Лекции по общей физике, электричество

Аланакян Юрий Робертович

9 сентября 2017 г.

Заряды.

Одноименные зараяды отталкиваются, разноименные - притягиваются.

Закон сохранения заряда. Если система изолирована, какие бы процессы в ней не происходили, алгебраическая сумма зарядов остается постоянной.

Закон Кулона. Получен Кулоном благодаря эксперименту с крутильными весами.

$$\overrightarrow{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

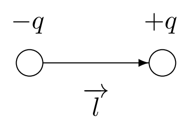
Напряженность электрического поля. Напряженностью электрического поля называется сила, действующая на единичный точечный заряд.

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{r^2} \frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

Принцип суперпозиции. Напряженности от различных зарядов складываются.

Электрический диполь.

Электрическим диполем называется два одинаковых по абсолютной величине, но разноименных заряда, жестко соединенных между собой. Расстояние $\overrightarrow{l}$ между зарядами называеся плечом диполя. Плечо направлено от отрицательного заряда к положительному. Величина $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{l}$ называется дипольным моментом.



Напряженность электрического поля диполя:

$$\overrightarrow{E} = q\left(\frac{\overrightarrow{r}}{r^3} - \frac{\overrightarrow{r} + \overrightarrow{l}}{|\overrightarrow{r} + \overrightarrow{l}|^3}\right)$$

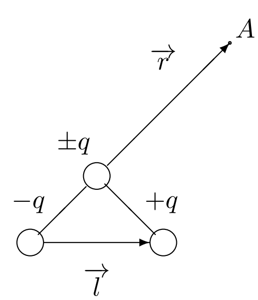
$$\overrightarrow{E} = \frac{3(\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r})\overrightarrow{r}}{r^3} - \frac{\overrightarrow{p}}{r^3}$$

Поле вдоль диполя:

$$E_{\parallel} = q\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2}\right] = \frac{2\overrightarrow{p}}{r^3}$$

Поле перпендикулярное диполю:

$$E_{\perp} = -\frac{\overrightarrow{p}}{r^3}$$



Возьмем произвольную точку A. Найдем поле в ней. Опускаем перпендиклуяр на прямую, соединяющую диполь и точку A. В основании перпендикуляра поместим заряды $+q$ и $-q$, получим два диполя, эквивалентных первому, направденные праллельно и перпендикулярно прямой, соединяющей диполь и точку.

$$E_A = \frac{2\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2}}{r^3} = \frac{3\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p}}{r^3} = \frac{3(\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r})\overrightarrow{r}}{r^3} - \frac{\overrightarrow{p}}{r^3}$$

Силовые линии. Силовые линии - касательные к вектору $\overrightarrow{E}$.

Однородное поле. Силы, действующие на диполь:

$$\overrightarrow{F_1} = q\overrightarrow{E}$$
$$\overrightarrow{F_2} = -\overrightarrow{F_1} = -q\overrightarrow{E}$$
$$\overrightarrow{M} = [\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{E}]$$

Неоднородное поле.

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) - q\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r} + \overrightarrow{l})$$

$$\overrightarrow{E} = q\left(l_x\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial x} + l_y\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial y} + l_z\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial z}\right) = (\overrightarrow{p}\,\triangledown)\,\overrightarrow{E}$$

Теорема Гаусса.

Поток вектора:

$$d\Phi = \overrightarrow{A}d\overrightarrow{S}$$

$$\Phi = \int \overrightarrow{A}d\overrightarrow{S}$$

$$\Phi = \oint \overrightarrow{E}d\overrightarrow{S}$$

Дивергенция:

$$div\overrightarrow{A} = \lim_{V\to 0}\oint\frac{\overrightarrow{A}d\overrightarrow{S}}{V}$$
$$div\overrightarrow{E} = \triangledown\overrightarrow{E}$$

Теорема 1. *(Теорема гаусса в интегральной форме) Поток вектора напряженности в электрического поля в ограниенном объеме равен* $4\pi q$.

$$q = \int \rho dV$$

$$\oint\frac{q}{r^3}\overrightarrow{r}d\overrightarrow{S} = q\int d\Omega$$

$$\boxed{\oint \overrightarrow{E}d\overrightarrow{S} = 4\pi q}$$

Теорема 2. *(Теорема Гаусса в дифференциальной форме)*

$$\boxed{div\overrightarrow{E} = 4\pi\rho}$$

Теорема Остроградского-Гаусса

Теорема 3.

$$\int div\overrightarrow{A}dV = \oint \overrightarrow{A}d\overrightarrow{S}$$

Теорема Ирншоу

Теорема 4. *Невозможно создания статической конфигурации электрических зарядов.*

Доказательство. Следует из теоремы Гаусса. ■

Потенциал электрического поля

Пусть у нас имеется точечный заряд Q. Возьмем заряд q и переместим из точки 1 в точку 2. Посчитаем работу:

$$A = \int_1^2 \overrightarrow{E}d\overrightarrow{r} = qQ\int_1^2 \frac{\overrightarrow{r}d\overrightarrow{r}}{r^3} = qQ\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = qQ\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

Определение. *Разность потенциалов - работа, которую необходимо совершить для перемещения единичного заряда ежду двумя точками. Потенциальным называется поле, работа в котором зависит тололько от начального и конечного положения.*

$$\overrightarrow{E} = -\nabla\varphi$$

$$d\varphi = \overrightarrow{E}d\overrightarrow{l}$$

Т.к. потенциальное поле скалярное, можно провести линии, на которых потенциал одинаков. Эти линии будут параллельны силовым линиям поля.

Замечание. *Потенциалы нескольких зарядов суммируются. Это называется принципом суперпозиции.*

$$\varphi = \int \frac{\rho(\overrightarrow{r})dV}{r}$$

Уравнение Пуассона

$$\nabla\nabla\varphi = -4\pi\rho$$

$$\nabla\nabla = \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ - лапласиан}$$

$$\boxed{\triangle\varphi = -4\pi\rho}$$

Замечание. *Решения уравнения Лапласа называются гармоническими функциями.*

Теорема 5. *(О циркуляции в электростатическом поле) Циркуляция электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю.*

$$\oint \overrightarrow{E} d \overrightarrow{l} = 0$$

Такое поле называется безвихревым.

Граничные условия

Есть плоская граница двух сред.

$$E_n^{(1)} - E_n^{(2)} = 4\pi\sigma$$

Тангенциальные составляющие равны между собой из теоремы о циркуляции.

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}$$

Следствие из теоремы Ирншоу. Потенциал не может иметь максимума и минимума.

Теорема 6. *Уравнение Лапласа с граничными условиями имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть у нас есть несколько точек, в которых $\varphi_i = 0$. Предположим, что уравнение Лапласа имеет решения φ и ψ. Т.к. уравнение линейное, $\varphi - \psi$ должно удовлетворять уравнению, но не граничным условиям, т.к. оно не имеет ни максимума, ни минимума и имеет ноль в нескольких точках. ■

Ротор

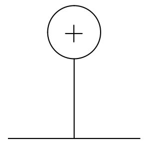
$$rot \overrightarrow{A} = \lim_{s \to 0} \frac{\oint \overrightarrow{A} d \overrightarrow{l}}{S}$$

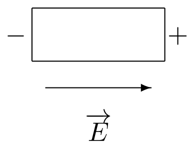
Утверждение 1.

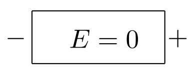
$$rot \overrightarrow{A} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

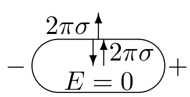
Доказательство. Возьмем в ДСК прямоугольный контур и вычислим по нему циркуляцию. ■

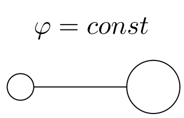
$$\vdots$$


+


−
+
$\overrightarrow{E}$


−
$E = 0$
+


$2\pi\sigma$
$2\pi\sigma$
−
$E = 0$
+


$\varphi = const$