{v}\overline{\tau} + v\dot{\overline{\tau}} = \dot{v}\overline{\tau} + v^2k\overline{n} = \dot{v}\overline{\tau} + \dfrac{v^2}{\rho}\overline{n}$

$\dot{v}\overline{\tau}$ - касательное ускорение

$\dfrac{v^2}{\rho}\overline{n}$ - нормальное ускорение

$\rho = \dfrac{1}{|\dot{r}|}$ - радиус кривизны

$k = |\ddot{\overline{r}}|$ - кривизна

$\ddot{\overline{r}}$ - вектор кривизны

■

Формулы Френеля:

$$\begin{cases} \overline{\tau}' = k\overline{n} \\ \overline{n}' = -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b} \\ \overline{b}' = -\varkappa\overline{n} \end{cases}$$

где $\varkappa$ - коэффициент кручения.

Доказательство.

$$|\overline{n}| = 1 \Rightarrow (\overline{n}, \overline{n}) = 0$$

$$\overline{n} \perp \overline{\tau} \Rightarrow (\overline{n}', \overline{\tau}) + (\overline{n}, \overline{\tau}') = 0 \Rightarrow (\overline{n}', \overline{\tau}) + k = 0$$

$$\overline{b}' = [\overline{\tau}', \overline{n}] + [\overline{\tau}, \overline{n}'] = [k\overline{n}, \overline{n}] + [\overline{\tau}, -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b}] = 0 + \varkappa[\overline{r}, \overline{b}] = -\varkappa\overline{n}$$

■

Ортогональные векторные координаты

$$\overline{r} = \overline{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\overline{H_i} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} = H_i \overline{e_i}, \text{ где } H_i \text{ - коэффициенты Ламе.}$$

Геометрический смысл

$$ds_i = H_i dq_i$$

s_i - длина дуги i-й к-ой линии.

$$H_i = \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

$$\overline{v} = \sum_{i=1}^{3} H_i \dot{q}_i \overline{e_i}, \quad v^2 = (\overline{v}, \overline{v}) = \sum H_i^2 \dot{q}_i^2$$

Теорема 2. *Копоненты вектора ускорения в ортогональном криволинейном базисе определяются равенством:*

$$w_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right)$$

Доказательство.

$$(\overline{w}, \overline{H_i}) = \left(\frac{d\overline{v}}{dt}, \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\overline{v}, \frac{\overline{r}}{\partial q_i} \right) - \left(\overline{v}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} \right) \triangleq$$

$$1) \ \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_i'} \text{ - из определения скорости}$$

$$2) \ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\overline{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_i}$$

$$\triangleq \frac{d}{dt} \left(\overline{v}, \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_i} \right) - \left(\overline{v}, \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (\overline{v}, \overline{v}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (\overline{v}, \overline{v}) =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

$$w_i = (\overline{w}, \overline{e_i}) = \frac{1}{H_i} (\overline{w}, \overline{H_i})$$

■

Кинематика твердого тела

Определение. *Абсолютно твердым телом называется множество точек, расстояние между которыми не меняется со временем.*
$\{\overline{r_i}, i = \overline{1 \dots n} \quad : \quad |\overline{r_i} - \overline{r_j}| = C_{ij} = const, \quad n \geqslant 3\}$

$OXYZ$ - неподвижная система отсчета.
$S\xi\eta\zeta$ - связаны с телом (движется).

$$X = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, \overline{e_x}) & (\overline{e_\xi}, \overline{e_y}) & (\overline{e_\xi}, \overline{e_z}) \\ (\overline{e_\eta}, \overline{e_x}) & (\overline{e_\eta}, \overline{e_y}) & (\overline{e_\eta}, \overline{e_z}) \\ (\overline{e_\zeta}, \overline{e_x}) & (\overline{e_\zeta}, \overline{e_y}) & (\overline{e_\xi}, \overline{e_\zeta}) \end{pmatrix} \text{ - матрица направляющих косинусов.}$$

$$\overline{AB} = x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}$$
$$\overline{AB} = \xi\overline{e_\xi} + \eta\overline{e_\eta} + \zeta\overline{e_\zeta}$$

$$X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}) \\ (\overline{e_\eta}, x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}) \\ (\overline{e_\zeta}, x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, \overline{AB}) \\ (\overline{e_\eta}, \overline{AB}) \\ (\overline{e_\zeta}, \overline{AB}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \overline{\rho}$$

$$\overline{\rho} = X\overline{r}$$

Утверждение 2. X *- ортогональная матрица.*

Доказательство.

$$XX^T = X^TX = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, \overline{\xi}) & (\overline{e_\xi}, \overline{\eta}) & (\overline{e_\xi}, \overline{\zeta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \dots & \end{pmatrix} = 0$$

Т.к. базис ортогональный. ■

$$\begin{pmatrix} \overline{e_\xi} \\ \overline{e_\eta} \\ \overline{e_\zeta} \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} \overline{e_x} \\ \overline{e_y} \\ \overline{e_z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\overline{e_\xi}} \\ \dot{\overline{e_\eta}} \\ \dot{\overline{e_\zeta}} \end{pmatrix} = \dot{X}\begin{pmatrix} \overline{e_x} \\ \overline{e_y} \\ \overline{e_z} \end{pmatrix} = \underbrace{\dot{X}X^T}_{\Omega}\begin{pmatrix} \overline{e_\xi} \\ \overline{e_\eta} \\ \overline{e_\zeta} \end{pmatrix} = \Omega\begin{pmatrix} \overline{e_\xi} \\ \overline{e_\eta} \\ \overline{e_\zeta} \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \dot{X}X^T$$

Утверждение 3. Ω *- кососимметрична.*

Доказательство.

$$\Omega\Omega^2 = \dot{X}X^T + (\dot{X}X^T)T = \dot{X}X^T + X\dot{X}^T = \frac{d}{dt}(XX^T) = \frac{d}{dt}(E) = 0$$

■

Следствие.

$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{pmatrix}$ - *Факт, который может быть законспектирован неправильно*

Определение. $\overline{\omega} = \omega_\xi \overline{e_\xi} + \omega_\eta \overline{e_\eta} + \omega_\zeta \overline{e_\zeta}$ - *угловая скорость подвижного репера.*

Формулы Пуассона

Утверждение 4.

$$\dot{\overline{e_i}} = [\overline{\omega}, \overline{e_i}], \quad i = \overline{1\ldots3}$$

Доказательство.

$$\dot{\overline{e_\xi}} = \omega_\zeta \overline{e_\eta} - \omega_\eta \overline{e_\zeta} = \begin{vmatrix} \overline{e_\xi} & \overline{e_\eta} & \overline{e_\zeta} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [\overline{\omega}, \overline{e_\xi}]$$

■

Утверждение 5. $\overline{\omega} = \overline{e_\xi}(\dot{\overline{e_\eta}}, \overline{e_\zeta}) + \overline{e_\eta}(\dot{\overline{e_\zeta}}, \overline{e_\xi}) + \overline{e_\zeta}(\dot{\overline{e_\xi}}, \overline{e_\eta})$

Доказательство.

$$(\dot{\overline{e_\xi}}, \overline{e_\eta}) = \omega_\zeta$$
$$(\dot{\overline{e_\eta}}, \overline{e_\zeta}) = \omega_\xi$$
$$(\dot{\overline{e_\zeta}}, \overline{e_\xi}) = \omega_\eta$$

■

Утверждение 6. $\overline{\omega} = \frac{1}{2}([\overline{e_\xi}, \dot{\overline{e_\xi}}] + [\overline{e_\eta}, \dot{\overline{e_\eta}}] + [\overline{e_\zeta}, \dot{\overline{e_\zeta}}])$

Доказательство.

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}([\overline{e_\xi}, \dot{\overline{e_\xi}}] + [\overline{e_\eta}, \dot{\overline{e_\eta}}] + [\overline{e_\zeta}, \dot{\overline{e_\zeta}}]) = \frac{1}{2}([\overline{e_\xi}, [\overline{\omega}, \overline{e_\xi}]] + [\overline{e_\eta}, [\overline{\omega}, \overline{e_\eta}]] + [\overline{e_\zeta}, [\overline{\omega}, \overline{e_\zeta}]]) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{\omega}(\overline{e_\xi}, \overline{e_\xi}) - \overline{e_\xi}(\overline{\omega}, \overline{e_\xi}) + \overline{\omega}(\overline{e_\eta}, \overline{e_\eta}) - \overline{e_\eta}(\overline{\omega}, \overline{e_\eta}) + \overline{\omega}(\overline{e_\zeta}, \overline{e_\zeta}) - \overline{e_\zeta}(\overline{\omega}, \overline{e_\zeta})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(3\overline{\omega} - \overline{\omega}) = \overline{\omega}$$

■

Пример. *Угловая скорость репера Френеля.*

$$\begin{cases} \overline{\tau}' = k\overline{n} \\ \overline{n}' = -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b} \\ \overline{b}' = -\varkappa\overline{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\overline{\tau}} = \frac{d\overline{\tau}}{ds}\dot{s} \\ \dot{\overline{n}} = \frac{d\overline{n}}{ds}\dot{s} \\ \dot{\overline{b}} = \frac{d\overline{b}}{ds}\dot{s} \end{cases}$$

$$\overline{\omega} = \overline{\tau}(\dot{s}(-k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b}), \overline{b}) + \overline{n}(\dot{s}(-\varkappa\overline{n}, \overline{\tau}) + \overline{b}(\dot{s}(k\overline{n}), \overline{n}) = \dot{s}(\varkappa\overline{\tau} + k\overline{b})$$

Определение. *Угловой скоростью твердого тела называется угловая скорость подвижного репера, с ним связзанного.*

Формула распределения скоростей точек твердого тела

$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$

Доказательство.

$$\overline{AB} = \xi\overline{e_\xi} + \eta\overline{e_\eta} + \zeta\overline{e_\zeta}$$

$$\dot{\overline{AB}} = \xi\dot{\overline{e_\xi}} + \eta\dot{\overline{e_\eta}} + \zeta\dot{\overline{e_\zeta}}, \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$$

$$(\overline{r_B} \dot{-} \overline{r_A}) \quad = \xi[\overline{\omega}, \overline{e_\xi}] + \eta[\overline{\omega}, \overline{e_\eta}] + \zeta[\overline{\omega}, \overline{e_\zeta}]$$

$$\dot{\overline{r_1}} - \dot{\overline{r_2}} = [\overline{\omega}, \xi\overline{e_\xi} + \eta\overline{e_\eta} + \zeta\overline{e_\zeta}]$$

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

■

Следствие. $S\xi\eta\zeta \to \overline{\omega}$, $S'\xi'\eta'\zeta' \to \overline{\omega}'$

$$\left.\begin{matrix} \overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \\ \overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}', \overline{AB}] \end{matrix}\right| [\overline{\omega} - \overline{\omega}', \overline{AB}] = 0; \ \forall A, B \text{ *в абсолютно твердом теле*} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\omega} - \overline{\omega}' = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{\omega} = \overline{\omega}'}$$

Утверждение 7. *(Формула Ривальса)* $\overline{w_B} = \overline{w_A} + [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, [\omega, \overline{AB}]]$.

Доказательство.

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

$$\dot{\overline{v_B}} = \dot{\overline{v_A}} + [\dot{\overline{\omega}}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, \overline{r_B} \dot{-} \overline{r_A}\ ]$$

$$\overline{w_B} = \overline{w_A} + [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]]$$

$[\overline{\varepsilon}, \overline{AB}]$ - вращательное ускорение, $[\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]]$ - осестремительное ускорение

■

Геометрический смысл

$\overline{w} = [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]] = \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{AB}) - \overline{AB}\omega^2 = \omega^2(\overline{e_\omega}(\overline{AB}, \overline{e_\omega}) - \overline{AB})$
$|\overline{w_{\mathbf{oc}}}| = \omega^2 \rho(B, l)$

Утверждение 8. *Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны.*

Доказательство.

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

$$(\overline{v_B}, \overline{AB}) = (\overline{v_A}, \overline{AB}) + ([\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{AB})$$

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$$

■

Замечание. *Аналогичная теорема для ускорений не верна.*

Классификация движения твердого тела

Поступательное

Определение. *Такое движение твердого тела, при котором угловая скорость равна нулю.*

$$\overline{v_B} \equiv \overline{v_A}$$

$$\overline{w_B} \equiv \overline{v_A}$$

Мгновенное поступательное движение: $\exists t : \overline{\omega}(t) = 0, \quad \overline{\varepsilon}(t) \neq 0$

Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси)

$\exists A, B : \overline{v_A} = \overline{v_B} = 0$
$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{v_A} = \overline{v_B} = 0 \Rightarrow [\omega, \overline{AB}] = 0 \Rightarrow \omega \parallel \overline{AB}$
$\forall M \in l : \overline{v_M} = 0$, l - ось вращения
$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi}\vec{e}_\eta, \ \dot{\vec{e}}_\eta = -\dot{\varphi}\vec{e}_\xi, \ \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$
$\vec{\omega} = \vec{e}_\xi(-\dot{\varphi}\vec{e}_\xi, \vec{e}_\zeta) + \vec{e}_\eta(0, \vec{e}_\xi) + \vec{e}_\zeta(\dot{\varphi}\vec{e}_\eta, \vec{e}_\eta) = \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta = \dot{\varphi}\vec{e}_z$
$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\vec{e}_z$
$\vec{v}_p = \vec{v}_{p'} + [\vec{\omega}, \overline{pp'}] = 0 + [\dot{\varphi}\vec{e}_z, \xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta] = \dot{\varphi}(x\vec{e}_\eta - y\vec{e}_\xi)$
$|\vec{v}_p| = |\vec{\omega}| \cdot |\overline{p'p}|$
$\vec{w}_p = \vec{w}_{p'} + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overline{p'p}]] = 0 + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] - \omega^2\overline{p'p}$

Плоскопараллельное движение

Определение. *Движение твердого тела называется плоскопараллельным, если скорости всех точек тела параллельны некоторой неподвижной плоскости:*

$$\overline{v}_{p_i} \parallel \pi, \ \forall p_i \in ATT$$

$$\overline{v}_{p_i} = \overline{v}_{p_j} + [\overline{\omega}, \overline{p_j p_i}]$$

$$(\overline{p}_i - \overline{v}_{p_i}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \overline{\omega} = 0 \\ \overline{v}_{p_i} = \overline{v}_{p_j}, \ \forall p_i, p_j \in \mathrm{ATT} \\ \overline{\omega} \perp \overline{p}_i - \overline{v}_{p_i} \parallel \pi \end{array} \right.$$

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_{M_j} + \omega[\vec{\omega}, \overline{M_j M_i}] = \vec{v}_{M_j}, \quad \forall M_i, M_j : \overline{M_i M_j} \perp \pi \Rightarrow \vec{w}_{M_i} = \vec{w}_{M_j}$$

Качение:

$$\vec{r}_S = x_S \vec{e}_x + y_S \vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi}\vec{e}_\eta, \quad \dot{\vec{e}}_\eta = \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta, \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z, \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\vec{e}_z \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_S + [\vec{\omega}, \overline{SM}]$$

$$\vec{w}_M = \vec{w}_S + [\vec{\varepsilon}, \overline{SM}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overline{SM}]] = \vec{w}_s + [\vec{\varepsilon}, \overline{SM}] - \omega^2 \overline{SM}$$

Теорема 3. *Если при плоскопараллельном движении угловая скорость твердого тела отлична от нуля, то существует точка, скорость которой равна нулю в данный момент времени.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \overline{v}_c = \overline{v}_s + [\overline{\omega}, \overline{SC}] \\ \overline{v}_c = 0 \end{cases} \Rightarrow [\overline{\omega}, \overline{v}_s] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{SC}]] = 0$$

$$[\overline{\omega}, \overline{v}_s] + \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\overline{\omega}, \overline{v}_s]}{\omega^2}$$

■

Следствие. *Любое плоскопараллельное движение является либо мгновенно-поступательным, либо мгновенно-вращательным*

Доказательство. $\overline{\omega} = 0$ - мгновенно-поступательное. $\overline{\omega}(t) \neq 0$ - вращение вокруг l.

■

Определение. *C - мгновенный центр скоростей*

Замечание. *Положение C меняется со временем.*

Пример. *Качение без проскальзывания*

Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки)

$$\exists \overline{v}_0 \equiv 0$$

$$l \parallel \overline{\omega}, O \in l$$

$$\overline{v}_M = \overline{v}_0 + [\overline{\omega}, \overline{OM}] = 0 + 0, \ \forall M \in l$$

Определение. l *- мгновенная ось вращения*

$$\overline{v}_p = [\overline{\omega}, \overline{OP}], \ \overline{w_p} = [\overline{\varepsilon}, \overline{OP}] + \underbrace{[\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{OP}]]}_{\overline{v}_{OC}}$$

Винтовое движение

Определение. *Движение твердого тела называется винтовым, если тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси, а скорости всех точек, лежащий на этой оси, равны между собой, постоянны и сонаправленны с осью.*

Общий случай

Теорема 4. $\overline{\omega} \neq 0 \Rightarrow \exists l: \ \overline{\omega} \parallel l, \ \overline{v}_{k_i} \parallel l, \ \forall k_i \in l$

Доказательство.

$$\overline{\alpha} \perp \overline{\omega}, \ S \in \alpha$$

$$\begin{cases} \overline{v}_c = \overline{v}_c = \overline{v}_s + [\overline{\omega}, \overline{SC}] \\ \overline{v}_c = \lambda \overline{\omega} \end{cases} \Rightarrow 0 = [\overline{\omega}, \overline{v}_s] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{SC}]]$$

$$[\overline{\omega}, \overline{v}_s] + \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\overline{\omega}, \overline{v}_c]}{\omega^2}$$

$$\exists l : C \in l, l \parallel \overline{\omega}$$

$$\overline{v}_{C_1} = \overline{v}_C + [\overline{\omega}, \overline{CC_1}] = \overline{v}_C, \quad \forall C_1 \in l$$

■

$$\overline{v}_C = \overline{v}_S + \left[\overline{\omega}, \frac{[\overline{\omega}, \overline{v}_C]}{\omega^2}\right] = \vec{v}_S + \frac{1}{\omega^2}\left(\vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{v}_S) - \omega^2 \vec{v}_S\right) = \underbrace{\frac{(\vec{\omega}, \vec{v}_S)}{\omega^2}}_{\lambda} \vec{\omega}$$

$$\lambda = \frac{(\vec{\omega}, \vec{v}_S)}{\omega^2} \text{ - параметр (шаг винта).}$$

Следствие. *Любое движение твердого тела является в каждый момент времени либо мгновенно-поступательным ($\omega = 0$, $\lambda \to +\infty$), либо мгновенно-вращательным ($\omega \neq 0$, $\lambda = 0$) , либо мгновенно-винтовым ($\omega \neq 0$, $\lambda \neq 0$).*

Определение. $\{l, \overline{\omega}, \overline{v}\}$ - *кинематический винт.*

$$\overline{v}_S = v_x\overline{e}_x + v_y\overline{e}_y + v_z\overline{e}_z$$
$$\overline{r}_S = x_S\overline{e}_x + y_S\overline{e}_y + z_S\overline{e}_z$$
$$\overline{\omega} = \omega_x\overline{e}_x + \omega_y\overline{e}_y + \omega_z\overline{e}_z$$
$$\overline{r}_C = x\overline{e}_x + y\overline{e}_y + z\overline{e}_z$$
$$\overline{v}_S + [\overline{\omega}, \overline{SC}] = \lambda\overline{\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{v_x + \omega_y(z - z_S) - \omega_z(y - y_S)}{\omega_x} =$$
$$= \frac{v_y + \omega_z(x - x_S) - \omega_x(z - z_S)}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x(y - y_S) - \omega_y(x - x_S)}{\omega_z}$$

Кинематика сложного движения

$OXYZ$ - неподвижная система отсчета $(\overline{r})$, $O_1\xi\eta\zeta$ - подвижная система отсчета $(\overline{\rho})$.

$$\overline{u} = u_x\overline{e}_x + u_y\overline{e}_y + u_z\overline{e}_z$$
$$\overline{u} = u_\xi\overline{e}_\xi + u_\eta\overline{e}_\eta + u_\zeta\overline{e}_\zeta$$
$$\frac{d\overline{u}}{dt} = \dot{u}_x\overline{e}_x + \dot{u}_y\overline{e}_y + \dot{u}_z\overline{e}_z \text{ - абсолютная производная}$$
$$\dot{\overline{u}} = \dot{u}_\xi\overline{e}_\xi + \dot{u}_\eta\overline{e}_\eta + \dot{u}_\zeta\overline{e}_\zeta \text{ - относительная производная}$$

Теорема 5. *(Связь абсолютной и относительной производной)* $\frac{d\overline{u}}{dt} = \dot{\overline{u}} + [\overline{\omega}, \overline{u}]$, *где* $\overline{\omega}$ *- угловая скорость* $O_1\xi\eta\zeta$ *относительно* $OXYZ$

Доказательство.

$$\frac{du}{dt} = \dot{u}_\xi\vec{e}_\xi + \dot{u}_\eta\vec{e}_\eta + \dot{u}_\zeta\vec{e}_\zeta + u_\xi\frac{d\vec{e}_\xi}{dt} + u_\eta\frac{d\vec{e}_\eta}{dt} + u_\zeta\frac{d\vec{e}_\zeta}{dt} =$$
$$= \dot{\vec{u}} + u_\xi[\vec{\omega}, \vec{e}_\xi] + u_\eta[\vec{\omega}, \vec{e}_\eta] + u_\zeta[\vec{\omega}, \vec{e}_\zeta] = \dot{\vec{u}} + [\vec{\omega}, \vec{u}]$$
$$\left(\frac{d\vec{e}_i}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_i] - \text{ - формула Пуассона, } \quad \dot{\vec{e}}_i = 0\right)$$

■

Сложное движение материальной точки

Определение. *Абсолютной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно неподвижной системы отсчета.* $\overline{v}_{абс} = \frac{d}{dt}\overline{r}$

Определение. *Относительной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно подвижной системы отсчета.* $\overline{v}_{отн} = \dot{\overline{\rho}}$

Определение. *Переносной скоростью материальной точки называется абсолютная скорость той точки подвижной системы отсчета, в которой находится движующаяся точка в данный момент времени.*

Теорема 6 (Формула сложения скоростей)**.** $\overline{v}_{абс} = \overline{v}_{отн} + \overline{v}_{пер}$

Доказательство.

$$\overline{v}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\overline{R} + \overline{\rho}) = \frac{dR}{dt} + \dot{\overline{\rho}} + [\overline{\omega}, \overline{\rho}] =$$

$$= \overline{v}_{O_1} + \overline{v}_{\text{отн}} + [\overline{\omega}, \overline{\rho}] = \overline{v}_{\text{отн}} + \overline{v}_{\text{пер}}$$

■

Определение. *Абсолютным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно неподвижной системы отсчета.* $\overline{w}_{абс} = \frac{d}{dt}\overline{v}_{абс}$

Определение. *Относительным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно подвижной системы отсчета.* $\overline{w}_{отн} = \dot{\overline{v}}_{отн}$

Определение. $\vec{\omega}_{пер} = \vec{\omega}_{O_1} + [\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]]$

Определение. $\vec{\omega}_{кор} = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{отн}]$

Теорема 7 (Формула сложения ускорений)**.** $\overline{w}_{абс} = \overline{w}_{отн} + \overline{w}_{пер} + \overline{w}_{кор}$

Доказательство.

$$\vec{w}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{O_1} + [\vec{\omega}, \vec{\rho}]) =$$

$$= \dot{\vec{v}}_{\text{отн}} + [\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{отн}}] + \frac{d}{dt}\vec{v}_{O_1} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho}\right] + [\vec{\omega}, \vec{\rho} + [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] =$$

$$= \dot{\vec{v}}_{\text{отн}} + \dot{\vec{v}}_{O_1} + [\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}] + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{отн}}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]]$$

■

Сложное движение твердого тела

Рассмотрим неподвижную систему отсчета $OXYZ$, подвижную O_1xyz, и систему, связанную с телом $S\xi\eta\zeta$.

Определение. *Абсолютная угловая скорость - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$*

Определение. *Относительная угловая скорость - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно O_1xyz*

Определение. *Переносная угловая скорость - угловая скорость $Oxyz$ относительно $OXYZ$*

Теорема 8 (О сложении угловых скоростей). $\vec{\omega}_{абс} = \vec{\omega}_{отн} + \vec{\omega}_{пер}$

Доказательство.

$$\vec{v}_A^{\text{абс}} = \vec{v}_A^{\text{отн}} + \vec{v}_A^{\text{пер}}$$

$$\vec{v}_B^{\text{абс}} = \vec{v}_B^{\text{отн}} + \vec{v}_B^{\text{пер}}$$

$$\vec{v}_B^{\text{абс}} = \vec{v}_A^{\text{абс}} + [\vec{\omega}_{\text{абс}}, \overline{AB}]$$

$$\vec{v}_B^{\text{отн}} = \vec{v}_A^{\text{отн}} + [\vec{\omega}_{\text{отн}}, \overline{AB}]$$

$$\vec{v}_B^{\text{пер}} = \vec{v}_A^{\text{пер}} + [\vec{\omega}_{\text{пер}}, \overline{AB}]$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + [\vec{\omega}_{\text{абс}} - \vec{\omega}_{\text{отн}} - \vec{\omega}_{\text{пер}}, \overline{AB}] = 0, \quad \forall \overline{AB} \Leftrightarrow \vec{\omega}_{\text{абс}} = \vec{\omega}_{\text{отн}} + \vec{\omega}_{\text{пер}}$$

■

Замечание. $\frac{d\vec{\omega}_{пер}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}_{пер} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{пер}] = \dot{\vec{\omega}}_{пер}$

Теорема 9 (О сложении угловых ускорений). $\vec{\varepsilon}_{абс} = \vec{\varepsilon}_{отн} + \vec{\varepsilon}_{пер} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{отн}]$, *где* $\vec{\varepsilon}_{абс} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{абс}$, $\vec{\varepsilon}_{отн} = \dot{\vec{\omega}}_{отн}$, $\vec{\varepsilon}_{пер} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{пер} = \dot{\vec{\omega}}_{пер}$

Доказательство.

$$\vec{\varepsilon}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{\text{отн}} + \vec{\omega}_{\text{пер}}) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}}_{\text{отн}} + [\vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{\omega}_{\text{отн}}] + \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{\text{пер}} = \vec{\varepsilon}_{\text{отн}} + [\vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{\omega}_{\text{отн}}] + \vec{\varepsilon}_{\text{пер}}$$

■

Несколько подвижных сисем отсчета

$OXYZ$ - неподвижная СО

$Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $\ldots Ox_ny_nz_n$ - подвижные СО

$S\xi\eta\zeta$ - связана с телом

$\vec{\omega}$ - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$

Тогда: $\vec{\omega} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i$

Кинематические формулы Эйлера

Определение. $Ox = (OXY) \cap (O\xi\eta)$ - *линия узлов*

Определение. $\psi = \angle(Ox, OX)$ - *угол прецессии*

Определение. $\Theta = \angle(O\zeta, OZ)$ - *угол нутации*

Определение. $\varphi = \angle(Ox, O\xi)$ - *угол нутации*

Определение. $\{\psi, \Theta, \varphi\}$ - *углы Эйлера*

Повороты: $OXYZ \xrightarrow{\psi, OZ} OxyZ \xrightarrow{\Theta, Ox} Oxy\zeta \xrightarrow{\varphi, O\zeta} O\xi\eta\zeta$
$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\Theta}\vec{e}_x + \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta$
$\vec{e}_x = \cos\varphi\vec{e}_\xi + \sin\varphi\vec{e}_\eta$
$\vec{e}_z = \cos\Theta\vec{e}_\zeta + \sin\Theta(\sin\varphi\vec{e}_\xi + \cos\varphi\vec{e}_\eta)$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\psi}(\sin\Theta\sin\varphi\vec{e}_\xi + \sin\Theta\cos\varphi\vec{e}_\eta + \cos\Theta\vec{e}_\zeta) \\ &+ \dot{\Theta}(\cos\varphi\vec{e}_\xi - \sin\vec{e}_\eta) \\ &+ \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta = \omega_\xi\vec{e}_\xi + \omega_\eta\vec{e}_\eta + \omega_\zeta\vec{e}_\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \vec{\omega}_\xi = \dot{\psi}\sin\Theta\sin\varphi + \dot{\Theta}\cos\varphi \\ \vec{\omega}_\eta = \dot{\psi}\sin\Theta\cos\varphi + \dot{\Theta}\sin\varphi \\ \vec{\omega}_\zeta = \dot{\psi}\cos\Theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad \text{- кинематические формулы Эйлера}$$

Определение. *Движение твердого тела называется прецессией, если некоторая ось, неподвижная в теле, в абсолютном пространстве движется по поверхности неподвижного кругового конуса.* $\dot{\Theta} = 0$. *Если* $\dot{\psi} = const$, $\dot{\varphi} = const$, *то прецессия называется регулярной.*

Алгебра кватернионов

Определение. *Алгеброй над полем называется векторное пространство над этим полем, снабженное билинейной операцией умножения.*

Пример.

$\underline{n=2}$*(Комплексные числа).* $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$\underline{n=4}$*(Алгебра кватернионов)*

$\Lambda = \lambda_0\vec{i}_0 + \lambda_1\vec{i}_1 + \lambda_2\vec{i}_2 + \lambda_3\vec{i}_3 \in \mathbb{H}$

$\{\vec{i}_0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\}$ - базис

$\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda}$

$i_0 \circ i_k = i_k k = \overline{1,3}$, $i_0 \circ i_0 = 1$

$i_k \circ i_m = -(i_k, i_m) + [i_k, i_m] k, m \in \{1,2,3\}$
$\overline{\lambda} \circ \overline{\mu} = (\lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3) \circ (\mu_1 \vec{i}_1 + \mu_2 \vec{i}_2 + \mu_3 \vec{i}_3) = -(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) + [\overline{\lambda}, \overline{\mu}]$
$\Lambda \circ M = (\lambda + \overline{\lambda}) \circ (\mu + \overline{\mu}) = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \overline{\mu} + \overline{\lambda} \mu_0 - (\overline{\lambda}, \overline{\mu}) + [\overline{\lambda}, \overline{\mu}]$

Свойства:

1. $(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N)$
2. $(\Lambda + M) \circ N = \Lambda \circ N + M \circ N$
3. $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$

Определение.

$$\overline{\Lambda} = \lambda_0 - \overline{\lambda}$$

Утверждение 9.

$$\overline{\Lambda \circ M} = \overline{M} \circ \overline{\Lambda}$$

Доказательство.

$$\overline{\Lambda \circ M} = \lambda_0 \mu_0 - (\overline{\lambda}, \overline{\mu}) - \lambda_0 \overline{\mu} - \mu_0 \overline{\lambda} - [\overline{\lambda}, \overline{\mu}] =$$

$$= (\mu_0 - \overline{\mu}) \circ (\lambda_0 - \overline{\lambda}) = \overline{M} \circ \overline{\Lambda}$$

■

Определение.

$$\| \Lambda \| = \Lambda \circ \overline{\Lambda} = (\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ (\lambda_0 - \overline{\lambda}) = \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k^2 = |\Lambda|^2 \text{ - \textit{норма} } \Lambda$$

Утверждение 10.

$$\| \Lambda \circ M \| = \| \Lambda \| \cdot \| M \|$$

Доказательство.

$$\| \Lambda \circ M \| = (\Lambda \circ M) \circ (\overline{\Lambda \circ M}) = \Lambda \circ \underbrace{M \circ \overline{M}}_{\| M \|} \circ \overline{\Lambda} = \| M \| \cdot \| \Lambda \|$$

■

Определение.

$$\Lambda^{-1} = \frac{\overline{\Lambda}}{\| \Lambda \|}, \ \| \Lambda \| \neq 0$$

Замечание.

$$\Lambda \circ \frac{\overline{\Lambda}}{\| \Lambda \|} = \frac{\overline{\Lambda}}{\| \Lambda \|} \circ \Lambda = \frac{\| \Lambda \|}{\| \Lambda \|} = 1$$

Формула Муавра

$$\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda} = |\Lambda| \left(\frac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \frac{\overline{\lambda}}{|\lambda|} \frac{|\overline{\lambda}|}{|\Lambda|} \right) = |\Lambda| \left(\cos\nu + \overline{e} \sin\nu \right)$$

$$\overline{e} = \frac{\overline{\lambda}}{|\overline{\lambda}|},\ \cos\nu = \frac{\lambda_0}{\Lambda},\ \sin\nu = \frac{\overline{\lambda}}{|\Lambda|}$$

$$\Lambda_1 = |\Lambda_1|(\cos\nu_1 + \overline{e}\sin\nu_1)$$

$$\Lambda_2 = |\Lambda_2|(\cos\nu_2 + \overline{e}\sin\nu_2)$$

$$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = |\Lambda_1| \cdot |\Lambda_2| (\cos\nu_1 \cos\nu_2 - \sin\nu_1 \sin\nu_2 (\overline{e}, \overline{e}) + \cos\nu_1 \sin\nu_2 \overline{e} +$$

$$+ \cos\nu_2 \sin\nu_1 \overline{e} + \sin\nu_2 \sin\nu_2 [\overline{e}, \overline{e}]) = |\Lambda_1||\Lambda_2| \cdot (\cos(\nu_1 + \nu_2) + \overline{e}\sin(\nu_1 + \nu_2))$$

$$\Lambda^k = |\Lambda|^k \cdot (\cos k\nu + \overline{e} \sin k\nu) \text{ — формула Муавра}$$

Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов

$E = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ — неподвижный базис
$E' = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3\}$ — связанный с телом

Теорема 10. *Произвольному положению твердого тела с неподвижной точкой соответсвует номированный кватернион, удовлетворяющий равенству:*

$$\overline{e}_i = \Lambda \circ \overline{e}_i \circ \overline{\Lambda}, \quad i = 1 \ldots 3$$

Замечание. Λ — *нормирован, если* $\| \Lambda \| = 1$

Доказательство.

1. Нормированность

$$\| \overline{e}'_i \| = \| \Lambda \| \cdot \| \overline{e}_i \| \cdot \| \overline{\Lambda} \| \Rightarrow 1 = \| \Lambda \| \cdot 1 \cdot \| \Lambda \| \Rightarrow \| \Lambda \| = 1$$

2. Существование решения. $\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda}$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \\ \overline{e}'_i \circ \Lambda = \Lambda \circ \overline{e}_i \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \\ \overline{e}'_i \circ (\lambda_0 + \overline{\lambda}) = (\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ \overline{e}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 \overline{e}'_i - (\overline{e}'_i, \overline{\lambda}) + [\overline{e}'_i, \overline{\lambda}] = \lambda_0 \overline{e}'_i - (\lambda, \overline{e}'_i) + [\overline{\lambda}, \overline{e}_i] \\ \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \\ (\overline{\lambda}, \overline{r}_i) = 0 \\ \lambda_0 \overline{r}_i - [\overline{\lambda}, \overline{s}_i] = 0 \end{cases} \qquad \overline{r}_i = \overline{e}'_i - \overline{e}_i,\ \overline{s}_i = \overline{e}'_i + \overline{e}_i \quad i = 1 \dots 3$$

(a)

$$\begin{aligned} &(\overline{r}_k, \overline{s}_k) = (\overline{e}'_k - \overline{e}_k, \overline{e}'_k + \overline{e}_k) = (\overline{e}'_k, \overline{e}'_k) - (\overline{e}_k, \overline{e}_k) = 0 \\ &(\overline{r}_k, \overline{s}_l) = (\overline{e}'_k - \overline{e}_k, \overline{e}'_l + \overline{e}_l) = (\overline{e}'_k, \overline{e}'_l) + (\overline{e}'_k, \overline{e}_l) - (\overline{e}_k, \overline{e}'_l) - (\overline{e}_k, \overline{e}_l) = \\ &= -(\overline{e}'_l - \overline{e}_l, \overline{e}'_k + \overline{e}_k) = -(\overline{s}_k, \overline{r}_l),\ k \neq 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &(\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3) = (\overline{e}'_1 - \overline{e}_1, \overline{e}'_2 - \overline{e}_2, \overline{e}'_3 - \overline{e}_3) = (\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3) - (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) - \\ &- (\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}_3) + (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}'_3) = 1 - 1 - (\underbrace{[\overline{e}'_1, \overline{e}'_2]}_{\overline{e}'_3}, \overline{e}_3) + (\underbrace{[\overline{e}_1, \overline{e}_2]}_{\overline{e}_3}, \overline{e}'_3) = 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\overline{r}_1(\overline{s}_2, \overline{r}_3) + \overline{r}_2(\overline{s}_3, \overline{r}_1) + \overline{r}_3(\overline{s}_1, \overline{r}_2)$$

$$(2b) \Rightarrow c_1\overline{r}_1 + c_2\overline{r}_2 + c_3\overline{r}_3 = 0$$

$$\begin{cases} 0 + c_2(\overline{s}_1, \overline{r}_2) - c_3(\overline{s}_2, \overline{r}_1) = 0 \\ -c_1(\overline{s}_1, \overline{r}_2) + 0 + c_3(\overline{s}_2, \overline{r}_3) = 0 \\ c_1(\overline{s}_3, \overline{r}_1) - c_2(\overline{s}_2, \overline{r}_3) + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = (\overline{s}_2, \overline{r}_3) \\ c_2 = (\overline{s}_3, \overline{r}_1) \\ c_3 = (\overline{s}_1, \overline{r}_2) \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_0^2 + \lambda^2 = 1 & (1) \\ (\overline{r}_k, \overline{\lambda}) = 0 & (2) \\ \lambda_0\overline{r}_k + [\overline{s}_k, \overline{\lambda}] = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0\overline{r}_1 + [\overline{s}_1, \alpha[\overline{r}_1, \overline{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0\overline{r}_2 + [\overline{s}_2, \alpha[\overline{r}_1, \overline{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0\overline{r}_3 + [\overline{s}_3, \alpha[\overline{r}_1, \overline{r}_2]] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0\overline{r}_1 + \alpha\overline{r}_1(\overline{s}_1, \overline{r}_1) - 0 = 0 \\ \lambda_0\overline{r}_2 + 0 - \alpha\overline{r}_2(\overline{s}_2, \overline{r}_1) = 0 \\ \lambda_0\overline{r}_3 + \alpha r_1(\overline{s}_3, \overline{r}_2) - \alpha r_2(\overline{s}_3, \overline{r}_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0\overline{r}_1 + \alpha\overline{r}_1(\overline{s}_1, \overline{r}_2) = 0 \\ \lambda_0\overline{r}_2 + \alpha\overline{r}_2(\overline{s}_1, \overline{r}_2) = 0 \\ \lambda_0\overline{r}_3 + \alpha\overline{r}_3(\overline{s}_1, \overline{r}_2) = 0 \end{cases} \qquad \lambda_0 = -\alpha(\overline{s}_1, \overline{r}_2) = \alpha(\overline{s}_2, \overline{r}_1)$$

$$(1) \Rightarrow \alpha^2((\overline{s}_2, \overline{r}_1)^2 + [\overline{r}_1, \overline{e}_2]^2)^2 = 1 \Rightarrow \qquad \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{(\overline{s}_2, \overline{r}_1)^2 + [\overline{r}_1, \overline{r}_2]^2}}$$

$$\Lambda = \pm \frac{(\overline{s}_2, \overline{r}_1) + [\overline{r}_1, \overline{r}_2]}{\sqrt{(\overline{s}_2, \overline{r}_1)^2 + [\overline{r}_1, \overline{r}_2]^2}}$$

■

Определение.

$f(M) = \Lambda \circ M \circ \overline{\Lambda}$; $M \to f(M)$, $\| \Lambda \| = 1$– *присоединенное преобразование*

Утверждение 11. *Присоединенное преобразование не меняет скалярные части кватернионов и модуль векторной части*

Доказательство.

1. $f(M) = \Lambda \circ (\mu_0 + \overline{\mu}) \circ \overline{\Lambda} = \Lambda \circ \mu_0 \circ \overline{\Lambda} + \Lambda \circ \overline{\mu} \circ \Lambda = \mu_0 \| \Lambda \| + f(\overline{\mu}) = \mu_0 + \overline{\mu}'$
2. $\mu_0^2 + \overline{\mu}^2 = \| M \| = \| \Lambda \circ M \circ \overline{\Lambda} \| = \| f(M) \| = \mu_0^2 + \overline{\mu}'^2 \Rightarrow \mu^2 = \overline{\mu}'^2$

■

Следствие. *Всегда существует присоединенное преобразование, переводящее орты неподвижного базиса в орты базиса, связанного с телом.*

Доказательство.

$$\overline{e}_i' = \Lambda \circ \overline{e}_i \circ \overline{\Lambda} = f(\overline{e}_i) \tag{4}$$

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{3} r_k \overline{e}_k, \quad f(r) = \Lambda \circ \sum r_k \overline{e}_k \overline{\Lambda} = \sum_k r_k f(\overline{e}_k) = \sum_k = r_k \overline{e}_k = \overline{r}' \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

■

$$\boxed{\overline{r}' = \Lambda \circ \overline{r} \circ \overline{\Lambda}} \tag{7}$$

Следствие. *При повороте твердого тела вокруг неподвижной точки справедлива (7), где $\overline{r}$ – начальное положение точки, $\overline{r}'$ – ее положение после поворота, а Λ – кватернион соответствующего преобразования.*

Теорема 11. *Преобразование, заданное кватернионом $\Lambda = \cos\nu + \overline{e}\sin\nu$ соответствует повороту пространства вокруг вектора $\overline{e}$ на угол 2ν*

Доказательство.

1.

$$\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda}$$
$$\overline{\lambda}' f(\overline{\lambda}) = \Lambda \circ \overline{\lambda} \circ \overline{\Lambda} = (\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ \overline{\Lambda} \circ (\lambda_0 - \overline{\lambda}) =$$

$$(\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ (-\lambda^2 + \lambda_0\overline{\lambda}) = -\lambda_0\overline{\lambda}^2 - \lambda_0\overline{\lambda}^2 + \lambda_0^2 + \lambda^2\overline{\lambda} =$$
$$= \overline{\lambda}(\lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2) \Rightarrow \overline{\lambda} \text{ — неподвижная ось} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{e} = \frac{\overline{\lambda}}{\sin\nu} \text{ — ось поворота}$$
$$\overline{a} \in \pi \perp \overline{e}$$
$$\overline{a}' = f(\overline{a}) = (\cos\nu + \overline{e}\sin\nu) \circ \overline{a} \circ (\cos\nu - \overline{e}\sin\nu) =$$
$$= (\cos\nu + \overline{e}\sin\nu) \circ ([\overline{a}, \overline{e}] \cdot \sin\nu + \cos\nu\overline{a} - \sin\nu[\overline{a}, \overline{e}]) =$$
$$\cos^2\nu\overline{a} + \cos\nu\sin\nu(\overline{a}, \overline{e}) + \cos\nu\sin\nu = \ldots$$

2.

$$\overline{a}' = (\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2} \circ \overline{a}) \circ (\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}) =$$
$$= (\overline{a}\cos\frac{\varphi}{2} + [\overline{e}, \overline{a}]\sin\frac{\varphi}{2}) \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}) =$$
$$= \overline{a}\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2[\overline{e}, \overline{a}]\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} - \overline{a}\sin^2\frac{\varphi}{2} =$$
$$= \overline{a}\cos\varphi + [\overline{e}, \overline{a}]\sin\varphi$$

$$|\overline{a}'| = |\overline{a}|$$

■

Следствие.

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1\overline{e}_1, +\lambda_2\overline{e}_2 + \lambda_3\overline{e}_3 = \lambda_0 + \lambda_1\overline{e}_1' + \lambda_2\overline{e}_2' + \lambda_3\overline{e}_3'$$

Определение.

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \text{ — \textit{Параметры Родрига-Гамильтона}}$$

Следствие (Теорема Эйлера о конечном повороте)**.** *Любые два положения твердого тела с неподвижной точкой могут быть получены одно из другого одним поворотом вокруг некторой оси, проходящей через неподвижную точку на некоторый угол*

Доказательство.

1.
$$\forall E, E' \quad \exists \Lambda E \to E'$$

2.
$$\forall \Lambda \overline{r} \to \overline{r}' \Leftrightarrow \text{Поворот вокруг } e \text{ на } \varphi$$

■

$E \xrightarrow{\Lambda_1} E' \xrightarrow{\Lambda_2} E'',\ E \xrightarrow{\Lambda}$

$\overline{r}' = \Lambda_1 \circ \overline{r} \circ \overline{\Lambda},\ \overline{r}'' = \Lambda_2 \circ \overline{r}' \circ \overline{\Lambda}$

$\overline{r}'' = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \overline{r} \circ \overline{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}_2 = \Lambda \circ \overline{r} \circ \overline{\Lambda}, \quad \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1} \text{ — формула сложения поворотов}$$

$\Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum\limits_{k=1}^{3} \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k'' = \lambda_0^{(2)} + \sum\limits_{k=1}^{3} \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k'$

$\Lambda_2^* = \lambda_0^{(2)} + \sum\limits_{k=1}^{3} \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k$ — собственный к Λ_2 кватернион

$\overline{e}_k' = \Lambda_1 \circ \overline{e}_k \circ \overline{\Lambda}_1, \quad \Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \Lambda_1 \circ \overline{e}_k \circ \overline{\Lambda}_1 =$

$= \Lambda_1 \circ (\lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k) \circ \overline{\Lambda}_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ \overline{\Lambda}_1$

$\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ (\overline{\Lambda}_1 \circ \Lambda_1) = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*, \quad \Lambda_1^* = \Lambda_1$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*}$$

— формула сложения поворотов в параметрах Родрига-Гамильтона

Кинематика твердого тела в кватернионном описании

Теорема 12. *Угловая скорость твердого тела определяется равенством:*

$$\overline{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}$$

где Λ - кватернион, задающий положение твердого тела относительно неподвижного базиса

Доказательство.

1.

$B = \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}$

$B + \overline{B} = \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} + \overline{\left(\dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}\right)} = \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} + \Lambda \circ \overline{\Lambda} =$

$= \dfrac{d}{dt}(\Lambda \circ \overline{\Lambda}) = \dfrac{d}{dt}(\| \Lambda \|) = 0 \Rightarrow B = \overline{B}$

2.

$$\dot{\overline{e}}'_k = [\overline{\omega}, \overline{e}_k]$$
$$\overline{e}'_k = \Lambda \circ \overline{e}_k \circ \overline{\Lambda}, \quad \overline{e}_k = \overline{\Lambda} \circ \overline{e}'_k \circ \Lambda$$
$$\dot{\overline{e}}'_k = \dot{\Lambda} \circ \overline{e}_k \circ \Lambda + \Lambda \circ \overline{e}_k \circ \dot{\overline{\Lambda}} =$$
$$\dot{\Lambda} \circ (\overline{\Lambda} \circ \overline{e}'_k \circ \Lambda) \circ \overline{\Lambda} + \Lambda \circ (\overline{\Lambda} \circ \overline{e}'_k \circ \Lambda) \circ \dot{\overline{\Lambda}} =$$
$$= \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} \circ \overline{e}'_k + \overline{e}'_k \circ \Lambda \circ \dot{\overline{\Lambda}} = B \circ \overline{e}'_k + \overline{e}'_k \circ \overline{B} =$$
$$[2\overline{B}, \overline{e}_k] \Rightarrow 2\overline{B} = \overline{\omega}$$

■

Пример.

$$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\overline{\omega} = 2(-\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\overline{e}}\sin\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\dot{\varphi}}{2}) \circ (\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}) =$$
$$= \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi} + \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi} + \overline{e}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi} +$$
$$+ \overline{e}\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi} + 2\dot{\overline{e}}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2[\overline{e}, \dot{\overline{e}}]\sin^2\frac{\varphi}{2} = \overline{e}\dot{\varphi} + \dot{\overline{e}}\sin\varphi + 2[\overline{e}, \dot{\overline{e}}]\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Замечание.

1.

$$\overline{\omega} = \overline{e}\dot{\varphi} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \dot{\overline{e}} = 0 \end{array}\right.$$

2.

$$\varphi \ll 1. \quad \overline{\omega} \approx \overline{e}\varphi + \dot{\overline{e}}\varphi = \frac{d}{dt}(\overline{e}\varphi)$$

3.

$$\overline{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\overline{e}\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad E(t) \xrightarrow{\Delta\Lambda} E(t+\delta t), \ \Delta\Lambda = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \Delta\overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}$$

Уравнение Пуассона

$$\omega = 2\dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}$$

$$\boxed{\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\overline{\omega}\Lambda} \text{ — кинематическое уравнение Пуассона} \qquad (8)$$

$$\omega = p\overline{e}'_1 + q\overline{e}'_2 + r\overline{e}'_3, \quad \overline{\omega}^* = p\overline{e}_1 + q\overline{e}_2 + r\overline{e}_3$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \overline{\omega}^* \qquad (9)$$

Интегрирование уравнения Пуассона

$$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(\overline{x}, t) \tag{10}$$

Определение. *Функция $\Phi(\overline{x}, t)$ называется первым интегралом системы (10), если*

$$\Phi(\overline{x}(t), t) = const$$

где $\overline{x}(t)$ — решение системы (10)

Утверждение 12. *Система (8) имеет первый интерграл вида*

$$\| \Lambda \| = const$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}(\| \Lambda \|) = \frac{d}{dt}(\Lambda \circ \overline{\Lambda}) = \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\overline{\Lambda}} = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda \circ \overline{\Lambda} \ldots$$

∎

Утверждение 13. *Общее решение системы (8) имеет вид:*

$$\Lambda(t) = \Lambda'(t) \cdot C$$

где Λ' - частное решение, $C = const$.

Доказательство. Λ, Λ' - Нетривиальные решения (8)

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda, \quad \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda'$$

$$M = (\Lambda')^{-1} \circ \Lambda, \quad \Lambda = \Lambda' \circ M$$

$$(9) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Lambda}' \circ M + \Lambda' \circ \dot{M} = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda' \circ M \\ \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda' \end{cases} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Lambda' \circ \dot{M} = 0 \Leftrightarrow \dot{M} = 0 \Leftrightarrow M = C = const$$

∎

Следствие.

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda, \quad \Lambda(\varphi) = 1 \tag{11}$$

Случай 1. Вращение вокруг неподвижной оси $\overline{\omega} = \overline{e}\omega$, $\overline{e} = const$:

$$(11) \Rightarrow \Lambda \cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \int\limits_0^t \omega(\tau)d\tau$$

Случай 2. Регулярная прецессия:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$$

$$\Lambda_z = \cos\frac{\psi}{2} + \overline{e}_z \sin\frac{\varphi}{2}, \psi = \int\limits_0^t \omega_1(\tau)d\tau$$

$$\Lambda_\zeta = \cos\frac{\psi}{2} + \overline{e}_\zeta \sin\frac{\varphi}{2}, \varphi = \int\limits_0^t \omega_2(\tau)d\tau$$

1 способ:
$O\zeta$ — ось тела (подвижная)

$$\Lambda_1 = \Lambda_z, \quad \Lambda_2 = \Lambda_\zeta$$

$Oxyz$ — неподвижный базис, $Oxz = O\nu\zeta(0)$

$\Lambda_2^* = \cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}_\xi(0)\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi}{2} + (\sin\Theta\overline{e}_x + \cos\Theta\overline{e}_z)\sin\frac{\varphi}{2}$
$\Lambda = (\cos\frac{\psi}{2} + \overline{e}_z\sin\frac{\psi}{2}) \circ \Lambda_2 = \ldots$

2 способ:
$O\zeta$ — неподвижна (ось тела в начальный момент времени)

$$\Lambda_1 = \Lambda_\zeta, \quad \Lambda_2 = \Lambda_z$$

Динамика

Принцип детерминированности Ньютона

$$\overline{r}_i(t) = \varphi_i(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \ldots, \dot{\overline{r}}_N, t_0, t) \ \ \forall t_0$$
$$\ddot{\overline{r}}_i(t) = \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} = f_i(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \ldots, \dot{\overline{r}}_N, t_0, t)$$
$$\overline{r}_i(t_0) = f_i(\ldots, t) \ \ \forall t_0$$
$$\ddot{\overline{r}}_i(t_0) = f_i(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \ldots, \dot{\overline{r}}_N, t) \ \ \forall t_0 \tag{12}$$

Пример. $f = 0 \Rightarrow \ddot{\overline{r}} = 0, \ \overline{r} = \overline{r}_0 + \dot{\overline{r}}_0(t - t_0)$
(Закон инерции Галилео-Ньютона); если m_i - масса точки $\overline{r}_i$

$$m_i\ddot{\overline{r}}_i = \overline{F}_i; \quad \overline{F}_i = m_i\overline{f}_i \ \text{— сила}$$

Преобразование Галилея

$\overline{r} \to r^* = \underbrace{A\overline{r}}_{\text{Ортог. пр.}} + \overline{v}_0 t + \overline{r}_0, \quad t^* = t + t_0$
$A = const, \quad \overline{v}_0 = const, \quad \overline{r}_0 = const$

Принцип относительности Галилея

$m_i\ddot{\overline{r}}_i = \overline{F}_i(\overline{r}_1, \dots \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \dots, \dot{\overline{r}}_N, t)$
$m_i\ddot{\overline{r}}_i^* = \overline{F}_i(\overline{r}_1^*, \dots \overline{r}_N^*, \dot{\overline{r}}_1^*, \dots, \dot{\overline{r}}_N^*, t^*)$
$\dfrac{d\overline{r}_i^*}{dt^*} = \dfrac{d\overline{r}_i^*}{dt} \cdot 1$
$\ddot{\overline{r}}_i^* = A\ddot{\overline{r}} \Rightarrow \overline{F}_i^* = A\overline{F}_i$

Принцип относительности:

$$\overline{F}_i^*(\overline{r}_1^*, \dots \overline{r}_N^*, \dot{\overline{r}}_1^*, \dots, \dot{\overline{r}}_N^*, t^*) = \overline{F}_i(\overline{r}_1^*, \dots \overline{r}_N^*, \dot{\overline{r}}_1^*, \dots, \dot{\overline{r}}_N^*, t^*)$$

Пример. $n = 1$:
$\overline{F} = A\overline{F}, \quad \forall A \Leftrightarrow \overline{F} = 0$

Пример. $r^* = \overline{r}, \quad t^* = t - t_0, \quad t = t_0 \Rightarrow \overline{F}_i(\dots, t) = \overline{F}_i(\dots, 0)$

Закон равенства действия и противодействия

$$\overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}, \quad \overline{F}_{ij} \parallel \overline{r}_j - \overline{r}_i$$

Принцип суперпозиции

$\overline{F}_i = \sum\limits_{i \neq j} \overline{F}_{ij}$ (Для замкнутых систем)
$\overline{F}_i = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)}$
$\overline{F}_i^{(e)}$ — внешняя сила
$\overline{F}_i^{(i)}$ — внутренняя сила
Система неинерциальная
$\overline{w}_i^{\text{абс}} = \overline{w}_i^{\text{отн}} + \overline{w}_i^{\text{пер}} + \overline{w}_i^{\text{кор}}$
$m_i\ddot{\overline{\rho}}_i = \overline{F}_i + \overline{F}_i^{\text{отн}} + \overline{F}_i^{\text{пер}}$
$\overline{w}_i^{\text{отн}} = \ddot{\overline{\rho}}_i;\ \overline{F}_i^{\text{отн}} = -m_i\overline{w}_i^{\text{отн}};\ \overline{F}_i^{\text{пер}} = -m_i(\overline{w}_0 + [\overline{\varepsilon}, \overline{\rho}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{\rho}_i]])$

Определение. $\overline{M}_O = [\overline{r}, \overline{F}]$ — *момент инерции силы* $\overline{F}$ *относительно* O

Определение. $M_l = (\overline{M}_O, \overline{l})$ — *момент силы* $\overline{F}$ *относительно оси* $\overline{l}$

Утверждение 14. M_l *не зависит от выбора точки* O.

Доказательство.

$M_l = (\overline{M}_O, \bar{l}) = ([\overline{r}, \overline{F}], \bar{l}) = ([\overline{r}' + \overline{O'O}, \overline{F}], \bar{l}) =$
$= ([\overline{r}', \overline{F}], \bar{l}) + (\underbrace{[\lambda \bar{l}, \overline{F}]}_{0}, \bar{l}) \Rightarrow M_l = (\overline{M}_O, \bar{l})$

■

Определение. $(\overline{F}, d\overline{r})$ — *элементарная работа* (dA, $d'A$, δA, $A_{эл}$)

Стационарные силы

$F = \overline{F}(\overline{r}, \dot{\overline{r}}$ — стационарная сила
$W = (\overline{F}, \overline{v}) \leqslant 0,\ \ \overline{F}(\overline{r}, \dot{\overline{r}})$ — диссипативная сила

Пример.

- $\overline{F} = -kN\frac{\dot{\overline{r}}}{|\dot{\overline{r}}|}$ — *сухое трение*
- $\overline{F} = -\beta \dot{\overline{r}}$ — *вязкое трение*

$W = (\overline{F}, \overline{v}) \equiv 0, \quad \overline{F}$ — гироскопическая сила

Пример. $\overline{F}^{кор} = -m\overline{w}^{кор} = -2m(\overline{\omega}, \overline{v})$
$(\overline{F}^{кор}, \overline{v}) = -2m([\overline{\omega}, \overline{v}], \overline{v}) = 0$

Позиционные силы

$\overline{F} = \overline{F}(r, t)$ — позиционная сила (силовое поле)

Определение. $\overline{F}(\overline{r}, t)$ — *потенциальная сила.*

$$\exists u(\overline{r}, t): \quad \overline{F} = grad_r - u$$

u — *силовая функция,* $\Pi = -u$ — *потенциальная энергия.*

Пример. $F = F(x,t)\overline{e}_x = \frac{\partial u}{\partial \overline{r}} = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{e}_y$
$U = \int F(x,t)dx$

Определение. *Потенциальная сила* $\overline{F}(\overline{r})$ *- консервативная.*

Пример. $F = -\frac{\gamma m}{r^2} \cdot \frac{\overline{r}}{r}$ — *консервативная, т.к.*
$U = \int (\overline{F}, d\overline{r}) = -\int \frac{\gamma m}{r^3}(\overline{r}, d\overline{r}) = -\int \frac{\gamma m}{r^3} d\left(\frac{(\overline{r},\overline{r})}{2}\right) =$
$= -\int \frac{\gamma m}{r^3} d\frac{r^2}{2} = -\int \frac{\gamma m}{r^2} dr = \frac{\gamma m}{r}; \quad n = -\frac{\gamma m}{r}$
$U = \int (\overline{F}, d\overline{r})$

Критерий потенциальности

Утверждение 15.

$$\overline{F}(\overline{r}) = F_x\overline{e}_x + F_y\overline{e}_y + F_z\overline{e}_z \ - \textit{потенциальная} \ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \end{cases}$$

Доказательство.

$\Rightarrow$

$u \in c^2$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$\Leftarrow$

$$u = \int\limits_{\overline{r}_0}^{\overline{r}} F_x(\xi, y, z)d\xi + \int\limits_{\overline{r}_0}^{\overline{r}} F_x(x_0, \eta, z)d\eta + \int\limits_{\overline{r}_0}^{\overline{r}} F_x(x_0, y_0, \zeta)d\zeta$$

■

Следствие. $F(\overline{r})$ — *потенциальная сила* $\Leftrightarrow \oint\limits_C (\overline{F}, d\overline{r}) = 0, \quad \forall C$

Доказательство.

$$\oint\limits_{C=\delta W} (\overline{F}, d\overline{r}) = -\int\limits_W (\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x})dxdy + \ldots = 0$$

■

Система точек $\overline{F}_i = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)}$.

$$F_i^{(i)} = \sum_{j \neq i} \overline{F}_i j; \ \overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji} = F_{ij}(|\overline{r}_i - \overline{r}_j|)\frac{\overline{r}_j - \overline{r}_i}{|\overline{r}_j - \overline{r}_i|}$$

Свойства внутренних сил

1.
$$\sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i^{(i)} = 0$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} \overline{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i} \overline{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{N} (\overline{F}_{ij} - \overline{F}_{ji}) = 0$$

■

2.
$$\sum_{i=1}^{N} [\overline{r}_i, \overline{F}_i^{(i)}] = 0$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} [\overline{r}_i, \overline{F}_{ij}] + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} [\overline{r}_j, \overline{F}_{ij}] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} [\overline{r}_i - \overline{r}_j, \overline{F}_{ij}] = 0$$

■

3. Внутренние силы потенциальны, т.е.

$$\exists u(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_n): \ \overline{F}_i^{(i)} = grad_{\overline{r}_i} u$$

Доказательство.

$$u_i j(|\overline{r}|) = \int\limits_0^{|\overline{r}|} F_{ij}(\overline{\rho}) d\rho$$

$$u = \sum_{i,i<j} u_{ij} \qquad \frac{\partial u}{\partial \overline{r}_i} = \sum_{i,i<j} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \overline{r}_i} = \sum \frac{\partial u_{ij}}{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|} \cdot \frac{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|}{\partial \overline{r}_i}$$

$$|\overline{r}_i - \overline{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$$\frac{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_j)}{|\overline{r}_i - \overline{r}_j|}$$ Аналогично для y_i и z_i

$$\frac{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|}{\partial r_i} = \frac{\overline{r}_i - \overline{r}_j}{|\overline{r}_i - \overline{r}_j|}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{r}_i} = \sum_{i,j,\ i<j} F_{ij}(\overline{r}_i - \overline{r}_j) \cdot \frac{\overline{r}_i - \overline{r}_j}{|\overline{r}_i - \overline{r}_j|} = \overline{F}_i^{(i)}$$

■

4. Работа внутренних сил в тердом теле равна нулю.

   Доказательство.

$$\sum(\overline{F}_i^{(i)}, v_i) = \sum(\overline{F}_i^{(i)}, \overline{v}_s + [\overline{\omega}, \overline{\rho}_i]) =$$
$$= \left(\underbrace{\sum \overline{F}_i^{(i)}}_{0}, \overline{v}_s\right) + \left(\overline{\omega}, \underbrace{\sum[\overline{\rho}_i, \overline{F}_i^{(i)}]}_{0}\right) = 0$$

■