Аналитическая механика

Муницина Мария Александровна

15 ноября 2017 г.

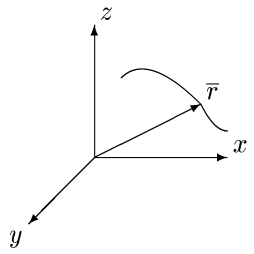
Набор: Александр Валентинов
Об ошибках писать: `https://vk.com/valentiay`

Содержание

Кинематика точки

Определение. *Материальная точка - точка, размером которой можно пренебречь.*

Мы будем полагать, что время меняется равномерно и непрерывно.



Векторное описание движения

Зависимость координат от времени назовем законом движения.

$$\overline{r} = \overline{r}(t) \in C^2$$

Определение. $\gamma = \{\overline{r}(t),\ t \in (0,\ +\infty)\}$ - *траектория*

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$$
$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$$

Декартовы координаты

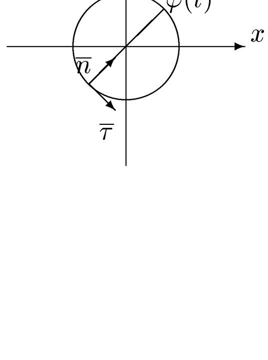
$$\overline{r}(t) = x(t)\overline{e_x} + y(t)\overline{e_y} + z(t)\overline{e_z}$$
$$\overline{v}(t) = \dot{x}(t)\overline{e_x} + \dot{y}(t)\overline{e_y} + \dot{z}(t)\overline{e_z}$$
$$\overline{w}(t) = \ddot{x}(t)\overline{e_x} + \ddot{y}(t)\overline{e_y} + \ddot{z}(t)\overline{e_z}$$

Движение по окружности

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - R\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + R\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{cases}$$



$$\overline{v} = R\dot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \overline{e_x} + \cos\varphi \cdot \overline{e_y}) = R\dot{\varphi}\overline{r}$$
$$\overline{w} = R\ddot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \overline{e_x} + \cos\varphi \cdot \overline{e_y}) + R\dot{\varphi}^2(-\cos\varphi \cdot \overline{e_x} - \sin\varphi \cdot \overline{e_y}) = R\ddot{\varphi}\overline{\tau} + R\dot{\varphi}^2\overline{n}$$

$$\overline{v} = R\dot{\varphi}\overline{\tau} = v\overline{\tau}$$
$$\overline{w} = R\ddot{\varphi}\overline{\tau} + R\dot{\varphi}^2\overline{n} = \dot{v}\overline{\tau} + \frac{v^2}{R}\overline{n}$$

Естественное описание движения

Кривая задана параметрически естественным параметром s. $ds = |\overline{dr}| \neq 0$

Определение.

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds} = \dot{\vec{r}} \text{ - касательный вектор} \tag{1}$$

$$\overline{n} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{\tau}}|} \text{ - вектор главной нормали} \tag{2}$$

$$\overline{b} = [\overline{t}; \overline{n}] \text{ - вектор бинормали} \tag{3}$$

Утверждение 1. *$\{\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}\}$ - тройка ортогональных единичных векторов.*

Доказательство.

$|\overline{\tau}| = \dfrac{|d\overline{r}|}{|ds|} = 1$

$|\overline{n}| = \dfrac{|\dot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{\tau}}|} = 1$

$|\overline{\tau}| = 1 \Rightarrow (\tau, \tau) = 1$

$(\dot{\vec{\tau}}, \overline{\tau}) + (\overline{\tau}, \dot{\vec{\tau}}) = 0$

$2(\dot{\overline{\tau}}, \overline{\tau}) = 0 \Rightarrow \dot{\overline{\tau}} \perp \overline{\tau} \Rightarrow \overline{n} \perp \overline{\tau}$

■

Этот трехгранник называют репер Ферне. (Дарбу, сопровождающий трехгранник).

Теорема 1. *$\overline{v} = v\overline{\tau}$, $\overline{w} = \dot{v}\overline{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overline{n}$, где $v = \dot{s}$.*

Доказательство.

$\overline{v} = \dfrac{d\overline{r}}{dt} = \dfrac{d\overline{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = v\overline{\tau}$

$\dot{\vec{\tau}} = \dfrac{d\overline{\tau}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \overline{n}kv$, по формуле (2)

$\overline{w} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\overline{\tau} + v\dot{\vec{\tau}} = \dot{v}\overline{\tau} + v^2k\overline{n} = \dot{v}\overline{\tau} + \dfrac{v^2}{\rho}\overline{n}$

$\dot{v}\overline{\tau}$ - касательное ускорение

$\dfrac{v^2}{\rho}\overline{n}$ - нормальное ускорение

$\rho = \dfrac{1}{|\dot{r}|}$ - радиус кривизны

$k = |\ddot{\overline{r}}|$ - кривизна

$\ddot{\overline{r}}$ - вектор кривизны

■

Формулы Френеля:

$$\begin{cases} \overline{\tau}' = k\overline{n} \\ \overline{n}' = -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b} \\ \overline{b}' = -\varkappa\overline{n} \end{cases}$$

где $\varkappa$ - коэффициент кручения.

Доказательство.

$$|\overline{n}| = 1 \Rightarrow (\overline{n}, \overline{n}) = 0$$

$$\overline{n} \perp \overline{\tau} \Rightarrow (\overline{n}', \overline{\tau}) + (\overline{n}, \overline{\tau}') = 0 \Rightarrow (\overline{n}', \overline{\tau}) + k = 0$$

$$\overline{b}' = [\overline{\tau}', \overline{n}] + [\overline{\tau}, \overline{n}'] = [k\overline{n}, \overline{n}] + [\overline{\tau}, -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b}] = 0 + \varkappa[\overline{\tau}, \overline{b}] = -\varkappa\overline{n}$$

■

Ортогональные векторные координаты

$$\overline{r} = \overline{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\overline{H_i} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} = H_i \overline{e_i}, \text{ где } H_i \text{ - коэффициенты Ламе.}$$

Геометрический смысл

$$ds_i = H_i dq_i$$

s_i - длина дуги i-й к-ой линии.

$$H_i = \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

$$\overline{v} = \sum_{i=1}^{3} H_i \dot{q}_i \overline{e_i}, \quad v^2 = (\overline{v}, \overline{v}) = \sum H_i^2 \dot{q_i^2}$$

Теорема 2. *Копоненты вектора ускорения в ортогональном криволинейном базисе определяются равенством:*

$$w_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right)$$

Доказательство.

$$(\overline{w}, \overline{H_i}) = \left(\frac{d\overline{v}}{dt}, \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}, \frac{\overline{r}}{\partial q_i}\right) - \left(\overline{v}, \frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i}\right) \triangleq$$

$$1) \ \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_i'} \text{ - из определения скорости}$$

$$2) \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{\overline{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_i}$$

$$\triangleq \frac{d}{dt}\left(\overline{v}, \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_i}\right) - \left(\overline{v}, \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}(\overline{v}, \overline{v}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}(\overline{v}, \overline{v}) =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$w_i = (\overline{w}, \overline{e_i}) = \frac{1}{H_i}(\overline{w}, \overline{H_i})$$

■

Кинематика твердого тела

Определение. *Абсолютно твердым телом называется множество точек, расстояние между которыми не меняется со временем.*

$\{\overline{r_i}, i = \overline{1\ldots n} \quad : \quad |\overline{r_i} - \overline{r_j}| = C_{ij} = const, \quad n \geqslant 3\}$

$OXYZ$ - неподвижная система отсчета.

$S\xi\eta\zeta$ - связаны с телом (движется).

$$X = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, \overline{e_x}) & (\overline{e_\xi}, \overline{e_y}) & (\overline{e_\xi}, \overline{e_z}) \\ (\overline{e_\eta}, \overline{e_x}) & (\overline{e_\eta}, \overline{e_y}) & (\overline{e_\eta}, \overline{e_z}) \\ (\overline{e_\zeta}, \overline{e_x}) & (\overline{e_\zeta}, \overline{e_y}) & (\overline{e_\xi}, \overline{e_\zeta}) \end{pmatrix} \text{ - матрица направляющих косинусов.}$$

$$\overline{AB} = x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}$$

$$\overline{AB} = \xi\overline{e_\xi} + \eta\overline{e_\eta} + \zeta\overline{e_\zeta}$$

$$X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}) \\ (\overline{e_\eta}, x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}) \\ (\overline{e_\zeta}, x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, \overline{AB}) \\ (\overline{e_\eta}, \overline{AB}) \\ (\overline{e_\zeta}, \overline{AB}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \overline{\rho}$$

$$\overline{\rho} = X\overline{r}$$

Утверждение 2. X *- ортогональная матрица.*

Доказательство.

$$XX^T = X^TX = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, \overline{\xi}) & (\overline{e_\xi}, \overline{\eta}) & (\overline{e_\xi}, \overline{\zeta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \ldots & \end{pmatrix} = 0$$

Т.к. базис ортогональный. ■

$$\begin{pmatrix} \overline{e_\xi} \\ \overline{e_\eta} \\ \overline{e_\zeta} \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} \overline{e_x} \\ \overline{e_y} \\ \overline{e_z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\overline{e_\xi}} \\ \dot{\overline{e_\eta}} \\ \dot{\overline{e_\zeta}} \end{pmatrix} = \dot{X}\begin{pmatrix} \overline{e_x} \\ \overline{e_y} \\ \overline{e_z} \end{pmatrix} = \underbrace{\dot{X}X^T}_{\Omega}\begin{pmatrix} \overline{e_\xi} \\ \overline{e_\eta} \\ \overline{e_\zeta} \end{pmatrix} = \Omega\begin{pmatrix} \overline{e_\xi} \\ \overline{e_\eta} \\ \overline{e_\zeta} \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \dot{X}X^T$$

Утверждение 3. Ω *- кососимметрична.*

Доказательство.

$$\Omega\Omega^2 = \dot{X}X^T + (\dot{X}X^T)T = \dot{X}X^T + X\dot{X}^T = \frac{d}{dt}(XX^T) = \frac{d}{dt}(E) = 0$$

■

Следствие.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{pmatrix} \text{ - \textit{Факт, который может быть законспектирован неправильно}}$$

Определение. $\overline{\omega} = \omega_\xi\overline{e_\xi} + \omega_\eta\overline{e_\eta} + \omega_\zeta\overline{e_\zeta}$ *- угловая скорость подвижного репера.*

Формулы Пуассона

Утверждение 4.

$$\dot{\overline{e_i}} = [\overline{\omega}, \overline{e_i}], \quad i = \overline{1\dots3}$$

Доказательство.

$$\dot{\overline{e_\xi}} = \omega_\zeta \overline{e_\eta} - \omega_\eta \overline{e_\zeta} = \begin{vmatrix} \overline{e_\xi} & \overline{e_\eta} & \overline{e_\zeta} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [\overline{\omega}, \overline{e_\xi}]$$

■

Утверждение 5. $\overline{\omega} = \overline{e_\xi}(\dot{\overline{e_\eta}}, \overline{e_\zeta}) + \overline{e_\eta}(\dot{\overline{e_\zeta}}, \overline{e_\xi}) + \overline{e_\zeta}(\dot{\overline{e_\xi}}, \overline{e_\eta})$

Доказательство.

$$(\dot{\overline{e_\xi}}, \overline{e_\eta}) = \omega_\zeta$$
$$(\dot{\overline{e_\eta}}, \overline{e_\zeta}) = \omega_\xi$$
$$(\dot{\overline{e_\zeta}}, \overline{e_\xi}) = \omega_\eta$$

■

Утверждение 6. $\overline{\omega} = \frac{1}{2}([\overline{e_\xi}, \dot{\overline{e_\xi}}] + [\overline{e_\eta}, \dot{\overline{e_\eta}}] + [\overline{e_\zeta}, \dot{\overline{e_\zeta}}])$

Доказательство.

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}([\overline{e_\xi}, \dot{\overline{e_\xi}}] + [\overline{e_\eta}, \dot{\overline{e_\eta}}] + [\overline{e_\zeta}, \dot{\overline{e_\zeta}}]) = \frac{1}{2}([\overline{e_\xi}, [\overline{\omega}, \overline{e_\xi}]] + [\overline{e_\eta}, [\overline{\omega}, \overline{e_\eta}]] + [\overline{e_\zeta}, [\overline{\omega}, \overline{e_\zeta}]]) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{\omega}(\overline{e_\xi}, \overline{e_\xi}) - \overline{e_\xi}(\overline{\omega}, \overline{e_\xi}) + \overline{\omega}(\overline{e_\eta}, \overline{e_\eta}) - \overline{e_\eta}(\overline{\omega}, \overline{e_\eta}) + \overline{\omega}(\overline{e_\zeta}, \overline{e_\zeta}) - \overline{e_\zeta}(\overline{\omega}, \overline{e_\zeta})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(3\overline{\omega} - \overline{\omega}) = \overline{\omega}$$

■

Пример. *Угловая скорость репера Френеля.*

$$\begin{cases} \overline{\tau}' = k\overline{n} \\ \overline{n}' = -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b} \\ \overline{b}' = -\varkappa\overline{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\overline{\tau}} = \frac{d\overline{\tau}}{ds}\dot{s} \\ \dot{\overline{n}} = \frac{d\overline{n}}{ds}\dot{s} \\ \dot{\overline{b}} = \frac{d\overline{b}}{ds}\dot{s} \end{cases}$$

$$\overline{\omega} = \overline{\tau}(\dot{s}(-k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b}), \overline{b}) + \overline{n}(\dot{s}(-\varkappa\overline{n}, \overline{\tau}) + \overline{b}(\dot{s}(k\overline{n}), \overline{n}) = \dot{s}(\varkappa\overline{\tau} + k\overline{b})$$

Определение. *Угловой скоростью твердого тела называется угловая скорость подвижного репера, с ним связзанного.*

Формула распределения скоростей точек твердого тела

$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$

Доказательство.

$$\overline{AB} = \xi\overline{e_\xi} + \eta\overline{e_\eta} + \zeta\overline{e_\zeta}$$

$$\dot{\overline{AB}} = \xi\dot{\overline{e_\xi}} + \eta\dot{\overline{e_\eta}} + \zeta\dot{\overline{e_\zeta}}, \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$$

$$(\overline{r_B} - \overline{r_A})^{\cdot} = \xi[\overline{\omega}, \overline{e_\xi}] + \eta[\overline{\omega}, \overline{e_\eta}] + \zeta[\overline{\omega}, \overline{e_\zeta}]$$

$$\dot{\overline{r_1}} - \dot{\overline{r_2}} = [\overline{\omega}, \xi\overline{e_\xi} + \eta\overline{e_\eta} + \zeta\overline{e_\zeta}]$$

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

■

Следствие. $S\xi\eta\zeta \to \overline{\omega}$, $S'\xi'\eta'\zeta' \to \overline{\omega}'$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \\ \overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}', \overline{AB}]\end{array}\right| [\overline{\omega} - \overline{\omega}', \overline{AB}] = 0;\ \forall A, B \text{ в абсолютно твердом теле} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\omega} - \overline{\omega}' = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{\omega} = \overline{\omega}'}$$

Утверждение 7. *(Формула Ривальса)* $\overline{w_B} = \overline{w_A} + [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, [\omega, \overline{AB}]]$.

Доказательство.

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

$$\dot{\overline{v_B}} = \dot{\overline{v_A}} + [\dot{\overline{\omega}}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, \dot{\overline{r_B} - \overline{r_A}}\ ]$$

$$\overline{w_B} = \overline{w_A} + [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]]$$

$[\overline{\varepsilon}, \overline{AB}]$ - вращательное ускорение, $[\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]]$ - осестремительное ускорение

■

Геометрический смысл

$\overline{w} = [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]] = \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{AB}) - \overline{AB}\omega^2 = \omega^2(\overline{e_\omega}(\overline{AB}, \overline{e_\omega}) - \overline{AB})$
$|\overline{w_{\mathbf{oc}}}| = \omega^2\rho(B, l)$

Утверждение 8. *Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны.*

Доказательство.

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

$$(\overline{v_B}, \overline{AB}) = (\overline{v_A}, \overline{AB}) + ([\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{AB})$$

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$$

■

Замечание. *Аналогичная теорема для ускорений не верна.*

Классификация движения твердого тела

Поступательное

Определение. *Такое движение твердого тела, при котором угловая скорость равна нулю.*

$$\overline{v_B} \equiv \overline{v_A}$$

$$\overline{w_B} \equiv \overline{v_A}$$

Мгновенное поступательное движение: $\exists t : \overline{\omega}(t) = 0, \quad \overline{\varepsilon}(t) \neq 0$

Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси)

$\exists A, B : \overline{v_A} = \overline{v_B} = 0$
$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{v_A} = \overline{v_B} = 0 \Rightarrow [\omega, \overline{AB}] = 0 \Rightarrow \omega \parallel \overline{AB}$
$\forall M \in l : \overline{v_M} = 0$, l - ось вращения
$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi}\vec{e}_\eta,\ \dot{\vec{e}}_\eta = -\dot{\varphi}\vec{e}_\xi,\ \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$
$\vec{\omega} = \vec{e}_\xi(-\dot{\varphi}\vec{e}_\xi, \vec{e}_\zeta) + \vec{e}_\eta(0, \vec{e}_\xi) + \vec{e}_\zeta(\dot{\varphi}\vec{e}_\eta, \vec{e}_\eta) = \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta = \dot{\varphi}\vec{e}_z$
$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\vec{e}_z$
$\vec{v}_p = \vec{v}_{p'} + [\vec{\omega}, \overline{pp'}] = 0 + [\dot{\varphi}\vec{e}_z, \xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta] = \dot{\varphi}(x\vec{e}_\eta - y\vec{e}_\xi)$
$|\vec{v}_p| = |\vec{\omega}| \cdot |\overline{p'p}|$
$\vec{w}_p = \vec{w}_{p'} + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overline{p'p}]] = 0 + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] - \omega^2\overline{p'p}$

Плоскопараллельное движение

Определение. *Движение твердого тела называется плоскопараллельным, если скорости всех точек тела параллельны некоторой неподвижной плоскости:*

$$\overline{v}_{p_i} \parallel \pi, \ \forall p_i \in ATT$$

$$\overline{v}_{p_i} = \overline{v}_{p_j} + [\overline{\omega}, \overline{p_j p_i}]$$

$$(\overline{p}_i - \overline{v}_{p_i}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \overline{\omega} = 0 \\ \overline{v}_{p_i} = \overline{v}_{p_j}, \ \forall p_i, p_j \in \text{ATT} \\ \overline{\omega} \perp \overline{p}_i - \overline{v}_{p_i} \parallel \pi \end{array} \right.$$

$$\overline{v}_{M_i} = \overline{v}_{M_j} + \omega[\overline{\omega}, \overline{M_j M_i}] = \overline{v}_{M_j}, \quad \forall M_i, M_j : \overline{M_i M_j} \perp \pi \Rightarrow \overline{w}_{M_i} = \overline{w}_{M_j}$$

Качение:

$$\overline{r}_S = x_S \overline{e}_x + y_S \overline{e}_y$$

$$\dot{\overline{e}}_\xi = \dot{\varphi} \overline{e}_\eta, \quad \dot{\overline{e}}_\eta = \dot{\varphi} \overline{e}_\zeta, \quad \dot{\overline{e}}_\zeta = 0$$

$$\overline{\omega} = \dot{\varphi} \overline{e}_z, \quad \overline{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \overline{e}_z \parallel \overline{\omega}$$

$$\overline{v}_M = \overline{v}_S + [\overline{\omega}, \overline{SM}]$$

$$\overline{w}_M = \overline{w}_S + [\overline{\varepsilon}, \overline{SM}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{SM}]] = \overline{w}_s + [\overline{\varepsilon}, \overline{SM}] - \omega^2 \overline{SM}$$

Теорема 3. *Если при плоскопараллельном движении угловая скорость твердого тела отлична от нуля, то существует точка, скорость которой равна нулю в данный момент времени.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \overline{v}_c = \overline{v}_s + [\overline{\omega}, \overline{SC}] \\ \overline{v}_c = 0 \end{cases} \Rightarrow [\overline{\omega}, \overline{v}_s] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{SC}]] = 0$$

$$[\overline{\omega}, \overline{v}_s] + \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\overline{\omega}, \overline{v}_s]}{\omega^2}$$

■

Следствие. *Любое плоскопараллельное движение является либо мгновенно-поступательным, либо мгновенно-вращательным*

Доказательство. $\overline{\omega} = 0$ - мгновенно-поступательное. $\overline{\omega}(t) \neq 0$ - вращение вокруг l.

■

Определение. C *- мгновенный центр скоростей*

Замечание. *Положение* C *меняется со временем.*

Пример. *Качение без проскальзывания*

Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки)

$$\exists \overline{v}_0 \equiv 0$$

$$l \parallel \overline{\omega}, O \in l$$

$$\overline{v}_M = \overline{v}_0 + [\overline{\omega}, \overline{OM}] = 0 + 0, \ \forall M \in l$$

Определение. l *- мгновенная ось вращения*

$$\overline{v}_p = [\overline{\omega}, \overline{OP}], \ \overline{w_p} = [\overline{\varepsilon}, \overline{OP}] + \underbrace{[\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{OP}]]}_{\overline{v}_{OC}}$$

Винтовое движение

Определение. *Движение твердого тела называется винтовым, если тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси, а скорости всех точек, лежащий на этой оси, равны между собой, постоянны и сонаправленны с осью.*

Общий случай

Теорема 4. $\overline{\omega} \neq 0 \Rightarrow \exists l: \ \overline{\omega} \parallel l, \ \overline{v}_{k_i} \parallel l, \ \forall k_i \in l$

Доказательство.

$$\overline{\alpha} \perp \overline{\omega}, \ S \in \alpha$$

$$\begin{cases} \overline{v}_c = \overline{v}_c = \overline{v}_s + [\overline{\omega}, \overline{SC}] \\ \overline{v}_c = \lambda\overline{\omega} \end{cases} \Rightarrow 0 = [\overline{\omega}, \overline{v}_s] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{SC}]]$$

$$[\overline{\omega}, \overline{v}_s] + \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2\overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\overline{\omega}, \overline{v}_c]}{\omega^2}$$

$$\exists l : C \in l, l \parallel \overline{\omega}$$

$$\overline{v}_{C_1} = \overline{v}_C + [\overline{\omega}, \overline{CC_1}] = \overline{v}_C, \quad \forall C_1 \in l$$

■

$$\overline{v}_C = \overline{v}_S + \left[\overline{\omega}, \frac{[\overline{\omega}, \overline{v}_C]}{\omega^2}\right] = \overline{v}_S + \frac{1}{\omega^2}\left(\overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{v}_S) - \omega^2\overline{v}_S\right) = \underbrace{\frac{(\overline{\omega}, \overline{v}_S)}{\omega^2}}_{\lambda}\overline{\omega}$$

$$\lambda = \frac{(\overline{\omega}, \overline{v}_S)}{\omega^2} \text{ - параметр (шаг винта).}$$

Следствие. *Любое движение твердого тела является в каждый момент времени либо мгновенно-поступательным ($\omega = 0, \ \lambda \to +\infty$), либо мгновенно-вращательным ($\omega \neq 0, \ \lambda = 0$) , либо мгновенно-винтовым ($\omega \neq 0, \ \lambda \neq 0$).*

Определение. $\{l, \overline{\omega}, \overline{v}\}$ - *кинематический винт.*

$$\overline{v}_S = v_x\overline{e}_x + v_y\overline{e}_y + v_z\overline{e}_z$$

$$\overline{r}_S = x_S\overline{e}_x + y_S\overline{e}_y + z_S\overline{e}_z$$

$$\overline{\omega} = \omega_x\overline{e}_x + \omega_y\overline{e}_y + \omega_z\overline{e}_z$$

$$\overline{r}_C = x\overline{e}_x + y\overline{e}_y + z\overline{e}_z$$

$$\overline{v}_S + [\overline{\omega}, \overline{SC}] = \lambda\overline{\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{v_x + \omega_y(z - z_S) - \omega_z(y - y_S)}{\omega_x} =$$

$$= \frac{v_y + \omega_z(x - x_S) - \omega_x(z - z_S)}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x(y - y_S) - \omega_y(x - x_S)}{\omega_z}$$

Кинематика сложного движения

$OXYZ$ - неподвижная система отсчета ($\overline{r}$), $O_1\xi\eta\zeta$ - подвижная система отсчета ($\overline{\rho}$).

$$\overline{u} = u_x\overline{e}_x + u_y\overline{e}_y + u_z\overline{e}_z$$
$$\overline{u} = u_\xi\overline{e}_\xi + u_\eta\overline{e}_\eta + u_\zeta\overline{e}_\zeta$$
$$\frac{d\overline{u}}{dt} = \dot{u_x}\overline{e}_x + \dot{u_y}\overline{e}_y + \dot{u_z}\overline{e}_z \text{ - абсолютная производная}$$
$$\dot{\overline{u}} = \dot{u_\xi}\overline{e}_\xi + \dot{u_\eta}\overline{e}_\eta + \dot{u_\zeta}\overline{e}_\zeta \text{ - относительная производная}$$

Теорема 5. *(Связь абсолютной и относительной производной)* $\frac{d\overline{u}}{dt} = \dot{\overline{u}} + [\overline{\omega}, \overline{u}]$, *где* $\overline{\omega}$ *- угловая скорость* $O_1\xi\eta\zeta$ *относительно* $OXYZ$

Доказательство.

$$\frac{du}{dt} = \dot{u}_\xi\overline{e}_\xi + \dot{u}_\eta\overline{e}_\eta + \dot{u}_\zeta\overline{e}_\zeta + u_\xi\frac{d\overline{e}_\xi}{dt} + u_\eta\frac{d\overline{e}_\eta}{dt} + u_\zeta\frac{d\overline{e}_\zeta}{dt} =$$
$$= \dot{\overline{u}} + u_\xi[\overline{\omega}, \overline{e}_\xi] + u_\eta[\overline{\omega}, \overline{e}_\eta] + u_\zeta[\overline{\omega}, \overline{e}_\zeta] = \dot{\overline{u}} + [\overline{\omega}, \overline{u}]$$
$$\left(\frac{d\overline{e}_i}{dt} = [\overline{\omega}, \overline{e}_i] - \text{ - формула Пуассона, } \quad \dot{\overline{e}}_i = 0\right)$$

■

Сложное движение материальной точки

Определение. *Абсолютной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно неподвижной системы отсчета.* $\overline{v}_{абс} = \frac{d}{dt}\overline{r}$

Определение. *Относительной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно подвижной системы отсчета.* $\overline{v}_{отн} = \dot{\overline{\rho}}$

Определение. *Переносной скоростью материальной точки называется абсолютная скорость той точки подвижной системы отсчета, в которой находится движующаяся точка в данный момент времени.*

Теорема 6 (Формула сложения скоростей)**.** $\overline{v}_{абс} = \overline{v}_{отн} + \overline{v}_{пер}$

Доказательство.

$$\overline{v}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\overline{R} + \overline{\rho}) = \frac{dR}{dt} + \dot{\overline{\rho}} + [\overline{\omega}, \overline{\rho}] =$$
$$= \overline{v}_{O_1} + \overline{v}_{\text{отн}} + [\overline{\omega}, \overline{\rho}] = \overline{v}_{\text{отн}} + \overline{v}_{\text{пер}}$$

■

Определение. *Абсолютным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно неподвижной системы отсчета.* $\overline{w}_{абс} = \frac{d}{dt}\overline{v}_{абс}$

Определение. *Относительным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно подвижной системы отсчета.* $\overline{w}_{отн} = \dot{\overline{v}}_{отн}$

Определение. $\overline{w}_{пер} = \overline{\omega}_{O_1} + [\overline{\varepsilon}, \overline{\rho}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{\rho}]]$

Определение. $\overline{w}_{кор} = 2[\overline{\omega}, \overline{v}_{отн}]$

Теорема 7 (Формула сложения ускорений)**.** $\overline{w}_{абс} = \overline{w}_{отн} + \overline{w}_{пер} + \overline{w}_{кор}$

Доказательство.

$$\overline{w}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\overline{v}_{\text{отн}} + \overline{v}_{\text{пер}}) = \frac{d}{dt}(\overline{v}_{\text{отн}} + \overline{v}_{O_1} + [\overline{\omega}, \overline{\rho}]) =$$
$$= \dot{\overline{v}}_{\text{отн}} + [\overline{\omega}, \overline{v}_{\text{отн}}] + \frac{d}{dt}\overline{v}_{O_1} + \left[\frac{d\overline{\omega}}{dt}, \overline{\rho}\right] + [\overline{\omega}, \overline{\rho} + [\overline{\omega}, \overline{\rho}]] =$$
$$= \dot{\overline{v}}_{\text{отн}} + \dot{\overline{v}}_{O_1} + [\overline{\varepsilon}, \overline{\rho}] + 2[\overline{\omega}, \overline{v}_{\text{отн}}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{\rho}]]$$

■

Сложное движение твердого тела

Рассмотрим неподвижную систему отсчета $OXYZ$, подвижную O_1xyz, и систему, связанную с телом $S\xi\eta\zeta$.

Определение. *Абсолютная угловая скорость - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$*

Определение. *Относительная угловая скорость - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно O_1xyz*

Определение. *Переносная угловая скорость - угловая скорость $Oxyz$ относительно $OXYZ$*

Теорема 8 (О сложении угловых скоростей). $\overline{\omega}_{абс} = \overline{\omega}_{отн} + \overline{\omega}_{пер}$

Доказательство.

$$\overline{v}_A^{\text{абс}} = \overline{v}_A^{\text{отн}} + \overline{v}_A^{\text{пер}}$$
$$\overline{v}_B^{\text{абс}} = \overline{v}_B^{\text{отн}} + \overline{v}_B^{\text{пер}}$$
$$\overline{v}_B^{\text{абс}} = \overline{v}_A^{\text{абс}} + [\overline{\omega}_{\text{абс}}, \overline{AB}]$$

$$\overline{v}_B^{\text{отн}} = \overline{v}_A^{\text{отн}} + [\overline{\omega}_{\text{отн}}, \overline{AB}]$$

$$\overline{v}_B^{\text{пер}} = \overline{v}_A^{\text{пер}} + [\overline{\omega}_{\text{пер}}, \overline{AB}]$$
$$\Rightarrow 0 = 0 + [\overline{\omega}_{\text{абс}} - \overline{\omega}_{\text{отн}} - \overline{\omega}_{\text{пер}}, \overline{AB}] = 0, \quad \forall \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{\omega}_{\text{абс}} = \overline{\omega}_{\text{отн}} + \overline{\omega}_{\text{пер}}$$

■

Замечание. $\frac{d\overline{\omega}_{пер}}{dt} = \dot{\overline{\omega}}_{пер} + [\overline{\omega}_{пер}, \overline{\omega}_{пер}] = \dot{\overline{\omega}}_{пер}$

Теорема 9 (О сложении угловых ускорений). $\overline{\varepsilon}_{абс} = \overline{\varepsilon}_{отн} + \overline{\varepsilon}_{пер} + [\overline{\omega}_{пер}, \overline{\omega}_{отн}]$, *где* $\overline{\varepsilon}_{абс} = \frac{d}{dt}\overline{\omega}_{абс}$, $\overline{\varepsilon}_{отн} = \dot{\overline{\omega}}_{отн}$, $\overline{\varepsilon}_{пер} = \frac{d}{dt}\overline{\omega}_{пер} = \dot{\overline{\omega}}_{пер}$

Доказательство.

$$\overline{\varepsilon}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\overline{\omega}_{\text{отн}} + \overline{\omega}_{\text{пер}}) =$$
$$= \dot{\overline{\omega}}_{\text{отн}} + [\overline{\omega}_{\text{пер}}, \overline{\omega}_{\text{отн}}] + \frac{d}{dt}\overline{\omega}_{\text{пер}} = \overline{\varepsilon}_{\text{отн}} + [\overline{\omega}_{\text{пер}}, \overline{\omega}_{\text{отн}}] + \overline{\varepsilon}_{\text{пер}}$$

■

Несколько подвижных сисем отсчета

$OXYZ$ - неподвижная СО
$Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $\ldots Ox_ny_nz_n$ - подвижные СО
$S\xi\eta\zeta$ - связана с телом
$\overline{\omega}$ - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$
Тогда: $\overline{\omega} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\omega_i}$

Кинематические формулы Эйлера

Определение. $Ox = (OXY) \cap (O\xi\eta)$ - *линия узлов*

Определение. $\psi = \angle(Ox, OX)$ - *угол прецессии*

Определение. $\Theta = \angle(O\zeta, OZ)$ - *угол нутации*

Определение. $\varphi = \angle(Ox, O\xi)$ - *угол нутации*

Определение. $\{\psi, \Theta, \varphi\}$ - *углы Эйлера*

Повороты: $OXYZ \xrightarrow{\psi, OZ} OxyZ \xrightarrow{\Theta, Ox} Oxy\zeta \xrightarrow{\varphi, O\zeta} O\xi\eta\zeta$
$\overline{\omega} = \dot{\psi}\overline{e}_z + \dot{\Theta}\overline{e}_x + \dot{\varphi}\overline{e}_\zeta$
$\overline{e}_x = \cos\varphi\overline{e}_\xi + \sin\varphi\overline{e}_\eta$
$\overline{e}_z = \cos\Theta\overline{e}_\zeta + \sin\Theta(\sin\varphi\overline{e}_\xi + \cos\varphi\overline{e}_\eta)$

$$\begin{aligned}\overline{\omega} &= \dot{\psi}(\sin\Theta\sin\varphi\overline{e}_\xi + \sin\Theta\cos\varphi\overline{e}_\eta + \cos\Theta\overline{e}_\zeta) \\ &+ \dot{\Theta}(\cos\varphi\overline{e}_\xi - \sin\overline{e}_\eta) \\ &+ \dot{\varphi}\overline{e}_\zeta = \omega_\xi\overline{e}_\xi + \omega_\eta\overline{e}_\eta + \omega_\zeta\overline{e}_\zeta\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\overline{\omega}_\xi = \dot{\psi}\sin\Theta\sin\varphi + \dot{\Theta}\cos\varphi \\ \overline{\omega}_\eta = \dot{\psi}\sin\Theta\cos\varphi + \dot{\Theta}\sin\varphi \\ \overline{\omega}_\zeta = \dot{\psi}\cos\Theta + \dot{\varphi}\end{cases} \quad \text{- кинематические формулы Эйлера}$$

Определение. *Движение твердого тела называется прецессией, если некоторая ось, неподвижная в теле, в абсолютном пространстве движется по поверхности неподвижного кругового конуса.* $\dot{\Theta} = 0$. *Если* $\dot{\psi} = const$, $\dot{\varphi} = const$, *то прецессия называется регулярной.*

Алгебра кватернионов

Определение. *Алгеброй над полем называется векторное пространство над этим полем, снабженное билинейной операцией умножения.*

Пример.
<u>$n = 2$</u>*(Комплексные числа).* $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

<u>$n = 4$</u>*(Алгебра кватернионов)*

$\Lambda = \lambda_0\overline{i}_0 + \lambda_1\overline{i}_1 + \lambda_2\overline{i}_2 + \lambda_3\overline{i}_3 \in \mathbb{H}$

$\{\overline{i}_0, \overline{i}_1, \overline{i}_2, \overline{i}_3\}$ - базис

$\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda}$

$i_0 \circ i_k = i_k k = \overline{1,3},\ i_0 \circ i_0 = 1$

$i_k \circ i_m = -(i_k, i_m) + [i_k, i_m]k, m \in \{1, 2, 3\}$

$\overline{\lambda} \circ \overline{\mu} = (\lambda_1\overline{i}_1 + \lambda_2\overline{i}_2 + \lambda_3\overline{i}_3) \circ (\mu_1\overline{i}_1 + \mu_2\overline{i}_2 + \mu_3\overline{i}_3) = -(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) + [\overline{\lambda}, \overline{\mu}]$

$\Lambda \circ M = (\lambda + \overline{\lambda}) \circ (\mu + \overline{\mu}) = \lambda_0\mu_0 + \lambda_0\overline{\mu} + \overline{\lambda}\mu_0 - (\overline{\lambda}, \overline{\mu}) + [\overline{\lambda}, \overline{\mu}]$

Свойства:

1. $(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N)$
2. $(\Lambda + M) \circ N = \Lambda \circ N + M \circ N$
3. $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$

Определение.

$$\overline{\Lambda} = \lambda_0 - \overline{\lambda}$$

Утверждение 9.

$$\overline{\Lambda \circ M} = \overline{M} \circ \overline{\Lambda}$$

Доказательство.

$$\overline{\Lambda \circ M} = \lambda_0\mu_0 - (\overline{\lambda}, \overline{\mu}) - \lambda_0\overline{\mu} - \mu_0\overline{\lambda} - [\overline{\lambda}, \overline{\mu}] =$$

$$= (\mu_0 - \overline{\mu}) \circ (\lambda_0 - \overline{\lambda}) = \overline{M} \circ \overline{\Lambda}$$

■

Определение.

$$\| \Lambda \| = \Lambda \circ \overline{\Lambda} = (\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ (\lambda_0 - \overline{\lambda}) = \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k^2 = |\Lambda|^2 \text{ - \textit{норма} } \Lambda$$

Утверждение 10.

$$\| \Lambda \circ M \| = \| \Lambda \| \cdot \| M \|$$

Доказательство.

$$\| \Lambda \circ M \| = (\Lambda \circ M) \circ (\overline{\Lambda \circ M}) = \Lambda \circ \underbrace{M \circ \overline{M}}_{\|M\|} \circ \overline{\Lambda} = \| M \| \cdot \| \Lambda \|$$

■

Определение.

$$\Lambda^{-1} = \frac{\overline{\Lambda}}{\| \Lambda \|}, \ \| \Lambda \| \neq 0$$

Замечание.

$$\Lambda \circ \frac{\overline{\Lambda}}{\| \Lambda \|} = \frac{\overline{\Lambda}}{\| \Lambda \|} \circ \Lambda = \frac{\| \Lambda \|}{\| \Lambda \|} = 1$$

Формула Муавра

$\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda} = |\Lambda| \left(\dfrac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \dfrac{\overline{\lambda}}{|\lambda|} \dfrac{|\overline{\lambda}|}{|\Lambda|} \right) = |\Lambda| \left(\cos\nu + \overline{e} \sin\nu \right)$

$\overline{e} = \dfrac{\overline{\lambda}}{|\overline{\lambda}|}, \ \cos\nu = \dfrac{\lambda_0}{\Lambda}, \ \sin\nu = \dfrac{\overline{\lambda}}{|\Lambda|}$

$\Lambda_1 = |\Lambda_1| (\cos\nu_1 + \overline{e} \sin\nu_1)$

$\Lambda_2 = |\Lambda_2| (\cos\nu_2 + \overline{e} \sin\nu_2)$

$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = |\Lambda_1| \cdot |\Lambda_2| (\cos\nu_1 \cos\nu_2 - \sin\nu_1 \sin\nu_2 (\overline{e}, \overline{e}) + \cos\nu_1 \sin\nu_2 \overline{e} +$

$+ \cos\nu_2 \sin\nu_1 \overline{e} + \sin\nu_2 \sin\nu_2 [\overline{e}, \overline{e}]) = |\Lambda_1| |\Lambda_2| \cdot (\cos(\nu_1 + \nu_2) + \overline{e} \sin(\nu_1 + \nu_2))$

$$\Lambda^k = |\Lambda|^k \cdot (\cos k\nu + \overline{e} \sin k\nu) \text{ — формула Муавра}$$

Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов

$E = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ — неподвижный базис
$E' = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3\}$ — связанный с телом

Теорема 10. *Произвольному положению твердого тела с неподвижной точкой соответсвует номированный кватернион, удовлетворяющий равенству:*

$$\overline{e}_i = \Lambda \circ \overline{e}_i \circ \overline{\Lambda}, \quad i = 1 \ldots 3$$

Замечание. Λ — *нормирован, если* $\| \Lambda \| = 1$

Доказательство.

1. Нормированность

$$\| \overline{e}'_i \| = \| \Lambda \| \cdot \| \overline{e}_i \| \cdot \| \overline{\Lambda} \| \Rightarrow 1 = \| \Lambda \| \cdot 1 \cdot \| \Lambda \| \Rightarrow \| \Lambda \| = 1$$

2. Существование решения. $\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda}$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \\ \overline{e}'_i \circ \Lambda = \Lambda \circ \overline{e}_i \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \\ \overline{e}'_i \circ (\lambda_0 + \overline{\lambda}) = (\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ \overline{e}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 \overline{e}'_i - (\overline{e}'_i, \overline{\lambda}) + [\overline{e}'_i, \overline{\lambda}] = \lambda_0 \overline{e}'_i - (\lambda, \overline{e}'_i) + [\overline{\lambda}, \overline{e}_i] \\ \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \\ (\overline{\lambda}, \overline{r}_i) = 0 \\ \lambda_0 \overline{r}_i - [\overline{\lambda}, \overline{s}_i] = 0 \end{cases} \qquad \overline{r}_i = \overline{e}'_i - \overline{e}_i, \ \overline{s}_i = \overline{e}'_i + \overline{e}_i \quad i = 1 \ldots 3$$

(a)

$$\begin{aligned} &(\overline{r}_k, \overline{s}_k) = (\overline{e}'_k - \overline{e}_k, \overline{e}'_k + \overline{e}_k) = (\overline{e}'_k, \overline{e}'_k) - (\overline{e}_k, \overline{e}_k) = 0 \\ &(\overline{r}_k, \overline{s}_l) = (\overline{e}'_k - \overline{e}_k, \overline{e}'_l + \overline{e}_l) = (\overline{e}'_k, \overline{e}'_l) + (\overline{e}'_k, \overline{e}_l) - (\overline{e}_k, \overline{e}'_l) - (\overline{e}_k, \overline{e}_l) = \\ &= -(\overline{e}'_l - \overline{e}_l, \overline{e}'_k + \overline{e}_k) = -(\overline{s}_k, \overline{r}_l), \ k \neq 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &(\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3) = (\overline{e}'_1 - \overline{e}_1, \overline{e}'_2 - \overline{e}_2, \overline{e}'_3 - \overline{e}_3) = (\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3) - (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) - \\ &- (\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}_3) + (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}'_3) = 1 - 1 - (\underbrace{[\overline{e}'_1, \overline{e}'_2]}_{\overline{e}'_3}, \overline{e}_3) + (\underbrace{[\overline{e}_1, \overline{e}_2]}_{\overline{e}_3}, \overline{e}'_3) = 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\overline{r}_1(\overline{s}_2, \overline{r}_3) + \overline{r}_2(\overline{s}_3, \overline{r}_1) + \overline{r}_3(\overline{s}_1, \overline{r}_2)$$

$$(2b) \Rightarrow c_1 \overline{r}_1 + c_2 \overline{r}_2 + c_3 \overline{r}_3 = 0$$

$$\begin{cases} 0 + c_2(\overline{s}_1, \overline{r}_2) - c_3(\overline{s}_2, \overline{r}_1) = 0 \\ -c_1(\overline{s}_1, \overline{r}_2) + 0 + c_3(\overline{s}_2, \overline{r}_3) = 0 \\ c_1(\overline{s}_3, \overline{r}_1) - c_2(\overline{s}_2, \overline{r}_3) + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = (\overline{s}_2, \overline{r}_3) \\ c_2 = (\overline{s}_3, \overline{r}_1) \\ c_3 = (\overline{s}_1, \overline{r}_2) \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_0^2 + \lambda^2 = 1 & (1) \\ (\overline{r}_k, \overline{\lambda}) = 0 & (2) \\ \lambda_0 \overline{r}_k + [\overline{s}_k, \overline{\lambda}] = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 \overline{r}_1 + [\overline{s}_1, \alpha[\overline{r}_1, \overline{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0 \overline{r}_2 + [\overline{s}_2, \alpha[\overline{r}_1, \overline{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0 \overline{r}_3 + [\overline{s}_3, \alpha[\overline{r}_1, \overline{r}_2]] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 \overline{r}_1 + \alpha \overline{r}_1 (\overline{s}_1, \overline{r}_1) - 0 = 0 \\ \lambda_0 \overline{r}_2 + 0 - \alpha \overline{r}_2 (\overline{s}_2, \overline{r}_1) = 0 \\ \lambda_0 \overline{r}_3 + \alpha r_1 (\overline{s}_3, \overline{r}_2) - \alpha r_2 (\overline{s}_3, \overline{r}_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 \overline{r}_1 + \alpha \overline{r}_1 (\overline{s}_1, \overline{r}_2) = 0 \\ \lambda_0 \overline{r}_2 + \alpha \overline{r}_2 (\overline{s}_1, \overline{r}_2) = 0 \\ \lambda_0 \overline{r}_3 + \alpha \overline{r}_3 (\overline{s}_1, \overline{r}_2) = 0 \end{cases} \qquad \lambda_0 = -\alpha(\overline{s}_1, \overline{r}_2) = \alpha(\overline{s}_2, \overline{r}_1)$$

$$(1) \Rightarrow \alpha^2((\overline{s}_2, \overline{r}_1)^2 + [\overline{r}_1, \overline{e}_2]^2)^2 = 1 \Rightarrow \qquad \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{(\overline{s}_2, \overline{r}_1)^2 + [\overline{r}_1, \overline{r}_2]^2}}$$

$$\Lambda = \pm \frac{(\overline{s}_2, \overline{r}_1) + [\overline{r}_1, \overline{r}_2]}{\sqrt{(\overline{s}_2, \overline{r}_1)^2 + [\overline{r}_1, \overline{r}_2]^2}}$$

■

Определение.

$f(M) = \Lambda \circ M \circ \overline{\Lambda}$; $M \to f(M)$, $\| \Lambda \| = 1$— *присоединенное преобразование*

Утверждение 11. *Присоединенное преобразование не меняет скалярные части кватернионов и модуль векторной части*

Доказательство.

1. $f(M) = \Lambda \circ (\mu_0 + \overline{\mu}) \circ \overline{\Lambda} = \Lambda \circ \mu_0 \circ \overline{\Lambda} + \Lambda \circ \overline{\mu} \circ \Lambda = \mu_0 \| \Lambda \| + f(\overline{\mu}) = \mu_0 + \overline{\mu}'$
2. $\mu_0^2 + \overline{\mu}^2 = \| M \| = \| \Lambda \circ M \circ \overline{\Lambda} \| = \| f(M) \| = \mu_0^2 + \overline{\mu}'^2 \Rightarrow \mu^2 = \overline{\mu}'^2$

■

Следствие. *Всегда существует присоединенное преобразование, переводящее орты неподвижного базиса в орты базиса, связанного с телом.*

Доказательство.

$$\overline{e}_i' = \Lambda \circ \overline{e}_i \circ \overline{\Lambda} = f(\overline{e}_i) \tag{4}$$

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{3} r_k \overline{e}_k, \quad f(r) = \Lambda \circ \sum r_k \overline{e}_k \overline{\Lambda} = \sum_k r_k f(\overline{e}_k) = \sum_k = r_k \overline{e}_k = \overline{r}' \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

■

$$\boxed{\overline{r}' = \Lambda \circ \overline{r} \circ \overline{\Lambda}} \tag{7}$$

Следствие. *При повороте твердого тела вокруг неподвижной точки справедлива (7), где $\overline{r}$ – начальное положение точки, $\overline{r}'$ – ее положение после поворота, а Λ – кватернион соответствующего преобразования.*

Теорема 11. *Преобразование, заданное кватернионом $\Lambda = \cos\nu + \overline{e} \sin\nu$ соответствует повороту пространства вокруг вектора $\overline{e}$ на угол 2ν*

Доказательство.

1.

$$\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda}$$
$$\overline{\lambda}' f(\overline{\lambda}) = \Lambda \circ \overline{\lambda} \circ \overline{\Lambda} = (\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ \overline{\Lambda} \circ (\lambda_0 - \overline{\lambda}) =$$

$$(\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ (-\lambda^2 + \lambda_0\overline{\lambda}) = -\lambda_0\overline{\lambda}^2 - \lambda_0\overline{\lambda}^2 + \lambda_0^2 + \lambda^2\overline{\lambda} =$$
$$= \overline{\lambda}(\lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2) \Rightarrow \overline{\lambda} \text{ — неподвижная ось} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{e} = \frac{\overline{\lambda}}{\sin\nu} \text{ — ось поворота}$$
$$\overline{a} \in \pi \perp \overline{e}$$
$$\overline{a}' = f(\overline{a}) = (\cos\nu + \overline{e}\sin\nu) \circ \overline{a} \circ (\cos\nu - \overline{e}\sin\nu) =$$
$$= (\cos\nu + \overline{e}\sin\nu) \circ ([\overline{a}, \overline{e}] \cdot \sin\nu + \cos\nu\overline{a} - \sin\nu[\overline{a}, \overline{e}]) =$$
$$\cos^2\nu\overline{a} + \cos\nu\sin\nu(\overline{a}, \overline{e}) + \cos\nu\sin\nu = \ldots$$

2.

$$\overline{a}' = (\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2} \circ \overline{a}) \circ (\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}) =$$
$$= (\overline{a}\cos\frac{\varphi}{2} + [\overline{e}, \overline{a}]\sin\frac{\varphi}{2}) \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}) =$$
$$= \overline{a}\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2[\overline{e}, \overline{a}]\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} - \overline{a}\sin^2\frac{\varphi}{2} =$$
$$= \overline{a}\cos\varphi + [\overline{e}, \overline{a}]\sin\varphi$$

$$|\overline{a}'| = |\overline{a}|$$

■

Следствие.

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1\overline{e}_1, +\lambda_2\overline{e}_2 + \lambda_3\overline{e}_3 = \lambda_0 + \lambda_1\overline{e}_1' + \lambda_2\overline{e}_2' + \lambda_3\overline{e}_3'$$

Определение.

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \text{ — \textit{Параметры Родрига-Гамильтона}}$$

Следствие (Теорема Эйлера о конечном повороте)**.** *Любые два положения твердого тела с неподвижной точкой могут быть получены одно из другого одним поворотом вокруг некторой оси, проходящей через неподвижную точку на некоторый угол*

Доказательство.

1.

$$\forall E, E' \ \ \exists \Lambda E \to E'$$

2.

$$\forall \Lambda \overline{r} \to \overline{r}' \Leftrightarrow \text{Поворот вокруг } e \text{ на } \varphi$$

■

$E \xrightarrow{\Lambda_1} E' \xrightarrow{\Lambda_2} E'',\ E \xrightarrow{\Lambda}$

$\overline{r}' = \Lambda_1 \circ \overline{r} \circ \overline{\Lambda},\ \overline{r}'' = \Lambda_2 \circ \overline{r}' \circ \overline{\Lambda}$

$\overline{r}'' = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \overline{r} \circ \overline{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}_2 = \Lambda \circ \overline{r} \circ \overline{\Lambda}, \quad \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$

$\boxed{\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1}$ — формула сложения поворотов

$\Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum\limits_{k=1}^{3} \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k'' = \lambda_0^{(2)} + \sum\limits_{k=1}^{3} \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k'$

$\Lambda_2^* = \lambda_0^{(2)} + \sum\limits_{k=1}^{3} \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k$ — собственный к Λ_2 кватернион

$\overline{e}_k' = \Lambda_1 \circ \overline{e}_k \circ \overline{\Lambda}_1, \quad \Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \Lambda_1 \circ \overline{e}_k \circ \overline{\Lambda}_1 =$

$= \Lambda_1 \circ (\lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k) \circ \overline{\Lambda}_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ \overline{\Lambda}_1$

$\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ (\overline{\Lambda}_1 \circ \Lambda_1) = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*, \quad \Lambda_1^* = \Lambda_1$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*}$$

— формула сложения поворотов в параметрах Родрига-Гамильтона

Кинематика твердого тела в кватернионном описании

Теорема 12. *Угловая скорость твердого тела определяется равенством:*

$$\overline{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}$$

где Λ - кватернион, задающий положение твердого тела относительно неподвижного базиса

Доказательство.

1.

$$B = \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}$$

$$B + \overline{B} = \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} + \overline{\left(\dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}\right)} = \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} + \Lambda \circ \overline{\Lambda} =$$

$$= \frac{d}{dt}(\Lambda \circ \overline{\Lambda}) = \frac{d}{dt}(\| \Lambda \|) = 0 \Rightarrow B = \overline{B}$$

2.

$$\dot{\overline{e}}_k' = [\overline{\omega}, \overline{e}_k]$$

$$\overline{e}_k' = \Lambda \circ \overline{e}_k \circ \overline{\Lambda}, \quad \overline{e}_k = \overline{\Lambda} \circ \overline{e}_k' \circ \Lambda$$

$$\dot{\overline{e}}_k' = \dot{\Lambda} \circ \overline{e}_k \circ \Lambda + \Lambda \circ \overline{e}_k \circ \dot{\overline{\Lambda}} =$$

$$\dot{\Lambda} \circ (\overline{\Lambda} \circ \overline{e}_k' \circ \Lambda) \circ \overline{\Lambda} + \Lambda \circ (\overline{\Lambda} \circ \overline{e}_k' \circ \Lambda) \circ \dot{\overline{\Lambda}} =$$

$$= \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} \circ \overline{e}_k' + \overline{e}_k' \circ \Lambda \circ \dot{\overline{\Lambda}} = B \circ \overline{e}_k' + \overline{e}_k' \circ \overline{B} =$$

$$[2\overline{B}, \overline{e}_k] \Rightarrow 2\overline{B} = \overline{\omega}$$

■

Пример.

$$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\overline{\omega} = 2(-\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\dot\varphi}{2} + \dot{\overline{e}}\sin\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\dot\varphi}{2})\circ(\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}) =$$
$$= \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\dot\varphi + \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\dot\varphi + \overline{e}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\dot\varphi +$$
$$+ \overline{e}\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot\dot\varphi + 2\dot{\overline{e}}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2[\overline{e},\dot{\overline{e}}]\sin^2\frac{\varphi}{2} = \overline{e}\dot\varphi + \dot{\overline{e}}\sin\varphi + 2[\overline{e},\dot{\overline{e}}]\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Замечание.

1.
$$\overline{\omega} = \overline{e}\dot\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi = 0\\ \dot{\overline{e}} = 0\end{array}\right.$$

2.
$$\varphi \ll 1.\ \ \overline{\omega} \approx \overline{e}\varphi + \dot{\overline{e}}\varphi = \frac{d}{dt}(\overline{e}\varphi)$$

3.
$$\overline{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{e}\Delta\varphi}{\Delta t},\quad E(t)\xrightarrow{\Delta\Lambda}E(t+\delta t),\ \ \Delta\Lambda = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \Delta\overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}$$

Уравнение Пуассона

$$\omega = 2\dot\Lambda\circ\overline{\Lambda}$$

$$\boxed{\dot\Lambda = \frac{1}{2}\overline{\omega}\Lambda} \text{ — кинематическое уравнение Пуассона} \tag{8}$$

$$\omega = p\overline{e}'_1 + q\overline{e}'_2 + r\overline{e}'_3,\quad \overline{\omega}^* = p\overline{e}_1 + q\overline{e}_2 + r\overline{e}_3$$

$$\dot\Lambda = \frac{1}{2}\Lambda\circ\overline{\omega}^* \tag{9}$$

Интегрирование уравнения Пуассона

$$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(\overline{x}, t) \tag{10}$$

Определение. *Функция $\Phi(\overline{x}, t)$ называется первым интегралом системы (10), если*

$$\Phi(\overline{x}(t), t) = const$$

где $\overline{x}(t)$ — решение системы (10)

Утверждение 12. *Система (8) имеет первый интерграл вида*

$$\|\Lambda\| = const$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}(\|\Lambda\|) = \frac{d}{dt}(\Lambda\circ\overline{\Lambda}) = \dot\Lambda\circ\overline{\Lambda} + \Lambda\circ\dot{\overline{\Lambda}} = \frac{1}{2}\overline{\omega}\circ\Lambda\circ\overline{\Lambda}\dots$$

■

Утверждение 13. *Общее решение системы (8) имеет вид:*

$$\Lambda(t) = \Lambda'(t)\cdot C$$

где Λ' - частное решение, $C = const$.

Доказательство. Λ, Λ' - Нетривиальные решения (8)

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda, \quad \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda'$$

$$M = (\Lambda')^{-1} \circ \Lambda, \quad \Lambda = \Lambda' \circ M$$

$$(9) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Lambda}' \circ M + \Lambda' \circ \dot{M} = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda' \circ M \\ \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Lambda' \circ \dot{M} = 0 \Leftrightarrow \dot{M} = 0 \Leftrightarrow M = C = const$$

■

Следствие.

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda, \quad \Lambda(\varphi) = 1 \tag{11}$$

Случай 1. Вращение вокруг неподвижной оси $\overline{\omega} = \overline{e}\omega$, $\overline{e} = const$:

$$(11) \Rightarrow \Lambda \cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \int\limits_0^t \omega(\tau)d\tau$$

Случай 2. Регулярная прецессия:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$$

$$\Lambda_z = \cos\frac{\psi}{2} + \overline{e}_z \sin\frac{\varphi}{2}, \psi = \int\limits_0^t \omega_1(\tau)d\tau$$

$$\Lambda_\zeta = \cos\frac{\psi}{2} + \overline{e}_\zeta \sin\frac{\varphi}{2}, \varphi = \int\limits_0^t \omega_2(\tau)d\tau$$

1 способ:
$O\zeta$ — ось тела (подвижная)

$$\Lambda_1 = \Lambda_z, \quad \Lambda_2 = \Lambda_\zeta$$

$Oxyz$ — неподвижный базис, $Oxz = O\nu\zeta(0)$

$\Lambda_2^* = \cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}_\xi(0)\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi}{2} + (\sin\Theta\overline{e}_x + \cos\Theta\overline{e}_z)\sin\frac{\varphi}{2}$

$\Lambda = (\cos\frac{\psi}{2} + \overline{e}_z\sin\frac{\psi}{2}) \circ \Lambda_2 = \dots$

2 способ:
$O\zeta$ — неподвижна (ось тела в начальный момент времени)

$$\Lambda_1 = \Lambda_\zeta, \quad \Lambda_2 = \Lambda_z$$

Динамика

Принцип детерминированности Ньютона

$$\overline{r}_i(t) = \varphi_i(\overline{r}_1, \dots, \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \dots, \dot{\overline{r}}_N, t_0, t) \ \ \forall t_0$$

$$\ddot{\overline{r}}_i(t) = \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} = f_i(\overline{r}_1, \dots, \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \dots, \dot{\overline{r}}_N, t_0, t)$$

$$\overline{r}_i(t_0) = f_i(\dots, t) \ \ \forall t_0$$

$$\ddot{\overline{r}}_i(t_0) = f_i(\overline{r}_1, \dots, \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \dots, \dot{\overline{r}}_N, t) \ \ \forall t_0 \tag{12}$$

Пример. $f = 0 \Rightarrow \ddot{\overline{r}} = 0, \ \overline{r} = \overline{r}_0 + \dot{\overline{r}}_0(t - t_0)$
(Закон инерции Галилео-Ньютона); если m_i - масса точки $\overline{r}_i$

$$m_i\ddot{\overline{r}}_i = \overline{F}_i; \quad \overline{F}_i = m_i\overline{f}_i \ \text{— сила}$$

Преобразование Галилея

$\overline{r} \to r^* = \underbrace{A\overline{r}}_{\text{Ортог. пр.}} + \overline{v}_0 t + \overline{r}_0, \quad t^* = t + t_0$

$A = const, \quad \overline{v}_0 = const, \quad \overline{r}_0 = const$

Принцип относительности Галилея

$m_i\ddot{\overline{r}}_i = \overline{F}_i(\overline{r}_1, \ldots \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \ldots, \dot{\overline{r}}_N, t)$

$m_i\ddot{\overline{r}}_i^* = \overline{F}_i(\overline{r}_1^*, \ldots \overline{r}_N^*, \dot{\overline{r}}_1^*, \ldots, \dot{\overline{r}}_N^*, t^*)$

$\dfrac{d\overline{r}_i^*}{dt^*} = \dfrac{d\overline{r}_i^*}{dt} \cdot 1$

$\ddot{\overline{r}}_i^* = A\ddot{\overline{r}} \Rightarrow \overline{F}_i^* = A\overline{F}_i$

Принцип относительности:

$$\overline{F}_i^*(\overline{r}_1^*, \ldots \overline{r}_N^*, \dot{\overline{r}}_1^*, \ldots, \dot{\overline{r}}_N^*, t^*) = \overline{F}_i(\overline{r}_1^*, \ldots \overline{r}_N^*, \dot{\overline{r}}_1^*, \ldots, \dot{\overline{r}}_N^*, t^*)$$

Пример. $n = 1$:
$\overline{F} = A\overline{F}, \quad \forall A \Leftrightarrow \overline{F} = 0$

Пример. $r^* = \overline{r}, \quad t^* = t - t_0, \quad t = t_0 \Rightarrow \overline{F}_i(\ldots, t) = \overline{F}_i(\ldots, 0)$

Закон равенства действия и противодействия

$$\overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}, \quad \overline{F}_{ij} \parallel \overline{r}_j - \overline{r}_i$$

Принцип суперпозиции

$\overline{F}_i = \sum\limits_{i \neq j} \overline{F}_{ij}$ (Для замкнутых систем)

$\overline{F}_i = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)}$

$\overline{F}_i^{(e)}$ — внешняя сила

$\overline{F}_i^{(i)}$ — внутренняя сила

Система неинерциальная

$\overline{w}_i^{\text{абс}} = \overline{w}_i^{\text{отн}} + \overline{w}_i^{\text{пер}} + \overline{w}_i^{\text{кор}}$

$m_i\ddot{\overline{\rho}}_i = \overline{F}_i + \overline{F}_i^{\text{отн}} + \overline{F}_i^{\text{пер}}$

$\overline{w}_i^{\text{отн}} = \ddot{\overline{\rho}}_i; \ \overline{F}_i^{\text{отн}} = -m_i\overline{w}_i^{\text{отн}}; \ \overline{F}_i^{\text{пер}} = -m_i(\overline{w}_0 + [\overline{\varepsilon}, \overline{\rho}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{\rho}_i]])$

Определение. $\overline{M}_O = [\overline{r}, \overline{F}]$ *— момент инерции силы* $\overline{F}$ *относительно* O

Определение. $M_l = (\overline{M}_O, \overline{l})$ *— момент силы* $\overline{F}$ *относительно оси* $\overline{l}$

Утверждение 14. M_l *не зависит от выбора точки* O.

Доказательство.

$M_l = (\overline{M}_O, \overline{l}) = ([\overline{r}, \overline{F}], \overline{l}) = ([\overline{r}' + \overline{O'O}, \overline{F}], \overline{l}) =$
$= ([\overline{r}', \overline{F}], \overline{l}) + \underbrace{([\lambda\overline{l}, \overline{F}], \overline{l})}_{0} \Rightarrow M_l = (\overline{M}_O, \overline{l})$

■

Определение. $(\overline{F}, d\overline{r})$ *— элементарная работа* (dA, $d'A$, δA, $A_{эл}$)

Стационарные силы

$F = \overline{F}(\overline{r}, \dot{\overline{r}}$ — стационарная сила
$W = (\overline{F}, \overline{v}) \leqslant 0,\ \ \overline{F}(\overline{r}, \dot{\overline{r}})$ — диссипативная сила

Пример.

- $\overline{F} = -kN\frac{\dot{\overline{r}}}{|\dot{\overline{r}}|}$ — *сухое трение*
- $\overline{F} = -\beta\dot{\overline{r}}$ — *вязкое трение*

$W = (\overline{F}, \overline{v}) \equiv 0, \quad \overline{F}$ — гироскопическая сила

Пример. $\overline{F}^{\text{кор}} = -m\overline{w}^{\text{кор}} = -2m(\overline{\omega}, \overline{v})$
$(\overline{F}^{\text{кор}}, \overline{v}) = -2m([\overline{\omega}, \overline{v}], \overline{v}) = 0$

Позиционные силы

$\overline{F} = \overline{F}(r, t)$ — позиционная сила (силовое поле)

Определение. $\overline{F}(\overline{r}, t)$ — *потенциальная сила.*

$$\exists u(\overline{r}, t): \quad \overline{F} = grad_r - u$$

u — *силовая функция,* $\Pi = -u$ — *потенциальная энергия.*

Пример. $F = F(x,t)\overline{e}_x = \frac{\partial u}{\partial \overline{r}} = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{e}_y$
$U = \int F(x,t)dx$

Определение. *Потенциальная сила* $\overline{F}(\overline{r})$ - *консервативная.*

Пример. $F = -\frac{\gamma m}{r^2} \cdot \frac{\overline{r}}{r}$ — *консервативная, т.к.*
$U = \int(\overline{F}, d\overline{r}) = -\int \frac{\gamma m}{r^3}(\overline{r}, d\overline{r}) = -\int \frac{\gamma m}{r^3} d\left(\frac{(\overline{r}, \overline{r})}{2}\right) =$
$= -\int \frac{\gamma m}{r^3} d\frac{r^2}{2} = -\int \frac{\gamma m}{r^2}dr = \frac{\gamma m}{r}; \quad n = -\frac{\gamma m}{r}$
$U = \int(\overline{F}, d\overline{r})$

Критерий потенциальности

Утверждение 15.

$$\overline{F}(\overline{r}) = F_x\overline{e}_x + F_y\overline{e}_y + F_z\overline{e}_z \text{ — } \textit{потенциальная} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \end{cases}$$

Доказательство.

$\Rightarrow$
$u \in c^2$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$\Leftarrow$

$$u = \int\limits_{\overline{r}_0}^{\overline{r}} F_x(\xi, y, z)d\xi + \int\limits_{\overline{r}_0}^{\overline{r}} F_x(x_0, \eta, z)d\eta + \int\limits_{\overline{r}_0}^{\overline{r}} F_x(x_0, y_0, \zeta)d\zeta$$

■

Следствие. $F(\overline{r})$ — *потенциальная сила* $\Leftrightarrow \oint\limits_C (\overline{F}, d\overline{r}) = 0, \quad \forall C$

Доказательство.

$$\oint\limits_{C=\delta W} (\overline{F}, d\overline{r}) = -\int\limits_W (\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x})dxdy + \ldots = 0$$

■

Система точек $\overline{F}_i = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)}$.

$$F_i^{(i)} = \sum_{j \neq i} \overline{F}_i j;\ \overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji} = F_{ij}(|\overline{r}_i - \overline{r}_j|)\frac{\overline{r}_j - \overline{r}_i}{|\overline{r}_j - \overline{r}_i|}$$

Свойства внутренних сил

1.

$$\sum_{i=1}^N \overline{F}_i^{(i)} = 0$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^N \overline{F}_i^{(i)} = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} \overline{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i} \overline{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N (\overline{F}_{ij} - \overline{F}_{ji}) = 0$$

■

2.

$$\sum_{i=1}^N [\overline{r}_i, \overline{F}_i^{(i)}] = 0$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j<i} [\overline{r}_i, \overline{F}_{ij}] + \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} [\overline{r}_j, \overline{F}_{ij}] = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} [\overline{r}_i - \overline{r}_j, \overline{F}_{ij}] = 0$$

■

3. Внутренние силы потенциальны, т.е.

$$\exists u(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_n):\ \overline{F}_i^{(i)} = grad_{\overline{r}_i} u$$

Доказательство.

$$u_i j(|\overline{r}|) = \int\limits_0^{|\overline{r}|} F_{ij}(\overline{\rho})d\rho$$

$$u = \sum_{i, i<j} u_{ij} \qquad \frac{\partial u}{\partial \overline{r}_i} = \sum_{i,i<j} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \overline{r}_i} = \sum \frac{\partial u_{ij}}{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|} \cdot \frac{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|}{\partial \overline{r}_i}$$

$$|\overline{r}_i - \overline{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$$\frac{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_j)}{|\overline{r}_i - \overline{r}_j|} \quad \text{Аналогично для } y_i \text{ и } z_i$$

$$\frac{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|}{\partial r_i} = \frac{\overline{r}_i - \overline{r}_j}{|\overline{r}_i - \overline{r}_j|}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{r}_i} = \sum_{i,j,\ i<j} F_{ij}(\overline{r}_i - \overline{r}_j) \cdot \frac{\overline{r}_i - \overline{r}_j}{|\overline{r}_i - \overline{r}_j|} = \overline{F}_i^{(i)}$$

■

4. Работа внутренних сил в тердом теле равна нулю.

   Доказательство.

$$\sum (\overline{F}_i^{(i)}, v_i) = \sum (\overline{F}_i^{(i)}, \overline{v}_s + [\overline{\omega}, \overline{\rho}_i]) =$$

$$= \left(\underbrace{\sum \overline{F}_i^{(i)}}_{0}, \overline{v}_s \right) + \left(\overline{\omega}, \underbrace{\sum [\overline{\rho}_i, \overline{F}_i^{(i)}]}_{0} \right) = 0$$

■

Основные теоремы динамики

Основные динамические величины

Определение. $\overline{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overline{v}_i$ *— импульс.* $\overline{K}_O = \sum_{i=1}^{N} [[\overline{r}_i, m_i \overline{v}_i]$ *— кинематический момент онисительно точки* O. $K_l = (\overline{K}_0, \overline{e}_l)$ *— кинематический момент относительно оси* l.

Замечание. $O \in l$, $\ \overline{e}_l \parallel \bar{l}$; K_l *не зависит от точки* O.

Определение. $T = \frac{1}{2} = \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\overline{v}_i, \overline{v}_i)$ *— кинетическая энергия.*

Определение. S *— центр масс системы:*

$$\overline{r}_S = \frac{\sum m_i \overline{r}_i}{m}$$

$$\overline{P} = \sum m_i \frac{d\overline{r}_i}{d\tau} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \overline{r}_i\right) = \frac{d}{dt}(m\overline{r}_S) = m\overline{v}_S$$

$$\boxed{\overline{P} = m\overline{v}_S}$$

Определение. *Осями Кенига называется система отсчета с началом в центра масс системы и осями, параллельными неподвижным. (Движется поступательно вместе с цетром масс)*

$$\overline{r}_i = \overline{R} + \overline{\rho}_i$$

Определение.

$$\overline{K}_{кин} = \sum[\overline{\rho}_i, m\dot{\overline{\rho}}_i]$$

$$T_{\text{кин}} = \frac{1}{2}\sum m_i \rho_i^2$$

Теорема 13 (Формулы Кенига).

$$\overline{K}_O = [\overline{r}_S, m\overline{v}_S] + \overline{K}_{кен}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + T_{кен}$$

Доказательство.

$$\overline{K}_0 = \sum[\overline{R} + \overline{\rho}, m_i\dot{\overline{R}} + m_i\dot{\overline{\rho}}_i] = \left[\overline{R}, \left(\sum m_i\right)\dot{\overline{R}}\right] + \left[\overline{R}, \sum m_i\dot{\overline{\rho}}_i\right] +$$

$$+ \left[\sum m_i\overline{\rho}_i, \dot{\overline{\rho}}_i, \overline{R}\right] + \sum[\overline{\rho}_i m_i\dot{\overline{\rho}}_i] = [\overline{r}_S, m\overline{v}_S] + \overline{K}_{\text{кен}}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{\overline{R}}_i + \dot{\overline{\rho}}_i, \dot{\overline{R}}_i + \dot{\overline{\rho}}_i) = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)\dot{\overline{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\dot{\overline{\rho}}_i^2 +$$

$$+ \underbrace{\sum m_i(\overline{R}, \overline{\rho})}_{0} = \frac{1}{2}mv_S^2 + T_{\text{кен}}$$

■

Теорема 14 (Об изменении импульса).

$$\dot{\overline{P}} = \sum \overline{F}_i^{(e)} = \overline{F}$$

Доказательство.

$$\dot{\overline{P}}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i\overline{v}_i = \sum m_i\overline{w}_i = \sum \overline{F}_i^{(e)} + \underbrace{\sum \overline{F}_i^{(i)}}_{0} = \overline{F}$$

■

Теорема 15 (Формула движения центра масс).

$$m\overline{w}_S = \overline{F}$$

Следствие.

$$\overline{F} = 0 \Rightarrow \overline{w}_S = 0 \Rightarrow \overline{v}_S = \overline{v}_0 = const \Rightarrow \overline{r}_S = \overline{v}_0(t - t_0) + \overline{r}_0$$

Следствие.

$$(\overline{F}, \overline{e}_x) = 0 \Rightarrow (\dot{\overline{P}}, \overline{e}_x) = 0 \Rightarrow \overline{v}_x = const$$

Теорема 16 (Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижного полюса).

$$\overline{K}_O = \sum[\overline{r}_i, \overline{F}_i^{(e)}] = \overline{M}_O$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}\overline{K}_O = \frac{d}{dt}\left(\sum[\overline{r}_i, m_i\overline{v}_i]\right) = \sum\left[\frac{d\overline{r}_i}{dt}, m_i\overline{v}_i\right] + \sum[\overline{r}_i, m_i\dot{\overline{v}}_i] =$$

$$= \sum[\overline{r}_i, \overline{F}_i^{(e)}] + \sum[\overline{r}_i, \overline{F}_i^{(e)}] = \overline{M}_O$$

■

Следствие.

$$\overline{M}_O = 0 \Rightarrow \overline{K}_O = const$$

Следствие.

$$M_l = (\overline{M}_O, \overline{e}_l) = 0, \quad \overline{e}_l = const \Rightarrow K_l = const$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}K_l = \frac{d}{dt}(\overline{K}_O, \overline{e}_l) = \left(\frac{d\overline{K}_O}{dt}, \overline{e}_l\right) + 0 = (\overline{M}_O, \overline{e}_l) = M_l$$

■

Следствие.

$$\dot{K}_l = M_l$$

Формула преобразования кинетического момента при смене полюса

$$\overline{K}_B = \overline{K}_A + [\overline{P}, \overline{AB}]$$

Доказательство.

$$\overline{K}_B = \sum[\overline{BA} + \overline{\rho}_i, m_i\overline{v}_i] = [\overline{BA}, m_i\overline{v}_i] + \overline{K}_A = \overline{K}_A + [\overline{P}, \overline{AB}]$$

■

Формула преобразовани момента сил при смене полюса

$$\overline{M}_B = \overline{M}_A + [\overline{F}, \overline{AB}]$$

Доказательство. Аналогично. ■

Теорема 17.

$$\dot{\overline{K}}_A = \overline{M}_A + [\overline{P}, \overline{v}_A]$$

Доказательство.

$$\overline{K}_A = \overline{K}_O + [\overline{P}, \overline{r}_A], \quad (\overline{v}_0 \equiv 0)$$
$$\dot{\overline{K}}_A = \dot{\overline{K}}_O + [\dot{\overline{P}}, \overline{r}_A] + [\overline{P}, \dot{\overline{r}}_A] = \overline{M}_O + [\overline{F}, \overline{r}_A] + [\overline{P}, \overline{v}_A] =$$
$$\overline{M}_A + [\overline{P}, \overline{v}_A]$$

■

Следствие (Первая теорема Кенига)**.**

$$\dot{\overline{K}}_{кен} = \overline{M}_S$$

Доказательство.

$$\overline{K}_{\text{кен}} = \overline{K}_S; \quad \dot{\overline{K}}_{\text{кен}} = \overline{M}_S + [\overline{P}, \overline{v}_S] = \overline{M}_S + [m\overline{v}_S, \overline{v}_S] = \overline{M}_S$$

■

Теорема 18 (Об изменении кинетической энергии)**.**

$$\dot{T} = \sum(\overline{F}_u(e), \overline{v}_i) + \sum(\overline{F}_i^{(i)}, \overline{v}_i)$$

Доказательство.

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(\overline{v}_i, \overline{v}_i)$$
$$\dot{T} = \sum(\overline{v}_i, m\dot{\overline{v}}_i) = \sum(\overline{v}_i, m\overline{w}_i) = \sum(\overline{v}_i, \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)})$$

■

$$dT = \sum(\overline{F}_i^{(e)}, d\overline{r}_i) + \sum(\overline{F}_i^{(i)}, d\overline{r}_i)$$

Утверждение 16 (Вторая теорема Кенига)**.**

$$\overline{T}_{\textit{кин}} = \sum(\overline{F}_i, \dot{\overline{\rho}}_i)$$

Доказательство.

$$\dot{T}_{\text{кин}} = \dot{T} - (m\dot{\overline{v}}_S, \overline{v}_S) = \sum(\overline{F}_i, \overline{v}_i) - \sum(\overline{F}_i, \overline{v}_S)$$
$$\dot{\overline{\rho}}_i = \overline{v}_i^{\text{отн}} = \overline{v}_i^{\text{абс}} - \overline{v}_i^{\text{пер}} = \overline{v}_i - \overline{v}_S$$
$$\dot{T}_{\text{кин}} = \left(2\overline{F}_i, \overline{v}_i - \overline{v}_S\right) = \sum(\overline{F}_i, \dot{\overline{\rho}}_i)$$

■

Пусть $\overline{r}_i^{(e)} = -grad_{\overline{r}_i}\Pi(\overline{r}_i, \ldots, \overline{r}_N)$ (внешние силы консервативны).

$$\sum(\overline{F}_i^{(e)}, d\overline{r}_i) = -\sum\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\overline{r}_i}, d\overline{r}_i\right) = -d\Pi$$

$$dT = -d\Pi \Rightarrow d(T + \Pi) = 0 \Rightarrow T + \Pi = const$$

Теорема 19 (Закон сохранения полной механической энергии)**.** *Если все внешние силы, действующие на систему консервативны, то полная энергия системы сохраняется.*

Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета

$$m_i\overline{w}_i = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)} + \overline{F}_i^{(\text{пер})} + \overline{F}_i^{(\text{кор})}$$
$$\dot{\overline{P}} = \overline{F} + \overline{F}^{\text{пер}} + \overline{F}^{\text{кор}}$$
$$\overline{F}^{\text{пер}} = \sum\overline{F}^{\text{пер}} = -\sum m_i w_i^{\text{пер}}; \quad \overline{F}^{\text{кор}} = \sum\overline{F}_i^{\text{кор}} = -\sum m_i \cdot 2 \cdot [\overline{w}_{\text{кор}}, \overline{v}_i]$$
$$\dot{\overline{K}}_0 = \overline{M}_O + \overline{M}_O^{\text{пер}} + \overline{M}_O^{\text{кор}}$$
$$\overline{M}_O^{\text{кор}} = \sum[\overline{r}_i, \overline{F}_i^{\text{пер}}]; \quad \overline{M}_O^{\text{кор}} = \sum[\overline{r}_i, \overline{F}_i^{\text{кор}}]$$
$$\dot{T} = \sum(F_i, \overline{v}_i) + \sum(\overline{F}_i^{\text{пер}}, \overline{v}_i) + 0$$
$$\sum(\overline{F}_i^{\text{кор}}, \overline{v}_i) = \sum(-2m_i[\overline{\omega}_{\text{пер}}, v_i], \overline{v}_i) = 0$$

Пример (Система отсчета Кенига)**.**

$$\dot{\overline{K}}_S = \dot{\overline{K}}_{\textit{кен}} = \overline{M}_S;$$
$$\dot{T}_S = \sum(\overline{F}_i, \overline{v}_i); \qquad \dot{\overline{P}} = \overline{F} - \sum m_i\overline{w}_S = \overline{F} - m\overline{w}_S$$

Движение в центральном поле

Законы сохранения

В центральном поле

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{F}, \quad \overline{F} = F(r)\frac{\overline{r}}{r}$$

Закон сохранения энергии:

$$\Pi = -\int F(r)dr, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 \Rightarrow T + \Pi = h = const$$

Закон сохранения кинетического момента:

$$\overline{M}_O = \left[\overline{r}, F(r)\frac{\overline{r}}{r}\right] = 0 \Rightarrow \dot{\overline{k}}_O = 0 \Rightarrow \overline{k}_O = [\overline{r}, \overline{mv}] = \overline{k} = const$$

Следствие. *Траектория точки в центральном поле всегда является плоской кривой.*

Доказательство.

$$[\overline{r}, m\overline{v}] = \overline{k} \perp \alpha \Rightarrow \overline{r} \in \alpha \quad \forall t,\, \alpha = const$$

■

Следствие.

$$r^2\dot{\varphi} = c = const$$

Доказательство.

$$|\overline{k}| = |[\overline{r}, m\overline{v}]| = |[r\overline{e}_r,\, m(\dot{r}\overline{e}_r + r\dot{\varphi}\overline{e}_\varphi)]| = mr^2|\dot{\varphi}||\overline{e}_z| = const \Rightarrow r^2\dot{\varphi} = const$$

■

Геометрический смысл

$$S = \iint dS = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} r\,dr = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi$$

$$\dot{S} = \frac{dS}{d\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{r^2}{2}\varphi = \frac{c}{2} = const$$

$\sigma = \dot{s} = \dfrac{c}{2}$ — секториальная скорость

Формулы Бине

Теорема 20 (Формулы Бине). *При движении точи в центральном поле справедливы следующие равенства:*

$$v^2 = c^2\left(\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right)$$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right)$$

Доказательство.

$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

$\overline{w} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\overline{e}^r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\overline{e}_\varphi$

$$m\overline{w} = F\overline{e}_r \quad \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}) = F \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \quad \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{c}{r^2} = -c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$v^2 = c^2\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + r^2\frac{c^2}{r^4} = c^2\left(\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right)$$
$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right)$$

■

Определим траекторию.

$$T + \Pi = h, \quad T = \frac{m}{2}v^2$$
$$\frac{mc^2}{2}\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \underbrace{\frac{mc^2}{2r^2} + \Pi(r)}_{\Pi_c(r)} = h$$
$$\pm\sqrt{\frac{mc^2}{2}}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = \sqrt{h - \Pi_c(r)}$$

Замена: $\dfrac{1}{r} = u \quad \pm\sqrt{\dfrac{mc^2}{2}}\displaystyle\int\limits_{1/r_0}^{1/r}\frac{du}{\sqrt{h - \Pi_c(u)}} = \varphi - \varphi_0 \Rightarrow r(\varphi)$

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2(\varphi)} \Rightarrow \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} r^2(\varphi)d\varphi = \int\limits_{t_0}^{t} cdt = c(t - t_0)$$

Движение точки в центральном гравитационном поле

$$F = -\gamma\frac{mM}{r^2}, \quad \Pi(r) = -\gamma\frac{mM}{r}$$

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{mc^2}{2}}\int\frac{du}{\sqrt{h - m\frac{c^2}{2u^2} + \gamma mMu}} = \pm\int\frac{du}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} - u^2 + \frac{2\gamma M}{c^2}u}} =$$
$$= \pm\int\frac{du}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2M^2}{c^4} - \left(u - \frac{\gamma M}{c^2}\right)^2}} = \pm\arccos\frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{c^2}}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2M^2}{c^4}}} + \varphi_0$$
$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma M}{c^2} + \sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2M}{c^4}}\cos(\varphi - \varphi_0)$$
$$\frac{c^2}{\gamma m} = p, \quad \sqrt{\frac{2h}{mc^2}p^2 + 1} = e \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

То есть φ_0 зависит от c и h.

Замечание. $\varphi_0 = 0 \quad (\varphi' = \varphi - \varphi_0)$

Утверждение 17. *Траектория точки в центральном гравитационном поле является коническим сечением.*

- $e = 0$: $\left(h^* := h = -\frac{mc^2}{2p^2} = -\frac{m\gamma^2M^2}{2c^2}\right)$ — *окружность.*
- $0 < e < 1$: $(h^* < h < 0)$ — *эллипс.*

- $e = 1$: $(h = 0)$ — *парабола.*
- $e > 1$: $(h > 0)$ — *гипербола.*

Пример (Первая космическая скорость).

$v_1 = ?$

$\dfrac{mv^2}{2} - \gamma\dfrac{mM}{R} = -\dfrac{m\gamma^2M^2}{2c^2} = -\dfrac{m\gamma^2M^2}{2R^2v_1^2}$

$c = R^2\dot{\varphi} = Rv_1$ *(окружность)*

$v_1^2 - \dfrac{2\gamma M}{R} + \dfrac{\gamma^2M^2}{R^2v_1^2} = 0$

$\left(v_1 - \dfrac{\gamma M}{Rv_1}\right)^2 = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\dfrac{\gamma M}{R}}$

Пример (Вторая космическая скорость).

$\dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{\gamma mM}{R} = 0 \Rightarrow v_2^2 = \dfrac{2\gamma M}{R}$

Теорема 21 (Законы Кеплера).

1. *Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится солнце.*
2. *Радиус-вектор планеты заметает равные площади за равные промежутки времени.*
3. $\frac{T^2}{a^3} = const$ *(где a —большая полуось эллипса) для планет из одной системы.*

Доказательство. TODO ■

Динамика твердого тела

Определение. *Моментом инерции твердого тела относительно оси называется сумма произведений масс точек тела на квадрат расстояния до этой оси:*

$$J_l = \sum m_i d_i^2, \quad d_i = dist(\overline{r}_i, l); \qquad \left(J_l = \int\limits_W d^2 dm\right) \tag{13}$$

$$J_l \sum m_i([\overline{r}_i, \overline{l}])^2 = \sum m_i(\overline{r}_i - (\overline{r}_i, \overline{l}_i)^2) \tag{14}$$

Теорема 22 (Гюйгенса-Штейнера).

$$J_l = J_{l'} + md^2, \quad d = dist(l, l')$$

Доказательство.

$$J_l = \sum m_i([\overline{r}_S + \overline{\rho}_i, \overline{l}])^2 = \sum m([\overline{r}_S, \overline{l}]^2) + \sum m_i[\overline{\rho}_i, \overline{l}]^2 + 2\sum m_i\left((\overline{r}_S, \overline{l}) \cdot (\overline{\rho}_i, \overline{l})\right) =$$

$$= m \cdot d^2 + J_{l'} + 2(\overline{r}_S, \overline{\rho}) \cdot \left(\sum m_i\overline{\rho}_i, \overline{l}\right) = J_{l'} + d^2m$$

■

$\overline{r}_i = x_i\overline{e}_x + y_i\overline{e}_y + z_i\overline{e}_z$

Определение.

$$\begin{array}{l} J_x = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) \\ J_y = \sum m_i(z_i^2 + x_i^2) \\ J_z = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{array} \quad \text{— \textit{осевые моменты инерции}}$$

Свойство 1

$$J_x + J_y \geqslant J_z$$

Доказательство.

$$J_x + J_y = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) + 2\sum m_i, z_i \geqslant J_z$$

■

Замечание. *Равенство достигается в случае плоского тела*

$$J_x + J_y = J_z \Leftrightarrow z_i = 0 \ \ \forall m$$

Определение.

$$\begin{array}{l} J_{xy} = \sum m_i x_i y_i \\ J_{yz} = \sum m_i y_i z_i \\ J_{xz} = \sum m_i x_i z_i \end{array} \quad \text{— центробежные моменты инерции.}$$

Определение.

$$\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \text{ — тензор инерции тела в точке } O$$

$$\begin{aligned}
&\bar{l} = \alpha\bar{e}_x + \beta\bar{e}_y + \gamma\bar{e}_z, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\
&J_l = \sum m_i \left((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (x_i\alpha + y_i\beta + z_i\gamma)^2\right) = \\
&= \sum m_i(y_i^2 + z_i^2)\alpha^2 + \sum m_i(x_i^2 + z_i^2)\beta^2 + \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)\gamma^2 - \\
&- 2\left(\sum m_i x_i y_i\right)\alpha\beta - 2\left(\sum m_i y_i z_i\right)\beta\gamma - 2\left(\sum m_i x_i y_i\right)\alpha\beta = \\
&= J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{xz}\alpha\gamma = (J_O\bar{l}, \bar{l})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Ox'y'z' \\
&\bar{l}' = \alpha'\bar{e}_{x'} + \beta'\bar{e}_{y'} + \gamma'\bar{e}_{z'}, \quad J_0' \\
&\bar{l}' = A\bar{l}, \quad A^T = A^{-1} \\
&J_l = (J_0'\bar{l}', \bar{l}') = (J_0' \cdot A\bar{l}, A\bar{l}) = (A^T J_0' A\bar{l}, \bar{l}) = (J_O\bar{l}, \bar{l}) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow J_O = A^T J_O' A
\end{aligned}$$

Определение.

$$\Sigma\,\{\bar{r}, \quad (J_O\bar{r}, \bar{r}) = 1\} \text{ — эллипсоид инерции тела в точке } 0$$

Замечание.

$$(J_O\bar{r}, \bar{r}) = 1 \Leftrightarrow J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{xz}xz = 1$$

Замечание.

$$(J_O\bar{r}, \bar{r}) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\left(J_O\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}, \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}\right)}_{J_{\bar{r}}}, \quad |r|^2 = 1 \Leftrightarrow |\bar{r}| = \sqrt{\frac{1}{J_{\bar{r}}}}$$

$\exists O\xi\eta\zeta, \quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \equiv \Sigma$

Определение. *A, B, C — главные моменты инерции тела в точке O*

Определение. *$O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ — главные оси инерции в точке O*

Определение. *S — центр масс, тогда $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ — главные центральные моменты*

$det(J_O - \lambda E) = 0, \quad \lambda - A, B, C \to \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} = \overline{e}_\xi \overline{e}_\eta \overline{e}_\zeta$
$A = B$(λ — корень 2ой кратности, тогда $O\zeta$ — ось динамической симметрии)

Замечание. *Если однородное твердое тело имеет ось геометрической симметрии, то она является главной в любой своей точке.*

Oz — ось симметрии, $m_i = m_i'$.

$$J_{xz} = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i = \sum_{i=0}^{N/2} (m_i x_i z_i - m x_i z_i) = 0$$

$J_{yz} = 0$

Oz — главная

Замечание. *Если однородное твердое тело имеет плоскость симметрии, то ось, перпендикулярная этой плоскости, является главной в точке пересечения с плоскостью.*

Твердое тело с неподвижной точкой ($\overline{v}_O = 0$)

Теорема 23.

$$T = \frac{1}{2}(J\overline{\omega}, \overline{\omega}), \quad \overline{K}_O = J_O \overline{\omega}$$

Доказательство.

$l : l \parallel \overline{\omega}, \quad O \in l$(O — мгновенная ось вращения)

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i([\overline{\omega}, \overline{r}_i])^2 = \frac{1}{2}\sum m_i([\overline{l}, \overline{r}_i])^2 \cdot \omega^2 =$$

$$\frac{1}{2}J_l \omega^2 = \frac{1}{2}(J_O, \overline{l}, \overline{l})\omega^2 = \frac{1}{2}(J_O \overline{\omega}, \overline{\omega})$$

$$\overline{K}_O = \sum m_i [\overline{r}_i, [\overline{\omega}, \overline{r}_i]] = \sum m_i (\overline{r}_i^2 \cdot \overline{\omega} - \overline{r}_i(\overline{\omega}, \overline{r}_i))$$

$$\overline{\omega} = \omega_x \overline{e}_x + \omega_y \overline{e}_y + \omega_z \overline{e}_z$$

$$(\overline{K}_O, \overline{e}_x) = \sum m_i[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_x - (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)]x_i =$$

$$= J_x \omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xy}\omega_z$$

$$(\overline{K}_O, \overline{e}_y) = J_{xy}\omega_x - J_y \omega_y - J_{xz}\omega_z$$

$$(\overline{K}_O, \overline{e}_z) = J_{xz}\omega_x - J_{xz}\omega_y - J_z \omega_z$$

■

Следствие. *Пусть $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ — главные оси инерции:*

$$J_O = diag(A, B, C), \quad \overline{\omega} = p\overline{e}_\xi + q\overline{e}_\eta + r\overline{e}_\zeta$$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \overline{K}_O = Ap\overline{e}_\xi + Bq\overline{e}_\eta + Cr\overline{e}_\zeta$$

Произвольное движение тела

Теорема 24.

$$T = \frac{1}{2}m\overline{v}_S^2 + \frac{1}{2}(J_S\overline{\omega}, \overline{\omega})$$

$$\overline{K}_O = [\overline{r}_S, m\overline{v}_S] + J_S\overline{\omega}$$

Доказательство.

$$T = \frac{1}{2}m\overline{v}_S^2 + T^{\text{кен}} = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}(J_S\overline{\omega}, \overline{\omega})$$

■

Следствие. S_ξ, S_η, S_ζ *— главные центральные оси*

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

$$\overline{K}_O = [\overline{r}_S, m\overline{v}_S] + Ap\overline{e}_\xi + Bq\overline{e}_\eta + Cr\overline{e}_\zeta$$

Следствие. $\overline{\omega}||\overline{e}_z, \quad \overline{e}_z = const$*:*

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\underbrace{(J_S\overline{e}_z, \overline{e}_z)}_{J_z}\omega^2 = \frac{1}{2}mv_S^2 = \frac{1}{2}J_z\omega^2$$

$$\overline{K}_O = [\overline{r}_S, m\overline{v}_S] + \underbrace{J_S\overline{\omega}}_{J_z\overline{\omega} \Leftrightarrow J_{xy} = J_{yz} = 0} \quad \not\parallel \overline{e}_z$$

Динамика твердого тела с неподвижной точкой

$\dfrac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{M}_O$

$O\xi, O\eta, O\zeta$ — главные оси

$\overline{K}_O = Ap\overline{e}_\xi + Bq\overline{e}_\eta + Cr\overline{e}_\zeta$

$\dfrac{d\overline{K}_O}{dt} = \dot{\overline{K}}_O + [\overline{\omega}, \overline{K}_O]$

$\Rightarrow A\dot{p}\overline{e}_\xi = B\dot{q}\overline{e}_\eta + C\dot{r}\overline{e}_\zeta + \begin{vmatrix} \overline{e}_\xi & \overline{e}_\eta & \overline{e}_\zeta \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} = M_\xi\overline{e}_\xi + M_\eta\overline{e}_\eta + M_\zeta\overline{e}_\zeta$

$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = M_\xi \\ B\dot{q} + (A-C)rp = M_\eta \\ C\dot{r} + (B-A)qp = M_\zeta \end{cases}$