

Лекции по аналитической механике

Муницина Мария Александровна

8 января 2018 г.

Набор и рисунки: Александр Валентинов

За рукописные конспекты спасибо Павлу Цаю и Никите Свешиникову

Об ошибках писать: <https://vk.com/valentiaa>

*Горизонтальные черты обозначают границы между лекциями.
Рисунки есть до главы с кватернионами, если они понадобятся
для понимания в других местах, пишите мне.*

Содержание

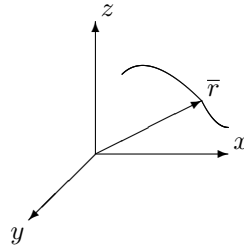
1 Кинематика точки	3
1.1 Векторное описание движения	3
1.2 Декартовы координаты	3
1.3 Движение по окружности	3
1.4 Естественное описание движения	4
1.5 Ортогональные криволинейные координаты	5
2 Кинематика твердого тела	6
2.1 Формулы Пуассона	7
2.2 Формула распределения скоростей точек твердого тела (Формула Эйлера)	8
3 Классификация движения твердого тела	9
3.1 Поступательное движение	9
3.2 Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси)	9
3.3 Плоскопараллельное движение	10
3.4 Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки)	11
3.5 Винтовое движение	11
3.6 Общий случай	12
4 Кинематика сложного движения	13
4.1 Сложное движение материальной точки	13
4.2 Сложное движение твердого тела	14
4.3 Кинематические формулы Эйлера	15
5 Алгебра кватернионов	15
6 Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов	17
7 Кинематика твердого тела в кватернионном описании	20
7.1 Интегрирование уравнения Пуассона	21
8 Динамика	22
8.1 Стационарные силы	23
8.2 Позиционные силы	24
8.3 Свойства внутренних сил	25
9 Основные теоремы динамики	26
9.1 Основные динамические величины	26
9.2 Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета	29
10 Движение в центральном поле	29
10.1 Законы сохранения	29
10.2 Формулы Бине	30
10.3 Движение точки в центральном гравитационном поле	30
10.4 Задача двух тел	32
11 Динамика твердого тела	32
11.1 Твердое тело с неподвижной точкой ($\bar{v}_O = 0$)	34
11.2 Произвольное движение тела	34
12 Динамика твердого тела с неподвижной точкой	35
12.1 Случай Эйлера	35
12.2 Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного волчка	37
12.3 Случай Лагранжа	38
13 Уравнения Лагранжа	42
13.1 Классификация связей	42
13.2 Действительные и виртуальные перемещения	43
13.3 Идеальные связи и общие уравнения динамики. Принцип освобожденности связи. (Уравнения Лагранжа первого рода)	44
13.4 Обобщенные силы	46

13.5 Уравнения Лагранжа второго рода	47
13.6 Свойства уравнений Лагранжа	48
13.7 Первые интегралы Лагранжевой системы координат	49

1 Кинематика точки

Определение. Материальная точка - точка, размером которой можно пренебречь.

Мы будем полагать, что время меняется равномерно и непрерывно.



1.1 Векторное описание движения

Зависимость координат от времени назовем законом движения.

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \in C^2$$

Определение. $\gamma = \{\bar{r}(t), t \in (0, +\infty)\}$ - траектория

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

1.2 Декартовы координаты

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{e}_x + y(t)\bar{e}_y + z(t)\bar{e}_z$$

$$\bar{v}(t) = \dot{x}(t)\bar{e}_x + \dot{y}(t)\bar{e}_y + \dot{z}(t)\bar{e}_z$$

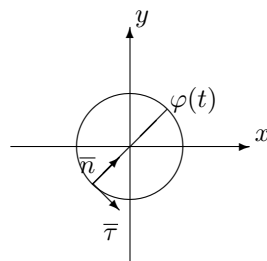
$$\bar{w}(t) = \ddot{x}(t)\bar{e}_x + \ddot{y}(t)\bar{e}_y + \ddot{z}(t)\bar{e}_z$$

1.3 Движение по окружности

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - R \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} = -R \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + R \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{cases}$$



$$\bar{v} = R\dot{\varphi}(-\sin \varphi \cdot \bar{e}_x + \cos \varphi \cdot \bar{e}_y) = R\dot{\varphi}\bar{\tau}$$

$$\bar{w} = R\ddot{\varphi}(-\sin \varphi \cdot \bar{e}_x + \cos \varphi \cdot \bar{e}_y) + R\dot{\varphi}^2(-\cos \varphi \cdot \bar{e}_x - \sin \varphi \cdot \bar{e}_y) = R\ddot{\varphi}\bar{\tau} + R\dot{\varphi}^2\bar{n}$$

$$\bar{v} = R\dot{\varphi}\bar{\tau} = v\bar{\tau}$$

$$\bar{w} = R\ddot{\varphi}\bar{\tau} + R\dot{\varphi}^2\bar{n} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{R}\bar{n}$$

1.4 Естественное описание движения

Кривая задана параметрически естественным параметром s . $ds = |\overline{dr}| \neq 0$

Определение.

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds} = \overline{r}' - \text{касательный вектор} \quad (1)$$

$$\overline{n} = \frac{\overline{\tau}'}{|\overline{\tau}'|} - \text{вектор главной нормали} \quad (2)$$

$$\overline{b} = [\overline{\tau}; \overline{n}] - \text{вектор бинормали} \quad (3)$$

Утверждение 1. $\{\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}\}$ - тройка ортогональных единичных векторов.

Доказательство.

$$|\overline{\tau}| = \frac{|d\overline{r}|}{|ds|} = 1$$

$$|\overline{n}| = \frac{|\overline{\tau}'|}{|\overline{\tau}'|} = 1$$

$$|\overline{\tau}| = 1 \Rightarrow (\overline{\tau}, \overline{\tau}) = 1$$

$$(\overline{\tau}', \overline{\tau}) + (\overline{\tau}, \overline{\tau}') = 0$$

$$2(\overline{\tau}', \overline{\tau}) = 0 \Rightarrow \overline{\tau}' \perp \overline{\tau} \Rightarrow \overline{n} \perp \overline{\tau}$$

■

Этот трехгранник называют репер Френе. (Дарбу, сопровождающий трехгранник).

Теорема 1. $\overline{v} = v\overline{\tau}$, $\overline{w} = \dot{v}\overline{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overline{n}$, где $v = \dot{s}$.

Доказательство.

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v\overline{\tau}$$

$$\dot{\overline{\tau}} = \frac{d\overline{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \overline{n}kv, \text{ по формуле (2)}$$

$$\overline{w} = \dot{\overline{v}} = \dot{v}\overline{\tau} + v\dot{\overline{\tau}} = \dot{v}\overline{\tau} + v^2k\overline{n} = \dot{v}\overline{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overline{n}$$

$\dot{v}\overline{\tau}$ - касательное ускорение

$\frac{v^2}{\rho}\overline{n}$ - нормальное ускорение

$\rho = \frac{1}{|\overline{\tau}''|}$ - радиус кривизны

$k = |\overline{\tau}''|$ - кривизна

$\overline{\tau}''$ - вектор кривизны

■

Формулы Френе:

$$\begin{cases} \overline{\tau}' = k\overline{n} \\ \overline{n}' = -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b} \\ \overline{b}' = -\varkappa\overline{n} \end{cases}$$

где \varkappa - коэффициент кручения.

Доказательство.

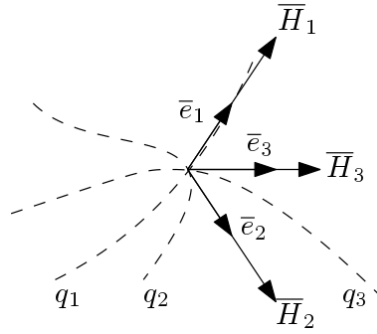
$$|\overline{n}| = 1 \Rightarrow (\overline{n}, \overline{n}') = 0$$

$$\overline{n} \perp \overline{\tau} \Rightarrow (\overline{n}', \overline{\tau}) + (\overline{n}, \overline{\tau}') = 0 \Rightarrow (\overline{n}', \overline{\tau}) + k = 0$$

$$\overline{b}' = [\overline{\tau}', \overline{n}] + [\overline{\tau}, \overline{n}'] = [k\overline{n}, \overline{n}] + [\overline{\tau}, -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b}] = 0 + \varkappa[\overline{\tau}, \overline{b}] = -\varkappa\overline{n}$$

■

1.5 Ортогональные криволинейные координаты



$$\bar{r} = \bar{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\bar{H}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = H_i \bar{e}_i, \text{ где } H_i - \text{коэффициенты Ламе.}$$

Геометрический смысл

$$ds_i = H_i dq_i$$

s_i - длина дуги i -й координатной линии.

$$H_i = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$$

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 H_i \dot{q}_i \bar{e}_i, \quad v^2 = (\bar{v}, \bar{v}) = \sum H_i^2 \dot{q}_i^2$$

Теорема 2. Компоненты вектора ускорения в ортогональном криволинейном базисе определяются равенством:

$$w_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right)$$

Доказательство.

$$(\bar{w}, \bar{H}_i) = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\bar{v}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) - \left(\bar{v}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) \triangleq$$

$$1) \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} - \text{из определения скорости}$$

$$2) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}$$

$$\triangleq \frac{d}{dt} \left(\bar{v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\bar{v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\bar{v}, \bar{v}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (\bar{v}, \bar{v}) =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

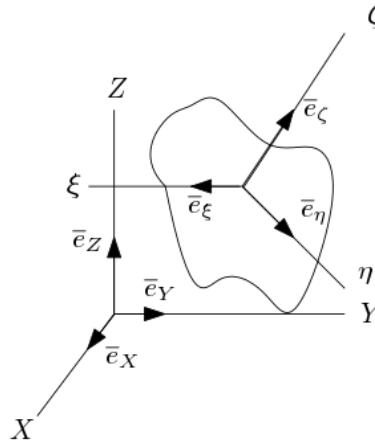
$$w_i = (\bar{w}, \bar{e}_i) = \frac{1}{H_i} (\bar{w}, \bar{H}_i)$$

■

2 Кинематика твердого тела

Определение. Абсолютно твердым телом называется множество точек, расстояние между которыми не меняется со временем.

$$\{\bar{r}_i, i = \overline{1 \dots n} : |\bar{r}_i - \bar{r}_j| = C_{ij} = \text{const}, n \geq 3\}$$



$OXYZ$ - неподвижная система отсчета.

$Sξηζ$ - связаны с телом (движется).

$$X = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\eta, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\eta, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\eta, \bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_z) \end{pmatrix} - \text{матрица направляющих косинусов.}$$

$$\overline{AB} = x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z$$

$$\overline{AB} = \xi\bar{e}_\xi + \eta\bar{e}_\eta + \zeta\bar{e}_\zeta$$

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\eta, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\zeta, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \overline{AB}) \\ (\bar{e}_\eta, \overline{AB}) \\ (\bar{e}_\zeta, \overline{AB}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \bar{\rho}$$

$$\bar{\rho} = X\bar{r}$$

Утверждение 2. X - ортогональная матрица.

Доказательство.

$$XX^T = X^T X = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \bar{e}_\xi) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_\zeta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = E$$

Т.к. базис ортогональный. ■

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \\ \bar{e}_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{e}}_\xi \\ \dot{\bar{e}}_\eta \\ \dot{\bar{e}}_\zeta \end{pmatrix} = \dot{X} \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \\ \bar{e}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\dot{X} X^T}_{\Omega} \begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \dot{X} X^T$$

Утверждение 3. Ω - кососимметрична.

Доказательство.

$$\Omega - \Omega^T = \dot{X} X^T + (\dot{X} X^T)^T = \dot{X} X^T + X \dot{X}^T = \frac{d}{dt}(X X^T) = \frac{d}{dt}(E) = 0$$

■

Следствие.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{pmatrix}$$

— Факт, который может быть законспектирован неправильно

Определение. $\bar{\omega} = \omega_\xi \bar{e}_\xi + \omega_\eta \bar{e}_\eta + \omega_\zeta \bar{e}_\zeta$ - *угловая скорость подвижного репера.*

2.1 Формулы Пуассона

Утверждение 4.

$$\dot{\bar{e}}_i = [\bar{\omega}, \bar{e}_i], \quad i = \overline{1 \dots 3}$$

Доказательство.

$$\dot{\bar{e}}_\xi = \omega_\zeta \bar{e}_\eta - \omega_\eta \bar{e}_\zeta = \begin{vmatrix} \bar{e}_\xi & \bar{e}_\eta & \bar{e}_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi]$$

Утверждение 5. $\bar{\omega} = \bar{e}_\xi(\dot{\bar{e}}_\eta, \bar{e}_\zeta) + \bar{e}_\eta(\dot{\bar{e}}_\zeta, \bar{e}_\xi) + \bar{e}_\zeta(\dot{\bar{e}}_\xi, \bar{e}_\eta)$

Доказательство.

$$(\dot{\bar{e}}_\xi, \bar{e}_\eta) = \omega_\zeta$$

$$(\dot{\bar{e}}_\eta, \bar{e}_\zeta) = \omega_\xi$$

$$(\dot{\bar{e}}_\zeta, \bar{e}_\xi) = \omega_\eta$$

Утверждение 6. $\bar{\omega} = \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, \dot{\bar{e}}_\xi] + [\bar{e}_\eta, \dot{\bar{e}}_\eta] + [\bar{e}_\zeta, \dot{\bar{e}}_\zeta])$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, \dot{\bar{e}}_\xi] + [\bar{e}_\eta, \dot{\bar{e}}_\eta] + [\bar{e}_\zeta, \dot{\bar{e}}_\zeta]) = \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi]] + [\bar{e}_\eta, [\bar{\omega}, \bar{e}_\eta]] + [\bar{e}_\zeta, [\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta]]) = \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\omega}(\bar{e}_\xi, \bar{e}_\xi) - \bar{e}_\xi(\bar{\omega}, \bar{e}_\xi) + \bar{\omega}(\bar{e}_\eta, \bar{e}_\eta) - \bar{e}_\eta(\bar{\omega}, \bar{e}_\eta) + \bar{\omega}(\bar{e}_\zeta, \bar{e}_\zeta) - \bar{e}_\zeta(\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta)) = \\ &= \frac{1}{2}(3\bar{\omega} - \bar{\omega}) = \bar{\omega} \end{aligned}$$

Пример. *Угловая скорость репера Френе.*

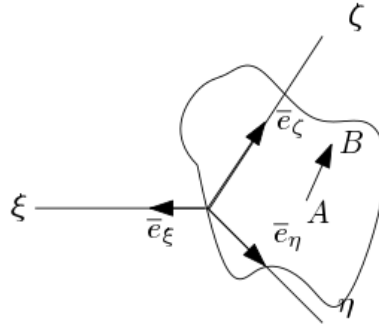
$$\begin{cases} \bar{\tau}' = k\bar{n} \\ \bar{n}' = -k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b} \\ \bar{b}' = -\varkappa\bar{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \dot{s} \\ \dot{\bar{n}} = \frac{d\bar{n}}{ds} \dot{s} \\ \dot{\bar{b}} = \frac{d\bar{b}}{ds} \dot{s} \end{cases}$$

$$\bar{\omega} = \bar{\tau}(\dot{s}(-k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b}), \bar{b}) + \bar{n}(\dot{s}(-\varkappa\bar{n}, \bar{\tau}) + \bar{b}(\dot{s}(k\bar{n}), \bar{n})) = \dot{s}(\varkappa\bar{\tau} + k\bar{b})$$

Определение. *Угловой скоростью твердого тела называется угловая скорость подвижного репера, с ним связанного.*

2.2 Формула распределения скоростей точек твердого тела (Формула Эйлера)



$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \xi \overline{e_\xi} + \eta \overline{e_\eta} + \zeta \overline{e_\zeta} \\ \dot{\overline{AB}} &= \xi \dot{\overline{e_\xi}} + \eta \dot{\overline{e_\eta}} + \zeta \dot{\overline{e_\zeta}}, \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0 \\ (\overline{r_B} - \overline{r_A}) \dot{} &= \xi [\overline{\omega}, \overline{e_\xi}] + \eta [\overline{\omega}, \overline{e_\eta}] + \zeta [\overline{\omega}, \overline{e_\zeta}] \\ \dot{\overline{r_B}} - \dot{\overline{r_A}} &= [\overline{\omega}, \xi \overline{e_\xi} + \eta \overline{e_\eta} + \zeta \overline{e_\zeta}] \\ \overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \end{aligned}$$

Следствие. $S\xi\eta\zeta \rightarrow \overline{\omega}$, $S'\xi'\eta'\zeta' \rightarrow \overline{\omega}'$

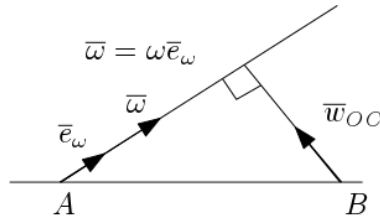
$$\begin{aligned} \overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \\ \overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega'}, \overline{AB}] \quad \left| \quad [\overline{\omega} - \overline{\omega'}, \overline{AB}] = 0; \quad \forall A, B \text{ в абсолютно твердом теле} \Rightarrow \right. \\ &\Rightarrow \overline{\omega} - \overline{\omega'} = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{\omega} = \overline{\omega'}} \end{aligned}$$

Утверждение 7. (Формула Ривальса) $\overline{w_B} = \overline{w_A} + [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]]$.

Доказательство.

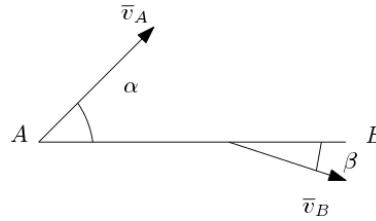
$$\begin{aligned} \overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \\ \dot{\overline{v_B}} &= \dot{\overline{v_A}} + [\dot{\overline{\omega}}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, \overline{r_B} - \overline{r_A}] \\ \overline{w_B} &= \overline{w_A} + [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]] \\ [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] &- \text{ вращательное ускорение, } [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]] - \text{ осеостремительное ускорение} \end{aligned}$$

Геометрический смысл $\overline{w_{OC}}$



$$\begin{aligned} \overline{w} &= [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]] = \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{AB}) - \overline{AB}\omega^2 = \omega^2(\overline{e_\omega}(\overline{AB}, \overline{e_\omega}) - \overline{AB}) \\ |\overline{w_{oc}}| &= \omega^2 \rho(B, l) \end{aligned}$$

Утверждение 8. *Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны.*



Доказательство.

$$\begin{aligned}\overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \\ (\overline{v_B}, \overline{AB}) &= (\overline{v_A}, \overline{AB}) + ([\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{AB}) \\ v_B \cos \beta &= v_A \cos \alpha\end{aligned}$$

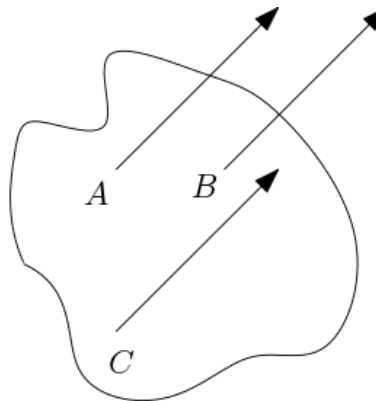
■

Замечание. *Аналогичная теорема для ускорений не верна.*

3 Классификация движения твердого тела

3.1 Поступательное движение

Определение. *Такое движение твердого тела, при котором угловая скорость равна нулю.*

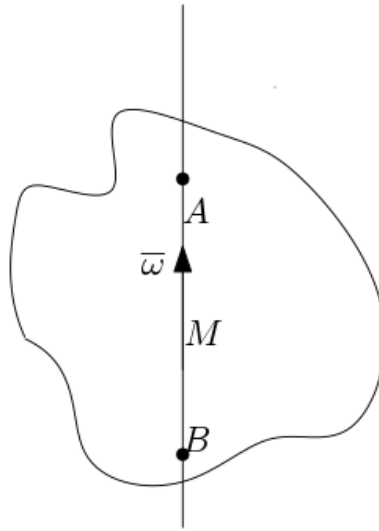


$$\begin{aligned}\overline{v_B} &\equiv \overline{v_A} \\ \overline{w_B} &\equiv \overline{w_A}\end{aligned}$$

Мгновенное поступательное движение: $\exists t : \overline{\omega}(t) = 0, \quad \overline{\varepsilon}(t) \neq 0$

3.2 Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси)

$$\exists A, B : \overline{v_A} = \overline{v_B} = 0$$



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \overline{AB}], \vec{v}_A = \vec{v}_B = 0 \Rightarrow [\vec{\omega}, \overline{AB}] = 0 \Rightarrow \vec{\omega} \parallel \overline{AB}$$

$\forall M \in l : \vec{v}_M = 0$, l - ось вращения

$$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \quad \dot{\vec{e}}_\eta = -\dot{\varphi} \vec{e}_\xi, \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$$

$$\vec{\omega} = \vec{e}_\xi(-\dot{\varphi} \vec{e}_\xi, \vec{e}_\zeta) + \vec{e}_\eta(0, \vec{e}_\xi) + \vec{e}_\zeta(\dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \vec{e}_\eta) = \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta = \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{p'} + [\vec{\omega}, \overline{pp'}] = 0 + [\dot{\varphi} \vec{e}_z, \xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta] = \dot{\varphi}(\xi \vec{e}_\eta - \eta \vec{e}_\xi)$$

$$|\vec{v}_p| = |\vec{\omega}| \cdot |\overline{p'p}|$$

$$\vec{w}_p = \vec{w}_{p'} + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overline{p'p}]] = 0 + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] - \omega^2 \overline{p'p}$$

3.3 Плоскопараллельное движение

Определение. Движение твердого тела называется плоскопараллельным, если скорости всех точек тела параллельны некоторой неподвижной плоскости:

$$\vec{v}_{p_i} \parallel \pi, \quad \forall p_i \in \text{ATT}$$

$$\vec{v}_{p_i} = \vec{v}_{p_j} + [\vec{\omega}, \overline{p_j p_i}]$$

$$(\vec{v}_{p_i} - \vec{v}_{p_j}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\omega} = 0 \\ \vec{v}_{p_i} = \vec{v}_{p_j}, \quad \forall p_i, p_j \in \text{ATT} \\ \vec{\omega} \perp \overline{p_i p_j} \parallel \pi \end{cases}$$

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_{M_j} + \omega [\vec{\omega}, \overline{M_j M_i}] = \vec{v}_{M_j}, \quad \forall M_i, M_j : \overline{M_i M_j} \perp \pi \Rightarrow \vec{w}_{M_i} = \vec{w}_{M_j}$$

Качение:

$$\vec{r}_S = x_S \vec{e}_x + y_S \vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \quad \dot{\vec{e}}_\eta = \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta, \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z, \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \vec{e}_z \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_S + [\vec{\omega}, \overline{SM}]$$

$$\vec{w}_M = \vec{w}_S + [\vec{\varepsilon}, \overline{SM}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overline{SM}]] = \vec{w}_S + [\vec{\varepsilon}, \overline{SM}] - \omega^2 \overline{SM}$$

Теорема 3. Если при плоскопараллельном движении угловая скорость твердого тела отлична от нуля, то существует точка, скорость которой равна нулю в данный момент времени.

Доказательство.

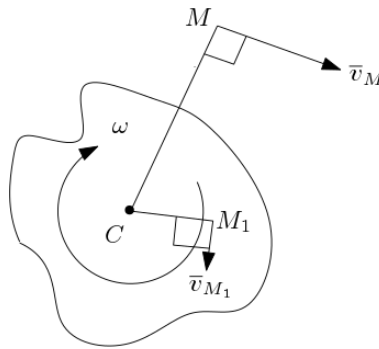
$$\begin{cases} \bar{v}_c = \bar{v}_s + [\bar{\omega}, \overline{SC}] \\ \bar{v}_c = 0 \end{cases} \Rightarrow [\bar{\omega}, \bar{v}_s] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{SC}]] = 0$$

$$[\bar{\omega}, \bar{v}_s] + \bar{\omega}(\bar{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_s]}{\omega^2}$$

Следствие. Любое плоскопараллельное движение является либо мгновенно-поступательным, либо мгновенно-вращательным

Доказательство. $\bar{\omega} = 0$ - мгновенно-поступательное. $\bar{\omega}(t) \neq 0$ - вращение вокруг l .



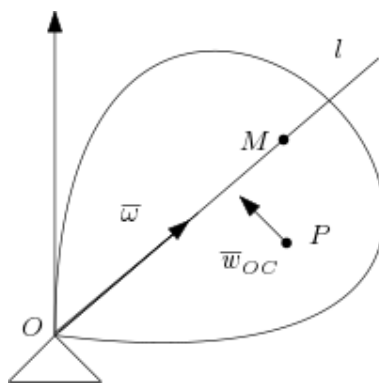
Определение. C - мгновенный центр скоростей

Замечание. Положение C меняется со временем.

Пример. Качение без проскальзывания

3.4 Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки)

$$\begin{aligned} \exists \bar{v}_0 &\equiv 0 \\ l &\parallel \bar{\omega}, O \in l \\ \bar{v}_M &= \bar{v}_0 + [\bar{\omega}, \overline{OM}] = 0 + 0, \forall M \in l \end{aligned}$$



Определение. l - мгновенная ось вращения

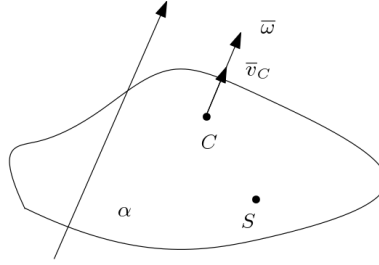
$$\bar{v}_p = [\bar{\omega}, \overline{OP}], \quad \bar{w}_p = [\bar{\varepsilon}, \overline{OP}] + \underbrace{[\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{OP}]]}_{\bar{v}_{OC}}$$

3.5 Винтовое движение

Определение. Движение твердого тела называется винтовым, если тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси, а скорости всех точек, лежащих на этой оси, равны между собой, постоянны и сонаправлены с осью.

3.6 Общий случай

Теорема 4. $\bar{\omega} \neq 0 \Rightarrow \exists l : \bar{\omega} \parallel l, \bar{v}_{k_i} \parallel l, \forall k_i \in l$



Доказательство.

$$\bar{\alpha} \perp \bar{\omega}, S \in \alpha$$

$$\begin{cases} \bar{v}_c = \bar{v}_c = \bar{v}_s + [\bar{\omega}, \overline{SC}] \\ \bar{v}_c = \lambda \bar{\omega} \end{cases} \Rightarrow 0 = [\bar{\omega}, \bar{v}_s] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{SC}]]$$

$$[\bar{\omega}, \bar{v}_s] + \bar{\omega}(\bar{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_c]}{\omega^2}$$

$$\exists l : C \in l, l \parallel \bar{\omega}$$

$$\bar{v}_{C_1} = \bar{v}_C + [\bar{\omega}, \overline{CC_1}] = \bar{v}_C, \quad \forall C_1 \in l$$

■

$$\bar{v}_C = \bar{v}_S + \left[\bar{\omega}, \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_C]}{\omega^2} \right] = \bar{v}_S + \frac{1}{\omega^2} (\bar{\omega}(\bar{\omega}, \bar{v}_S) - \omega^2 \bar{v}_S) = \underbrace{\frac{(\bar{\omega}, \bar{v}_S)}{\omega^2}}_{\lambda} \bar{\omega}$$

$$\lambda = \frac{(\bar{\omega}, \bar{v}_S)}{\omega^2} - \text{параметр (шаг винта)}.$$

Следствие. Любое движение твердого тела является в каждый момент времени либо мгновенно-поступательным ($\omega = 0, \lambda \rightarrow +\infty$), либо мгновенно-вращательным ($\omega \neq 0, \lambda = 0$), либо мгновенно-винтовым ($\omega \neq 0, \lambda \neq 0$).

Определение. $\{l, \bar{\omega}, \bar{v}\}$ - кинематический винт.

$$\bar{v}_S = v_x \bar{e}_x + v_y \bar{e}_y + v_z \bar{e}_z$$

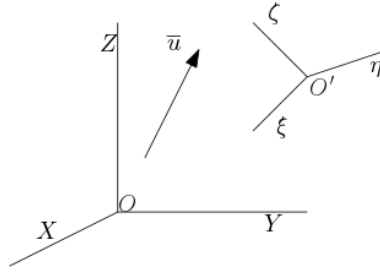
$$\bar{r}_S = x_S \bar{e}_x + y_S \bar{e}_y + z_S \bar{e}_z$$

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y + \omega_z \bar{e}_z$$

$$\bar{r}_C = x \bar{e}_x + y \bar{e}_y + z \bar{e}_z$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_S + [\bar{\omega}, \overline{SC}] = \lambda \bar{\omega} &\Rightarrow \lambda = \frac{v_x + \omega_y(z - z_S) - \omega_z(y - y_S)}{\omega_x} = \\ &= \frac{v_y + \omega_z(x - x_S) - \omega_x(z - z_S)}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x(y - y_S) - \omega_y(x - x_S)}{\omega_z} \end{aligned}$$

4 Кинематика сложного движения



$OXYZ$ - неподвижная система отсчета (\bar{r}), $O_1\xi\eta\zeta$ - подвижная система отсчета ($\bar{\rho}$).

$$\bar{u} = u_x \bar{e}_x + u_y \bar{e}_y + u_z \bar{e}_z$$

$$\bar{u} = u_\xi \bar{e}_\xi + u_\eta \bar{e}_\eta + u_\zeta \bar{e}_\zeta$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \dot{u}_x \bar{e}_x + \dot{u}_y \bar{e}_y + \dot{u}_z \bar{e}_z - \text{абсолютная производная}$$

$$\dot{\bar{u}} = \dot{u}_\xi \bar{e}_\xi + \dot{u}_\eta \bar{e}_\eta + \dot{u}_\zeta \bar{e}_\zeta - \text{относительная производная}$$

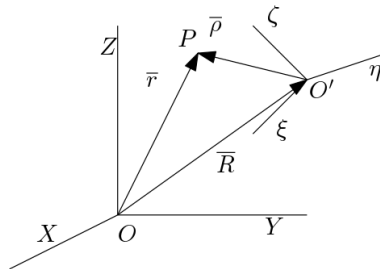
Теорема 5. (Связь абсолютной и относительной производной) $\frac{d\bar{u}}{dt} = \dot{\bar{u}} + [\bar{\omega}, \bar{u}]$, где $\bar{\omega}$ - угловая скорость $O_1\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \dot{u}_\xi \bar{e}_\xi + \dot{u}_\eta \bar{e}_\eta + \dot{u}_\zeta \bar{e}_\zeta + u_\xi \frac{d\bar{e}_\xi}{dt} + u_\eta \frac{d\bar{e}_\eta}{dt} + u_\zeta \frac{d\bar{e}_\zeta}{dt} = \\ &= \dot{\bar{u}} + u_\xi [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi] + u_\eta [\bar{\omega}, \bar{e}_\eta] + u_\zeta [\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta] = \dot{\bar{u}} + [\bar{\omega}, \bar{u}] \\ &\left(\frac{d\bar{e}_i}{dt} = [\bar{\omega}, \bar{e}_i] - \text{формула Пуассона, } \dot{\bar{e}}_i = 0 \right) \end{aligned}$$

■

4.1 Сложное движение материальной точки



Определение. Абсолютной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно неподвижной системы отсчета. $\bar{v}_{abc} = \frac{d}{dt} \bar{r}$

Определение. Относительной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно подвижной системы отсчета. $\bar{v}_{отн} = \dot{\bar{\rho}}$

Определение. Переносной скоростью материальной точки называется абсолютная скорость той точки подвижной системы отсчета, в которой находится движущаяся точка в данный момент времени.

Теорема 6 (Формула сложения скоростей). $\bar{v}_{abc} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{v}_{abc} &= \frac{d}{dt} (\bar{R} + \bar{\rho}) = \frac{d\bar{R}}{dt} + \dot{\bar{\rho}} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}] = \\ &= \bar{v}_{O_1} + \bar{v}_{отн} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}] = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер} \end{aligned}$$

■

Определение. Абсолютным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно неподвижной системы отсчета. $\bar{w}_{abc} = \frac{d}{dt} \bar{v}_{abc}$

Определение. Относительным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно подвижной системы отсчета. $\bar{w}_{отн} = \dot{\bar{v}}_{отн}$

Определение. $\bar{w}_{пер} = \bar{\omega}_{O_1} + [\bar{\varepsilon}, \bar{\rho}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \bar{\rho}]]$

Определение. $\bar{w}_{кор} = 2[\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}]$

Теорема 7 (Формула сложения ускорений). $\bar{w}_{abc} = \bar{w}_{отн} + \bar{w}_{пер} + \bar{w}_{кор}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{w}_{abc} &= \frac{d}{dt}(\bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}) = \frac{d}{dt}(\bar{v}_{отн} + \bar{v}_{O_1} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}]) = \\ &= \dot{\bar{v}}_{отн} + [\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}] + \frac{d}{dt}\bar{v}_{O_1} + \left[\frac{d\bar{\omega}}{dt}, \bar{\rho} \right] + [\bar{\omega}, \bar{\rho} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}]] = \\ &= \dot{\bar{v}}_{отн} + \dot{\bar{v}}_{O_1} + [\bar{\varepsilon}, \bar{\rho}] + 2[\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \bar{\rho}]] \end{aligned}$$

■

4.2 Сложное движение твердого тела

Рассмотрим неподвижную систему отсчета $OXYZ$, подвижную O_1xyz , и систему, связанную с телом $S\xi\eta\zeta$.

Определение. Абсолютная угловая скорость - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$

Определение. Относительная угловая скорость - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно O_1xyz

Определение. Переносная угловая скорость - угловая скорость $Oxyz$ относительно $OXYZ$

Теорема 8 (О сложении угловых скоростей). $\bar{\omega}_{abc} = \bar{\omega}_{отн} + \bar{\omega}_{пер}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{v}_A^{abc} &= \bar{v}_A^{отн} + \bar{v}_A^{пер} \\ \bar{v}_B^{abc} &= \bar{v}_B^{отн} + \bar{v}_B^{пер} \\ \bar{v}_B^{abc} &= \bar{v}_A^{abc} + [\bar{\omega}_{abc}, \overline{AB}] \\ \bar{v}_B^{отн} &= \bar{v}_A^{отн} + [\bar{\omega}_{отн}, \overline{AB}] \\ \bar{v}_B^{пер} &= \bar{v}_A^{пер} + [\bar{\omega}_{пер}, \overline{AB}] \\ \Rightarrow 0 &= 0 + [\bar{\omega}_{abc} - \bar{\omega}_{отн} - \bar{\omega}_{пер}, \overline{AB}] = 0, \quad \forall \overline{AB} \Leftrightarrow \bar{\omega}_{abc} = \bar{\omega}_{отн} + \bar{\omega}_{пер} \end{aligned}$$

■

Замечание. $\frac{d\bar{\omega}_{пер}}{dt} = \dot{\bar{\omega}}_{пер} + [\bar{\omega}_{пер}, \bar{\omega}_{пер}] = \dot{\bar{\omega}}_{пер}$

Теорема 9 (О сложении угловых ускорений). $\bar{\varepsilon}_{abc} = \bar{\varepsilon}_{отн} + \bar{\varepsilon}_{пер} + [\bar{\omega}_{пер}, \bar{\omega}_{отн}]$, где $\bar{\varepsilon}_{abc} = \frac{d}{dt} \bar{\omega}_{abc}$, $\bar{\varepsilon}_{отн} = \dot{\bar{\omega}}_{отн}$, $\bar{\varepsilon}_{пер} = \frac{d}{dt} \bar{\omega}_{пер} = \dot{\bar{\omega}}_{пер}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{abc} &= \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_{отн} + \bar{\omega}_{пер}) = \\ &= \dot{\bar{\omega}}_{отн} + [\bar{\omega}_{пер}, \bar{\omega}_{отн}] + \frac{d}{dt} \bar{\omega}_{пер} = \bar{\varepsilon}_{отн} + [\bar{\omega}_{пер}, \bar{\omega}_{отн}] + \bar{\varepsilon}_{пер} \end{aligned}$$

■

4.2.1 Несколько подвижных систем отсчета

$OXYZ$ - неподвижная СО

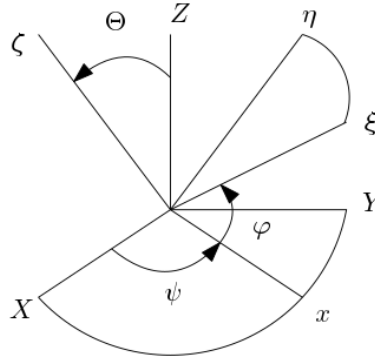
$Ox_1y_1z_1, Ox_2y_2z_2, \dots, Ox_ny_nz_n$ - подвижные СО

$S\xi\eta\zeta$ - связана с телом

$\bar{\omega}$ - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$

Тогда: $\bar{\omega} = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i$

4.3 Кинематические формулы Эйлера



Определение. $Ox = (OXY) \cap (O\xi\eta)$ - линия узлов

Определение. $\psi = \angle(Ox, OX)$ - угол прецессии

Определение. $\theta = \angle(O\zeta, OZ)$ - угол нутации

Определение. $\varphi = \angle(Ox, O\xi)$ - угол собственного вращения

Определение. $\{\psi, \theta, \varphi\}$ - углы Эйлера

Повороты: $OXYZ \xrightarrow{\psi, OZ} Ox_1y_1z_1 \xrightarrow{\theta, Ox_1} Ox_1y_1\zeta \xrightarrow{\varphi, O\zeta} O\xi\eta\zeta$

$$\bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{e}_Z + \dot{\theta}\bar{e}_x + \dot{\varphi}\bar{e}_\zeta$$

$$\bar{e}_x = \cos \varphi \bar{e}_\xi - \sin \varphi \bar{e}_\eta$$

$$\bar{e}_z = \cos \theta \bar{e}_\zeta + \sin \theta (\sin \varphi \bar{e}_\xi + \cos \varphi \bar{e}_\eta)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \dot{\psi}(\sin \theta \sin \varphi \bar{e}_\xi + \sin \theta \cos \varphi \bar{e}_\eta + \cos \theta \bar{e}_\zeta) \\ &+ \dot{\theta}(\cos \varphi \bar{e}_\xi - \sin \varphi \bar{e}_\eta) \\ &+ \dot{\varphi} \bar{e}_\zeta = \omega_\xi \bar{e}_\xi + \omega_\eta \bar{e}_\eta + \omega_\zeta \bar{e}_\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{\omega}_\xi = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \bar{\omega}_\eta = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \bar{\omega}_\zeta = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad \text{- кинематические формулы Эйлера}$$

Определение. Движение твердого тела называется прецессией, если некоторая ось, неподвижная в теле, в абсолютном пространстве движется по поверхности неподвижного кругового конуса. $\dot{\theta} = 0$. Если $\dot{\psi} = \text{const}$, $\dot{\varphi} = \text{const}$, то прецессия называется регулярной.

5 Алгебра кватернионов

Определение. Алгеброй над полем называется векторное пространство над этим полем, снабженное билинейной операцией умножения.

Пример.

$$n = 2 (\text{Комплексные числа}). z_1 = a + bi, z_2 = c + di$$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$n = 4$ (Алгебра кватернионов)

$$\Lambda = \lambda_0 \bar{i}_0 + \lambda_1 \bar{i}_1 + \lambda_2 \bar{i}_2 + \lambda_3 \bar{i}_3 \in \mathbb{H}$$

$\{\bar{i}_0, \bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3\}$ - базис

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$$

$$i_0 \circ i_k = i_k \quad k = \overline{1, 3}, \quad i_0 \circ i_0 = 1$$

$$i_k \circ i_m = -(i_k, i_m) + [i_k, i_m] \quad k, m \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{В частности, } i_k \circ i_k = -1$$

$$\bar{\lambda} \circ \bar{\mu} = (\lambda_1 \bar{i}_1 + \lambda_2 \bar{i}_2 + \lambda_3 \bar{i}_3) \circ (\mu_1 \bar{i}_1 + \mu_2 \bar{i}_2 + \mu_3 \bar{i}_3) = -(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + [\bar{\lambda}, \bar{\mu}]$$

$$\Lambda \circ M = (\lambda + \bar{\lambda}) \circ (\mu + \bar{\mu}) = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \bar{\mu} + \bar{\lambda} \mu_0 - (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + [\bar{\lambda}, \bar{\mu}]$$

Свойства:

1. $(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N)$
2. $(\Lambda + M) \circ N = \Lambda \circ N + M \circ N$
3. $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$

Определение.

$$\bar{\Lambda} = \lambda_0 - \bar{\lambda}$$

Утверждение 9.

$$\overline{\Lambda \circ M} = \bar{M} \circ \bar{\Lambda}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda \circ M} &= \lambda_0 \mu_0 - (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) - \lambda_0 \bar{\mu} - \mu_0 \bar{\lambda} - [\bar{\lambda}, \bar{\mu}] = \\ &= (\mu_0 - \bar{\mu}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \bar{M} \circ \bar{\Lambda} \end{aligned}$$

■

Определение.

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = \sum_{k=0}^3 \lambda_k^2 = |\Lambda|^2 - \text{норма } \Lambda$$

Утверждение 10.

$$\|\Lambda \circ M\| = \|\Lambda\| \cdot \|M\|$$

Доказательство.

$$\|\Lambda \circ M\| = (\Lambda \circ M) \circ (\overline{\Lambda \circ M}) = \Lambda \circ \underbrace{M \circ \bar{M}}_{\|M\|} \circ \bar{\Lambda} = \|M\| \cdot \|\Lambda\|$$

■

Определение.

$$\Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|}, \quad \|\Lambda\| \neq 0$$

Замечание.

$$\Lambda \circ \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|} \circ \Lambda = \frac{\|\Lambda\|}{\|\Lambda\|} = 1$$

Формула Муавра

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda} = |\Lambda| \left(\frac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \frac{\bar{\lambda}}{|\Lambda|} \frac{|\bar{\lambda}|}{|\Lambda|} \right) = |\Lambda| (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu)$$

$$\bar{e} = \frac{\bar{\lambda}}{|\bar{\lambda}|}, \quad \cos \nu = \frac{\lambda_0}{|\Lambda|}, \quad \sin \nu = \frac{|\bar{\lambda}|}{|\Lambda|}$$

$$\Lambda_1 = |\Lambda_1|(\cos \nu_1 + \bar{e} \sin \nu_1)$$

$$\Lambda_2 = |\Lambda_2|(\cos \nu_2 + \bar{e} \sin \nu_2)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \circ \Lambda_2 &= |\Lambda_1| \cdot |\Lambda_2| (\cos \nu_1 \cos \nu_2 - \sin \nu_1 \sin \nu_2 (\bar{e}, \bar{e}) + \cos \nu_1 \sin \nu_2 \bar{e} + \\ &+ \cos \nu_2 \sin \nu_1 \bar{e} + \sin \nu_2 \sin \nu_1 [\bar{e}, \bar{e}]) = |\Lambda_1| |\Lambda_2| \cdot (\cos(\nu_1 + \nu_2) + \bar{e} \sin(\nu_1 + \nu_2)) \end{aligned}$$

$$\Lambda^k = |\Lambda|^k \cdot (\cos k\nu + \bar{e} \sin k\nu) \text{ — формула Муавра}$$

6 Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов

$E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ — неподвижный базис

$E' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ — связанный с телом

Теорема 10. Произвольному положению твердого тела с неподвижной точкой соответствует нормированный кватернион, удовлетворяющий равенству:

$$\bar{e}'_i = \Lambda \circ \bar{e}_i \circ \bar{\Lambda}, \quad i = 1 \dots 3$$

Замечание. Λ — нормирован, если $\|\Lambda\| = 1$

Доказательство.

1. Нормированность

$$\|\bar{e}'_i\| = \|\Lambda\| \cdot \|\bar{e}_i\| \cdot \|\bar{\Lambda}\| \Rightarrow 1 = \|\Lambda\| \cdot 1 \cdot \|\Lambda\| \Rightarrow \|\Lambda\| = 1$$

2. Существование решения. $\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ \bar{e}'_i \circ \Lambda = \Lambda \circ \bar{e}_i \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ \bar{e}'_i \circ (\lambda_0 + \bar{\lambda}) = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ \bar{e}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 \bar{e}'_i - (\bar{e}'_i, \bar{\lambda}) + [\bar{e}'_i, \bar{\lambda}] = \lambda_0 \bar{e}_i - (\lambda, \bar{e}'_i) + [\bar{\lambda}, \bar{e}_i] \\ \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ (\bar{\lambda}, \bar{r}_i) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_i - [\bar{\lambda}, \bar{s}_i] = 0 \end{cases} \quad \bar{r}_i = \bar{e}'_i - \bar{e}_i, \quad \bar{s}_i = \bar{e}'_i + \bar{e}_i \quad i = 1 \dots 3$$

(a)

$$\begin{aligned} (\bar{r}_k, \bar{s}_k) &= (\bar{e}'_k - \bar{e}_k, \bar{e}'_k + \bar{e}_k) = (\bar{e}'_k, \bar{e}'_k) - (\bar{e}_k, \bar{e}_k) = 0 \\ (\bar{r}_k, \bar{s}_l) &= (\bar{e}'_k - \bar{e}_k, \bar{e}'_l + \bar{e}_l) = (\bar{e}'_k, \bar{e}'_l) + (\bar{e}'_k, \bar{e}_l) - (\bar{e}_k, \bar{e}'_l) - (\bar{e}_k, \bar{e}_l) = \\ &= -(\bar{e}'_l - \bar{e}_l, \bar{e}'_k + \bar{e}_k) = -(\bar{s}_k, \bar{r}_l), \quad k \neq l \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) &= (\bar{e}'_1 - \bar{e}_1, \bar{e}'_2 - \bar{e}_2, \bar{e}'_3 - \bar{e}_3) = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3) - (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) - \\ &- (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}_3) + (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}'_3) = 1 - 1 - \underbrace{(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2)}_{\bar{e}'_3} + \underbrace{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}_{\bar{e}_3} + \bar{e}'_3 = 0 \end{aligned}$$

(с)

$$\bar{r}_1(\bar{s}_2, \bar{r}_3) + \bar{r}_2(\bar{s}_3, \bar{r}_1) + \bar{r}_3(\bar{s}_1, \bar{r}_2)$$

$$(2b) \Rightarrow c_1\bar{r}_1 + c_2\bar{r}_2 + c_3\bar{r}_3 = 0$$

$$\begin{cases} 0 + c_2(\bar{s}_1, \bar{r}_2) - c_3(\bar{s}_2, \bar{r}_1) = 0 \\ -c_1(\bar{s}_1, \bar{r}_2) + 0 + c_3(\bar{s}_2, \bar{r}_3) = 0 \\ c_1(\bar{s}_3, \bar{r}_1) - c_2(\bar{s}_2, \bar{r}_3) + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = (\bar{s}_2, \bar{r}_3) & \begin{cases} \lambda_0^2 + \lambda^2 = 1 & (1) \\ (\bar{r}_k, \bar{\lambda}) = 0 & (2) \\ \lambda_0\bar{r}_k + [\bar{s}_k, \bar{\lambda}] = 0 & (3) \end{cases} \\ c_2 = (\bar{s}_3, \bar{r}_1) \\ c_3 = (\bar{s}_1, \bar{r}_2) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0\bar{r}_1 + [\bar{s}_1, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0\bar{r}_2 + [\bar{s}_2, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0\bar{r}_3 + [\bar{s}_3, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0\bar{r}_1 + \alpha\bar{r}_1(\bar{s}_1, \bar{r}_1) - 0 = 0 \\ \lambda_0\bar{r}_2 + 0 - \alpha\bar{r}_2(\bar{s}_2, \bar{r}_1) = 0 \\ \lambda_0\bar{r}_3 + \alpha\bar{r}_1(\bar{s}_3, \bar{r}_2) - \alpha\bar{r}_2(\bar{s}_3, \bar{r}_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0\bar{r}_1 + \alpha\bar{r}_1(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \\ \lambda_0\bar{r}_2 + \alpha\bar{r}_2(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \\ \lambda_0\bar{r}_3 + \alpha\bar{r}_3(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_0 = -\alpha(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = \alpha(\bar{s}_2, \bar{r}_1)$$

$$(1) \Rightarrow \alpha^2((\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{e}_2]^2) = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{(\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{r}_2]^2}}$$

$$\Lambda = \pm \frac{(\bar{s}_2, \bar{r}_1) + [\bar{r}_1, \bar{r}_2]}{\sqrt{(\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{r}_2]^2}}$$

Определение.

$$f(M) = \Lambda \circ M \circ \bar{\Lambda}; \quad M \rightarrow f(M), \quad \|\Lambda\| = 1 - \text{присоединенное преобразование}$$

Утверждение 11. Присоединенное преобразование не меняет скалярные части кватернионов и модуль векторной части*Доказательство.*

$$1. \quad f(M) = \Lambda \circ (\mu_0 + \bar{\mu}) \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ \mu_0 \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \bar{\mu} \circ \bar{\Lambda} = \mu_0 \|\Lambda\| + f(\bar{\mu}) = \mu_0 + \bar{\mu}'$$

$$2. \quad \mu_0^2 + \bar{\mu}^2 = \|M\| = \|\Lambda \circ M \circ \bar{\Lambda}\| = \|f(M)\| = \mu_0^2 + \bar{\mu}'^2 \Rightarrow \mu^2 = \bar{\mu}'^2$$

Следствие. Всегда существует присоединенное преобразование, переводящее орты неподвижного базиса в орты базиса, связанного с телом.*Доказательство.*

$$\bar{e}'_i = \Lambda \circ \bar{e}_i \circ \bar{\Lambda} = f(\bar{e}_i) \tag{4}$$

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^3 r_k \bar{e}_k, \quad f(r) = \Lambda \circ \sum r_k \bar{e}_k \bar{\Lambda} = \sum r_k f(\bar{e}_k) = \sum r_k \bar{e}'_k = \bar{r}' \tag{5}$$

$$(6)$$

$$\boxed{\bar{r}' = \Lambda \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}} \tag{7}$$

Следствие. При повороте твердого тела вокруг неподвижной точки справедлива (7), где \bar{r} – начальное положение точки, \bar{r}' – ее положение после поворота, а Λ – кватернион соответствующего преобразования.

Теорема 11. Преобразование, заданное кватернионом $\Lambda = \cos \nu + \bar{e} \sin \nu$ соответствует повороту пространства вокруг вектора \bar{e} на угол 2ν

Доказательство.

1.

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$$

$$\bar{\lambda}' = f(\bar{\lambda}) = \Lambda \circ \bar{\lambda} \circ \bar{\Lambda} = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ \bar{\lambda} \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) =$$

$$(\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (-\lambda^2 + \lambda_0 \bar{\lambda}) = -\lambda_0 \bar{\lambda}^2 - \lambda_0 \bar{\lambda}^2 + \lambda_0^2 + \lambda_0^2 \bar{\lambda} =$$

$$= \bar{\lambda}(\lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2) \Rightarrow \bar{\lambda} - \text{неподвижная ось} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{e} = \frac{\bar{\lambda}}{\sin \nu} - \text{ось поворота}$$

$$\bar{a} \in \pi \perp \bar{e}$$

$$\bar{a}' = f(\bar{a}) = (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu) \circ \bar{a} \circ (\cos \nu - \bar{e} \sin \nu) =$$

$$= (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu) \circ ([\bar{a}, \bar{e}] \cdot \sin \nu + \cos \nu \bar{a} - \sin \nu [\bar{a}, \bar{e}]) =$$

$$\cos^2 \nu \bar{a} + \cos \nu \sin \nu (\bar{a}, \bar{e}) + \cos \nu \sin \nu = \dots$$

2.

$$\bar{a}' = ((\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) \circ \bar{a}) \circ (\cos \frac{\varphi}{2} - \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) =$$

$$= (\bar{a} \cos \frac{\varphi}{2} + [\bar{e}, \bar{a}] \sin \frac{\varphi}{2}) \circ (\cos \frac{\varphi}{2} - \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) =$$

$$= \bar{a} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2[\bar{e}, \bar{a}] \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \bar{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2} =$$

$$= \bar{a} \cos \varphi + [\bar{e}, \bar{a}] \sin \varphi$$

$$|\bar{a}'| = |\bar{a}|$$

■

Следствие.

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{e}'_1 + \lambda_2 \bar{e}'_2 + \lambda_3 \bar{e}'_3$$

Определение.

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 - \text{Параметры Родрига-Гамильтона}$$

Следствие (Теорема Эйлера о конечном повороте). Любые два положения твердого тела с неподвижной точкой могут быть получены одно из другого одним поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку на некоторый угол

Доказательство.

1.

$$\forall E, E' \exists \Lambda : E \rightarrow E'$$

2.

$$\forall \Lambda \bar{r} \rightarrow \bar{r}' \Leftrightarrow \text{Поворот вокруг } e \text{ на } \varphi$$

■

$$E \xrightarrow{\Lambda_1} E' \xrightarrow{\Lambda_2} E'', \quad E \xrightarrow{\Lambda}$$

$$\bar{r}' = \Lambda_1 \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}, \quad \bar{r}'' = \Lambda_2 \circ \bar{r}' \circ \bar{\Lambda}$$

$$\bar{r}'' = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}_2 = \Lambda \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}, \quad \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1} \text{ — формула сложения поворотов}$$

$$\Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k'' = \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k'$$

$$\Lambda_2^* = \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k \text{ — собственный к } \Lambda_2 \text{ кватернион}$$

$$\bar{e}_k' = \Lambda_1 \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}_1, \quad \Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \Lambda_1 \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}_1 =$$

$$= \Lambda_1 \circ (\lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k) \circ \bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ \bar{\Lambda}_1$$

$$\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ (\bar{\Lambda}_1 \circ \Lambda_1) = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*, \quad \Lambda_1^* = \Lambda_1$$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*}$$

— формула сложения поворотов в параметрах Родрига-Гамильтона

7 Кинематика твердого тела в кватернионном описании

Теорема 12. Угловая скорость твердого тела определяется равенством:

$$\bar{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}$$

где Λ - кватернион, задающий положение твердого тела относительно неподвижного базиса

Доказательство.

1.

$$B = \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}$$

$$B + \bar{B} = \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \overline{(\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda})} = \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} =$$

$$= \frac{d}{dt}(\Lambda \circ \bar{\Lambda}) = \frac{d}{dt}(\|\Lambda\|) = 0 \Rightarrow B = -\bar{B}$$

2.

$$\dot{\bar{e}}_k' = [\bar{\omega}, \bar{e}_k]$$

$$\bar{e}_k' = \Lambda \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}, \quad \bar{e}_k = \bar{\Lambda} \circ \bar{e}_k' \circ \Lambda$$

$$\dot{\bar{e}}_k' = \dot{\Lambda} \circ \bar{e}_k \circ \Lambda + \Lambda \circ \bar{e}_k \circ \dot{\bar{\Lambda}} =$$

$$\dot{\Lambda} \circ (\bar{\Lambda} \circ \bar{e}_k' \circ \Lambda) \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ (\bar{\Lambda} \circ \bar{e}_k' \circ \Lambda) \circ \dot{\bar{\Lambda}} =$$

$$= \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} \circ \bar{e}_k' + \bar{e}_k' \circ \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = B \circ \bar{e}_k' + \bar{e}_k' \circ \bar{B} =$$

$$[2\bar{B}, \bar{e}_k] \Rightarrow 2\bar{B} = \bar{\omega}$$

■

Пример.

$$\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} &= 2\left(-\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\bar{e}} \sin \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\dot{\varphi}}{2}\right) \circ \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}\right) = \\
&= \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \bar{e} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \\
&+ \bar{e} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + 2\dot{\bar{e}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2[\bar{e}, \dot{\bar{e}}] \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \bar{e}\dot{\varphi} + \dot{\bar{e}} \sin \varphi + 2[\bar{e}, \dot{\bar{e}}] \sin^2 \frac{\varphi}{2}
\end{aligned}$$

Замечание.

1.

$$\bar{\omega} = \bar{e}\dot{\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \dot{\bar{e}} = 0 \end{cases}$$

2.

$$\varphi \ll 1. \quad \bar{\omega} \approx \bar{e}\dot{\varphi} + \dot{\bar{e}}\varphi = \frac{d}{dt}(\bar{e}\varphi)$$

3.

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{e} \Delta \varphi}{\Delta t}, \quad E(t) \xrightarrow{\Delta \Lambda} E(t + \delta t), \quad \Delta \Lambda = \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \Delta \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Уравнение Пуассона

$$\omega = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}$$

$$\boxed{\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega}\Lambda} \text{ — кинематическое уравнение Пуассона} \quad (8)$$

$$\omega = p\bar{e}'_1 + q\bar{e}'_2 + r\bar{e}'_3, \quad \bar{\omega}^* = p\bar{e}_1 + q\bar{e}_2 + r\bar{e}_3$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \bar{\omega}^* \quad (9)$$

7.1 Интегрирование уравнения Пуассона

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) \quad (10)$$

Определение. Функция $\Phi(\bar{x}, t)$ называется первым интегралом системы (10), если

$$\Phi(\bar{x}(t), t) = \text{const}$$

где $\bar{x}(t)$ — решение системы (10)

Утверждение 12. Система (8) имеет первый интеграл вида

$$\|\Lambda\| = \text{const}$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}(\|\Lambda\|) = \frac{d}{dt}(\Lambda \circ \bar{\Lambda}) = \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda \circ \bar{\Lambda} \dots$$

■

Утверждение 13. Общее решение системы (8) имеет вид:

$$\Lambda(t) = \Lambda'(t) \cdot C$$

где Λ' — частное решение, $C = \text{const}$.

Доказательство. Λ, Λ' — Нетривиальные решения (8)

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda, \quad \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda'$$

$$M = (\Lambda')^{-1} \circ \Lambda, \quad \Lambda = \Lambda' \circ M$$

$$(9) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Lambda}' \circ M + \Lambda' \circ \dot{M} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda' \circ M \\ \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Lambda' \circ \dot{M} = 0 \Leftrightarrow \dot{M} = 0 \Leftrightarrow M = C = \text{const}$$

■

Следствие.

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda, \quad \Lambda(\varphi) = 1 \quad (11)$$

Случай 1. Вращение вокруг неподвижной оси $\bar{\omega} = \bar{e}\omega$, $\bar{e} = \text{const}$:

$$(11) \Rightarrow \Lambda \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$$

Случай 2. Регулярная прецессия:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \\ \Lambda_z &= \cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_z \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \psi = \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau \\ \Lambda_\zeta &= \cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_\zeta \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \int_0^t \omega_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

1 способ:

$O\zeta$ — ось тела (подвижная)

$$\Lambda_1 = \Lambda_z, \quad \Lambda_2 = \Lambda_\zeta$$

$Oxyz$ — неподвижный базис, $Oxz = O\nu\zeta(0)$

$$\Lambda_2^* = \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e}_\zeta(0) \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} + (\sin \Theta \bar{e}_x + \cos \Theta \bar{e}_z) \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\Lambda = (\cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_z \sin \frac{\psi}{2}) \circ \Lambda_2 = \dots$$

2 способ:

$O\zeta$ — неподвижна (ось тела в начальный момент времени)

$$\Lambda_1 = \Lambda_\zeta, \quad \Lambda_2 = \Lambda_z$$

8 Динамика

Принцип детерминированности Ньютона

$$\begin{aligned} \bar{r}_i(t) &= \varphi_i(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \dot{\bar{r}}_1, \dots, \dot{\bar{r}}_N, t_0, t) \quad \forall t_0 \\ \ddot{\bar{r}}_i(t) &= \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = f_i(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \dot{\bar{r}}_1, \dots, \dot{\bar{r}}_N, t_0, t) \\ \bar{r}_i(t_0) &= f_i(\dots, t) \quad \forall t_0 \\ \ddot{\bar{r}}_i(t_0) &= f_i(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \dot{\bar{r}}_1, \dots, \dot{\bar{r}}_N, t) \quad \forall t_0 \end{aligned} \quad (12)$$

Пример. $f = 0 \Rightarrow \ddot{\bar{r}} = 0$, $\bar{r} = \bar{r}_0 + \dot{\bar{r}}_0(t - t_0)$

(Закон инерции Галилео-Ньютона); если m_i — масса точки \bar{r}_i

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i; \quad \bar{F}_i = m_i \bar{f}_i \quad \text{— сила}$$

Преобразование Галилея

$$\bar{r} \rightarrow r^* = \underbrace{A\bar{r}}_{\text{Ортог. пр.}} + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0, \quad t^* = t + t_0$$

$$A = \text{const}, \quad \bar{v}_0 = \text{const}, \quad \bar{r}_0 = \text{const}$$

Принцип относительности Галилея

$$\begin{aligned}
m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) \\
m_i \ddot{\vec{r}}_i^* &= \vec{F}_i(\vec{r}_1^*, \dots, \vec{r}_N^*, \dot{\vec{r}}_1^*, \dots, \dot{\vec{r}}_N^*, t^*) \\
\frac{d\vec{r}_i^*}{dt^*} &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot 1 \\
\ddot{\vec{r}}_i^* &= A\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F}_i^* = A\vec{F}_i
\end{aligned}$$

Принцип относительности:

$$\vec{F}_i^*(\vec{r}_1^*, \dots, \vec{r}_N^*, \dot{\vec{r}}_1^*, \dots, \dot{\vec{r}}_N^*, t^*) = \vec{F}_i(\vec{r}_1^*, \dots, \vec{r}_N^*, \dot{\vec{r}}_1^*, \dots, \dot{\vec{r}}_N^*, t^*)$$

Пример. $n = 1$:

$$\vec{F} = A\vec{F}, \quad \forall A \Leftrightarrow \vec{F} = 0$$

Пример. $\vec{r}^* = \vec{r}, \quad t^* = t - t_0, \quad t = t_0 \Rightarrow \vec{F}_i(\dots, t) = \vec{F}_i(\dots, 0)$

Закон равенства действия и противодействия

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \quad \vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_j - \vec{r}_i$$

Принцип суперпозиции

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad (\text{Для замкнутых систем})$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

$\vec{F}_i^{(e)}$ — внешняя сила

$\vec{F}_i^{(i)}$ — внутренняя сила

Система неинерциальная

$$\vec{w}_i^{\text{абс}} = \vec{w}_i^{\text{отн}} + \vec{w}_i^{\text{пер}} + \vec{w}_i^{\text{кор}}$$

$$m_i \ddot{\vec{\rho}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i^{\text{отн}} + \vec{F}_i^{\text{пер}}$$

$$\vec{w}_i^{\text{отн}} = \ddot{\vec{\rho}}_i; \quad \vec{F}_i^{\text{отн}} = -m_i \vec{w}_i^{\text{отн}}; \quad \vec{F}_i^{\text{пер}} = -m_i(\vec{w}_0 + [\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]])$$

Определение. $\vec{M}_O = [\vec{r}, \vec{F}]$ — момент силы \vec{F} относительно O

Определение. $M_l = (\vec{M}_O, \vec{l})$ — момент силы \vec{F} относительно оси \vec{l}

Утверждение 14. M_l не зависит от выбора точки O .

Доказательство.

$$\begin{aligned}
M_l &= (\vec{M}_O, \vec{l}) = ([\vec{r}, \vec{F}], \vec{l}) = ([\vec{r}' + \vec{O'O}, \vec{F}], \vec{l}) = \\
&= ([\vec{r}', \vec{F}], \vec{l}) + \underbrace{([\lambda \vec{l}, \vec{F}], \vec{l})}_0 \Rightarrow M_l = (\vec{M}_O, \vec{l})
\end{aligned}$$

■

Определение. $(\vec{F}, d\vec{r})$ — элементарная работа ($dA, d'A, \delta A, A_{эл}$)

8.1 Стационарные силы

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ — стационарная сила

$\vec{W} = (\vec{F}, \vec{v}) \leq 0, \quad \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ — диссипативная сила

Пример.

- $\bar{F} = -kN \frac{\dot{\bar{r}}}{|\bar{r}|}$ — сухое трение
- $\bar{F} = -\beta \dot{\bar{r}}$ — вязкое трение

$W = (\bar{F}, \bar{v}) \equiv 0$, \bar{F} — гироскопическая сила

Пример. $\bar{F}^{\text{кор}} = -m\bar{\omega}^{\text{кор}} = -2m[\bar{\omega}, \bar{v}]$
 $(\bar{F}^{\text{кор}}, \bar{v}) = -2m([\bar{\omega}, \bar{v}], \bar{v}) = 0$

8.2 Позиционные силы

$\bar{F} = \bar{F}(r, t)$ — позиционная сила (силовое поле)

Определение. $\bar{F}(\bar{r}, t)$ — потенциальная сила.

$$\exists u(\bar{r}, t) : \bar{F} = \text{grad}_{\bar{r}} u$$

u — силовая функция, $\Pi = -u$ — потенциальная энергия.

Пример. $F = F(x, t)\bar{e}_x = \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{e}_y$
 $U = \int F(x, t)dx$

Определение. Потенциальная сила $\bar{F}(\bar{r})$ — консервативная.

Пример. $F = -\frac{\gamma m}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r}$ — консервативная, т.к.

$$U = \int (\bar{F}, d\bar{r}) = - \int \frac{\gamma m}{r^3} (\bar{r}, d\bar{r}) = - \int \frac{\gamma m}{r^3} d\left(\frac{(\bar{r}, \bar{r})}{2}\right) =$$

$$= - \int \frac{\gamma m}{r^3} d\frac{r^2}{2} = - \int \frac{\gamma m}{r^2} dr = \frac{\gamma m}{r}; \quad n = -\frac{\gamma m}{r}$$

$$U = \int (\bar{F}, d\bar{r})$$

8.2.1 Критерий потенциальности

Утверждение 15.

$$\bar{F}(\bar{r}) = F_x \bar{e}_x + F_y \bar{e}_y + F_z \bar{e}_z \text{ — потенциальная} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \end{cases}$$

Доказательство.

\Rightarrow

$$u \in C^2$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

\Leftarrow

$$u = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} F_x(\xi, y, z) d\xi + \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} F_x(x_0, \eta, z) d\eta + \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} F_x(x_0, y_0, \zeta) d\zeta$$

Следствие. $F(\bar{r})$ — потенциальная сила $\Leftrightarrow \oint_C (\bar{F}, d\bar{r}) = 0, \quad \forall C$

Доказательство.

$$\oint_{C=\delta W} (\bar{F}, d\bar{r}) = - \int_W \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) dx dy + \dots = 0$$

Система точек $\bar{F}_i = \bar{F}_i^{(e)} + \bar{F}_i^{(i)}$.

$$F_i^{(i)} = \sum_{j \neq i} \bar{F}_{ij}; \quad \bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji} = F_{ij}(|\bar{r}_i - \bar{r}_j|) \frac{\bar{r}_j - \bar{r}_i}{|\bar{r}_j - \bar{r}_i|}$$

8.3 Свойства внутренних сил

1.

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i^{(i)} = 0$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i^{(i)} = \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \bar{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j > i} \bar{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_{ij} - \bar{F}_{ji}) = 0$$

■

2.

$$\sum_{i=1}^N [\bar{r}_i, \bar{F}_i^{(i)}] = 0$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j < i} [\bar{r}_i, \bar{F}_{ij}] + \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} [\bar{r}_j, \bar{F}_{ij}] = \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} [\bar{r}_i - \bar{r}_j, \bar{F}_{ij}] = 0$$

■

3. Внутренние силы потенциальны, т.е.

$$\exists u(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) : \bar{F}_i^{(i)} = \text{grad}_{\bar{r}_i} u$$

Доказательство.

$$u_{ij}(|\bar{r}|) = \int_0^{|\bar{r}|} F_{ij}(\bar{\rho}) d\rho$$

$$u = \sum_{i,j} u_{ij} \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{r}_i} = \sum_{i,j} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \bar{r}_i} = \sum \frac{\partial u_{ij}}{\partial |\bar{r}_i - \bar{r}_j|} \cdot \frac{\partial |\bar{r}_i - \bar{r}_j|}{\partial \bar{r}_i}$$

$$|\bar{r}_i - \bar{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$$\frac{\partial |\bar{r}_i - \bar{r}_j|}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_j)}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|} \quad \text{Аналогично для } y_i \text{ и } z_i$$

$$\frac{\partial |\bar{r}_i - \bar{r}_j|}{\partial r_i} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{r}_i} = \sum_{i,j, i < j} F_{ij}(\bar{r}_i - \bar{r}_j) \cdot \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|} = \bar{F}_i^{(i)}$$

■

4. Работа внутренних сил в твердом теле равна нулю.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sum (\bar{F}_i^{(i)}, v_i) &= \sum (\bar{F}_i^{(i)}, \bar{v}_s + [\bar{\omega}, \bar{\rho}_i]) = \\ &= \left(\underbrace{\sum \bar{F}_i^{(i)}}_0, \bar{v}_s \right) + \left(\bar{\omega}, \underbrace{\sum [\bar{\rho}_i, \bar{F}_i^{(i)}]}_0 \right) = 0\end{aligned}$$

■

9 Основные теоремы динамики

9.1 Основные динамические величины

Определение. $\bar{P} = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i$ — импульс. $\bar{K}_O = \sum_{i=1}^N [\bar{r}_i, m_i \bar{v}_i]$ — кинематический момент относительно точки O . $K_l = (\bar{K}_0, \bar{e}_l)$ — кинематический момент относительно оси l .

Замечание. $O \in l$, $\bar{e}_l \parallel \bar{l}$; K_l не зависит от точки O .

Определение. $T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_i, \bar{v}_i)$ — кинетическая энергия.

Определение. S — центр масс системы:

$$\bar{r}_S = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{m}$$

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \sum m_i \frac{d\bar{r}_i}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left(\sum m_i \bar{r}_i \right) = \frac{d}{dt} (m \bar{r}_S) = m \bar{v}_S \\ \boxed{\bar{P} &= m \bar{v}_S}\end{aligned}$$

Определение. Осями Кенига называется система отсчета с началом в центра масс системы и осями, параллельными неподвижным. (Двигается поступательно вместе с центром масс)

$$\bar{r}_i = \bar{R} + \bar{\rho}_i$$

Определение.

$$\bar{K}_{\text{кен}} = \sum [\bar{\rho}_i, m_i \dot{\bar{\rho}}_i]$$

$$T_{\text{кен}} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\bar{\rho}}_i^2$$

Теорема 13 (Формулы Кенига).

$$\begin{aligned}\bar{K}_O &= [\bar{r}_S, m \bar{v}_S] + \bar{K}_{\text{кен}} \\ T &= \frac{1}{2} m v_S^2 + T_{\text{кен}}\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\bar{K}_0 &= \sum [\bar{R} + \bar{\rho}, m_i \dot{\bar{R}} + m_i \dot{\bar{\rho}}_i] = [\bar{R}, \left(\sum m_i \right) \dot{\bar{R}}] + [\bar{R}, \sum m_i \dot{\bar{\rho}}_i] + \\ &+ \left[\sum m_i \bar{\rho}_i, \dot{\bar{\rho}}_i \bar{R} \right] + \sum [\bar{\rho}_i m_i \dot{\bar{\rho}}_i] = [\bar{r}_S, m \bar{v}_S] + \bar{K}_{\text{кен}} \\ T &= \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{\bar{R}}_i + \dot{\bar{\rho}}_i, \dot{\bar{R}}_i + \dot{\bar{\rho}}_i) = \frac{1}{2} \left(\sum m_i \right) \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\bar{\rho}}_i^2 + \\ &+ \underbrace{\sum m_i (\bar{R}, \dot{\bar{\rho}})}_0 = \frac{1}{2} m v_S^2 + T_{\text{кен}}\end{aligned}$$

■

Теорема 14 (Об изменении импульса).

$$\dot{\vec{P}} = \sum \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}$$

Доказательство.

$$\dot{\vec{P}}_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \vec{w}_i = \sum \vec{F}_i^{(e)} + \underbrace{\sum \vec{F}_i^{(i)}}_0 = \vec{F}$$

Теорема 15 (Формула движения центра масс).

$$m \vec{w}_S = \vec{F}$$

Следствие.

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w}_S = 0 \Rightarrow \vec{v}_S = \vec{v}_0 = const \Rightarrow \vec{r}_S = \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0$$

Следствие.

$$(\vec{F}, \vec{e}_x) = 0 \Rightarrow (\dot{\vec{P}}, \vec{e}_x) = 0 \Rightarrow \vec{v}_x = const$$

Теорема 16 (Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижного полюса).

$$\dot{\vec{K}}_O = \sum [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{(e)}] = \vec{M}_O$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{K}_O &= \frac{d}{dt} \left(\sum [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] \right) = \sum \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, m_i \vec{v}_i \right] + \sum [\vec{r}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i] = \\ &= \sum [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{(e)}] + \sum [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{(i)}] = \vec{M}_O \end{aligned}$$

Следствие.

$$\vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{K}_O = const$$

Следствие.

$$M_l = (\vec{M}_O, \vec{e}_l) = 0, \quad \vec{e}_l = const \Rightarrow K_l = const$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} K_l = \frac{d}{dt} (\vec{K}_O, \vec{e}_l) = \left(\frac{d\vec{K}_O}{dt}, \vec{e}_l \right) + 0 = (\vec{M}_O, \vec{e}_l) = M_l$$

Следствие.

$$\dot{K}_l = M_l$$

Формула преобразования кинетического момента при смене полюса

$$\vec{K}_B = \vec{K}_A + [\vec{P}, \vec{AB}]$$

Доказательство.

$$\vec{K}_B = \sum [\vec{BA} + \vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = [\vec{BA}, m_i \vec{v}_i] + \vec{K}_A = \vec{K}_A + [\vec{P}, \vec{AB}]$$

Формула преобразования момента сил при смене полюса

$$\overline{M}_B = \overline{M}_A + [\overline{F}, \overline{AB}]$$

Доказательство. Аналогично. ■

Теорема 17.

$$\dot{\overline{K}}_A = \overline{M}_A + [\overline{P}, \overline{v}_A]$$

Доказательство.

$$\overline{K}_A = \overline{K}_O + [\overline{P}, \overline{r}_A], \quad (\overline{v}_O \equiv 0)$$

$$\begin{aligned} \dot{\overline{K}}_A &= \dot{\overline{K}}_O + [\dot{\overline{P}}, \overline{r}_A] + [\overline{P}, \dot{\overline{r}}_A] = \overline{M}_O + [\overline{F}, \overline{r}_A] + [\overline{P}, \overline{v}_A] = \\ &= \overline{M}_A + [\overline{P}, \overline{v}_A] \end{aligned}$$

Следствие (Первая теорема Кенига).

$$\dot{\overline{K}}_{\text{кен}} = \overline{M}_S$$

Доказательство.

$$\overline{K}_{\text{кен}} = \overline{K}_S; \quad \dot{\overline{K}}_{\text{кен}} = \overline{M}_S + [\overline{P}, \overline{v}_S] = \overline{M}_S + [m\overline{v}_S, \overline{v}_S] = \overline{M}_S$$

Теорема 18 (Об изменении кинетической энергии).

$$\dot{T} = \sum (\overline{F}_u(e), \overline{v}_i) + \sum (\overline{F}_i^{(i)}, \overline{v}_i)$$

Доказательство.

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\overline{v}_i, \overline{v}_i)$$

$$\dot{T} = \sum (\overline{v}_i, m\dot{\overline{v}}_i) = \sum (\overline{v}_i, m\overline{w}_i) = \sum (\overline{v}_i, \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)})$$

$$dT = \sum (\overline{F}_i^{(e)}, d\overline{r}_i) + \sum (\overline{F}_i^{(i)}, d\overline{r}_i)$$

Утверждение 16 (Вторая теорема Кенига).

$$\overline{T}_{\text{кен}} = \sum (\overline{F}_i, \dot{\overline{\rho}}_i)$$

Доказательство.

$$\dot{T}_{\text{кен}} = \dot{T} - (m\dot{\overline{v}}_S, \overline{v}_S) = \sum (\overline{F}_i, \overline{v}_i) - \sum (\overline{F}_i, \overline{v}_S)$$

$$\dot{\overline{\rho}}_i = \overline{v}_i^{\text{отн}} = \overline{v}_i^{\text{абс}} - \overline{v}_i^{\text{пер}} = \overline{v}_i - \overline{v}_S$$

$$\dot{T}_{\text{кен}} = (\overline{F}_i, \overline{v}_i - \overline{v}_S) = \sum (\overline{F}_i, \dot{\overline{\rho}}_i)$$

Пусть $\overline{r}_i^{(e)} = -\text{grad}_{\overline{r}_i} \Pi(\overline{r}_i, \dots, \overline{r}_N)$ (внешние силы консервативны).

$$\sum (\overline{F}_i^{(e)}, d\overline{r}_i) = - \sum \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \overline{r}_i}, d\overline{r}_i \right) = -d\Pi$$

$$dT = -d\Pi \Rightarrow d(T + \Pi) = 0 \Rightarrow T + \Pi = \text{const}$$

Теорема 19 (Закон сохранения полной механической энергии). Если все внешние силы, действующие на систему консервативны, то полная энергия системы сохраняется.

9.2 Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета

$$\begin{aligned}
m_i \bar{w}_i &= \bar{F}_i^{(e)} + \bar{F}_i^{(i)} + \bar{F}_i^{(\text{пер})} + \bar{F}_i^{(\text{кор})} \\
\dot{\bar{P}} &= \bar{F} + \bar{F}^{\text{пер}} + \bar{F}^{\text{кор}} \\
\bar{F}^{\text{пер}} &= \sum \bar{F}^{\text{пер}} = - \sum m_i \bar{w}_i^{\text{пер}}; \quad \bar{F}^{\text{кор}} = \sum \bar{F}_i^{\text{кор}} = - \sum m_i \cdot 2 \cdot [\bar{w}_{\text{кор}}, \bar{v}_i] \\
\dot{\bar{K}}_0 &= \bar{M}_O + \bar{M}_O^{\text{пер}} + \bar{M}_O^{\text{кор}} \\
\bar{M}_O^{\text{кор}} &= \sum [\bar{r}_i, \bar{F}_i^{\text{пер}}]; \quad \bar{M}_O^{\text{кор}} = \sum [\bar{r}_i, \bar{F}_i^{\text{кор}}] \\
\dot{T} &= \sum (F_i, \bar{v}_i) + \sum (\bar{F}_i^{\text{пер}}, \bar{v}_i) + 0 \\
\sum (\bar{F}_i^{\text{кор}}, \bar{v}_i) &= \sum (-2m_i [\bar{w}_{\text{пер}}, v_i], \bar{v}_i) = 0
\end{aligned}$$

Пример (Система отсчета Кенига).

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{K}}_S &= \dot{\bar{K}}_{\text{кен}} = \bar{M}_S; \\
\dot{T}_S &= \sum (\bar{F}_i, \bar{v}_i); \quad \dot{\bar{P}} = \bar{F} - \sum m_i \bar{w}_S = \bar{F} - m \bar{w}_S
\end{aligned}$$

10 Движение в центральном поле

10.1 Законы сохранения

В центральном поле

$$m \ddot{\bar{r}} = \bar{F}, \quad \bar{F} = F(r) \frac{\bar{r}}{r}$$

Закон сохранения энергии:

$$\Pi = - \int F(r) dr, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 \Rightarrow T + \Pi = h = \text{const}$$

Закон сохранения кинетического момента:

$$\bar{M}_O = \left[\bar{r}, F(r) \frac{\bar{r}}{r} \right] = 0 \Rightarrow \dot{\bar{k}}_O = 0 \Rightarrow \bar{k}_O = [\bar{r}, m \bar{v}] = \bar{k} = \text{const}$$

Следствие. Траектория точки в центральном поле всегда является плоской кривой.

Доказательство.

$$[\bar{r}, m \bar{v}] = \bar{k} \perp \alpha \Rightarrow \bar{r} \in \alpha \quad \forall t, \alpha = \text{const}$$

Следствие.

$$r^2 \dot{\varphi} = c = \text{const}$$

Доказательство.

$$|\bar{k}| = |[\bar{r}, m \bar{v}]| = |[r \bar{e}_r, m(\dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\varphi} \bar{e}_\varphi)]| = m r^2 |\dot{\varphi}| |\bar{e}_z| = \text{const} \Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

Геометрический смысл

$$S = \iint dS = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi$$

$$\dot{S} = \frac{dS}{d\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{r^2}{2} \dot{\varphi} = \frac{c}{2} = \text{const}$$

$$\sigma = \dot{S} = \frac{c}{2} \text{ — секториальная скорость}$$

10.2 Формулы Бине

Теорема 20 (Формулы Бине). При движении точки в центральном поле справедливы следующие равенства:

$$v^2 = c^2 \left(\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right)$$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right)$$

Доказательство.

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\bar{w} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\bar{e}^r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\bar{e}_\varphi$$

$$m\bar{w} = F\bar{e}_r \quad \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \quad \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{c}{r^2} = -c \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$v^2 = c^2 \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + r^2 \frac{c^2}{r^4} = c^2 \left(\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right)$$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right)$$

■

Определим траекторию.

$$T + \Pi = h, \quad T = \frac{m}{2} v^2$$

$$\frac{mc^2}{2} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \underbrace{\frac{mc^2}{2r^2} + \Pi(r)}_{\Pi_c(r)} = h$$

$$\pm \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = \sqrt{h - \Pi_c(r)}$$

$$\text{Замена: } \frac{1}{r} = u \quad \pm \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{1/r_0}^{1/r} \frac{du}{\sqrt{h - \Pi_c(u)}} = \varphi - \varphi_0 \Rightarrow r(\varphi)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2(\varphi)} \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2(\varphi) d\varphi = \int_{t_0}^t c dt = c(t - t_0)$$

10.3 Движение точки в центральном гравитационном поле

$$F = -\gamma \frac{mM}{r^2}, \quad \Pi(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$$

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int \frac{du}{\sqrt{h - m \frac{c^2}{2u^2} + \gamma mM u}} = \pm \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} - u^2 + \frac{2\gamma M}{c^2} u}} =$$

$$= \pm \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2 M^2}{c^4} - \left(u - \frac{\gamma M}{c^2} \right)^2}} = \pm \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{c^2}}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2 M^2}{c^4}}} + \varphi_0$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma M}{c^2} + \sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2 M^2}{c^4}} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\frac{c^2}{\gamma m} = p, \quad \sqrt{\frac{2h}{mc^2}p^2 + 1} = e \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

То есть φ_0 зависит от c и h .

Замечание. $\varphi_0 = 0$ ($\varphi' = \varphi - \varphi_0$)

Утверждение 17. Траектория точки в центральном гравитационном поле является коническим сечением.

- $e = 0$: ($h^* := h = -\frac{mc^2}{2p^2} = -\frac{m\gamma^2 M^2}{2c^2}$) — окружность.
- $0 < e < 1$: ($h^* < h < 0$) — эллипс.
- $e = 1$: ($h = 0$) — парабола.
- $e > 1$: ($h > 0$) — гипербола.

Пример (Первая космическая скорость).

$$v_1 = ?$$

$$\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R} = -\frac{m\gamma^2 M^2}{2c^2} = -\frac{m\gamma^2 M^2}{2R^2 v_1^2}$$

$$c = R^2 \dot{\varphi} = Rv_1 \text{ (окружность)}$$

$$v_1^2 - \frac{2\gamma M}{R} + \frac{\gamma^2 M^2}{R^2 v_1^2} = 0$$

$$\left(v_1 - \frac{\gamma M}{Rv_1}\right)^2 = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$$

Пример (Вторая космическая скорость).

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{\gamma mM}{R} = 0 \Rightarrow v_2^2 = \frac{2\gamma M}{R}$$

Теорема 21 (Законы Кеплера).

1. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится солнце.
2. Радиус-вектор планеты заметает равные площади за равные промежутки времени.
3. $\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$ (где a — большая полуось эллипса) для планет из одной системы.

Доказательство.

$$\dot{s} = \frac{c}{2}$$

$$T = \frac{2\pi ab}{c}$$

$$a = ?$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad b^2 = (1 - e^2)a^2$$

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{pa^2}{b^2} \Rightarrow b^2 = pa$$

$$\text{Тогда } T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2} = \frac{4\pi^2 a^2 pa}{c^2} = \frac{4\pi^2 a^3 c^2}{c^2 \gamma M} = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M} \Rightarrow$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = \text{const}$$

■

10.4 Задача двух тел

$$\bar{F}_{12} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^3}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

$$\bar{F}_{21} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^3}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$$

Теорема о движении центра масс: $(m_1 + m_2)\ddot{\bar{r}}_S = 0 \Rightarrow$

\Rightarrow Система Кенига — инерциальная система отсчета ($\bar{F}^{(e)} = 0$)

$$\bar{\rho}_1 = \bar{r}_1 - \bar{r}_S = \bar{r}_1 - \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

$$\bar{\rho}_2 = \frac{m_1}{m}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$$

Тогда второй закон Ньютона в системе Кенига имеет вид:

$$m_1 \ddot{\bar{\rho}}_1 = -\frac{\gamma m_1 m_2}{m^3 \rho_1^3 / m_2^3} \frac{m \bar{\rho}_1}{m_2} = -\frac{\gamma m_1 m_2^3}{m^2 \rho_1^3} \bar{\rho}_1 = -\gamma_1 \frac{m_1 m}{\rho_1^3} \bar{\rho}_1, \text{ где } \gamma_1 = \frac{\gamma m_2^3}{m^3}$$

$$m_2 \ddot{\bar{\rho}}_2 = -\gamma_2 \frac{m_2 m}{\rho_2^3} \bar{\rho}_2, \text{ где } \gamma_2 = \frac{\gamma m_1^3}{m^3}$$

Уточнение законов Кеплера

1. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится центр масс системы.
2. Сохраняется.
3. $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi}{\gamma_{1,2} m}$ — зависит от m_1 (m_2). Т.е. $\frac{T_1^2}{a_1^3} \neq \frac{T_2^2}{a_2^3}$ при $m_1 \neq m_2$, но если $m_1 \gg m_2$, тогда $\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ll 1 \Rightarrow |\bar{\rho}_1| \ll 1$, значит $\gamma_1 \ll \gamma$, $\gamma_2 \approx \gamma$

11 Динамика твердого тела

Определение. Моментом инерции твердого тела относительно оси называется сумма произведений масс точек тела на квадрат расстояния до этой оси:

$$J_l = \sum m_i d_i^2, \quad d_i = \text{dist}(\bar{r}_i, l); \quad \left(J_l = \int_W d^2 dm \right) \quad (13)$$

$$J_l \sum m_i ([\bar{r}_i, \bar{l}])^2 = \sum m_i (\bar{r}_i - (\bar{r}_i, \bar{l}) \bar{l})^2 \quad (14)$$

Теорема 22 (Гюйгенса-Штейнера).

$$J_l = J_{l'} + m d^2, \quad d = \text{dist}(l, l')$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} J_l &= \sum m_i ([\bar{r}_S + \bar{\rho}_i, \bar{l}])^2 = \sum m_i ([\bar{r}_S, \bar{l}]^2) + \sum m_i [\bar{\rho}_i, \bar{l}]^2 + 2 \sum m_i ((\bar{r}_S, \bar{l}) \cdot (\bar{\rho}_i, \bar{l})) = \\ &= m \cdot d^2 + J_{l'} + 2(\bar{r}_S, \bar{\rho}) \cdot \left(\sum m_i \bar{\rho}_i \right) = J_{l'} + d^2 m \end{aligned}$$

■

$$\bar{r}_i = x_i \bar{e}_x + y_i \bar{e}_y + z_i \bar{e}_z$$

Определение.

$$\begin{aligned} J_x &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ J_y &= \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) \\ J_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned} \quad \text{— осевые моменты инерции}$$

Свойство 1

$$J_x + J_y \geq J_z$$

Доказательство.

$$J_x + J_y = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) + 2 \sum m_i z_i \geq J_z$$

■

Замечание. Равенство достигается в случае плоского тела

$$J_x + J_y = J_z \Leftrightarrow z_i = 0 \quad \forall m$$

Определение.

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \sum m_i x_i y_i \\ J_{yz} &= \sum m_i y_i z_i \\ J_{xz} &= \sum m_i x_i z_i \end{aligned} \quad \text{— центробежные моменты инерции.}$$

Определение.

$$\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \quad \text{— тензор инерции тела в точке } O$$

$$\bar{l} = \alpha \bar{e}_x + \beta \bar{e}_y + \gamma \bar{e}_z, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\begin{aligned} J_l &= \sum m_i ((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (x_i \alpha + y_i \beta + z_i \gamma)^2) = \\ &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \alpha^2 + \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) \beta^2 + \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \gamma^2 - \\ &- 2 \left(\sum m_i x_i y_i \right) \alpha \beta - 2 \left(\sum m_i y_i z_i \right) \beta \gamma - 2 \left(\sum m_i x_i z_i \right) \alpha \gamma = \\ &= J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{yz} \beta \gamma - 2J_{xz} \alpha \gamma = (J_O \bar{l}, \bar{l}) \end{aligned}$$

$$Ox'y'z'$$

$$\bar{l}' = \alpha' \bar{e}_{x'} + \beta' \bar{e}_{y'} + \gamma' \bar{e}_{z'}, \quad J'_0$$

$$\bar{l}' = A \bar{l}, \quad A^T = A^{-1}$$

$$\begin{aligned} J_l &= (J'_0 \bar{l}', \bar{l}') = (J'_0 \cdot A \bar{l}, A \bar{l}) = (A^T J'_0 A \bar{l}, \bar{l}) = (J_O \bar{l}, \bar{l}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow J_O = A^T J'_0 A \end{aligned}$$

Определение.

$$\Sigma \{ \bar{r}, (J_O \bar{r}, \bar{r}) = 1 \} \quad \text{— эллипсоид инерции тела в точке } O$$

Замечание.

$$(J_O \bar{r}, \bar{r}) = 1 \Leftrightarrow J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{xz} xz = 1$$

Замечание.

$$(J_O \bar{r}, \bar{r}) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\left(J_O \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}, \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} \right)}_{J_{\bar{r}}}, \quad |\bar{r}|^2 = 1 \Leftrightarrow |\bar{r}| = \sqrt{\frac{1}{J_{\bar{r}}}}$$

$$\exists O\xi\eta\zeta, \quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \equiv \Sigma$$

Определение. A, B, C — главные моменты инерции тела в точке O

Определение. $O\xi, O\eta, O\zeta$ — главные оси инерции в точке O

Определение. S — центр масс, тогда $S\xi, S\eta, S\zeta$ — главные центральные моменты

$$\det(J_O - \lambda E) = 0, \quad \lambda - A, B, C \rightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \bar{e}_\xi \bar{e}_\eta \bar{e}_\zeta$$

$A = B$ (λ — корень 2ой кратности, тогда $O\zeta$ — ось динамической симметрии)

Замечание. Если однородное твердое тело имеет ось геометрической симметрии, то она является главной в любой своей точке.

Oz — ось симметрии, $m_i = m'_i$.

$$J_{xz} = \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i = \sum_{i=0}^{N/2} (m_i x_i z_i - m x_i z_i) = 0$$

$$J_{yz} = 0$$

Oz — главная

Замечание. Если однородное твердое тело имеет плоскость симметрии, то ось, перпендикулярная этой плоскости, является главной в точке пересечения с плоскостью.

11.1 Твердое тело с неподвижной точкой ($\bar{v}_O = 0$)

Теорема 23.

$$T = \frac{1}{2}(J\bar{\omega}, \bar{\omega}), \quad \bar{K}_O = J_O \bar{\omega}$$

Доказательство.

$l : l \parallel \bar{\omega}, \quad O \in l$ (O — мгновенная ось вращения)

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i ([\bar{\omega}, \bar{r}_i])^2 = \frac{1}{2} \sum m_i ([\bar{l}, \bar{r}_i])^2 \cdot \omega^2 =$$

$$\frac{1}{2} J_l \omega^2 = \frac{1}{2} (J_O, \bar{l}, \bar{l}) \omega^2 = \frac{1}{2} (J_O \bar{\omega}, \bar{\omega})$$

$$\bar{K}_O = \sum m_i [\bar{r}_i, [\bar{\omega}, \bar{r}_i]] = \sum m_i (\bar{r}_i^2 \cdot \bar{\omega} - \bar{r}_i (\bar{\omega}, \bar{r}_i))$$

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y + \omega_z \bar{e}_z$$

$$(\bar{K}_O, \bar{e}_x) = \sum m_i [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \omega_x - (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] x_i =$$

$$= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{yx} \omega_z$$

$$(\bar{K}_O, \bar{e}_y) = J_{xy} \omega_x - J_y \omega_y - J_{xz} \omega_z$$

$$(\bar{K}_O, \bar{e}_z) = J_{xz} \omega_x - J_{xz} \omega_y - J_z \omega_z$$

Следствие. Пусть $O\xi, O\eta, O\zeta$ — главные оси инерции:

$$J_O = \text{diag}(A, B, C), \quad \bar{\omega} = p \bar{e}_\xi + q \bar{e}_\eta + r \bar{e}_\zeta$$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \bar{K}_O = Ap \bar{e}_\xi + Bq \bar{e}_\eta + Cr \bar{e}_\zeta$$

11.2 Произвольное движение тела

Теорема 24.

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}_S^2 + \frac{1}{2} (J_S \bar{\omega}, \bar{\omega})$$

$$\bar{K}_O = [\bar{r}_S, m \bar{v}_S] + J_S \bar{\omega}$$

Доказательство.

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}_S^2 + T^{\text{кен}} = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} (J_S \bar{\omega}, \bar{\omega})$$

Следствие. S_ξ, S_η, S_ζ — главные центральные оси

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

$$\bar{K}_O = [\bar{r}_S, m\bar{v}_S] + Ap\bar{e}_\xi + Bq\bar{e}_\eta + Cr\bar{e}_\zeta$$

Следствие. $\bar{\omega} \parallel \bar{e}_z, \quad \bar{e}_z = \text{const}$:

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2} \underbrace{(J_S \bar{e}_z, \bar{e}_z)}_{J_z} \omega^2 = \frac{1}{2}mv_S^2 = \frac{1}{2}J_z \omega^2$$

$$\bar{K}_O = [\bar{r}_S, m\bar{v}_S] + \underbrace{J_S \bar{\omega}}_{J_z \bar{\omega} \Leftrightarrow J_{xy}=J_{yz}=0} \parallel \bar{e}_z$$

12 Динамика твердого тела с неподвижной точкой

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O$$

$O\xi, O\eta, O\zeta$ — главные оси

$$\bar{K}_O = Ap\bar{e}_\xi + Bq\bar{e}_\eta + Cr\bar{e}_\zeta$$

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \dot{\bar{K}}_O + [\bar{\omega}, \bar{K}_O]$$

$$\Rightarrow A\dot{p}\bar{e}_\xi = B\dot{q}\bar{e}_\eta + C\dot{r}\bar{e}_\zeta + \begin{vmatrix} \bar{e}_\xi & \bar{e}_\eta & \bar{e}_\zeta \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} = M_\xi \bar{e}_\xi + M_\eta \bar{e}_\eta + M_\zeta \bar{e}_\zeta$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi \\ B\dot{q} + (A - C)rp = M_\eta \\ C\dot{r} + (B - A)qp = M_\zeta \end{cases}$$

12.1 Случай Эйлера

Определение. Случаем Эйлера называется задача о движении твердого тела с неподвижной точкой при отсутствии внешних сил (момента внешних сил) (по инерции).

$$\bar{M}_0 = 0$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)qp = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h = \text{const}$$

$$\bar{k}_O = Ap\bar{e}_\xi + Bq\bar{e}_\eta + Cr\bar{e}_\zeta = \bar{k} = \text{const}$$

Теорема 25. Динамические уравнения Эйлера в случае Эйлера интегрируются в квадратурах.

Доказательство.

$$\begin{cases} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 2h \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2 \end{cases}$$

$$1) A = B = C \quad (15) \Rightarrow \begin{cases} p = p_0 = \text{const} \\ q = q_0 = \text{const} \\ r = r_0 = \text{const} \end{cases}$$

$$A \neq B \begin{cases} B(A-B)q^2 + C(A-C)r^2 = 2hA - k^2 \\ A(B-A)q^2 + C(B-C)r^2 = 2hB - k^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = \pm f_1(r) \\ p = \pm f_2(r) \end{cases}$$

$$(15) \Rightarrow C\dot{r} \pm (B-A)f_1(r)f_2(r) = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{(B-A)f_1(r)f_2(r)}{C}$$

$$\pm \int_0^r \frac{d\rho}{f_1(\rho)f_2(\rho)} = \frac{B-A}{C}(t-t_0) \Rightarrow r = r(t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} q = \pm f_1(r(t)) = q(t) \\ p = \pm f_2(r(t)) = p(t) \end{cases}$$

■

Геометрическая интерпретация Мак-Куллока

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2$$

$$k_\xi = Ap, \quad k_\eta = Bq, \quad k_\zeta = Cr$$

$$S = \eta \bar{k} : k_\xi^2 + k_\eta^2 + k_\zeta^2 = k^2$$

$$\Phi = \left\{ \bar{k} : \frac{k_\xi^2}{A} + \frac{k_\eta^2}{B} + \frac{k_\zeta^2}{C} = 2h \right\} - \text{эллипсоид Мак-Куллока}$$

При движении волчка Эйлера¹ эллипсоид Мак-Куллока обкатывает неподвижный конец вектора кинетического момента по линии пересечения со сферой соответствующего радиуса. При этом проекция угловой скорости эллипсоида на ось кинетического момента постоянна.

$$(\bar{k}, \bar{\omega}) = (J_0 \bar{\omega}, \bar{\omega}) = 2T = \text{const.}$$

$$A \geq B \geq C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2p^2 + ABq^2 + ACr^2 \geq$$

$$\geq A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 \geq$$

$$\geq ACp^2 + BCq^2 + C^2r^2$$

$$2TA \geq k^2 \geq 2TC$$

$$\sqrt{2TA} \geq K \geq \sqrt{2TC}$$

$$k = \sqrt{2TA}$$

$$k = \sqrt{2TC}$$

$$k = \sqrt{2TB}$$

$$k_\xi^2 \left(1 - \frac{B}{A}\right) + K_\eta^2 \left(1 - \frac{B}{C}\right) = 0$$

Геометрическая интерпретация Пуансо

При движении волчка Эйлера его эллипсоид инерции катится без скольжения по неподвижной плоскости, ортогональной вектору кинетического момента.

P — точка пересечения эллипсоида инерции с мгновенной осью вращения.

$$(J_0 \bar{r}, \bar{r}) = 1 - \text{эллипсоид инерции}$$

¹Твердое тело с неподвижной точкой, для которого выполняется случай Эйлера.

$$\overline{OP} = \bar{\rho} : \begin{cases} (J_0 \bar{\rho}, \bar{\rho}) = 1 \\ \bar{\rho} = \lambda \bar{\omega} \end{cases}$$

$$(J_0 \bar{\omega}, \bar{\omega}) \lambda^2 = L, \quad 2T \lambda^2 = 1, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}$$

$$\bar{n} = \frac{\rho \operatorname{grad} f(\bar{r})}{|\operatorname{grad} f(\bar{r})|} = \frac{J_O \bar{r}}{|J_O \bar{r}|}$$

$$\bar{n}_P = \frac{J_O \bar{\rho}}{|J_O \bar{\rho}|} = \frac{J_O \bar{\omega} \lambda}{|J_O \bar{\omega}| \lambda} = \frac{\bar{k}}{|\bar{k}|} = \text{const}$$

$$\pi \perp \bar{n}_P, \quad P \ni \pi$$

$$(\overline{OP}, \bar{n}_P) = \left(\lambda \bar{\omega}, \frac{J_O \bar{\omega}}{|J_O \bar{\omega}|} \right) = \frac{\lambda}{k} 2T = \frac{\sqrt{2T}}{k} = \text{const}$$

12.1.1 Динамически симметричный волчок Эйлера

Теорема 26. Движение динамически симметричного волчка Эйлера всегда является регулярной прецессией.

Доказательство.

$$\begin{cases} k_\xi = k \sin \Theta \sin \varphi \\ k_\eta = k \sin \Theta \cos \varphi \\ k_\zeta = k \cos \Theta \end{cases}$$

$$k_\xi = Ap, \quad k_\eta = Bq = Aq, \quad k_\zeta = Cr$$

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \Theta \sin \varphi + \dot{\Theta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \Theta \cos \varphi + \dot{\Theta} \sin \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$C\dot{r} = 0 \Rightarrow r = r_0 = \text{const}$$

$$k \cos \Theta = Cr_0 \Rightarrow \cos \Theta = \frac{Cr_0}{k} = \text{const} \Rightarrow \Theta = \text{const} \quad (\dot{\Theta} = 0)$$

$$\begin{cases} k \sin \Theta \sin \varphi = A\dot{\psi} \sin \Theta \sin \varphi \\ k \sin \Theta \cos \varphi = A\dot{\psi} \sin \Theta \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow k = A\dot{\psi} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{k}{A} = \text{const}$$

$$\dot{\varphi} = r - \dot{\psi} \cos \Theta = r_0 - \frac{k}{A} \frac{Cr_0}{k} = r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) = \text{const}$$

■

12.2 Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного волчка

$OXYZ$ — неподвижная система отсчета.

$O\xi\eta\zeta$ — связана с телом ($O\zeta$ - ось симметрии).

$Ox'y'z$ — подвижная система отсчета.

$$\bar{\omega}_{\text{пер}} = \dot{\psi} \bar{e}_z$$

$$\overline{M}_O = \frac{d\bar{k}_O}{dt} = \bar{k}_O + [\bar{\omega}_{\text{пер}}, \bar{k}_O]$$

$$\bar{k}_O = Ap\bar{e}_{x'} + Aq\bar{e}_{y''} + Cr\bar{e}_\zeta$$

$$(\bar{e}_{y''} \perp \bar{e}_\zeta, \bar{e}_{y2} \perp \bar{e}_{x'})$$

$$\bar{\omega}_{\text{абс}} = \dot{\psi} \bar{e}_z + \dot{\varphi} \bar{e}_\zeta = (\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \Theta) \bar{e}_\zeta + \dot{\psi} \sin \Theta \cdot \bar{e}_{y''}$$

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = \dot{\psi} \sin \Theta = \text{const} \\ r = \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi} = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \dot{\bar{k}}_O = 0$$

$$\begin{aligned}\overline{M}_O &= \begin{vmatrix} \bar{e}_{x'} & \bar{e}_{y''} & \bar{e}_\zeta \\ 0 & \dot{\psi} \sin \Theta & \dot{\psi} \cos \Theta \\ 0 & A\dot{\psi} \sin \Theta & C\dot{\psi} \cos \Theta + C\dot{\varphi} \end{vmatrix} = \bar{e}_{x'} \dot{\psi} \sin \Theta \cdot (C\dot{\varphi} + C\dot{\psi} \cos \Theta - A\dot{\psi} \cos \Theta) = \\ &= \bar{e}_{x'} \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \Theta \cdot C \left(1 + \frac{C-A}{C} \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} \cos \Theta \right) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\overline{M}_0 = C[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2] \left(1 + \frac{C-A}{C} \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} \cos \Theta \right) - \text{точная формула гироскопии.}$$

$$\bar{\omega}_1 = \dot{\psi} \bar{e}_z$$

$$\bar{\omega}_2 = \dot{\varphi} \bar{e}_\zeta$$

$$[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2] = \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \Theta \bar{e}_{x'}$$

12.3 Случай Лагранжа

Случаем Лагранжа называется задача о движении динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести. Считаем, что центр масс тела лежит на оси его динамической симметрии.

$$\begin{aligned}\overline{M}_O &= [\bar{r}_\zeta, m\bar{\rho}] = [l\bar{e}_\zeta, -m\rho\bar{e}_z] = [l\bar{e}_\zeta, -m\rho(\cos \Theta \bar{e}_\zeta + \sin \Theta \cdot \sin \varphi \bar{e}_\xi + \sin \Theta \cos \varphi \cdot \bar{e}_\eta)] = \\ &= -m\rho l \sin \Theta (\sin \varphi \bar{e}_\eta - \cos \varphi \bar{e}_\xi)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = m\rho l \sin \Theta \cos \varphi \\ A\dot{q} + (A_C)p r = -m\rho l \sin \Theta \sin \varphi \\ C\dot{r} + 0 = 0 \\ p = \dot{\psi} \sin \Theta \sin \varphi + \dot{\Theta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \Theta \cos \varphi - \dot{\Theta} \sin \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

Интегралы

1. $C\dot{e} = 0 \Rightarrow r = r_0 = \text{const}$
2. $(\overline{M}_0, \bar{e}_z) = 0, \quad \dot{\bar{e}}_z = 0 \Rightarrow k_z = (\overline{k}_O, \bar{e}_z) = \text{const}$
 $k_z = (A p \bar{e}_\xi + A q \bar{e}_\eta + C r \bar{e}_\zeta, \sin \Theta \sin \varphi \cdot \bar{e}_\xi + \sin \Theta \cos \varphi \bar{e}_\eta - \cos \Theta \bar{e}_\zeta) = A \sin \Theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + C r_0 \cos \Theta =$
 $A \dot{\psi} \sin \Theta + C r_0 \cos \Theta = k = \text{const}$
3. $T + \Pi = h = \text{const}$
 $\frac{1}{2}(ap^2 + Aq^2 + Cr^2) + mgl \cos \Theta = h$
 $A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2) + C r_0^2 + 2mgl \cos \Theta = 2h$
 $A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2) + 2mgl \cos \Theta = h^*, \quad h^* = 2h - C r_0^2$

Интегрирование: $2 \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{k - C r_0 \cos \Theta}{A \sin^2 \Theta}$

$$3 \Rightarrow \frac{(k - C r_0 \cos \Theta)^2}{A \sin^2 \Theta} + A \dot{\Theta}^2 + 2mgl \cos \Theta = h^*$$

$$\dot{\Theta}^2 = f(\Theta), \quad f(\Theta) = \frac{1}{A} \left(h^* - r mgl \cos \Theta - \frac{(k - C r_0 \cos \Theta)^2}{A \sin^2 \Theta} \right)$$

$$\dot{\Theta} = \pm \sqrt{f(\Theta)}$$

$$\frac{d\Theta}{\sqrt{f(\Theta)}} = \pm dt$$

$$\int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} = t - t_0$$

$$\dot{\Theta} = \frac{kCr_0 \cos \Theta(t)}{A \sin^2 \Theta(t)} = f_1(t)$$

$$\psi = \int_0^t f_1(\tau) d\tau = \psi(t)$$

$$\dot{\varphi} = r_0 - \dot{\psi} \cos \Theta = r_0 - \dot{\psi}(t) \cos \Theta(t) = f_2(t)$$

$$\varphi = \int_0^t f_2(\tau) d\tau$$

Геометрическая интерпретация

$$\cos \Theta = x$$

$$Ah^* - 2Amglx - \frac{(Cr_0x - k)^2}{1 - x^2} = A^2 f(\Theta) = A^2 \dot{\Theta}^2$$

$$F(x) = 2Amglx + \frac{(Cr_0x - k)^2}{1 - x^2} \leq Ah^*$$

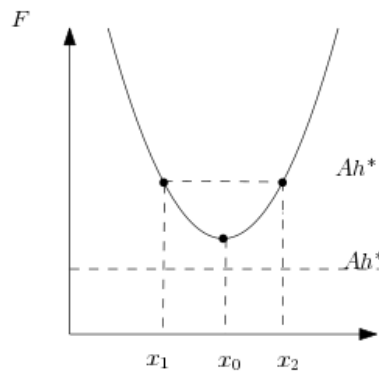
$$F(x) = 2Amglx + \frac{C^2r_0^2(x^2 - 1) + C^2r_0^2 + k^2 - 2Cr_0kx}{1 - x^2} =$$

$$= 2Amglx - C^2r_0^2 + \frac{(Cr_0 - k)^2(1 + x) + (Cr_0 + k)^2(1 - x)}{2(1 - x^2)} =$$

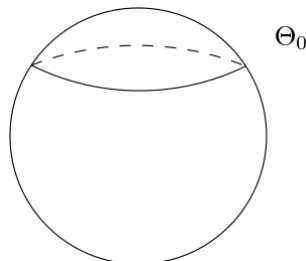
$$= 2Amglx - C^2r_0^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{(Cr_0 - k)^2}{1 - x} + \frac{(Cr_0 + k)^2}{1 + x} \right)$$

$$F'_x(x) = 2Amgl + \frac{1}{2} \left(\frac{(Cr_0 - k)^2}{(1 - x)^2} - \frac{(Cr_0 + k)^2}{(1 + x)^2} \right)$$

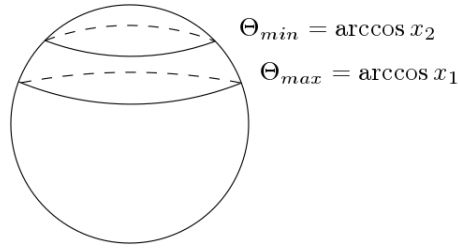
$$F''_x(x) = 0 + \frac{(Cr_0 - k)^2}{(1 - x)^3} + \frac{(Cr_0 + k)^2}{(1 + x)^3} \geq 0, \quad \forall x \in (-1, 1)$$



$$1. \quad h^* = \frac{F(x_0)}{A} \Rightarrow x = x_0, \quad \Theta = \arccos x_0 = \text{const}$$

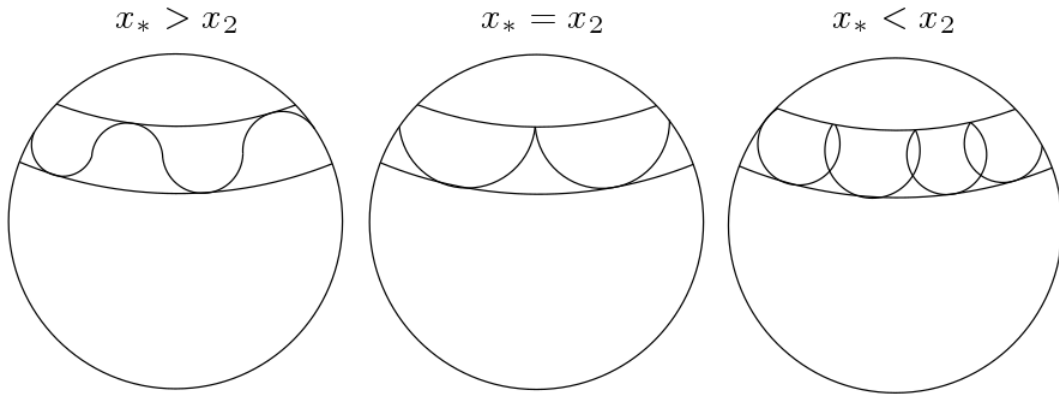


$$2. \ h^* > \frac{F(x_0)}{A}: \Theta_{min} = \arccos x_2, \quad \Theta_{max} = \arccos x_1$$



$$\dot{\psi} = \frac{Cr_0x - k}{A(1-x^2)} = 0 \Leftrightarrow x = x_* = \frac{k}{Cr_0}$$

$$F'_*(x_*) = 2Amgl > 0$$



Замечание. Если угловая скорость собственного вращения много больше скорости прецессии, т.е. $\dot{\psi} \gg \dot{\psi}$, тело совершает псевдoreгулярную прецессию.

Основные теоремы динамики

$$\bar{p} = m\bar{v}_s$$

$$\bar{k}_O = [\bar{r}_s, m\bar{v}_s] + J_s\bar{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}(J_s\bar{\omega}, \bar{\omega})$$

$$\dot{\bar{p}} = \sum_{i=1}^N F_i^{(e)} = \bar{F}$$

$$\dot{\bar{k}}_O = \sum p\bar{r}_i, \bar{F}_i^{(e)} = \bar{M}_O$$

$$\dot{T} = \sum (\bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_i)$$

Замечание.

$$\sum (\bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_i) = \dot{T} = (m\bar{v}_s, \bar{v}_s) + ((J_s\dot{\bar{\omega}}), \bar{\omega}) = (\bar{F}, \bar{v}_s) + (\bar{M}_s, \bar{\omega})$$

Утверждение 18. Мощность внешних сил, действующих на твердое тело определяется равенством

$$\sum (\bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_i) = (\bar{p}, \bar{v}_p) + (\bar{M}_p, \bar{\omega}),$$

где p — произвольная точка тела.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sum (\bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_i) &= \sum (\bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_p + [\bar{\omega}, \rho_i]) = \left(\sum \bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_p \right) + (\bar{\omega}, \sum [\rho_i, \bar{F}_i]) = \\ &= (\bar{p}, \bar{v}_p) + (\bar{M}_p, \bar{\omega})\end{aligned}$$

■

Определение. Две системы сил (в совокупности с точками их приложения), действующих на твердое тело называются эквивалентными, если они вызывают одно и то же движение тела.

$$\{\bar{F}_i, p_i\} \sim \{\bar{F}'_i, p'_i\}$$

Следствие.

$$\{\bar{F}_i, p_i\} \sim \bar{F}'_i, p'_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum \bar{F}_i = \sum \bar{F}'_i \\ \sum [\overline{OP}, \bar{F}_i] = \sum [\overline{OP}', \bar{F}'_i] \end{cases}$$

Следствие.

$$\{\bar{F}_i, p_i\} \sim \{\bar{F}, \bar{M}_O, O\}, \quad \bar{F} = \sum \bar{F}_i, \quad \bar{M}_O = \sum [\overline{OP}, \bar{F}_i]$$

Определение. \bar{R} — равнодействующая системы сил $\{\bar{F}_i, p_i\}$, если существует точка O тела, такая что $\{\bar{F}, p_i\} \sim \{\bar{R}, O\}$

Пример. Для двух сил, приложенных к разным концам твердого стержня в противоположном направлении, равнодействующая не существует.

Пример.

$$\{m_i \bar{g}, P_i\} \sim \{m \bar{g}, S\}$$

$$\sum m_i \bar{p} = \left(\sum m_i \right) \bar{g} = m \bar{g}$$

$$\sum [\overline{OP}, m_i \bar{g}] = \sum [m_i \overline{OP}, \bar{g}] = \left[\sum m_i \overline{OP}, \bar{g} \right] = [m \bar{r}_s, \bar{g}] = [\bar{r}_s, m \bar{g}]$$

$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O + [\bar{F}, \overline{OO'}]$$

Теорема 27. Если главный вектор внешних сил, действующих на твердое тело отличен от нуля, то существует такая точка, при приведении к которой, главный вектор и главный момент параллельны.

$$\bar{F} \neq 0 \quad \exists A : \bar{M}_A \parallel \bar{F}$$

Доказательство.

$$\bar{M}_a = \bar{M}_O + [\bar{F}, \overline{OA}] = \lambda \bar{F} \quad | \times \bar{F}$$

$$[\bar{F}, \bar{M}_O] + \bar{F}(\bar{F}, \overline{OA}) - F^2 \overline{OA} = 0$$

$$\overline{OA} = \frac{1}{F^2} [\bar{F}, \bar{M}_O] + \alpha \bar{F}, \quad \forall \alpha = \text{const}$$

■

Определение. Прямая, определяемая последним равенством называется осью динамического винта (осью минимальных моментов).

Определение. λ — параметр винта.

$$\lambda \bar{F} = \bar{M}_O + \left[\bar{F}, \frac{1}{F^2} [\bar{F}, \bar{M}_O] + \alpha \bar{F} \right] = \bar{M}_O + \frac{1}{F^2} (\bar{F}(\bar{F}, \bar{M}_O) - F^2 \bar{M}_O) = \frac{(\bar{F}, \bar{M}_O)}{F^2} \bar{F}$$

$$\lambda = \frac{(\bar{F}, \bar{M}_O)}{F^2}$$

1. $\bar{F} = 0$: $\{\bar{F}_i, P_i\} \sim \{\bar{M}_O, O\}$
2. $\bar{F} \neq 0, \lambda = 0$: $\{\bar{F}_i, P_i\} \sim \{\bar{R}, A\}$
3. $\bar{F} \neq 0, \lambda \neq 0$: $\{\bar{F}_i, P_i\} \sim \{\bar{F}, \bar{M}_A, A\}$

13 Уравнения Лагранжа

$$\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N \in \mathbb{R}^3$$

Определение. Механическими связями называются ограничения на положения и скорости материальных точек системы, которые выполняются при всех действующих на систему силах.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)^T \in \mathbb{R}^{3N} \\ f_j(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) &= 0, \quad j = 1, \dots, k \text{ — уравнение связи.} \end{aligned} \quad (16)$$

13.1 Классификация связей

1. (16) — двусторонняя связь.
2. $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$ — стационарная связь (склерономная).
 $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \neq 0$ — нестационарная связь (реономная).
3. $f_\alpha(\bar{r}, t) = 0$ — геометрическая.
4. $f_\alpha(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) = 0$ — дифференциальная связь.

13.1.1 Геометрические связи

Определение. $\Sigma = \{\bar{r} : f_j(\bar{r}, t) = 0, j = 1, \dots, k\}$ — пространство положений (конфигурационное пространство).

Определение. $n = \dim \Sigma$ — количество степеней свободы.

Определение. $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ — обобщенные локальные координаты.

$n = 3N - k$, где k — число уравнений связи, если

1. функции связей гладкие ($\text{grad}_{\bar{r}} f_j \neq 0, \forall i \in 1, \dots, k$)
2. f_j — независимые. ($\text{rank} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} \right) = k$)

Определение. Функции f_1, \dots, f_n функционально независимы, если $F(f_1, \dots, f_n) = 0 \Leftrightarrow F \equiv 0$

Пример (Независимые функции). $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_2 = f_1^2, F_2 = f_2 - f_1^2$.

Пример.

$$\begin{aligned} f(\bar{r}) &= x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0 \\ \text{grad } f|_{x=0} &= 0 \quad n = 0 \neq 3 \cdot 1 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} |\bar{r}_i - \bar{r}_j| &= c_{ij} = \text{const} \\ k &= \frac{N(N-1)}{2} \quad n = 6 \neq 3N - \frac{N(N-1)}{2}, \quad N > 4 \\ \bar{r} &= \bar{r}(\bar{q}, t) \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} \bar{v}_k &= 0, n = 2, \bar{q} = (x, \varphi)^T \\ \bar{v}_k &= \bar{v}_0 + [\bar{\omega}, \overline{OK}] = \dot{x} \bar{e}_x + [-\dot{\varphi} \bar{e}_z, -R \dot{\varphi} \bar{e}_y] = (\dot{x} - R \dot{\varphi}) \bar{e}_x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dot{x} - R \dot{\varphi} = 0 \\ \int dx &= \int R d\varphi \\ x - x_0 &= R(\varphi - \varphi_0) \end{aligned}$$

Замечание.

$$f(\bar{r}, t) \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \dot{\bar{r}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Определение. Дифференциальная связь называется голономной (интегрируемой), если она может быть представлена в эквивалентной геометрической форме. В противном случае связь неголономна (неинтегрируема).

Пример (конек Чаплыгина).

$$\bar{v}_k \parallel \bar{l}, \quad n = 3, \bar{q} = (x, y, \varphi)^T$$

$$\bar{v}_k = \dot{x}\bar{e}_x + \dot{y}\bar{e}_y \parallel \cos \varphi \bar{e}_x + \sin \varphi \bar{e}_y$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\text{Пусть } \exists f(x, y, \varphi, t) = 0 \Leftrightarrow \dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} \Leftrightarrow \dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\dot{x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi \right) + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$$\bar{a}(\bar{r})\dot{\bar{r}} + b(\bar{r}) = 0 \text{ — интегрируема, если}$$

$$\exists f : \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} = \bar{a}, \frac{\partial f}{\partial t} = b \Leftrightarrow \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial q_n} & \frac{\partial a_1}{\partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial q_n} & \frac{\partial a_n}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$\text{Критерий } (n = 3) \ a_1 \dot{q}_1 + a_2 \dot{q}_2 + a_3 \dot{q}_3 = 0 \text{ — интегрируемая } \Leftrightarrow \bar{a} \operatorname{rot} \bar{a} = 0$$

13.2 Действительные и виртуальные перемещения

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{q}, t)$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}} \dot{\bar{q}} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$$

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}} d\bar{q} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} dt \text{ — действительные перемещения.}$$

$$\Sigma = \{\bar{r}, f_j(\bar{r}) = 0, j = 1, \dots, k\}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \bar{r}_i} d\bar{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = \frac{\partial f_j}{\partial \bar{r}} d\bar{r} + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0$$

$$\delta \bar{r} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \delta q_i \text{ — виртуальные перемещения.}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{r}} \delta \bar{r} = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

Замечание. Если связи стационарные, то пространство действительных и виртуальных перемещений совпадают².

²Написано неразборчиво, доверять этому утверждению не стоит.

13.3 Идеальные связи и общие уравнения динамики. Принцип освобождения связи. (Уравнения Лагранжа первого рода)

Если к активным силам, действующим на механическую систему, добавляются силы, с помощью которых реализуется уравнения связи, то систему можно рассматривать как свободную.

\bar{R}_i — сила реакции, действующая на m_i

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{R}_i + \bar{F}_i$$

Определение. Связи идеальные, если при любом виртуальном перемещении системы выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n (\bar{R}_i, \delta \bar{r}_i) = 0$$

$$\bar{R}_i = m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i$$

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\bar{r}}_i, \delta \bar{r}_i) = 0$$

13.3.1 Принцип Даламбера-Лагранжа³

Утверждение 19. Если связи, наложенные на механическую систему идеальные, то при любом ее движении и любом виртуальном перемещении выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = 0 \quad (17)$$

Утверждение 20 (Обратное). Если связи идеальные и какое-то движение удовлетворяет (17), то это движение является действительным движением системы.

Доказательство. \Rightarrow

Если связи идеальны, то

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = 0$$

$$\ddot{\bar{r}}_i = \ddot{\bar{r}}_i(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \dot{\bar{r}}_1, \dots, \dot{\bar{r}}_N, t)$$

$$M = \text{rank}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N)$$

$$\bar{R} = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, \dots, R_{Nx}, R_{Ny}, R_{Nz})^T$$

$$\bar{F} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots, F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Nz})^T$$

$$(17) \Leftrightarrow (M\ddot{\bar{r}} - \bar{F}, \delta \bar{r}) = 0, \bar{R} = M\ddot{\bar{r}} - \bar{F}$$

$$\delta \bar{r} = \frac{\partial f}{\partial \bar{r}}$$

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \Rightarrow \bar{R} = \bar{R}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t)$$

Вроде бы это еще не в другую сторону, но уже и не в ту (Тут был перерыв между лекциями)

$$\bar{r} = (x_1, \dots, z_N)^T \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$\bar{F} = (F_{1x}, \dots, F_{Nz})^T \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$f_I(\bar{r}, t) = 0, i = \overline{1, \dots, k}$$

$$\bar{\varphi}_i \text{grad}_{\bar{r}} \rho_i \in \mathbb{R}^{3N}$$

³Также принцип виртуальных перемещений.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial z_N} \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } \Phi = k$$

Число степеней свободы — размерность пространства виртуальных перемещений. $\delta \bar{r} : \left(\frac{\partial f_i}{\partial \bar{r}}, \delta \bar{r} \right) = (\bar{\varphi}_i, \delta \bar{r}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k \Leftrightarrow \Phi d\bar{r} = 0, n = 3N - k$
 $\bar{R} \in \mathbb{R}^{3N}$ — реакции $(\bar{R}, \delta \bar{r}) = 0$ — условия идеальной связи.

\Leftarrow

I

$$\begin{aligned} (M\ddot{\bar{r}} - \bar{F}, \delta \bar{r}) &= 0 \stackrel{?}{\rightarrow} \ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \\ (\bar{\varphi}_i, \delta \bar{r}) &= 0 \quad \forall i = \overline{1, \dots, k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta \bar{r} &\perp \pi = \{c_1 \bar{\varphi}_1 + c_2 \bar{\varphi}_2 + \dots + c_k \bar{\varphi}_k, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, \dots, k}\} \\ (M\ddot{\bar{r}} - \bar{F}, \delta \bar{r}) &= 0 \Rightarrow M\ddot{\bar{r}} - \bar{F} \in \pi \rightarrow \\ \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k : M\ddot{\bar{r}} - \bar{F} &= \lambda_1 \bar{\varphi}_1 + \dots + \lambda_k \bar{\varphi}_k = \Phi^T \bar{\lambda} \\ \bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T \in \mathbb{R}^k &\rightarrow \ddot{\bar{r}} = M^{-1} \bar{F} + M^{-1} \Phi^T \bar{\lambda} \end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned} f_i(\bar{r}, t) &\equiv 0 \\ \frac{df_i}{dt} &= \left(\underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial \bar{r}}}_{\bar{\varphi}_i}, \dot{\bar{r}} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, \quad \forall i = \overline{1, \dots, k} \\ \Phi \dot{\bar{r}} + \bar{\beta}(\bar{r}, t) &= 0 \\ \Phi \dot{\bar{r}} + \psi(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) &= 0 \Rightarrow \\ \Phi M^{-1} \bar{F} + \Phi M^{-1} \Phi^T \bar{\lambda} + \bar{\psi} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi M^{-1} \Phi^T \bar{\lambda} &= \bar{h}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \end{aligned}$$

III

$$\begin{aligned} \forall \bar{u} \neq 0 : (\Phi M^{-1} \Phi^T \bar{u}, \bar{u}) &= (M^{-1} \Phi^T \bar{u}, \Phi^T \bar{u}) = \\ &= (M^{-1} \bar{x}, \bar{x}) > 0, \text{ т.к.} \\ a) \det M^{-1} &= (\det M)^{-1} \neq 0, \\ b) \bar{x} = \Phi^T \bar{u} &\neq 0, \quad \forall \bar{u} \neq 0. \\ \Rightarrow \det(\Phi M^{-1} \Phi^T) &\neq 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = (\Phi M^{-1} \Phi^T)^{-1} h(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) = \lambda(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \Rightarrow \\ \bar{R} = M\ddot{\bar{r}} - \bar{F} &= \bar{R}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \end{aligned}$$

■

Замечание. Принцип виртуальных перемещений справедлив и для неголономных систем и доказываться аналогично.

Замечание.

$$\begin{cases} M\ddot{\bar{r}} - \bar{F} = \Phi^T \bar{\lambda} \\ R_i(\bar{r}, t) = 0, i = 1, \dots, k \end{cases} \quad - \text{уравнения Лагранжа 1 рода (Это неточно)}$$

13.4 Обобщенные силы

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{q}, t), \quad (\bar{u} = \bar{r}_i(\bar{q}, t)), \quad \bar{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = (\bar{F}, \delta \bar{r}) = \left(\bar{F}, \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^N \left(\bar{F}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = (\bar{Q}, \delta \bar{q})$$

Определение.

$$Q_j = (\bar{F}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j}) = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i)$$

— обобщенная сила, соответствующая координате q_j .

Утверждение 21. Если координата q_l — декартова координата центра масс всей системы, то соответствующая ей обобщенная сила равна проекции главного вектора внешних сил системы на соответствующую декартову ось.

$$q_l = x_s \Rightarrow Q_l = (\bar{F}, \bar{e}_x)$$

Доказательство.

$$\delta q_j = 0, \quad j \neq l \Rightarrow \delta \bar{r}_i = \delta x_s \bar{e}_x$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta x_s \bar{e}_x) = \left(\sum_{i=1}^N \bar{F}_i, \bar{e}_x \right) \delta x_s = Q_l \delta q_l$$

■

Пример (АТТ).

$$\bar{r}_i = \bar{r}_p + \bar{\rho}_i = \bar{r}_p + \sum_{\alpha=1}^3 \rho_{i\alpha} \bar{e}_\alpha,$$

$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ — базис, связанный с телом.

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q}, t), \quad \bar{r}_p = \bar{r}_p(\bar{q}, t), \quad \bar{e}_\alpha = \bar{e}_\alpha(\bar{q}, t)$$

$$\rho_{i\alpha} = \text{const}$$

$$\left(\dot{\bar{e}}_\alpha = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\bar{e}}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial q_j} \right)$$

$$\delta e_\alpha = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \dot{\bar{e}}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} ([\bar{\omega}, \bar{e}_\alpha]) \delta q_j = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_j}, \bar{e}_\alpha \right] \delta q_j$$

$$\begin{aligned} \delta \bar{u} &= \delta \bar{r}_p + \sum_{\alpha=1}^3 \rho_{i\alpha} \sum \left[\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_j}, \bar{e}_\alpha \right] \delta q_i = \\ &= \delta \bar{r}_p + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j, \sum_{\alpha=1}^3 \rho_{i\alpha} \bar{e}_\alpha \right] = \\ &= \delta \bar{r}_p + \left[\sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j, \bar{\rho}_i \right] = \delta \bar{r}_p + [\bar{\omega}_\delta, \bar{\rho}_i], \quad \bar{\omega}_\delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_p) + \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, [\bar{\omega}_\delta, \bar{\rho}_i]) = \\ &= (\sum \bar{F}_i, \delta \bar{r}_p) + \left(\bar{\omega}_\delta, \sum_{i=1}^N [\bar{\rho}_i, \bar{F}_i] \right) = (\bar{F}, \delta \bar{r}_p) + (\bar{\omega}_\delta, \bar{M}_p) \end{aligned}$$

Следствие. $\bar{F}^{(i)} = 0, \bar{M}_p^{(i)} = 0 \Rightarrow$ внутренние связи в твердом теле идеальны.

Пример (АТТ с неподвижной точкой).

$$n = 3,$$

$$q = (\varphi, \psi, \Theta)^T, \quad \bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{e}_z + \Theta\bar{e}_{x_1} + \dot{\varphi}\bar{e}_\zeta$$

$$\bar{\omega}\delta = \delta\psi\bar{e}_z + \delta\Theta\bar{e}_{x_1} + \delta\varphi\bar{e}_\zeta$$

$$\begin{aligned} \delta A &= (\bar{M}_O, \delta\psi\bar{e}_z + \delta\Theta\bar{e}_x + \delta\varphi\bar{e}_\zeta) = \\ &= (\bar{M}_O, \bar{e}_z)\delta\psi + (\bar{M}_O, \bar{e}_{x_1})\delta\Theta + (\bar{M}_O, \bar{e}_\zeta)\delta\varphi \end{aligned}$$

Утверждение 22. Если обобщенная координата — это угол поворота силы относительно некоторой оси, то обобщенная сила — это момент силы относительно этой же оси.

13.5 Уравнения Лагранжа второго рода

Теорема 28. Если связи, наложенные на механическую систему, идеальны и голономны, то уравнения ее движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^N (M_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = 0, \quad \bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q}, t)$$

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

$\delta q_1, \dots, \delta q_n$ — независимые \Rightarrow

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) = 0, \quad \forall j = \overline{1, \dots, n}$$

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\bar{r}}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \left(\bar{F}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{Q_j}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\bar{r}}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{\bar{r}}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) \right) - \sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{\bar{r}}_i, \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\bar{r}}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{\bar{r}}_i, \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{(\dot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_i)}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{(\dot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_i)}{2} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \end{aligned}$$

■

Следствие. Связи идеальны и голономны, а силы потенциальны \Rightarrow

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = 0, \quad L = T - \Pi$$

Определение. L — лагранжиан системы, система лагранжева.

$$\exists \Pi(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, t), \quad \text{grad}_{\bar{r}_i} \Pi = -\bar{F}_i$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = (\bar{F}, \delta \bar{r}) = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{r}}, \delta \bar{r} \right) =$$

$$= - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \Pi(\bar{r}(\bar{q}, t), t)}{\partial \bar{r}}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}_j} \right) \delta q_j = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

$$L = T - \Pi = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) - \Pi(\bar{q}, t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} + \bar{Q}$$

$$\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)^T, \quad \dot{\bar{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \quad \bar{r}_i = r_i(\bar{q}, t)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\bar{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)^2}_{\text{структура кинетической энергии}} = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

$$T_1 = \sum_j \underbrace{\sum_i m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)}_{b_j} \dot{q}_j = \sum_j b_j \dot{q}_j = (\bar{b}, \dot{\bar{q}})$$

$$\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)^T, \bar{b} = \bar{b}(\bar{q}, t)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \underbrace{\sum_i m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{a_{jk}} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} (A \dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}), \quad A = (a_{jk}), A = A^T$$

Утверждение 23. A — положительно определенная матрица.

Доказательство.

$$\delta \bar{q} = (\delta q_1, \dots, \delta q_n)^T, \delta \bar{r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\delta \bar{r} = 0 \Leftrightarrow \delta \bar{q} = 0$$

$$(A \delta \bar{q}, \delta \bar{q}) = \sum_{j=1}^N m_i \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}, \delta a_j \right)^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\delta r_i)^2 = (M \delta \bar{r}, \delta \bar{r}) > 0, \forall \delta \bar{q} \neq 0$$

■

Следствие. $\det A \neq 0$.

13.6 Свойства уравнений Лагранжа

Уравнения Лагранжа:

1. Связи идеальны и голономны:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}$$

2. Связи идеальны и голономны, а активные силы потенциальны:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = 0$$

3. Связи идеальны и голономны, а активные силы не потенциальны:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}^*$$

Где $L = T - \Pi$, \bar{Q}^* — обобщенные силы, вызванные непотенциальными активными силами.
 $\bar{Q}^*(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ — обобщенный потенциал, если $\exists V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}^* \Rightarrow L = T - \Pi - V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = 0$$

1. Ковариантность по отношению к выбору обобщенных координат

$$\bar{q} \longrightarrow T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), \quad \bar{Q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}$$

$$\bar{q}' \longrightarrow T'(\bar{q}', \dot{\bar{q}}', t) = T(\bar{q}, (\bar{q}', t), \dot{\bar{q}}'(\bar{q}', \bar{q}', t), t), \quad \bar{Q}'$$

2. Калибровочная инвариантность

Утверждение 24. Уравнения Лагранжа не меняются при добавлении кинетической энергии полной производной гладкой функции от обобщенных координат и времени.

$$T' = T + \frac{d}{dt} f(\bar{q}, t)$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} f(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial \dot{f}}{\partial \bar{q}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial T'}{\partial \bar{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}$$

■

Утверждение 25. В Лагранжевой системе

$$L' = c_1 L + \dot{f} + c_2, \quad c_1 \neq 0, \quad c_1 = const, c_2 = const$$

3. Разрешимо относительно $\ddot{\bar{q}}$

Доказательство. WANTED DEAD OR ALIVE

■

13.7 Первые интегралы Лагранжевой системы координат

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}}, \quad L = T - \Pi$$

13.7.1 Циклический интеграл

Определение. q_1 — циклическая координата, если $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$.

Утверждение 26.

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = c = const$$

Доказательство.

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = c = const$$

■

Пример (Движение точки в центральном поле).

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \Pi(r), \quad F = F(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = c = const$$

Пример. Волчок Лагранжа.

13.7.2 Обобщенный интеграл (интеграл Пенлеве-Якоби)

Утверждение 27.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - L = \text{const}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial L}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} E = 0 \Rightarrow E = \text{const} \end{aligned}$$

Замечание.

$$L = T - \Pi = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi$$

$$E = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - L = \underbrace{\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right)}_{2T_2} + \underbrace{\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right)}_{T_1} + 0 - T_2 - T_1 - T_0 + \Pi = T_2 - T_0 + \Pi$$

если $T = T_2$, то $E = T_2 + \Pi = T + \Pi$ — полная энергия

если $T \neq T_2$, то $E = T_2 - T_0 + \Pi$ — обобщенная энергия

Следствие. Если связи идеальные, голономные и стационарные, а активные силы консервативны, то

$$T + \Pi = \text{const}$$

Доказательство. 1. Связи идеальные, голономные, значит силы потенциальны.

2. Связи стационарны $\Rightarrow \bar{r}_i(\bar{q}, t) = \bar{r}_i(q)$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_1 = 0, T_0 = 0, T = T_2.$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ \Rightarrow E &= T_2 + \Pi - T + \Pi = \text{const} \end{aligned}$$

Обобщение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= \bar{Q}^*, L = T_2 - \Pi(\bar{q}) \\ \frac{dE}{dt} &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}, \dot{q} \right) + 0 = (Q^*, \dot{q}) \end{aligned}$$

Замечание.

$$(\bar{Q}, \dot{q}) = \sum_j Q_j^* \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N (\bar{F}_i^*, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}) \right) \dot{q}_j = \sum_{i=1}^N \left(\bar{F}_i^*, \sum_j \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i^*, \bar{v}_i), \text{ т.к. } \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = 0$$

Определение. $E = (\bar{Q}^*, \dot{q}) \equiv 0 \quad \forall \dot{q} - \bar{Q}^*$ — гироскопическая

Определение. $E = (\bar{Q}^*, \dot{q}) \leq 0 - \bar{Q}^*$ — диссипативная

Определение. $E = (\bar{Q}^*, \dot{q}) < 0 \forall \quad \dot{q} \neq 0 - \bar{Q}^*$ — гироскопическая