

Дифференциальные уравнения

Свирщевский Сергей Ростиславович

18 октября 2017 г.

Набор: Александр Валентинов

Об ошибках писать: <https://vk.com/valentiay>

Содержание

Лекция 1	1
Введение	1
Основные понятия	1
Задача Коши и теорема существования и единственности для уравнения (2)	2
Лекция 2	4
Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах	4
Уравнения с разделяющимися переменными	4
Однородные уравнения	5
Обобщенные однородные уравнения	5
Линейные уравнения	5
Уравнение Бернулли	6
Уравнения Риккати	6
Уравнение в полных дифференциалах	6
Лекция 3	7
Уравнение в полных дифференциалах	7
Интегрирующий множитель	7
Методы понижения порядка дифференциальных уравнений	8
Уравнения, не содержащие $y, y', \dots, y^{(k-1)}$	8
Уравнения, не содержащие x (автономные)	8
Уравнения, однородные относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$	9
Обобщенные однородные уравнения	9
Лекция 4	10
Уравнения первого порядка, не разрешаемые относительно производных	10
Метод введения параметра	10

Задача Коши и теорема существования и единственности решения	
уравнения (16)	11
Особые решения уравнения (16)	12
Алгоритм отыскания особых решений	13
Лекция 5	13
Уравнение Клеро	13
Линейные уравнения с переменными коэффициентами	14
Определение. Теорема о существовании и единственности . . .	14
Линейность оператора L и ее следствия	15
Лекция 6	16
Линейные однородные уравнения	16

Лекция 1

Введение

Основные понятия

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n -го порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \quad (1)$$

где x - независимая переменная, $y(x)$ - искомая функция, $y', \dots, y^{(n)}$ - ее производные, F - заданная функция, определенная в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Порядок n уравнения равен порядку старшей производной, входящей в уравнение.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором интервале $X = (\alpha, \beta)$, называется решением уравнения (1), если

1. $\varphi(x)$ n раз дифференцируемо на X ,
2. $x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x) \in \Omega, \quad \forall x \in X$,
3. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$.

Замечание. В этом определении в качестве X можно взять полуинтервал или отрезок, т.е. любой промежуток действительной оси.

Замечание. Решение может быть определено на сколько можно малом интервале. Разные решения могут быть определены на разных интервалах.

Определение. Уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

где f - заданная функция, определенная в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, называется разрешенным относительно старшей производной или уравнение в нормальной форме.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором интервале $X = (\alpha, \beta)$, называется решением уравнения (2), если

1. $\varphi(x)$ n раз дифференцируемо на X ,
2. $x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x) \in D, \quad \forall x \in X$,
3. $\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$.

Замечание. Процесс нахождения решений уравнения называется его интегрированием.

Пример 1.

1.

$$y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$$

$$y' = e^{-x^2}, \quad y = \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

2.

$$y^{(n)} = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$$

$$y'' = 2x, \quad y' = x^2 + C_1, \quad y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$$

3.

$$y' = ky, \quad k = \text{const} \neq 0$$

$$y = Ce^{kx}$$

4.

$$y' = y^2, \quad y = -\frac{1}{x}$$

Замечание. Формулы, описывающие все решения уравнения содержат n произвольных постоянных.

Задача Коши и теорема существования и единственности для уравнения (2)

Для получения из множества решений какого-либо частного решения, необходимо задать дополнительные условия. Рассмотрим, например, уравнение первого порядка:

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (3)$$

$$y_0 = y(x_0) \quad (4)$$

Возьмем точку $(x_0, y_0) \in D$ и рассмотрим начальное условие (НУ).

Определение. Найти решение уравнения (3), удовлетворяющее НУ (4)

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в области $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда, $\forall (x_0, y_0) \in D$:

1. Существует решение задачи Коши, определенное на некотором интервале $X \ni x_0$
2. Если $y_1(x), y_2(x)$ - какие-либо решения, то $y_1(x) \equiv y_2(x)$ на пересечении их интервалов определения.

Пример 2.

$$y' = kx, \quad k = \text{const} \neq 0$$

Решение: $y = Ce^{kx}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ Докажем, что других решений нет. Пусть $y = \varphi(x)$, $x \in X$ - какое-либо решение. Возьмем произвольную $x_0 \in X$ и найдем $y_0 = \varphi(x_0)$. Теперь покажем, что в этом семействе есть решение с такими же начальными условиями. Рассмотрим $y = C_0 e^{kx}$, $C_0 = y_0 e^{-kx_0}$. Оба этих решения являются решениями одной и той же задачи Коши с НУ (x_0, y_0) . В силу единственности по теореме (1) мы имеем $\varphi(x) = C_0 e^{kx}$ на X .

Замечание. Решение $y = \varphi(x)$, $x \in X$ называется сужением решения $y = C_0 e^{kx}$, $x \in \mathbb{R}$, на интервал X . А решение $y = C_0 e^{kx}$ называется продолжением решения $y = \varphi(x)$ на \mathbb{R} .

Определение. Пусть $y = \varphi_1(x)$, $x \in X_1$ и $y = \varphi_2(x)$, $x \in X_2$ - какие-либо решения уравнения, и пусть $X_1 \subseteq X_2$. Тогда решение $y = \varphi_2(x)$ называется продолжением решения $y = \varphi_1(x)$ на X_2 .

Замечание. В дальнейшем докажем, что каждое решение может быть продолжено на некоторый максимальный интервал до непродолжаемого решения.

Определение. График решения $y = \varphi(x)$ на плоскости (x, y) называется его интегральной кривой. Если под интегральной кривой понимать непродолжаемое решение, то теорему (1) можно переформулировать так:

Через каждую точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая уравнения (3).

Замечание. Мы можем нарисовать интегральные кривые, не решая уравнение, поскольку мы знаем, как направлена касательная в любой точке. Не каждое уравнение не имеет аналитическое решение, например: $y' = x^2 + y^2$. В качестве альтернативы можно нарисовать на плоскости (x, y) изоклины и получить представления о том, как выглядят интегральные кривые.

Замечание. Для существования решения задачи Коши достаточно непрерывности функции $f(x, y)$. Но решение может быть не единственным.

Пример 3.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

$$\text{Решения: } y = 0, y = (x - C)^3$$

В каждой точке интегральной кривой $y = 0$ нарушается единственность решения задачи Коши. Решение $y = 0$ называется особым.

Лекция 2

Определение. Решение уравнения (3) и его интегральная кривая l называются особыми, если в любой окрестности каждой точки кривой l через эту точку проходит, касаясь l , по крайней мере одна интегральная кривая уравнения (3), отличная от l .

Замечание. Условие про касание l избыточно.

Аналогично рассмотрим уравнение (2) при $n \geq 1$. Возьмем точку $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$. Рассмотрим НУ:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (5)$$

Задача Коши: найти решение уравнения (2) для НУ (5)

Теорема 2. Пусть функция f и ее частные производные $f_y, f_{y'}, \dots, f_{y^{(n+1)}}$ непрерывны в $D \subseteq \mathbb{R}^{(n+1)}$. Тогда задача Коши (2), (5) имеет решение на интервале $X \ni x_0$. Любые два решения задачи (2), (5) совпадают на пересечении их интервалов определения.

Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратах

Уравнения с разделяющимися переменными

$y' = f(x)g(y)$, где f и g - непрерывны на X и Y .

Схема решения:

1. $g(y) = 0 \Rightarrow$ постоянные решения $y = y_1, y = y_2, \dots$
2. $g(y) \neq 0$ На каждом интервале это выполнено.

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

$G(y) = F(x) + C$ - решение в неявной форме

G, F - первообразные, C - константа. Т.к. $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ на рассматриваемом интервале сохраняет знак, то $G(y)$ строго монотонна и, следовательно, имеет обратную. Поэтому можно написать явную формулу для решения.

Однородные уравнения

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Замена: $\frac{y(x)}{x} = z(x)$, $y = xz$.

$xz' + z = f(z)$, $xz' = f(z) - z$ - уравнение, с разделяющимися переменными.

Замечание. Уравнение инвариантно относительно растяжения: $x \rightarrow ax$, $y \rightarrow ay$; $a > 0$.

Обобщенные однородные уравнения

$$\frac{1}{x^{m-1}} \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x^m}\right), x \neq 0$$

Замена $\frac{y}{x^m} = z$, $y = x^m z$.

Линейные уравнения

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Схема решения:

1. Рассматриваем однородное уравнение $y' + a(x)y = 0$, $y' = -a(x)y$,

(а) $y = 0$ - решение.

(б) $y \neq 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int a(x)dx$.

$$\ln|y| = A(x) + C, \quad A(x) = \int a(t)dt$$

$$y = Ce^{-A(x)}$$

2. Ищем решение в виде $y = C(x)e^{-A(x)}$.

$$C'(x)e^{-A(x)} + C(x)e^{-A(x)}(-a(x)) + C(x)e^{-A(x)}(a(x)) = b(x)$$

$$C(x) = \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)}dt + C_0$$

Общее решение:

$$y = e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)}dt + C_0 e^{-A(x)}$$

Задача Коши с НУ $y(x_0) = y_0$, $C_0 = y_0$.

Каждое решение линейного уравнения определено на всем интервале X .

Уравнение Бернулли

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^n}, \quad n \neq 0, 1$$

Схема решения. При $n > 0$ имеется решение $y = 0$. Пусть $y \neq 0$. Разделим на y^n :

$$\begin{aligned} y^{-n}y' + a(x)y^{1-n} &= b(x) \\ \frac{1}{1-n}(y^{1-n})' + a(x)y^{1-n} &= b(x) \end{aligned}$$

Замена: $y^{1-n} = z$

Уравнения Риккати

$$\boxed{y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)}$$

В общем случае не решается в квадратурах. Рассмотрим случай, когда известно какое-либо частное решение $y_0(x)$.

Замена: $y = z + y_0(x)$

$$\begin{aligned} z' + y_0' &= a(z^2 + 2zy_0 + y_0^2) + b(z + y_0) + C \\ z' &= az^2 + (2ay_0 + b)z - \text{уравнение Бернулли} \end{aligned}$$

Уравнение в полных дифференциалах

Уравнения 1-го порядка в симметричной форме

$$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0} \quad (6)$$

где P, Q непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^2$, $P^2 + Q^2 \neq 0$ в D .

Уравнение называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $U(x, y)$ непрерывно дифференцируемая в области D , такая, что

$$dU = Pdx + Qdy \quad (7)$$

в D . $dU(x, y) = 0$, $U(x, y) = C$ - содержит все решения $x(y)$ и $y(x)$.

Пусть выполнено (7), тогда $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Пусть P_y и Q_x непрерывны в D . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} P_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = Q_x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned}$$

- необходимое условие того, что (6) - уравнение в полных дифференциалах.

Замечание. Если область D односвязна, то это условие является и достаточным. (Из курса математического анализа известно, что любой замкнутый контур можно стянуть в точку в этой области)

Лекция 3

Уравнение в полных дифференциалах

$$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0} \quad (8)$$

где P, Q непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^2$, $P^2 + Q^2 \neq 0$ в D .

Уравнение называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $U(x, y)$ непрерывно дифференцируемая в области D , такая, что

$$dU = Pdx + Qdy \quad (9)$$

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (10)$$

Пусть $D : a < x < b, c < y < d$. Пусть выполняется (10), пусть $(x_0, y_0) \in D$ - произв. Найдем U из (9):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) \Rightarrow U(x, y) = \int_{x_0}^x P(\xi, y) d\xi + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{\partial P(\xi, y)}{\partial y} d\xi + \varphi'(y) = Q(x, y)$$

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial Q(\xi, y)}{\partial \xi} d\xi + \varphi'(y) = Q(x, y)$$

$$Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y) = Q(x, y)$$

$$\varphi'(y) = Q(x_0, y)$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, \eta) d\eta$$

Интегрирующий множитель

Пусть уравнение (15) не является уравнением в полных дифференциалах.

Определение. Функция $\mu(x, y)$ непрерывна в области $D, \mu(x, y) \neq 0$ в D , называется интегрирующим множителем уравнения (15), если после умножения на нее (15) становится уравнением в полных дифференциалах, т.е.

$$\mu Pdx + \mu Qdy = dU$$

Если $\mu \in C^1(D)$ и P и Q удовлетворяют введенным ранее условиям, то делим уравнение на μ :

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \text{ или } Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

Это уравнение с частными производными, вообще говоря, более сложное, чем исходное. Иногда удается найти его частное решение. Например, пусть $\mu = \mu(y)$, тогда при $P \neq 0$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \omega \mu, \text{ где } \omega = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Если $\omega = \omega(y)$, то для μ имеем ОДУ.

Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

Рассматриваем уравнения вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (11)$$

допускающее понижение порядка с помощью некоторой замены переменных.

Уравнения, не содержащие $y, y', \dots, y^{(k-1)}$

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leq k \leq n \quad (12)$$

Замена $z = y^{(k)}$. Получаем уравнение

$$F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

$(n - k)$ -го порядка.

Уравнения, не содержащие x (автономные)

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (13)$$

1. Находим решения вида $y = \text{const}$ (если такие есть)

2. Пусть $y \neq \text{const}$. Замена $y' = z(y) = f_0(z)$

$$y'' = z'z = f_1(z, z'); \quad y''' = (z'z)'z = f_2(z, z', z'')$$

$$y^{(n)} = f_{n-1}(z, z', \dots, z^{(n-1)})$$

Получаем уравнение

$$\tilde{F}(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$$

$(n - 1)$ -го порядка.

Уравнения, однородные относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$

Пусть F удовлетворяет условию $\forall \lambda > 0$

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \quad (14)$$

Замена $\frac{y'}{y} = z(x)$ при $y \neq 0$. Имеем:

$$y' = yz = yf_0(z); \quad y'' = yz' + y'z = y(z' + z^2) = yf_1(z, z'); \\ \dots$$

$$y^{(n)} = yf_{n-1}(z, z', \dots, z^{(n-1)})$$

Уравнение (11) примет вид

$$F(x, y, yf_0, \dots, yf_{n-1}) = 0$$

Пусть $y > 0$. В силу (14)

$$y^m F(x, 1, f_0, \dots, f_{n-1}) = 0$$

$$\tilde{F}(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0 \text{ — уравнение } (n-1)\text{-го порядка}$$

Пример 4. $y'' = \sqrt{y'^2 + y^2}$

1. $y = 0$ — решение.

2. $y \neq 0$ $y' = yz$, $y'' = y(z' + z^2)$

$$y(z' + z^2) = \sqrt{y^2(z^2 + 1)}$$

$$y(z' + z^2) = \pm y\sqrt{z^2 + 1}$$

$$z' = -z^2 \pm \sqrt{z^2 + 1}$$

Обобщенные однородные уравнения

Это уравнения (11) с функцией F , удовлетворяющей условию

$$F(\lambda x, \lambda^k y, \lambda^{k-1} y', \dots, \lambda^{k-n} y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \quad \forall \lambda > 0 \quad (15)$$

В этом случае уравнение (11) инвариантно относительно растяжений $x \rightarrow \lambda x$, $y \rightarrow \lambda^k y$.

Замена: $\frac{y}{x^k} = z(x)$, $x \neq 0$ Имеем:

$$y = x^k z = x^k f_0(z); \quad y' = x^{k-1}(xz' + kz) = x^{k-1} f_1(z, z') \\ \dots$$

$$y^{(n)} = x^{k-n} f_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})$$

$$F(x, x^k f_0, x^{k-1} f_1, \dots, x^{k-n} f_n) = 0$$

Пусть $x > 0$. Тогда

$$x^m F(1, f_0, f_1, \dots, f_n) = 0$$

$$\tilde{F}(x, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0$$

Имеем:

$$y = x^k z = x^k f_0(z)$$

$$y' = x^{k-1}(xz' + kz) = x^{k-1}f_1(z, xz')$$

$$y'' = x^{k-2}f_2(z, xz', x^2z'')$$

...

$$y^{(n)} = x^{k-n}f_n(z, xz', \dots, x^n z^{(n)})$$

$$x^m F(1, f_0, f_1, \dots, f_n) = 0$$

Группа: $x \rightarrow \lambda x, z \rightarrow z$

Замена: $t = \ln x, x = e^t$. Уравнение примет вид:

$$\hat{F}(z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \text{ — автономное}$$

Лекция 4

Уравнения первого порядка, не разрешаемые относительно производных

Метод введения параметра

$$F(x, y, y') = 0 \tag{16}$$

F определено и непрерывно в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. X и T - интервалы.

Определение. $\Phi : y = \varphi(x), x \in X$ называется решением уравнения (16), если:

1. $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемо на X ,
2. $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in \Omega \quad \forall x \in X$,
3. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ на x .

Определение. Функции $x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad t \in T$ задают решение уравнения (16) в параметрической форме, если:

1. $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$ на T ,
2. $\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \in \Omega \quad t \in T$,
3. $F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \equiv 0$ на T .

Положим $y' = P$ и запишем (16) в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} F(x, y, P) = 0 \\ dy = Pdx \end{cases} \quad (17)$$

Каждому решению $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ уравнения (16) соответствует решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $P = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ системы (17). Каждому решению $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $P = \chi(t)$, где $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ соответствует решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ уравнения (16).

Будем предполагать, что уравнение

$$F(x, y, P) = 0$$

задает в \mathbb{R}^3 гладкую поверхность S , допускающую параметрическое представление

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad P = \chi(u, v)$$

где $(u, v) \in D$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ — некоторая область и выполняются условия:

1. φ , ξ и χ непрерывно дифференцируемы в D , причем

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \chi_u & \chi_v \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix}^2 \neq 0 \text{ в } D$$

2. Задано взаимоднозначное отображение $D \leftrightarrow S$
3. $F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0$ на D .

В этом случае имеем

$$dy = Pdx \Rightarrow \psi_u du + \psi_v dv = \chi(u, v)(\varphi_u du + \varphi_v dv)$$

$(\psi_u - \chi\varphi_u)du + (\psi_v - \chi\varphi_v)dv = 0$ — уравнение в симметричной форме (разрешимо относительно производной).

Если $v = g(u, C)$ — его решение, то

$$x = \varphi(u, y(u, C)), \quad y = \varphi(u, y(u, C))$$

— решение уравнения (16) в параметрической форме.

Задача Коши и теорема существования и единственности решения уравнения (16)

$$F(x, y, y') = 0$$

F определено и непрерывно в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Возьмем точку $(x_0, y_0, p_0) \in \Omega$ такую, что

$$F(x_0, y_0, p_0) = 0$$

Задача Коши: найти решение уравнения (16), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = p_0 \quad (18)$$

Теорема 3. *Существования и единственности решения уравнения (16)
Пусть функция F непрерывно дифференцируема в области Ω и пусть*

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, p_0)}{\partial p} \neq 0 \quad (19)$$

Тогда решение задачи (16), (18) существует и единственно на некотором интервале $X \ni x_0$

Доказательство. В силу теоремы о неявной функции из уравнения $F(x, y, p) = 0$ можно выразить p :

$$p = f(x, y),$$

где f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$, единственна и удовлетворяет условию

$$f(x_0, y_0) = p_0$$

Получим задачу

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (20)$$

По теореме (1) из лекции 1, существует единственное решение задачи (20), определенное на некотором интервале $X \ni x_0$. Эта функция является решением уравнения (16), удовлетворяющим Н.У. (18). ■

Замечание. Если $\exists \tilde{p}_0 \neq p_0 : F(x_0, y_0, \tilde{p}_0) = 0, \frac{\partial F(x_0, y_0, \tilde{p}_0)}{\partial p} \neq 0$, то получим другое решение $y = \tilde{\varphi}(x)$, удовлетворяющее условиям

$$\tilde{\varphi}(x_0) = y_0, \quad \tilde{\varphi}'(x_0) = \tilde{p}_0$$

При этом единственность не нарушается, т.к. решение $y = \varphi(x)$ и $y = \tilde{\varphi}(x)$ соответствуют разным начальным параметрам: (x_0, y_0, p_0) и (x_0, y_0, \tilde{p}_0) .

Особые решения уравнения (16)

Определение. Решение $y = \varphi(x)$, $x \in X$ уравнения (16) и его интегральная кривая l называются особыми, если в любой окрестности каждой точки кривой l через эту точку проходит, касаясь l , по крайней мере одна интегральная кривая, отличная от l .

Теоремы единственности предыдущего пункта следует, что в особых точках кривой формально выполнены условия

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0 \quad (21)$$

Это необходимое условие особого решения.

Исключим из (21) p (если это возможно), получим уравнение $\Phi(x, y) = 0$, задающее на плоскости т.н. дискриминантную кривую (или дискриминантное множество). Дискриминантное множество содержит все особые решения, но может также включать и другие точки.

Алгоритм отыскания особых решений

Из (21) находим дискриминантные кривые и проверяем:

1. Являются ли они решениями
2. Если да, то касаются ли их в каждой точке другие решения

Если в обоих случаях ответ положительный, то соответствующая ветвь дискриминантной кривой является особым решением.

Лекция 5

Уравнение Клеро

$$y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$$

1.

$$y' = p \Rightarrow y = px - \frac{1}{4}p^2 \quad (22)$$

$$dy = p dx \Rightarrow p dx = p dx + x dp - \frac{1}{2}p dp \Rightarrow (x - \frac{1}{2}p) dp = 0$$

$$(a) \quad x = \frac{1}{2}p \Rightarrow p = 2x \xrightarrow{(22)} y = x^2$$

$$(b) \quad dp = 0 \Rightarrow p = C \xrightarrow{(22)} y = Cx - \frac{1}{4}C^2$$

2. Особые решения. Дискриминантное множество.

$$\begin{cases} F = 0 \\ F'_p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = px - \frac{1}{4}p^2 \\ 0 = x - \frac{1}{2}p \end{cases} \Rightarrow y = x^2 - \text{дискриминантная кривая}$$

Условия касания:

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x) \\ y'_0(x) = y'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = Cx - \frac{1}{4}C^2 \\ 2x = C \end{cases} \Rightarrow C = 2x \Rightarrow$$

$\Rightarrow C = 2x \Rightarrow$ есть касание с соответствующей кривой семейства (b)

при $x = 0$ имеем $C = 0 \Rightarrow y = 0$

при $x = 1$ $C = 2, y = 2x - 1$

Еще одно уравнение:

$$y'^3 - 27y^2 = 0 \Leftrightarrow y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

1. Рассмотрено на Л1. Решения:

$$y = 0, \quad y = (x - C)^3$$

2. Особые решение:

$$\begin{cases} p^3 - 27y^2 = 0 \\ 3p^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow p = 0, \quad y = 0 - \text{дискриминантная кривая}$$

(а) является решением

(b) Условие касания:

$$\begin{cases} 0 = (x - C)^3 \\ 0 = 3(x - C)^2 \end{cases} \Rightarrow C = x \Rightarrow \text{есть касания}$$

Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Определение. Теорема о существовании и единственности

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t) \quad (23)$$

$t \in T = (a, b)$, $a_i(t)$, $f(t)$ - заданные функции, определенные и непрерывные на T .

Начальные условия:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \quad (24)$$

где $t_0 \in T$, $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ — заданные числа

Задача Коши: найти решение уравнения (23), удовлетворяющее условию (24)

Теорема 4. *О существовании и единственности $\forall t_0 \in T$, $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение задачи Коши (23), (24), определенное на всем интервале T .*

Замечание. Если $a_i(t)$, $f(t)$ — постоянные, то решение задачи Коши (23), (24), определено на \mathbb{R} .

Если в (23) $f(t) \neq 0$, то уравнение называется неоднородным.

Уравнение $L[y] = 0$ называется однородным (соответствующим уравнению (23))

Линейность оператора L и ее следствия

Линейность

Лемма 1. *Линейность Оператор L является линейным, т.е. \forall различных непрерывно дифференцируемых функций $u(t), v(t), t \in T$ и \forall чисел A и B .*

$$L[Au(t) + Bv(t)] = AL[u(t)] + BL[v(t)]$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} L[Au + Bv] &= (Au + Bv)^{(n)} + a_1(Au + Bv)^{(n-1)} + \dots + a_n(Au + Bv) = \\ &= A(u^{(n)} + a_1u^{(n-1)} + \dots + a_nu) + B(v^{(n)} + a_1v^{(n-1)} + \dots + a_nv) = \\ &= AL[u(t)] + BL[v(t)] \end{aligned}$$

■

Структура общего решения уравнения (23)

Определение. *Общим решением линейного уравнения (23) называется множество функций, содержащих все решения уравнения и только их.*

В дальнейшем для однородного уравнения получим формулу общего решения, содержащее n произвольных постоянных.

Теорема 5. *Общее решение уравнения (23) представляется в виде*

$$y(t) = y_0(t) + y_r(t) \quad (25)$$

где $y_0(t)$ - общее решение однородного уравнения, $y_r(t)$ - произвольное частное решение (23).

Доказательство. Пусть $y_r(t)$ - какое-либо частное решение уравнения (23). Замена:

$$y(t) = z(t) + y_r(t)$$

Получим: $L[z] + L[y_r] = f(t)$, т.е. $L[z] = 0$. Это однородное уравнение. Его общее решение $z = y_0(t) \Rightarrow$ общее решение уравнения (23) имеет вид $y(t) = y_0(t) + y_r(t)$ ■

Принцип суперпозиции

Лемма 2. *Если $y_1(t), \dots, y_k(t)$ — решения однородного уравнения, то*

$$y(t) = C_1y_1(t) + \dots + C_ky_k(t),$$

где C_1, \dots, C_k - произвольные постоянные, также являющиеся решениями однородного уравнения

Доказательство. $L[y] = C_1 \underbrace{L[y_1]}_0 + \dots + C_k \underbrace{L[y_k]}_0 = 0$ ■

Замечание. Множество решений однородного уравнения является линейным пространством. Далее докажем, что его размерность n

Лемма 3. Пусть в (23) $f(t) = \sum_{i=1}^k f_i(t)$, и пусть $y_i(t)$ — решение уравнений

$L[y] = f_i(t)$, $i = 1, \dots, k$, тогда функция $y(t) = \sum_{i=1}^k y_i(t)$ является решением уравнения (23)

Доказательство. $L[\sum_{i=1}^k y_i] = \sum_{i=1}^k L[y_i] = \sum_{i=1}^k f_i(t) = f(t)$ ■

Лекция 6

Линейные однородные уравнения

$$L[y] = 0 \quad (26)$$

Линейно зависимые/независимые функции

Определение. Функции $y_1(t), \dots, y_k(t)$, $t \in T$ называются линейно зависимыми, если существуют числа C_1, \dots, C_k , $|C_1| + \dots + |C_k| \neq 0$, такие что

$$C_1 y_1(t) + \dots + C_k y_k(t) \equiv 0 \text{ на } T \quad (27)$$

Определение. Функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ называются линейно независимыми, если (27) выполнено только при $C_1 = \dots = C_k = 0$

Пусть $y_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ имеет производную до $n - 1$ порядка $\forall t \in T$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(t) + \dots + C_k y_k(t) = 0 \\ C_1 y_1'(t) + \dots + C_k y_k'(t) = 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(k-1)}(t) + \dots + C_k y_k^{(k-1)}(t) = 0 \end{cases}$$

Определение. Определитель

$$W(t) = W(y_1(t), \dots, y_k(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_k(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_k'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)}(t) & \dots & y_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

называется определитель Вронского функций $\{y_i(t)\}$ или их вронскиан.

Лемма 4. Если функции $y_1(t), \dots, y_k(t)$ линейно зависимы на T , то $W(y_1, \dots, y_k(t)) \equiv 0$

Линейная зависимость/независимость решений уравнения (26)

Пусть $y_1(t), \dots, y_n(t)$ — решения уравнения (26), а $W(T)$ — их вронскиан.

Лемма 5. Если $W(t_0) = 0, \quad \forall t_0 \in T$, то решение $y_1(t), \dots, y_n(t)$ линейно зависимо на T .

Доказательство.

$$W(t_0) = 0 \Rightarrow Y_i = \begin{pmatrix} y_i(t_0) \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \text{ — линейно зависимые}$$

$$\exists C_1, \dots, C_n; \quad |C_1| + \dots + |C_n| \neq 0 \rightarrow C_1 Y_1 + \dots + C_n Y_n = 0$$

Составим функцию:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + \dots + C_n y_n(t)$$

$$y(t) \text{ — решение уравнения (26) и } y(t_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ по теореме о существовании и единственности } y(t) \equiv 0$$

$$\text{т.е. } C_1 y_1(t) + \dots + C_n y_n(t) \equiv 0 \text{ на } T \Rightarrow y_1, \dots, y_n \text{ — линейно зависимые}$$

■