Аналитическая механика

Муницина Валерия Александровна

19 сентября 2017 г.

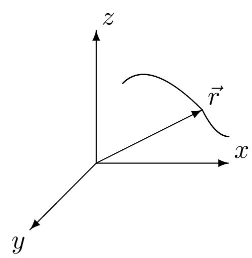
Набор: Александр Валентинов
Об ошибках писать: vk.com/valentiay

Содержание

Кинематика точки

Определение. *Материальная точка - точка, размером которой можно пренебречь.*

Мы будем полагать, что время меняется равномерно и непрерывно.



Векторное описание движения

Зависимость координат от времени назовем законом движения.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \in C^2$$

Определение. $\gamma = \{\vec{r}(t),\ t \in (0,\ +\infty)\}$ - *траектория*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Декартовы координаты

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e_x} + y(t)\vec{e_y} + z(t)\vec{e_z}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e_x} + \dot{y}(t)\vec{e_y} + \dot{z}(t)\vec{e_z}$$

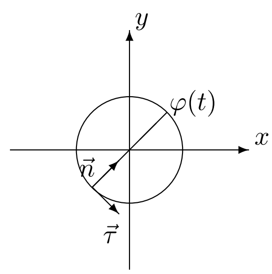
$$\vec{w}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e_x} + \ddot{y}(t)\vec{e_y} + \ddot{z}(t)\vec{e_z}$$

Движение по окружности

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - R\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + R\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{cases}$$



$$\vec{v} = R\dot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \vec{e_x} + \cos\varphi \cdot \vec{e_y}) = R\dot{\varphi}\vec{\tau}$$
$$\vec{w} = R\ddot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \vec{e_x} + \cos\varphi \cdot \vec{e_y}) + R\dot{\varphi}^2(-\cos\varphi \cdot \vec{e_x} - \sin\varphi \cdot \vec{e_y}) = R\ddot{\varphi}\vec{\tau} + R\dot{\varphi}^2\vec{n}$$

$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\vec{\tau} = v\vec{\tau}$$
$$\vec{w} = R\ddot{\varphi}\vec{\tau} + R\dot{\varphi}^2\vec{n} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

Естественное описание движения

Кривая задана параметрически естественным параметром s. $ds = |\vec{dr}| \neq 0$

Определение.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}} \text{ - \textit{касательный вектор}} \tag{1}$$

$$\vec{n} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{\tau}}|} \text{ - \textit{вектор главной нормали}} \tag{2}$$

$$\vec{b} = [\vec{t}; \vec{n}] \text{ - \textit{вектор бинормали}} \tag{3}$$

Утверждение 1. $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$ *- тройка ортогональных единичных векторов.*

Доказательство.

$$|\vec{\tau}| = \frac{|d\vec{r}|}{|ds|} = 1 \tag{4}$$

$$|\vec{n}| = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{\tau}}|} = 1 \tag{5}$$

$$|\vec{\tau}| = 1 \Rightarrow (\tau, \tau) = 1 \tag{6}$$

$$(\dot{\vec{\tau}}, \vec{\tau}) + (\vec{\tau}, \dot{\vec{\tau}}) = 0 \tag{7}$$

$$2(\dot{\vec{\tau}}, \vec{\tau}) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{\tau}} \perp \vec{\tau} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{\tau} \tag{8}$$

■

Этот трехгранник называют репер Ферне. (Дарбу, сопровождающий трехгранник).

Теорема 1. $\vec{v} = v\vec{\tau}$, $\vec{w} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$, *где* $v = \dot{s}$.

Доказательство.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\vec{\tau} \tag{9}$$

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{n}kv, \text{ по формуле (2)} \tag{10}$$

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{\tau} + v\dot{\vec{\tau}} = \dot{v}\vec{\tau} + v^2k\vec{n} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \tag{11}$$

$$\dot{v}\vec{\tau} \text{ - касательное ускорение}$$

$$\frac{v^2}{\rho}\vec{n} \text{ - нормальное ускорение}$$

$$\rho = \frac{1}{|\dot{r}|} \text{ - радиус кривизны}$$

$$k = |\ddot{\vec{r}}| \text{ - кривизна}$$

$$\ddot{\vec{r}} \text{ - вектор кривизны}$$

■

Формулы Френеля:

$$\begin{cases} \vec{\tau}' = k\vec{n} \\ \vec{n}' = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{b} \\ \vec{b}' = -\varkappa\vec{n} \end{cases}$$

где $\varkappa$ - коэффициент кручения.

Доказательство.

$$|\vec{n}| = 1 \Rightarrow (\vec{n}, \vec{n}) = 0$$

$$\vec{n} \perp \vec{\tau} \Rightarrow (\vec{n}', \vec{\tau}) + (\vec{n}, \vec{\tau}') = 0 \Rightarrow (\vec{n}', \vec{\tau}) + k = 0$$

$$\vec{b}' = [\vec{\tau}', \vec{n}] + [\vec{\tau}, \vec{n}'] = [k\vec{n}, \vec{n}] + [\vec{\tau}, -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{b}] = 0 + \varkappa[\vec{r}, \vec{b}] = -\varkappa\vec{n}$$

■

Ортогональные векторные координаты

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t)) \tag{12}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i \tag{13}$$

$$\vec{H_i} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = H_i\vec{e_i}, \text{ где } H_i \text{ - коэффициенты Ламе.} \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Геометрический смысл

$$ds_i = H_i dq_i$$

s_i - длина дуги i-й к-ой линии.

$$H_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} H_i \dot{q}_i \vec{e}_i, \quad v^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = \sum H_i^2 \dot{q_i^2}$$

Теорема 2. *Копоненты вектора ускорения в ортогональном криволинейном базисе определяются равенством:*

$$w_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right)$$

Доказательство.

$$(\vec{w}, \vec{H}_i) = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}, \frac{\vec{r}}{\partial q_i}\right) - \left(\vec{v}, \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) \triangleq \tag{16}$$

$$1)\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i'} \text{ - из определения скорости} \tag{17}$$

$$2)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j = \tag{18}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \tag{19}$$

$$\triangleq \frac{d}{dt}\left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}\right) - \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}(\vec{v}, \vec{v}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}(\vec{v}, \vec{v}) = \tag{20}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) \tag{21}$$

$$w_i = (\vec{w}, \vec{e_i}) = \frac{1}{H_i}(\vec{w}, \vec{H}_i) \tag{22}$$

■

Кинематика твердого тела

Определение. *Абсолютно твердым телом называется множество точек, расстояние между которыми не меняется со временем.*

$\{\vec{r_i}, i = \overline{1 \dots n} \quad : \quad |\vec{r_i} - \vec{r_j}| = C_{ij} = const, \quad n \geqslant 3\}$

$OXYZ$ - неподвижная система отсчета.
$S\xi\eta\zeta$ - связаны с телом (движется).

$$X = \begin{pmatrix} (\vec{e_\xi}, \vec{e_x}) & (\vec{e_\xi}, \vec{e_y}) & (\vec{e_\xi}, \vec{e_z}) \\ (\vec{e_\eta}, \vec{e_x}) & (\vec{e_\eta}, \vec{e_y}) & (\vec{e_\eta}, \vec{e_z}) \\ (\vec{e_\zeta}, \vec{e_x}) & (\vec{e_\zeta}, \vec{e_y}) & (\vec{e_\xi}, \vec{e_\zeta}) \end{pmatrix} \text{ - матрица направляющих косинусов.}$$

$$\vec{AB} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$$

$$\vec{AB} = \xi\vec{e_\xi} + \eta\vec{e_\eta} + \zeta\vec{e_\zeta}$$

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{e_\xi}, x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) \\ (\vec{e_\eta}, x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) \\ (\vec{e_\zeta}, x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{e_\xi}, \vec{AB}) \\ (\vec{e_\eta}, \vec{AB}) \\ (\vec{e_\zeta}, \vec{AB}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{\rho}$$

$$\vec{\rho} = X\vec{r}$$

Утверждение 2. X - *ортогональная матрица.*

Доказательство.

$$XX^T = X^TX = \begin{pmatrix} (\vec{e_\xi}, \vec{\xi}) & (\vec{e_\xi}, \vec{\eta}) & (\vec{e_\xi}, \vec{\zeta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} = 0$$

Т.к. базис ортогональный. ∎

$$\begin{pmatrix} \vec{e_\xi} \\ \vec{e_\eta} \\ \vec{e_\zeta} \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \vec{e_x} \\ \vec{e_y} \\ \vec{e_z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{e_\xi}} \\ \dot{\vec{e_\eta}} \\ \dot{\vec{e_\zeta}} \end{pmatrix} = \dot{X} \begin{pmatrix} \vec{e_x} \\ \vec{e_y} \\ \vec{e_z} \end{pmatrix} = \underbrace{\dot{X}X^T}_{\Omega} \begin{pmatrix} \vec{e_\xi} \\ \vec{e_\eta} \\ \vec{e_\zeta} \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \vec{e_\xi} \\ \vec{e_\eta} \\ \vec{e_\zeta} \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \dot{X}X^T$$

Утверждение 3. Ω - *кососимметрична.*

Доказательство.

$$\Omega\Omega^2 = \dot{X}X^T + (\dot{X}X^T)T = \dot{X}X^T + X\dot{X}^T = \frac{d}{dt}(XX^T) = \frac{d}{dt}(E) = 0$$

∎

Следствие.

$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{pmatrix}$ - *Факт, который может быть законспектирован неправильно*

Определение. $\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{e_\xi} + \omega_\eta \vec{e_\eta} + \omega_\zeta \vec{e_\zeta}$ - *угловая скорость подвижного репера.*

Формулы Пуассона

Утверждение 4.

$$\dot{\vec{e_i}} = [\vec{\omega}, \vec{e_i}], \quad i = \overline{1 \dots 3}$$

Доказательство.

$$\dot{\vec{e_\xi}} = \omega_\zeta \vec{e_\eta} - \omega_\eta \vec{e_\zeta} = \begin{vmatrix} \vec{e_\xi} & \vec{e_\eta} & \vec{e_\zeta} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [\vec{\omega}, \vec{e_\xi}]$$

■

Утверждение 5. $\vec{\omega} = \vec{e_\xi}(\dot{\vec{e_\eta}}, \vec{e_\zeta}) + \vec{e_\eta}(\dot{\vec{e_\zeta}}, \vec{e_\xi}) + \vec{e_\zeta}(\dot{\vec{e_\xi}}, \vec{e_\eta})$

Доказательство.

$$(\dot{\vec{e_\xi}}, \vec{e_\eta}) = \omega_\zeta$$

$$(\dot{\vec{e_\eta}}, \vec{e_\zeta}) = \omega_\xi$$

$$(\dot{\vec{e_\zeta}}, \vec{e_\xi}) = \omega_\eta$$

■

Утверждение 6. $\vec{\omega} = \frac{1}{2}([\vec{e_\xi}, \dot{\vec{e_\xi}}] + [\vec{e_\eta}, \dot{\vec{e_\eta}}] + [\vec{e_\zeta}, \dot{\vec{e_\zeta}}])$

Доказательство.

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}([\vec{e_\xi}, \dot{\vec{e_\xi}}] + [\vec{e_\eta}, \dot{\vec{e_\eta}}] + [\vec{e_\zeta}, \dot{\vec{e_\zeta}}]) = \frac{1}{2}([\vec{e_\xi}, [\vec{\omega}, \vec{e_\xi}]] + [\vec{e_\eta}, [\vec{\omega}, \vec{e_\eta}]] + [\vec{e_\zeta}, [\vec{\omega}, \vec{e_\zeta}]]) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{\omega}(\vec{e_\xi}, \vec{e_\xi}) - \vec{e_\xi}(\vec{\omega}, \vec{e_\xi}) + \vec{\omega}(\vec{e_\eta}, \vec{e_\eta}) - \vec{e_\eta}(\vec{\omega}, \vec{e_\eta}) + \vec{\omega}(\vec{e_\zeta}, \vec{e_\zeta}) - \vec{e_\zeta}(\vec{\omega}, \vec{e_\zeta})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(3\vec{\omega} - \vec{\omega}) = \vec{\omega}$$

■

Пример. *Угловая скорость репера Френеля.*

$$\begin{cases} \vec{\tau}' = k\vec{n} \\ \vec{n}' = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{b} \\ \vec{b}' = -\varkappa\vec{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\dot{s} \\ \dot{\vec{n}} = \frac{d\vec{n}}{ds}\dot{s} \\ \dot{\vec{b}} = \frac{d\vec{b}}{ds}\dot{s} \end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\tau}(\dot{s}(-k\vec{\tau} + \varkappa\vec{b}), \vec{b}) + \vec{n}(\dot{s}(-\varkappa\vec{n}, \vec{\tau}) + \vec{b}(\dot{s}(k\vec{n}), \vec{n}) = \dot{s}(\varkappa\vec{\tau} + k\vec{b})$$

Определение. *Угловой скоростью твердого тела называется угловая скорость подвижного репера, с ним связзанного.*

Формула распределения скоростей точек твердого тела

$\vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}, \vec{AB}]$

Доказательство.

$$\vec{AB} = \xi\vec{e_\xi} + \eta\vec{e_\eta} + \zeta\vec{e_\zeta}$$

$$\dot{\vec{AB}} = \xi\dot{\vec{e_\xi}} + \eta\dot{\vec{e_\eta}} + \zeta\dot{\vec{e_\zeta}}, \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$$

$$(\vec{r_B} \dot{-} \vec{r_A}) = \xi[\vec{\omega}, \vec{e_\xi}] + \eta[\vec{\omega}, \vec{e_\eta}] + \zeta[\vec{\omega}, \vec{e_\zeta}]$$

$$\dot{\vec{r_1}} - \dot{\vec{r_2}} = [\vec{\omega}, \xi\vec{e_\xi} + \eta\vec{e_\eta} + \zeta\vec{e_\zeta}]$$

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}, \vec{AB}]$$

■

Следствие. $S\xi\eta\zeta \to \vec{\omega}$, $S'\xi'\eta'\zeta' \to \vec{\omega}'$

$$\left.\begin{matrix} \vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}, \vec{AB}] \\ \vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}', \vec{AB}] \end{matrix}\right| [\vec{\omega} - \vec{\omega}', \vec{AB}] = 0; \ \forall A, B \text{ в абсолютно твердом теле} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} - \vec{\omega}' = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}'}$$

Утверждение 7. *(Формула Ривальса)* $\vec{w_B} = \vec{w_A} + [\vec{\varepsilon}, \vec{AB}] + [\vec{\omega}, [\omega, \vec{AB}]]$.

Доказательство.

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}, \vec{AB}]$$

$$\dot{\vec{v_B}} = \dot{\vec{v_A}} + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{AB}] + [\vec{\omega}, \vec{r_B} \dot{-} \vec{r_A}]$$

$$\vec{w_B} = \vec{w_A} + [\vec{\varepsilon}, \vec{AB}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{AB}]]$$

$[\vec{\varepsilon}, \vec{AB}]$ - вращательное ускорение, $[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{AB}]]$ - осестремительное ускорение

■

Геометрический смысл

$\vec{w} = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{AB}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{AB}) - \vec{AB}\omega^2 = \omega^2(\vec{e_\omega}(\vec{AB}, \vec{e_\omega}) - \vec{AB})$
$|\vec{w_{\textbf{ос}}}| = \omega^2 \rho(B, l)$

Утверждение 8. *Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны.*

Доказательство.

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}, \vec{AB}]$$

$$(\vec{v_B}, \vec{AB}) = (\vec{v_A}, \vec{AB}) + ([\vec{\omega}, \vec{AB}], \vec{AB})$$

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$$

■

Замечание. *Аналогичная теорема для ускорений не верна.*

Классификация движения твердого тела

Поступательное

Определение. *Такое движение твердого тела, при котором угловая скорость равна нулю.*

$$\vec{v_B} \equiv \vec{v_A}$$

$$\vec{w_B} \equiv \vec{v_A}$$

Мгновенное поступательное движение

$\exists t : \vec{\omega}(t) = 0, \quad \vec{\varepsilon}(t) \neq 0$

Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси)

TODO