Дифференциальные уравнения

Свирщевский Сергей Ростиславович

26 октября 2017 г.

Набор: Александр Валентинов
Об ошибках писать: **https://vk.com/valentiay**

Содержание

Лекция 1

Введение

Основные понятия

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n-го порядка называется уравнение вида:*

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) \tag{1}$$

где x - независимая переменная, $y(x)$ - искомая функция, $y', \dots, y^{(n)}$ - ее производные, F - заданная функция, определенная в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Порядок n уравнения равен порядку старшей производной, входящей в уравнение.

Определение. *Функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором интервале $X = (\alpha, \beta)$, называется решением уравнения (1), если*

1. *$\varphi(x)$ n раз дифференцируемо на X,*
2. *$x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots \varphi^{(n)} \in \Omega, \quad \forall x \in X$,*
3. *$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$.*

Замечание. *В этом определении в качестве X можно взять полуинтервал или отрезок, т.е любой промежуток действительной оси.*

Замечание. *Решение может быть определено на сколько можно малом интервале. Разные решения могут быть определены на разных интервалах.*

Определение. *Уравнение*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \tag{2}$$

где f - заданная функция, определенная в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, называется разрешенным относительно старшей производной или уравнение в нормальной форме.

Определение. *Функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором интервале $X = (\alpha, \beta)$, называется решением уравнения (2), если*

1. *$\varphi(x)$ n раз дифференцируемо на X,*
2. *$x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots \varphi^{(n-1)} \in D, \quad \forall x \in X$,*
3. *$\varphi^{(n)} \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$.*

Замечание. *Процесс нахождения решений уравнения называется его интегрированием.*

Пример 1.

1.
$$y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$$
$$y' = e^{-x^2}, \quad y = \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

2.
$$y^{(n)} = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$$
$$y'' = 2x, \quad y' = x^2 + C_1, \quad y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$$

3.
$$y' = ky, \quad k = const \neq 0$$
$$y = Ce^{kx}$$

4.
$$y' = y^2, \quad y = -\frac{1}{x}$$

Замечание. *Формулы, описывающие все решения уравнения содержат n произвольных постоянных.*

Задача Коши и теорема существования и единственности для уравнения (2)

Для получения из множества решений какого-либо частного решения, необходимо задать дополнительные условия. Рассмотрим, например, уравнение первого порядка:
$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D \tag{3}$$
$$y_0 = y(x_0) \tag{4}$$

Возьмем точку $(x_0, y_0) \in D$ и рассмотрим начальное условие (НУ).

Определение. *Найти решение уравнения (3), удовлетворяющее НУ (4)*

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в области $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда, $\forall (x_0, y_0) \in D$:*

1. *Существует решение задачи Коши, определенное на некотором интервале $X \ni x_0$*
2. *Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ - какие-либо решения, то $y_1(x) \equiv y_2(x)$ на пересечении их интервалов определения.*

Пример 2.

$$y' = kx, \quad k = const \neq 0$$

Решение: $y = Ce^{kx}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$ *Докажем, что других решений нет. Пусть* $y = \varphi(x), x \in X$ *- какое-либо решение. Возьмем произвольную* $x_0 \in X$ *и найдем* $y_0 = \varphi(x_0)$*. Теперь покажем, что в этом семействе есть решение с такими же начальными условиями. Рассмотрим* $y = C_0 e^{kx}, \ C_0 = y_0 e^{kx_0}$*. Оба этих решения являются решениями одной и той же задачи Коши с НУ* (x_0, y_0)*. В силу единственности по теореме (1) мы имеем* $\varphi(x) = C_0 e^{kx}$ *на* X*.*

Замечание. *Решение* $y = \varphi(x), \quad x \in X$ *называется сужением решения* $y = C_0 e^{kx}, \quad x \in \mathbb{R}$*, на интервал* X*. А решение* $y = C_0 e^{kx}$ *называется продолжением решения* $y = \varphi(x)$ *на* $\mathbb{R}$*.*

Определение. *Пусть* $y = \varphi_1(x), \ \ x \in X_1$ *и* $y = \varphi_2(x), \ \ x \in X_2$ *- какие-либо решения уравнения, и пусть* $X_1 \subseteq X_2$*. Тогда решение* $y = \varphi_2(x)$ *называется продолжением решения* $y = \varphi_1(x)$ *на* X_2*.*

Замечание. *В дальнейшем докажем, что каждое решение может быть продолжено на некоторый максимальный интервал до непродолжаемого решения.*

Определение. *График решения* $y = \varphi(x)$ *на плоскости* (x, y) *называется его интегральной кривой. Если под интегральной кривой понимать непродолжаемое решение, то теорему (1) можно переформулировать так:*

Через каждую точку $(x_0, y_0) \in D$ *проходит единственная интегральная кривая уравнения (3).*

Замечание. *Мы можем нарисовать интегральные кривые, не решая уравнение, поскольку мы знаем, как направлена касательная в любой точке. Не каждое уравнение не имеет аналитическое решение, например:* $y' = x^2 + y^2$*. В качестве альтернативы можно нарисовать на плоскости* (x, y) *изоклины и получить представления о том, как выглядят интегральные кривые.*

Замечание. *Для* ***существования*** *решения задачи Коши достаточно непрерывности функции* $f(x, y)$*. Но решение может быть не единственным.*

Пример 3.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

$$\text{\textit{Решения:} } y = 0, y = (x - C)^3$$

В каждой точки интегральной кривой $y = 0$ *нарушается единственность решения задачи Коши. Решение* $y = 0$ *называется особым.*

Лекция 2

Определение. *Решение уравнения (3) и его интегральная кривая l называются особыми, если в любой окрестности каждой точки кривой l через эту точку проходит, касаясь l, по крайней мере одна интегральная кривая уравнения (3), отличная от l.*

Замечание. *Условие про касание l избыточно.*

Аналогично рассмотрим уравнение (2) при $n \geqslant 1$. Возьмем точку $(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}) \in D$. Рассмотрим НУ:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{5}$$

Задача Коши: найти решение уравнения (2) для НУ (5)

Теорема 2. *Пусть функция f и ее частные производные $f_y, f_{y'}, \dots f_{y^{(n+1)}}$ непрерывны в $D \subseteq \mathbb{R}^{(n+1)}$. Тогда задача Коши (2), (5) имеет решение на интервале $X \ni x_0$. Любые два решения задачи (2), (5) совпадают на пересечении их интервалов определения.*

Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах

Уравнения с разделяющимися переменными

$\boxed{y' = f(x)g(y)}$, где f и g - непрерывны на X и Y.
Схема решения:

1. $g(y) = 0 \Rightarrow$ постоянные решения $y = y_1$, $y = y_2$, ...

2. $g(y) \neq 0$ На каждом интервале это выполнено.

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx = \int f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

$$G(y) = F(x) + C \text{ - решение в неявной форме}$$

G, F - первообразные, C - константа. Т.к. $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ на рассмаотриваемом интервале сохраняет знак, то $G(y)$ строго монотонна и, следовательно, имеет обратную. Поэтому можно написать явную формулу для решения.

Однородные уравнения

$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$
Замена: $\frac{y(x)}{x} = z(x)$, $y = xz$.
$xz' + z = f(z)$, $xz' = f(z) - z$ - уравнение, с разделяющимися переменными.

Замечание. *Уравнение инвариантно относительно растяжения: $x \to ax$, $y \to ay$; $a > 0$.*

Обобщенные однородные уравнения

$\boxed{\frac{1}{x^{m-1}}\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x^m}\right)}$, $x \neq 0$
Замена $\frac{y}{x^m} = z$, $y = x^m z$.

Линейные уравнения

$\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$
Схема решения:

1. Рассматриваем однородное уравнение $y' + a(x)y = 0$, $y' = -a(x)y$,

   (a) $y = 0$ - решение.

   (b) $y \neq 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int a(x)dx$.

$$ln|y| = A(x) + \dot{C}, \quad A(x) = \int a(t)dt$$

$$y = Ce^{-A(x)}$$

2. Ищем решение в виде $y = C(x)e^{-A(x)}$.

$$C'(x)e^{-A(x)} + C(x)e^{-A(x)}\left(-a(x)\right) + C(x)e^{-A(x)}\left(a(x)\right) = b(x)$$

$$C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt + C_0$$

   Общее решение:

$$y = e^{-A(x)}\int\limits_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt + C_0e^{-A(x)}$$

   Задача Коши с НУ $y(x_0) = y_0$, $C_0 = y_0$.

Каждое решение линейного уравнения определено на всем интервале X.

Уравнение Бернулли

$\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^n}$, $n \neq 0, 1$
Схема решения. При $n > 0$ имеется решение $y = 0$. Пусть $y \neq 0$. Разделим на y^n:

$$y^{-n}y' + a(x)y^{1-n} = b(x)$$

$$\frac{1}{1-n}(y^{1-n})' + a(x)y^{1-n} = b(x)$$

Замена: $y^{1-n} = z$

Уравнения Риккати

$\boxed{y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)}$
В общем случае не решается в квадратурах. Рассмотрим случай, когда известно какое-либо частное решение $y_0(x)$.
Замена: $y = z + y_0(x)$

$$z' + y_0' = a(z^2 + 2zy_0 + y_0^2) + b(z + y_0) + C$$

$$z' = az^2 + (2ay_0 + b)z \text{ - уравнение Бернулли}$$

Уравнение в полных дифференциалах

Уравнения 1-го порядка в симметричной форме

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0} \tag{6}$$

где P, Q непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^2$, $P^2 + Q^2 \neq 0$ в D.

Уравнение называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $U(x,y)$ непрерывно дифференцируемая в области D, такая, что

$$dU = Pdx + Qdy \tag{7}$$

в D. $dU(x,y) = 0$, $U(x,y) = C$ - содержит все решения $x(y)$ и $y(x)$.

Пусть выполнено (7), тогда $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Пусть P_y и Q_x непрерывны в D. Тогда имеем:

$$P_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = Q_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- необходимое условие того, что (6) - уравнение в полных дифференциалах.

Замечание. *Если область D односвязна, то это условие является и достаточным. (Из курса математического анализа известно, что любой замкнутый контур можно стянуть в точку в этой области)*

Лекция 3

Уравнение в полных дифференциалах

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0} \tag{8}$$

где P, Q непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^2$, $P^2 + Q^2 \neq 0$ в D.

Уравнение называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $U(x,y)$ непрерывно дифференцируемая в области D, такая, что

$$dU = Pdx + Qdy \tag{9}$$

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{10}$$

Пусть $D : a < x < b,\ c < y < d$. Пусть выполняется (10), пусть $(x_0, y_0) \in D$ - произв. Найдем U из (9):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y) d\xi + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial P(\xi, y)}{\partial y} d\xi + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(\xi, y)}{\partial \xi} d\xi + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

$$Q(x,y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

$$\varphi'(y) = Q(x_0, y)$$

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) d\eta$$

Интегрирующий множитель

Пусть уравнение (15) не является уравнением в полных дифференциалах.

Определение. *Функция $\mu(x,y)$ непрерывна в области $D, \mu(x,y) \neq 0$ в D, называется интегрирующим множителем уравнения (15), если после умножения на нее (15) становится уравнением в полных дифференциалах, т.е.*

$$\mu P dx + \mu Q dy = dU$$

Если $\mu \in C^1(D)$ и P и Q удовлетворяют введенным ранее условиям, то делим уравнение на μ:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \text{ или } Q\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

Это уравнение с частными производными, вообще говоря, более сложное, чем исходное. Иногда удается найти его частное решение. Например, пусть $\mu = \mu(y)$, тогда при $P \neq 0$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = \omega\mu, \text{ где } \omega = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Если $\omega = \omega(y)$, то для μ имеем ОДУ.

Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

Рассматриваем уравнения вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{11}$$

допускающее понижение порядка с помощью некоторой замены переменных.

Уравнения, не содержащие $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{12}$$

Замена $z = y^{(k)}$. Получаем уравнение

$$F(x, z, \ldots, z^{(n-k)}) = 0$$

$(n-k)$-го порядка.

Уравнения, не содержащие x (автономные)

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{13}$$

1. Находим решения вида $y = const$ (если такие есть)

2. Пусть $y \neq const$. Замена $y' = z(y) = f_0(z)$

   $y'' = z'z = f_1(z, z')$; $\quad y''' = (z'z)'z = f_2(z, z', z'')$

   $y^{(n)} = f_{n-1}(z, z', \ldots, z^{(n-1)})$

   Получаем уравнение

   $$\tilde{F}(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$$

   $(n-1)$-го порядка.

Уравнения, однородные относительно $y, y', \dots y^{(n)}$

Пусть F удовлетворяет условию $\forall\lambda > 0$

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \tag{14}$$

Замена $\frac{y'}{y} = z(x)$ при $y \neq 0$. Имеем:

$$y' = yz = yf_0(z); \quad y'' = yz' + y'z = y(z' + z^2) = yf_1(z, z');$$
$$\dots$$
$$y^{(n)} yf_{n-1}(z, z', \dots, z^{(n-1)})$$

Уравнение (11) примет вид

$$F(x, y, yf_0, \dots, yf_{n-1}) = 0$$

Пусть $y > 0$. В силу (14)

$$y^m F(x, 1, f_0, \dots, f_{n-1}) = 0$$

$$\tilde{F}(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0 \text{ — уравнение } (n-1)\text{-го порядка}$$

Пример 4. $y'' = \sqrt{y'^2 + y^2}$

1. $y = 0$ *— решение.*
2. $y \neq 0 \quad y' = yz,\ y'' = y(z' + z^2)$
   $y(z' + z^2) = \sqrt{y^2(z^2 + 1)}$
   $y(z' + z^2) = \pm y\sqrt{z^2 + 1}$
   $z' = -z^2 \pm \sqrt{z^2 + 1}$

Обобщенные однородные уравнения

Это уравнения (11) с функцией F, удовлетворяющей условию

$$F(\lambda x, \lambda^k y, \lambda^{k-1} y, \dots, \lambda^{k-n} y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \quad \forall\lambda > 0 \tag{15}$$

В этом случае уравнение (11) инвариантно относительно растяжений $x \to \lambda x$, $y \to \lambda^k y$.
Замена: $\frac{y}{x^k} = z(x)$, $x \neq 0$ Имеем:

$$y = x^k z = x^k f_0(z); \ y' = x^{k-1}(xz' + kz) = x^{k-1} f_1(z, z')$$
$$\dots$$
$$y^{(n)} = x^{k-n} f_n(z, z', \dots, z^{(n)})$$

$$F(x, x^k f_0, x^{k-1} f_1, \dots, x^{k-n} f_n) = 0$$

Пусть $x > 0$. Тогда

$$x^m F(1, f_0, f_1, \dots, f_n) = 0$$
$$\tilde{F}(x, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0$$

Имеем:

$$y = x^k z = x^k f_0(z)$$
$$y' = x^{k-1}(xz' + kz) = x^{k-1} f_1(z, xz')$$
$$y'' = x^{k-2} f_2(z, xz', x^2 z'')$$
$$\dots$$
$$y^{(n)} = x^{k-n} f_n(z, xz', \dots, x^n z^{(n)})$$

$$x^m F(1, f_0, f_1, \dots, f_n) = 0$$

Группа: $x \to \lambda x$, $z \to z$
Замена: $t = \ln x$, $x = e^t$. Уравнение примет вид:

$$\hat{F}(z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \text{ — автономное}$$

Лекция 4

Уравнения первого порядка, не разрешаемые относительно производных

Метод введения параметра

$$F(x, y, y') = 0 \tag{16}$$

F определено и непрерывно в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. X и T - интервалы.

Определение. *$\Phi : y = \varphi(x),\ x \in X$ называется решением уравнения (16), если:*

1. *$\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемо на X,*
2. *$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in \Omega \ \ \forall x \in X$,*
3. *$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ на x.*

Определение. *Функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $\ t \in T$ задают решение уравнения (16) в параметрической форме, если:*

1. *$\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$ на T,*
2. *$\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \in \Omega \ \ t \in T$,*

3. $F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \equiv 0$ *на* T.

Положим $y' = P$ и запишем (16) в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} F(x, y, P) = 0 \\ dy = P dx \end{cases} \tag{17}$$

Каждому решению $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ уравнения (16) соответствует решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $P = \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}$ системы (17). Каждому решению $x = \varphi(t), y = \psi(t), P = \chi(t)$, где $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ соответствует решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ уравнения (16).

Будем предполагать, что уравнение

$$F(x, y, P) = 0$$

задает в $\mathbb{R}^3$ гладкую поверхность S, допускающую параметрическое представление

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad P = \chi(u, v)$$

где $(u, v) \in D, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$ — некоторая область и выполняются условия:

1. φ, ξ и χ непрерывно дифференцируемы в D, причем

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \chi_u & \chi_v \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix}^2 \neq 0 \text{ в } D$$

2. Задано взаимооднозначное отображение $D \leftrightarrow S$

3. $F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v) \equiv 0$ на D.

В этом случае имеем

$$dy = P dx \Rightarrow \psi_u du + \psi_v dv = \chi(u, v)(\varphi_u du + \varphi_v dv)$$

$(\psi_u - \chi\varphi_u)du + (\psi_v - \chi\varphi_v)dv = 0$ — уравнение в симметричной форме(разрешимо относительно производной).

Если $v = g(u, C)$ — его решение, то

$$x = \varphi(u, y(u, C)), \quad y = \varphi(u, y(u, C))$$

— решение уравнения (16) в параметрической форме.

Задача Коши и теорема существования и единственности решения уравнения (16)

$$F(x, y, y') = 0$$

F определено и непрерывно в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Возьмем точку $(x_0, y_0, p_0) \in \Omega$ такую, что

$$F(x_0, y_0, p_0) = 0$$

Задача Коши: найти решение уравнения (16), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = p_0 \tag{18}$$

Теорема 3. *Существования и единственности решения уравнения (16) Пусть функция F непрерывно дифференцируема в области Ω и пусть*

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, p_0)}{\partial p} \neq 0 \tag{19}$$

Тогда решение задачи (16), (18) существует и единственно на некотором интервале $X \ni x_0$

Доказательство. В силу теоремы о неявной функции из уравнения $F(x, y, p) = 0$ можно выразить p:

$$p = f(x, y),$$

где f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$, единственна и удовлетворяет условию

$$f(x_0, y_0) = p_0$$

Получим задачу

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0 \tag{20}$$

По теореме (1) из лекции 1, существует единственное решение задачи (20), определенное на некотором интервале $X \ni x_0$. Эта функция является решением уравнения (16), удовлетворяющим Н.У. (18). ■

Замечание. *Если $\exists \tilde{p}_0 \neq p_0 :\ F(x_0, y_0, \tilde{p}_0 = 0,\ \frac{\partial F(x_0, y_0, \tilde{p}_0)}{\partial p} \neq 0$, то получим другое решение $y = \tilde{\varphi}'(x)$, удовлетворяющее условиям*

$$\tilde{\varphi}(x_0) = y_0, \quad \tilde{\varphi}'(x_0) = \tilde{p}_0$$

При этом единственность не нарушается, т.к. решение $y = \varphi(x)$ и $y = \tilde{\varphi}(x)$ соответсвуют разным начальным параметрам: (x_0, y_0, p_0) и $(x_0, y_0, \tilde{p}_0)$.

Особые решения уравнения (16)

Определение. *Решение $y = \varphi(x)$, $x \in X$ уравнения (16) и его интегральная кривая l называются особыми, если в люблй окрестности каждоый точки кривой l через эту точку проходит, касаясь l, по крайней мере одна интегральная кривая, отличная от l.*

Теоремы единственности предыдущего пункта следует, что в особых точках кривой формально выполнены условия

$$F(x,y,p)=0, \quad \frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0 \tag{21}$$

Это необходимое условие особого решения.

Исключим из (21) p (если это возможно), получим уравнение $\Phi(x,y)=0$, задающее на плоскости т.н. дискриминантную кривую (или дискриминантное множество). Дискриминантное множество содержит все особые решения, но может также включать и другие точки.

Алгоритм отыскания особых решений

Из (21) находим дискриминантные кривые и проверяем:

1. Являются ли они решениями
2. Если да, то касаются ли их в каждой точке другие решения

Если в обоих случаях ответ положительный, то соответствующая ветвь дискриминантной кривой является особым решением.

Лекция 5

Уравнение Клеро

$$y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$$

1.

$$y'=p \Rightarrow y = px - \frac{1}{4}p^2 \tag{22}$$

$$dy = pdx \Rightarrow pdx = pdx + xdp - \frac{1}{2}pdp \Rightarrow (x-\frac{1}{2}p)dp = 0$$

   (a) $x=\frac{1}{2}p \Rightarrow p = 2x \xrightarrow{(22)} y = x^2$

   (b) $dp = 0 \Rightarrow P = C \xrightarrow{(22)} y = Cx - \frac{1}{4}C^2$

2. Особые решения. Дискриминантное множество.

$$\begin{cases} F=0 \\ F'_p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = px - \frac{1}{4}p^2 \\ 0 = x - \frac{1}{2}p \end{cases} \Rightarrow y = x^2 \text{ — дискриминантная кривая}$$

Условия касания:

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x) \\ y_0'(x) = y'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = Cx - \frac{1}{4}C^2 \\ 2x = C \end{cases} \Rightarrow C = 2x \Rightarrow$$

$\Rightarrow C = 2x \Rightarrow$ есть касание с соответствующей кривой семейства (b)

при $x = 0$ имеем $C = 0 \Rightarrow y = 0$
при $x = 1$ $C = 2$, $y = 2x - 1$

Еще одно уравнение:

$$y'^3 - 27y^2 = 0 \Leftrightarrow y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

1. Рассмотрено на Л1. Решения:

   $y = 0,\ y = (x - C)^3$

2. Особые решение:

   $$\begin{cases} p^3 - 27y^2 = 0 \\ 3p^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow p = 0, \quad y = 0 \text{ — дискриминантная кривая}$$

   (a) является решением

   (b) Условие касания:

   $$\begin{cases} 0 = (x - C)^3 \\ 0 = 3(x - C)^2 \end{cases} \Rightarrow C = x \Rightarrow \text{ есть касания}$$

Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Определение. Теорема о существовании и единственности

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t) \tag{23}$$

$t \in T = (a, b)$, $a_i(t)$, $f(t)$ - заданные функции, определенные и непрерывные на T.

Начальные условия:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \tag{24}$$

где $t_0 \in T, \quad y_0, \quad y_0', \quad \ldots, \quad y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ — заданные числа

Задача Коши: найти решение уравнения (23), удовлетворяющее условию (24)

Теорема 4. *О существовании и единственности* $\forall t_0 \in T,\ y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ *существует единственное решение задачи Коши (23), (24), определенное на* всем *интервале* T.

Замечание. *Если* $a_i(t),\ f(t)$ *— постоянные, то решение задачи Коши (23), (24), определенно на* $\mathbb{R}$.

Если в (23) $f(t) \neq 0$, *то уравнение называется* неоднородным.

Уравнение $L[y] = 0$ *называется* однородным *(соответствующим уравнению (23))*

Линейность оператора L и ее следствия

Линейность

Лемма 1. *Линейность Оператор* L *является линейным, т.е.* $\forall$ *различных непрерывно дифференцируемых функций* $u(t), v(t), t \in T$ *и* $\forall$ *чисел* A *и* B.

$$L[Au(t) + Bv(t)] = AL[u(t)] + BL[v(t)]$$

Доказательство.

$$L[Au + Bv] = (Au + Bv)^{(n)} + a_1(Au + Bu)^{(n-1)} + \ldots + a_n(Au + Bv) =$$
$$= A(u^{(n)} + a_1u^{(n-1)} + \ldots + a_nu) + B(v^{(n)} + a_1v^{(n-1)} + \ldots + a_nv) =$$
$$= AL[u(t)] + BL[v(t)]$$

■

Структура общего решения уравнения (23)

Определение. *Общим решением линейного уравнения (23) наызвается множество функций, содержащих все решения уравнения и только их.*

В дальнейшем для однородного уравнения получим формулу общего решения, содержащее n произвольных постоянных.

Теорема 5. *Общее решение уравнения (23) представляется в виде*

$$y(t) = y_0(t) + y_r(t) \tag{25}$$

где $y_0(t)$ *- общее решение однородного уравнения,* $y_r(t)$ *- произвольное частное решение (23).*

Доказательство. Пусть $y_r(t)$ - какое-либо частное решение уравнения (23). Замена:

$$y(t) = z(t) + y_r(t)$$

Получим: $L[z] + L[y_r] = f(t)$, т.е. $L[z] = 0$. Это однородное уравнение. Его общее решение $z = y_0(t) \Rightarrow$ общее решение уравнения (23) имеет вид $y(t) = y_0(t) + y_r(t)$ ■

Принцип суперпозиции

Лемма 2. *Если* $y_1(t), \dots, y_k(t)$ *— решения однородного уравнения, то*

$$y(t) = C_1 y_1(t) + \ldots + C_k y_k(t),$$

где $C_1, \dots, C_k$ *- произвольные постоянные, также являющиеся решениями однородного уравнения*

Доказательство. $L[y] = C_1 \underbrace{L[y_1]}_{0} + \ldots + C_k \underbrace{L[y_k]}_{0} = 0$ ■

Замечание. *Множество решений однородного уравнения является линейным пространством. Далее докажем, что его размерность* n

Лемма 3. *Пусть в (23)* $f(t) \sum\limits_{i=1}^{k} f_i(t)$, *и пусть* $y_i(t)$ *— решение уравнений* $L[y] = f_i(t),\;\; i = 1, \dots, k$, *тогда функция* $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i(t)$ *является решением уравнения (23)*

Доказательство. $L[\sum\limits_{i=1}^{k} y_i] = \sum\limits_{i=1}^{k} L[y_i] = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i(t) = f(t)$ ■

Лекция 6

Линейные однородные уравнения

$$L[y] = 0 \tag{26}$$

Линейно зависимые/независимые функции

Определение. *Функции* $y_1(t),\; \dots,\; y_k(t),\;\; t \in T$ *называются линейно зависимыми, если существуют числа* $C_1,\; \dots,\; C_k$, $|C_1| + \ldots + |C_k| \neq 0$, *такие что*

$$C_1 y_1(t) + \ldots + C_k y_k(t) \equiv 0 \text{ на } T \tag{27}$$

Определение. *Функции* $y_1(t), \dots, y_n(t)$ *называются линейно независимыми, если (27) выполнено только при* $C_1 = \ldots = C_k = 0$

Пусть $y_i(t),\;\; i = 1, \dots, n$ имеет производную до $n-1$ порядка $\forall t \in T$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(t) + \ldots + C_k y_k(t) = 0 \\ C_1 y_1'(t) + \ldots + C_k y_k'(t) = 0 \\ C_1 y_1^{k-1}(t) + \ldots + C_k y_k^{k-1}(t) = 0 \end{cases}$$

Определение. *Определитель*

$$W(t) = W(y_1(t), \ldots, y_k(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots & y_k(t) \\ y_1'(t) & \ldots & y_k'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)}(t) & \ldots & y_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

называется определитель Вронского функций $\{y_i(t)\}$ или их вронскиан.

Лемма 4. *Если функции $y_1(t), \ldots, y_k(t)$ линейно зависимы на T, то $W(y_1, \ldots, y_k(t)) \equiv 0$*

Линейная зависимость/независимость решений уравнения (26)

Пусть $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ — решения уравнения (26), а $W(T)$ — их вронскиан.

Лемма 5. *Если $W(t_0) = 0, \quad \forall t_0 \in T$, то решение $y_1(t), \ldots y_n(t)$ линейно зависимо на T.*

Доказательство.

$W(t_0) = 0 \Rightarrow Y_i = \begin{pmatrix} y_i(t_0) \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$ — линейно зависимые

$\exists C_1, \ldots, C_n; \quad |C_1| + \ldots + |C_n| \neq 0 \to C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n = 0$

Составим функцию:

$y(t) = C_1 y_1(t) + \ldots + C_n y_n(t)$

$y(t)$ — решение уравнения (26) и $y(t_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме о существовании и единственности $y(t) \equiv 0$

т.е. $C_1 y_1(t) + \ldots + C_n y_n(t) \equiv 0$ на $T \Rightarrow y_1, \ldots, y_n$ — линейно зависимые

■

Coming soon...

Лекция 7

Комплексные функции действительного переменного

Рассматириваем функции вида

$$h(t) = u(t) + iv(t)$$

где $t \in T$, $T \int \mathbb{R}$ - интервал, $u(t)$, $v(t)$ — вещественны.

Определение. *$h(t)$ непрерывна, если $u(t)$, $v(t)$ непрерывны.*

Определение. *$h(t)$ дифференцируема (n раз), если $u(t)$, $v(t)$ дифференцируемы (n раз), при этом*

$$h^{(n)}(t) = u^{(n)}(t) + iv^{(n)}(t)$$

Лемма 6. *Функция $h(t)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда $u(t)$, $v(t)$ являются его решениями.*

Доказательство.

$$L[h(t)] = L[u(t) + iv(t)] = L[u(t)] + iL[v(t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L[h(t)] \Leftrightarrow \begin{cases} L[u(t)] = 0 \\ L[v(t)] = 0 \end{cases}$$

■

Определение. *Модуль $|h(t)| = \sqrt{(u(t))^2 + (v(t))^2}$*

Рассмотрим функцию $e^{\lambda t}$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. По определению

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

Свойства:

1. $|e^{\lambda t}| = e^{\alpha t} \neq 0$
2. $e^{\lambda_1 t} \cdot e^{\lambda_2 t} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$
3. $e^{\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = 1$
4. $\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$

Случай 2 Уравнение (3) имеет n различных корней, среди которых есть комплексные. Аналогично случаю 1 заключаем, что решения

$$y_s = e^{\lambda_s t}, \quad s = 1 \dots n$$

линейно независимы над $\mathbb{C}$, т.к. иначе их бронскиан был бы равен нулю.

Т.к. (3) - уравнение с действительными коэффициентами, то вместе с каждым комплексным корнем $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ оно обладает сопряженным корнем $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$.

$$\overline{F(\lambda)} = 0 \Rightarrow F(\bar{\lambda})$$

Им соответсвуют комплексные сопряженные решения

$$y_1 = e^{(\alpha_1 + i\beta_1)t} = e^{\alpha_1 t}(\cos(\beta_1 t) + i \sin \beta_1 t) = u_1 + iu_2$$

$$y_2 = e^{(\alpha_1 - i\beta_1)t} = e^{\alpha_1 t}(\cos(\beta_1 t) - i\sin\beta_1 t) = u_1 - iu_2$$

где $u_1 = e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t$, $u_2 = e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t$.

В силу леммы имеем:

$$u_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad u_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = -\frac{1}{2}i(y_1 - y_2)$$

является решениями уравнения (1).

Докажем, что решения $u_1, u_2, y_3, \ldots y_n$ линейно независимы. В самом деле, если для некоторых $C_1, \ldots, C_n$ (действительных или комплексных) выполняется

$$C_1u_1 + C_2u_2 + C_3y_3 + \ldots + C_ny_n = 0$$

то

$$\frac{C_1 - iC_2}{2}y_1 + \frac{C_1 + iC_2}{2}y_2 + C_3y_3 + \ldots + C_ny_n = 0$$

Т.к. $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы, то

$$\begin{cases} C_1 - iC_2 = 0 \\ C_1 + iC_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 = C_3 = \ldots = C_n = 0$$

Случай кратных корней Ниже будем использовать формулы из ТФКП:

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda t}) = te^{\lambda t}, \quad \frac{d}{d\lambda}(\lambda^m) = m\lambda^{m-1}, \ m \in \mathbb{N}$$

где λ — комплексное.

Оператор $\frac{d}{d\lambda}$ обладает свойством линейности и др.

Утверждение 1. *Для любого целого $s \geqslant 0$ справедлива формула*

$$L[t^s e^{\lambda t}] = e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{s} C_s^j t^{s-j} F^{(j)}(\lambda)(4)$$

где $F(\lambda)$ — характеристический многочлен.

Доказательство. Имеем тождество

$$L[e^{\lambda t}] \equiv e^{\lambda t}F(\lambda)$$

Дифференцируем s раз по λ, получаем по формуле Лейбница

$$L[t^s e^{\lambda t}] = \sum_{j=0}^{s} C_s^j (e^{\lambda t})^(s-j)_\lambda$$

$$F^{(j)}(\lambda) = e^{\lambda t}\sum \ldots$$

■

Определение. λ_0 — *корень характеристического уравнения (3) кратности* k, $k = 1, \ldots, n$, *если*

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k G(\lambda)$$

где $G(\lambda)$ — *многочлен степени* $n - k$, $G(\lambda) \neq 0$.

В этом случае

$$F(\lambda_0) = F'(\lambda) = \ldots = F^{(k-1)}(\lambda_0), \quad F^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$$

Лемма 7. *Пусть* λ_0 — *корень характеристического уравнения (3) кратности* k. *Тогда функции*

$$t^s e^{\lambda_0 t}, \quad s = 0, \ldots, k_1$$

являются решениями уравнения (1).

Доказательство. $\forall s = 0, \ldots, k-1$ имеем по формуле (4)

$$L[t^s e^{\lambda t}] = e^{\lambda t}(C_0^s t^s F(\lambda) + C_1^s t^{s-1} F(\lambda) + \ldots + C_s^s F^{(s)}(\lambda))$$

При $\lambda = \lambda_0$ выполняется $F(\lambda_0) = F'(\lambda_0) = \ldots = F^{(s)}(\lambda 0) = 0, \quad s \leqslant k-1$.

Поэтому $L[t^s e^{\lambda t}] = 0$ ■

Случай 3 Уравнение (3) имеет $m < n$ различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ кратности $k_1, \ldots, k_n$ ($\sum k_i = n$). Тогда в силу леммы уравнение (1) имеет n(комплексных решений)

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 t}$$

$$\vdots$$

$$e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, \ldots, t^{k_m - 1} e^{\lambda_m t}$$

Покажем, что эти решения линейно независимы над $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$