

# Аналитическая механика

Муницина Мария Александровна

19 октября 2017 г.

*Набор: Александр Валентинов  
Об ошибках писать: [vk.com/valentiauy](https://vk.com/valentiauy)*

## Содержание

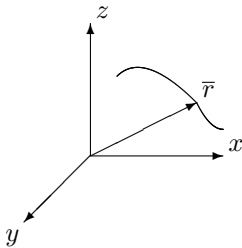
<b>Кинематика точки</b>	<b>1</b>
Векторное описание движения . . . . .	1
Декартовы координаты . . . . .	1
Движение по окружности . . . . .	1
Естественное описание движения . . . . .	2
Ортогональные векторные координаты . . . . .	4
Геометрический смысл . . . . .	4
<b>Кинематика твердого тела</b>	<b>5</b>
Формулы Пуассона . . . . .	6
Формула распределения скоростей точек твердого тела . . . . .	7
Геометрический смысл . . . . .	8
<b>Классификация движения твердого тела</b>	<b>8</b>
Поступательное . . . . .	8
Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси) . . . . .	8
Плоскопараллельное движение . . . . .	9
Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки) . . . . .	10
Винтовое движение . . . . .	10
Общий случай . . . . .	10
<b>Кинематика сложного движения</b>	<b>11</b>
Сложное движение материальной точки . . . . .	12
Сложное движение твердого тела . . . . .	13
Кинематические формулы Эйлера . . . . .	14
<b>Алгебра кватернионов</b>	<b>14</b>
<b>Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов</b>	<b>16</b>

<b>Кинематика твердого тела в кватернионном описании</b>	<b>20</b>
Интегрирование уравнения Пуассона . . . . .	22

## Кинематика точки

**Определение.** Материальная точка - точка, размером которой можно пренебречь.

Мы будем полагать, что время меняется равномерно и непрерывно.



## Векторное описание движения

Зависимость координат от времени назовем законом движения.

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \in C^2$$

**Определение.**  $\gamma = \{\bar{r}(t), t \in (0, +\infty)\}$  - траектория

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$
$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

## Декартовы координаты

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{e}_x + y(t)\bar{e}_y + z(t)\bar{e}_z$$

$$\bar{v}(t) = \dot{x}(t)\bar{e}_x + \dot{y}(t)\bar{e}_y + \dot{z}(t)\bar{e}_z$$

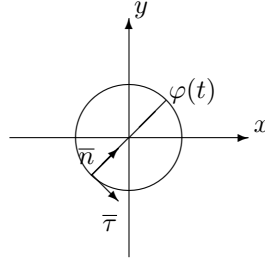
$$\bar{w}(t) = \ddot{x}(t)\bar{e}_x + \ddot{y}(t)\bar{e}_y + \ddot{z}(t)\bar{e}_z$$

## Движение по окружности

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - R \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} = -R \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + R \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{cases}$$



$$\bar{v} = R\dot{\varphi}(-\sin \varphi \cdot \bar{e}_x + \cos \varphi \cdot \bar{e}_y) = R\dot{\varphi}\bar{\tau}$$

$$\bar{w} = R\ddot{\varphi}(-\sin \varphi \cdot \bar{e}_x + \cos \varphi \cdot \bar{e}_y) + R\dot{\varphi}^2(-\cos \varphi \cdot \bar{e}_x - \sin \varphi \cdot \bar{e}_y) = R\ddot{\varphi}\bar{\tau} + R\dot{\varphi}^2\bar{n}$$

$$\bar{v} = R\dot{\varphi}\bar{\tau} = v\bar{\tau}$$

$$\bar{w} = R\ddot{\varphi}\bar{\tau} + R\dot{\varphi}^2\bar{n} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{R}\bar{n}$$

### Естественное описание движения

Кривая задана параметрически естественным параметром  $s$ .  $ds = |\overline{dr}| \neq 0$

**Определение.**

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \dot{\bar{r}} - \text{касательный вектор} \quad (1)$$

$$\bar{n} = \frac{\dot{\bar{r}}}{|\dot{\bar{r}}|} - \text{вектор главной нормали} \quad (2)$$

$$\bar{b} = [\bar{t}; \bar{n}] - \text{вектор бинормали} \quad (3)$$

**Утверждение 1.**  $\{\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}\}$  - тройка ортогональных единичных векторов.

*Доказательство.*

$$|\bar{\tau}| = \frac{|d\bar{r}|}{|ds|} = 1$$

$$|\bar{n}| = \frac{|\dot{\bar{r}}|}{|\dot{\bar{r}}|} = 1$$

$$|\bar{\tau}| = 1 \Rightarrow (\bar{\tau}, \bar{\tau}) = 1$$

$$(\dot{\bar{\tau}}, \bar{\tau}) + (\bar{\tau}, \dot{\bar{\tau}}) = 0$$

$$2(\dot{\bar{\tau}}, \bar{\tau}) = 0 \Rightarrow \dot{\bar{\tau}} \perp \bar{\tau} \Rightarrow \bar{n} \perp \bar{\tau}$$

■

Этот трехгранник называют репер Ферне. (Дарбу, сопровождающий трехгранник).

**Теорема 1.**  $\bar{v} = v\bar{\tau}$ ,  $\bar{w} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}$ , где  $v = \dot{s}$ .

*Доказательство.*

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v\bar{\tau}$$

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \bar{n}kv, \text{ по формуле (2)}$$

$$\bar{w} = \dot{\bar{v}} = \dot{v}\bar{\tau} + v\dot{\bar{\tau}} = \dot{v}\bar{\tau} + v^2k\bar{n} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}$$

$\dot{v}\bar{\tau}$  - касательное ускорение

$\frac{v^2}{\rho}\bar{n}$  - нормальное ускорение

$\rho = \frac{1}{|\dot{\bar{r}}|}$  - радиус кривизны

$k = |\ddot{\bar{r}}|$  - кривизна

$\ddot{\bar{r}}$  - вектор кривизны

■

**Формулы Френеля:**

$$\begin{cases} \bar{\tau}' = k\bar{n} \\ \bar{n}' = -k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b} \\ \bar{b}' = -\varkappa\bar{n} \end{cases}$$

где  $\varkappa$  - коэффициент кручения.

*Доказательство.*

$$|\bar{n}| = 1 \Rightarrow (\bar{n}, \bar{n}) = 0$$

$$\bar{n} \perp \bar{\tau} \Rightarrow (\bar{n}', \bar{\tau}) + (\bar{n}, \bar{\tau}') = 0 \Rightarrow (\bar{n}', \bar{\tau}) + k = 0$$

$$\bar{b}' = [\bar{\tau}', \bar{n}] + [\bar{\tau}, \bar{n}'] = [k\bar{n}, \bar{n}] + [\bar{\tau}, -k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b}] = 0 + \varkappa[\bar{\tau}, \bar{b}] = -\varkappa\bar{n}$$

■

## Ортогональные векторные координаты

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\overline{H_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = H_i \bar{e}_i, \text{ где } H_i - \text{коэффициенты Ламе.}$$

## Геометрический смысл

$$ds_i = H_i dq_i$$

$s_i$  - длина дуги  $i$ -й к-ой линии.

$$H_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 H_i \dot{q}_i \bar{e}_i, \quad v^2 = (\bar{v}, \bar{v}) = \sum H_i^2 \dot{q}_i^2$$

**Теорема 2.** Компоненты вектора ускорения в ортогональном криволинейном базисе определяются равенством:

$$w_i = \frac{1}{H_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right)$$

*Доказательство.*

$$(\bar{w}, \bar{H}_i) = \left( \frac{d\bar{v}}{dt}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \bar{v}, \frac{\bar{r}}{\partial q_i} \right) - \left( \bar{v}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) \triangleq$$

$$1) \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} - \text{из определения скорости}$$

$$2) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}$$

$$\triangleq \frac{d}{dt} \left( \bar{v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \right) - \left( \bar{v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (\bar{v}, \bar{v}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (\bar{v}, \bar{v}) =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

$$w_i = (\bar{w}, \bar{e}_i) = \frac{1}{H_i} (\bar{w}, \bar{H}_i)$$

■

## Кинематика твердого тела

**Определение.** Абсолютно твердым телом называется множество точек, расстояние между которыми не меняется со временем.

$$\{\bar{r}_i, i = \overline{1 \dots n} \quad : \quad |\bar{r}_i - \bar{r}_j| = C_{ij} = \text{const}, \quad n \geq 3\}$$

$OXYZ$  - неподвижная система отсчета.

$S\xi\eta\zeta$  - связаны с телом (движется).

$$X = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\eta, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\eta, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\eta, \bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_z) \end{pmatrix} - \text{матрица направляющих косинусов.}$$

$$\overline{AB} = x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z$$

$$\overline{AB} = \xi\bar{e}_\xi + \eta\bar{e}_\eta + \zeta\bar{e}_\zeta$$

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\eta, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\zeta, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \overline{AB}) \\ (\bar{e}_\eta, \overline{AB}) \\ (\bar{e}_\zeta, \overline{AB}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \bar{\rho}$$

$$\bar{\rho} = X\bar{r}$$

**Утверждение 2.**  $X$  - ортогональная матрица.

*Доказательство.*

$$XX^T = X^T X = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \bar{\xi}) & (\bar{e}_\xi, \bar{\eta}) & (\bar{e}_\xi, \bar{\zeta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = 0$$

Т.к. базис ортогональный. ■

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \\ \bar{e}_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{e}}_\xi \\ \dot{\bar{e}}_\eta \\ \dot{\bar{e}}_\zeta \end{pmatrix} = \dot{X} \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \\ \bar{e}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\dot{X} X^T}_{\Omega} \begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \dot{X} X^T$$

**Утверждение 3.**  $\Omega$  - кососимметрична.

*Доказательство.*

$$\Omega\Omega^2 = \dot{X}X^T + (\dot{X}X^T)T = \dot{X}X^T + X\dot{X}^T = \frac{d}{dt}(XX^T) = \frac{d}{dt}(E) = 0$$

■

**Следствие.**

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{pmatrix} - \text{Факт, который может быть законспектирован неправильно}$$

**Определение.**  $\bar{\omega} = \omega_\xi \bar{e}_\xi + \omega_\eta \bar{e}_\eta + \omega_\zeta \bar{e}_\zeta$  - угловая скорость подвижного репера.

## Формулы Пуассона

**Утверждение 4.**

$$\dot{\bar{e}}_i = [\bar{\omega}, \bar{e}_i], \quad i = \overline{1 \dots 3}$$

*Доказательство.*

$$\dot{\bar{e}}_\xi = \omega_\zeta \bar{e}_\eta - \omega_\eta \bar{e}_\zeta = \begin{vmatrix} \bar{e}_\xi & \bar{e}_\eta & \bar{e}_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi]$$

■

**Утверждение 5.**  $\bar{\omega} = \bar{e}_\xi(\dot{\bar{e}}_\eta, \bar{e}_\zeta) + \bar{e}_\eta(\dot{\bar{e}}_\zeta, \bar{e}_\xi) + \bar{e}_\zeta(\dot{\bar{e}}_\xi, \bar{e}_\eta)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} (\dot{\bar{e}}_\xi, \bar{e}_\eta) &= \omega_\zeta \\ (\dot{\bar{e}}_\eta, \bar{e}_\zeta) &= \omega_\xi \\ (\dot{\bar{e}}_\zeta, \bar{e}_\xi) &= \omega_\eta \end{aligned}$$

■

**Утверждение 6.**  $\bar{\omega} = \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, \dot{\bar{e}}_\xi] + [\bar{e}_\eta, \dot{\bar{e}}_\eta] + [\bar{e}_\zeta, \dot{\bar{e}}_\zeta])$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, \dot{\bar{e}}_\xi] + [\bar{e}_\eta, \dot{\bar{e}}_\eta] + [\bar{e}_\zeta, \dot{\bar{e}}_\zeta]) = \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi]] + [\bar{e}_\eta, [\bar{\omega}, \bar{e}_\eta]] + [\bar{e}_\zeta, [\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta]]) = \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\omega}(\bar{e}_\xi, \bar{e}_\xi) - \bar{e}_\xi(\bar{\omega}, \bar{e}_\xi) + \bar{\omega}(\bar{e}_\eta, \bar{e}_\eta) - \bar{e}_\eta(\bar{\omega}, \bar{e}_\eta) + \bar{\omega}(\bar{e}_\zeta, \bar{e}_\zeta) - \bar{e}_\zeta(\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta)) = \\ &= \frac{1}{2}(3\bar{\omega} - \bar{\omega}) = \bar{\omega} \end{aligned}$$

■



**Пример.** Угловая скорость репера Френеля.

$$\begin{cases} \bar{\tau}' = k\bar{n} \\ \bar{n}' = -k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b} \\ \bar{b}' = -\varkappa\bar{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \dot{s} \\ \dot{\bar{n}} = \frac{d\bar{n}}{ds} \dot{s} \\ \dot{\bar{b}} = \frac{d\bar{b}}{ds} \dot{s} \end{cases}$$

$$\bar{\omega} = \bar{\tau}(\dot{s}(-k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b}), \bar{b}) + \bar{n}(\dot{s}(-\varkappa\bar{n}, \bar{\tau}) + \bar{b}(\dot{s}(k\bar{n}), \bar{n})) = \dot{s}(\varkappa\bar{\tau} + k\bar{b})$$

**Определение.** Угловой скоростью твердого тела называется угловая скорость подвижного репера, с ним связанного.

### Формула распределения скоростей точек твердого тела

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + [\bar{\omega}, \overline{AB}]$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \xi \bar{e}_\xi + \eta \bar{e}_\eta + \zeta \bar{e}_\zeta \\ \dot{\overline{AB}} &= \xi \dot{\bar{e}}_\xi + \eta \dot{\bar{e}}_\eta + \zeta \dot{\bar{e}}_\zeta, \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0 \\ (\dot{\overline{r}}_B - \dot{\overline{r}}_A) &= \xi [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi] + \eta [\bar{\omega}, \bar{e}_\eta] + \zeta [\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta] \\ \dot{\overline{r}}_1 - \dot{\overline{r}}_2 &= [\bar{\omega}, \xi \bar{e}_\xi + \eta \bar{e}_\eta + \zeta \bar{e}_\zeta] \\ \bar{v}_B &= \bar{v}_A + [\bar{\omega}, \overline{AB}] \end{aligned}$$

■

**Следствие.**  $S\xi\eta\zeta \rightarrow \bar{\omega}$ ,  $S'\xi'\eta'\zeta' \rightarrow \bar{\omega}'$

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{v}_A + [\bar{\omega}, \overline{AB}] \\ \bar{v}_B &= \bar{v}_A + [\bar{\omega}', \overline{AB}] \end{aligned} \right| [\bar{\omega} - \bar{\omega}', \overline{AB}] = 0; \quad \forall A, B \text{ в абсолютно твердом теле} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} - \bar{\omega}' = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{\omega} = \bar{\omega}'}$$

**Утверждение 7.** (Формула Ривальса)  $\bar{w}_B = \bar{w}_A + [\bar{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{AB}]]$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{v}_A + [\bar{\omega}, \overline{AB}] \\ \dot{\bar{v}}_B &= \dot{\bar{v}}_A + [\dot{\bar{\omega}}, \overline{AB}] + [\bar{\omega}, \dot{\overline{r}}_B - \dot{\overline{r}}_A] \\ \bar{w}_B &= \bar{w}_A + [\bar{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{AB}]] \end{aligned}$$

$[\bar{\varepsilon}, \overline{AB}]$  - вращательное ускорение,  $[\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{AB}]]$  - осестремительное ускорение

■

### Геометрический смысл

$$\begin{aligned}\overline{w} &= [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]] = \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{AB}) - \overline{AB}\omega^2 = \omega^2(\overline{e_\omega}(\overline{AB}, \overline{e_\omega}) - \overline{AB}) \\ |\overline{w_{oc}}| &= \omega^2 \rho(B, l)\end{aligned}$$

**Утверждение 8.** *Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны.*

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \\ (\overline{v_B}, \overline{AB}) &= (\overline{v_A}, \overline{AB}) + ([\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{AB}) \\ v_B \cos \beta &= v_A \cos \alpha\end{aligned}$$

■

**Замечание.** *Аналогичная теорема для ускорений не верна.*

## Классификация движения твердого тела

### Поступательное

**Определение.** *Такое движение твердого тела, при котором угловая скорость равна нулю.*

$$\begin{aligned}\overline{v_B} &\equiv \overline{v_A} \\ \overline{w_B} &\equiv \overline{w_A}\end{aligned}$$

**Мгновенное поступательное движение:**  $\exists t : \overline{\omega}(t) = 0, \quad \overline{\varepsilon}(t) \neq 0$

**Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси)**

$$\begin{aligned}\exists A, B : \overline{v_A} &= \overline{v_B} = 0 \\ \overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{v_A} = \overline{v_B} = 0 \Rightarrow [\overline{\omega}, \overline{AB}] = 0 \Rightarrow \overline{\omega} \parallel \overline{AB} \\ \forall M \in l : \overline{v_M} &= 0, \quad l - \text{ось вращения} \\ \dot{\vec{e}}_\xi &= \dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \quad \dot{\vec{e}}_\eta = -\dot{\varphi} \vec{e}_\xi, \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = 0 \\ \vec{\omega} &= \vec{e}_\xi(-\dot{\varphi} \vec{e}_\xi, \vec{e}_\zeta) + \vec{e}_\eta(0, \vec{e}_\xi) + \vec{e}_\zeta(\dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \vec{e}_\eta) = \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta = \dot{\varphi} \vec{e}_z \\ \vec{\varepsilon} &= \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi} \vec{e}_z \\ \vec{v}_p &= \vec{v}_{p'} + [\vec{\omega}, \overline{pp'}] = 0 + [\dot{\varphi} \vec{e}_z, \xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta] = \dot{\varphi}(x \vec{e}_\eta - y \vec{e}_\xi) \\ |\vec{v}_p| &= |\vec{\omega}| \cdot |\overline{p'p}| \\ \vec{w}_p &= \vec{w}_{p'} + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overline{p'p}]] = 0 + [\ddot{\varphi} \vec{e}_z, \overline{p'p}] - \omega^2 \overline{p'p}\end{aligned}$$

## Плоскопараллельное движение

**Определение.** Движение твердого тела называется плоскопараллельным, если скорости всех точек тела параллельны некоторой неподвижной плоскости:

$$\bar{v}_{p_i} \parallel \pi, \quad \forall p_i \in ATT$$

$$\bar{v}_{p_i} = \bar{v}_{p_j} + [\bar{\omega}, \overline{p_j p_i}]$$

$$(\bar{p}_i - \bar{v}_{p_i}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\omega} = 0 \\ \bar{v}_{p_i} = \bar{v}_{p_j}, \quad \forall p_i, p_j \in ATT \\ \bar{\omega} \perp \bar{p}_i - \bar{v}_{p_i} \parallel \pi \end{cases}$$

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_{M_j} + \omega[\bar{\omega}, \overline{M_j M_i}] = \vec{v}_{M_j}, \quad \forall M_i, M_j : \overline{M_i M_j} \perp \pi \Rightarrow \vec{w}_{M_i} = \vec{w}_{M_j}$$

Качение:

$$\vec{r}_S = x_S \vec{e}_x + y_S \vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \quad \dot{\vec{e}}_\eta = \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta, \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z, \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \vec{e}_z \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_S + [\vec{\omega}, \overline{SM}]$$

$$\vec{w}_M = \vec{w}_S + [\vec{\varepsilon}, \overline{SM}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overline{SM}]] = \vec{w}_s + [\vec{\varepsilon}, \overline{SM}] - \omega^2 \overline{SM}$$

**Теорема 3.** Если при плоскопараллельном движении угловая скорость твердого тела отлична от нуля, то существует точка, скорость которой равна нулю в данный момент времени.

*Доказательство.*

$$\begin{cases} \bar{v}_c = \bar{v}_s + [\bar{\omega}, \overline{SC}] \\ \bar{v}_c = 0 \end{cases} \Rightarrow [\bar{\omega}, \bar{v}_s] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{SC}]] = 0$$

$$[\bar{\omega}, \bar{v}_s] + \bar{\omega}(\bar{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_s]}{\omega^2}$$

■

**Следствие.** Любое плоскопараллельное движение является либо мгновенно-поступательным, либо мгновенно-вращательным

*Доказательство.*  $\bar{\omega} = 0$  - мгновенно-поступательное.  $\bar{\omega}(t) \neq 0$  - вращение вокруг  $l$ .

■

**Определение.**  $C$  - мгновенный центр скоростей

**Замечание.** Положение  $C$  меняется со временем.

**Пример.** Качение без проскальзывания

### Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки)

$$\exists \bar{v}_0 \equiv 0$$

$$l \parallel \bar{\omega}, O \in l$$

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + [\bar{\omega}, \overline{OM}] = 0 + 0, \forall M \in l$$

**Определение.**  $l$  - мгновенная ось вращения

$$\bar{v}_p = [\bar{\omega}, \overline{OP}], \quad \bar{w}_p = [\bar{\varepsilon}, \overline{OP}] + \underbrace{[\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{OP}]]}_{\bar{v}_{OC}}$$

### Винтовое движение

**Определение.** Движение твердого тела называется винтовым, если тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси, а скорости всех точек, лежащих на этой оси, равны между собой, постоянны и сонаправлены с осью.

### Общий случай

**Теорема 4.**  $\bar{\omega} \neq 0 \Rightarrow \exists l : \bar{\omega} \parallel l, \bar{v}_{k_i} \parallel l, \forall k_i \in l$

*Доказательство.*

$$\bar{\alpha} \perp \bar{\omega}, S \in \alpha$$

$$\begin{cases} \bar{v}_c = \bar{v}_c = \bar{v}_s + [\bar{\omega}, \overline{SC}] \\ \bar{v}_c = \lambda \bar{\omega} \end{cases} \Rightarrow 0 = [\bar{\omega}, \bar{v}_s] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{SC}]]$$

$$[\bar{\omega}, \bar{v}_s] + \bar{\omega}(\bar{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_c]}{\omega^2}$$

$$\exists l : C \in l, l \parallel \bar{\omega}$$

$$\bar{v}_{C_1} = \bar{v}_C + [\bar{\omega}, \overline{CC_1}] = \bar{v}_C, \quad \forall C_1 \in l$$

■

$$\bar{v}_C = \bar{v}_S + \left[ \bar{\omega}, \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_C]}{\omega^2} \right] = \bar{v}_S + \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{v}_S) - \omega^2 \vec{v}_S) = \underbrace{\frac{(\vec{\omega}, \vec{v}_S)}{\omega^2}}_{\lambda} \vec{\omega}$$

$$\lambda = \frac{(\vec{\omega}, \vec{v}_S)}{\omega^2} - \text{параметр (шаг винта)}.$$

**Следствие.** Любое движение твердого тела является в каждый момент времени либо мгновенно-поступательным ( $\omega = 0, \lambda \rightarrow +\infty$ ), либо мгновенно-вращательным ( $\omega \neq 0, \lambda = 0$ ), либо мгновенно-винтовым ( $\omega \neq 0, \lambda \neq 0$ ).

**Определение.**  $\{l, \bar{\omega}, \bar{v}\}$  - кинематический винт.

$$\begin{aligned}
\bar{v}_S &= v_x \bar{e}_x + v_y \bar{e}_y + v_z \bar{e}_z \\
\bar{r}_S &= x_S \bar{e}_x + y_S \bar{e}_y + z_S \bar{e}_z \\
\bar{\omega} &= \omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y + \omega_z \bar{e}_z \\
\bar{r}_C &= x \bar{e}_x + y \bar{e}_y + z \bar{e}_z \\
\bar{v}_S + [\bar{\omega}, \bar{r}_C] &= \lambda \bar{\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{v_x + \omega_y(z - z_S) - \omega_z(y - y_S)}{\omega_x} = \\
&= \frac{v_y + \omega_z(x - x_S) - \omega_x(z - z_S)}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x(y - y_S) - \omega_y(x - x_S)}{\omega_z}
\end{aligned}$$

## Кинематика сложного движения

$OXYZ$  - неподвижная система отсчета  $(\bar{r})$ ,  $O_1\xi\eta\zeta$  - подвижная система отсчета  $(\bar{\rho})$ .

$$\bar{u} = u_x \bar{e}_x + u_y \bar{e}_y + u_z \bar{e}_z$$

$$\bar{u} = u_\xi \bar{e}_\xi + u_\eta \bar{e}_\eta + u_\zeta \bar{e}_\zeta$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \dot{u}_x \bar{e}_x + \dot{u}_y \bar{e}_y + \dot{u}_z \bar{e}_z - \text{абсолютная производная}$$

$$\dot{\bar{u}} = \dot{u}_\xi \bar{e}_\xi + \dot{u}_\eta \bar{e}_\eta + \dot{u}_\zeta \bar{e}_\zeta - \text{относительная производная}$$

**Теорема 5.** (Связь абсолютной и относительной производной)  $\frac{d\bar{u}}{dt} = \dot{\bar{u}} + [\bar{\omega}, \bar{u}]$ , где  $\bar{\omega}$  - угловая скорость  $O_1\xi\eta\zeta$  относительно  $OXYZ$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{u}}{dt} &= \dot{u}_\xi \bar{e}_\xi + \dot{u}_\eta \bar{e}_\eta + \dot{u}_\zeta \bar{e}_\zeta + u_\xi \frac{d\bar{e}_\xi}{dt} + u_\eta \frac{d\bar{e}_\eta}{dt} + u_\zeta \frac{d\bar{e}_\zeta}{dt} = \\
&= \dot{\bar{u}} + u_\xi [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi] + u_\eta [\bar{\omega}, \bar{e}_\eta] + u_\zeta [\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta] = \dot{\bar{u}} + [\bar{\omega}, \bar{u}] \\
&\left( \frac{d\bar{e}_i}{dt} = [\bar{\omega}, \bar{e}_i] - \text{формула Пуассона, } \dot{\bar{e}}_i = 0 \right)
\end{aligned}$$

■

## Сложное движение материальной точки

**Определение.** Абсолютной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно неподвижной системы отсчета.  $\bar{v}_{abc} = \frac{d}{dt}\bar{r}$

**Определение.** Относительной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно подвижной системы отсчета.  $\bar{v}_{отн} = \dot{\bar{\rho}}$

**Определение.** Переносной скоростью материальной точки называется абсолютная скорость той точки подвижной системы отсчета, в которой находится движущаяся точка в данный момент времени.

**Теорема 6** (Формула сложения скоростей).  $\bar{v}_{abc} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\bar{v}_{abc} &= \frac{d}{dt}(\bar{R} + \bar{\rho}) = \frac{dR}{dt} + \dot{\bar{\rho}} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}] = \\ &= \bar{v}_{O_1} + \bar{v}_{отн} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}] = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}\end{aligned}$$

■

**Определение.** Абсолютным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно неподвижной системы отсчета.  $\bar{w}_{abc} = \frac{d}{dt}\bar{v}_{abc}$

**Определение.** Относительным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно подвижной системы отсчета.  $\bar{w}_{отн} = \dot{\bar{v}}_{отн}$

**Определение.**  $\bar{\omega}_{пер} = \bar{\omega}_{O_1} + [\bar{\varepsilon}, \bar{\rho}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \bar{\rho}]]$

**Определение.**  $\bar{\omega}_{кор} = 2[\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}]$

**Теорема 7** (Формула сложения ускорений).  $\bar{w}_{abc} = \bar{w}_{отн} + \bar{w}_{пер} + \bar{w}_{кор}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\bar{w}_{abc} &= \frac{d}{dt}(\bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}) = \frac{d}{dt}(\bar{v}_{отн} + \bar{v}_{O_1} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}]) = \\ &= \dot{\bar{v}}_{отн} + [\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}] + \frac{d}{dt}\bar{v}_{O_1} + \left[\frac{d\bar{\omega}}{dt}, \bar{\rho}\right] + [\bar{\omega}, \bar{\rho}] + [\bar{\omega}, \bar{\rho}] = \\ &= \dot{\bar{v}}_{отн} + \dot{\bar{v}}_{O_1} + [\bar{\varepsilon}, \bar{\rho}] + 2[\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \bar{\rho}]]\end{aligned}$$

■

## Сложное движение твердого тела

Рассмотрим неподвижную систему отсчета  $OXYZ$ , подвижную  $O_1xyz$ , и систему, связанную с телом  $S\xi\eta\zeta$ .

**Определение.** Абсолютная угловая скорость - угловая скорость  $S\xi\eta\zeta$  относительно  $OXYZ$

**Определение.** Относительная угловая скорость - угловая скорость  $S\xi\eta\zeta$  относительно  $O_1xyz$

**Определение.** Переносная угловая скорость - угловая скорость  $Oxyz$  относительно  $OXYZ$

**Теорема 8** (О сложении угловых скоростей).  $\vec{\omega}_{abc} = \vec{\omega}_{отн} + \vec{\omega}_{пер}$

*Доказательство.*

$$\vec{v}_A^{abc} = \vec{v}_A^{отн} + \vec{v}_A^{пер}$$

$$\vec{v}_B^{abc} = \vec{v}_B^{отн} + \vec{v}_B^{пер}$$

$$\vec{v}_B^{abc} = \vec{v}_A^{abc} + [\vec{\omega}_{abc}, \overline{AB}]$$

$$\vec{v}_B^{отн} = \vec{v}_A^{отн} + [\vec{\omega}_{отн}, \overline{AB}]$$

$$\vec{v}_B^{пер} = \vec{v}_A^{пер} + [\vec{\omega}_{пер}, \overline{AB}]$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + [\vec{\omega}_{abc} - \vec{\omega}_{отн} - \vec{\omega}_{пер}, \overline{AB}] = 0, \quad \forall \overline{AB} \Leftrightarrow \vec{\omega}_{abc} = \vec{\omega}_{отн} + \vec{\omega}_{пер}$$

■

**Замечание.**  $\frac{d\vec{\omega}_{пер}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}_{пер} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{пер}] = \dot{\vec{\omega}}_{пер}$

**Теорема 9** (О сложении угловых ускорений).  $\vec{\varepsilon}_{abc} = \vec{\varepsilon}_{отн} + \vec{\varepsilon}_{пер} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{отн}]$ , где  $\vec{\varepsilon}_{abc} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{abc}$ ,  $\vec{\varepsilon}_{отн} = \dot{\vec{\omega}}_{отн}$ ,  $\vec{\varepsilon}_{пер} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{пер} = \dot{\vec{\omega}}_{пер}$

*Доказательство.*

$$\vec{\varepsilon}_{abc} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{отн} + \vec{\omega}_{пер}) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}}_{отн} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{отн}] + \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{пер} = \vec{\varepsilon}_{отн} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{отн}] + \vec{\varepsilon}_{пер}$$

■

## Несколько подвижных систем отсчета

$OXYZ$  - неподвижная СО

$Ox_1y_1z_1, Ox_2y_2z_2, \dots, Ox_ny_nz_n$  - подвижные СО

$S\xi\eta\zeta$  - связана с телом

$\vec{\omega}$  - угловая скорость  $S\xi\eta\zeta$  относительно  $OXYZ$

Тогда:  $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i$

## Кинематические формулы Эйлера

**Определение.**  $Ox = (OXY) \cap (O\xi\eta)$  - линия узлов

**Определение.**  $\psi = \angle(Ox, OX)$  - угол прецессии

**Определение.**  $\Theta = \angle(O\xi, OZ)$  - угол нутации

**Определение.**  $\varphi = \angle(Ox, O\xi)$  - угол нутации

**Определение.**  $\{\psi, \Theta, \varphi\}$  - углы Эйлера

Повороты:  $OXYZ \xrightarrow{\psi, OZ} OxyZ \xrightarrow{\Theta, Ox} Oxy\xi \xrightarrow{\varphi, O\xi} O\xi\eta\xi$

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\Theta}\vec{e}_x + \dot{\varphi}\vec{e}_\xi$$

$$\vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_\xi + \sin \varphi \vec{e}_\eta$$

$$\vec{e}_z = \cos \Theta \vec{e}_\xi + \sin \Theta (\sin \varphi \vec{e}_\xi + \cos \varphi \vec{e}_\eta)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\psi}(\sin \Theta \sin \varphi \vec{e}_\xi + \sin \Theta \cos \varphi \vec{e}_\eta + \cos \Theta \vec{e}_\xi) \\ &+ \dot{\Theta}(\cos \varphi \vec{e}_\xi - \sin \varphi \vec{e}_\eta) \\ &+ \dot{\varphi} \vec{e}_\xi = \omega_\xi \vec{e}_\xi + \omega_\eta \vec{e}_\eta + \omega_\zeta \vec{e}_\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \vec{\omega}_\xi = \dot{\psi} \sin \Theta \sin \varphi + \dot{\Theta} \cos \varphi \\ \vec{\omega}_\eta = \dot{\psi} \sin \Theta \cos \varphi + \dot{\Theta} \sin \varphi \\ \vec{\omega}_\zeta = \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad \text{- кинематические формулы Эйлера}$$

**Определение.** Движение твердого тела называется прецессией, если некоторая ось, неподвижная в теле, в абсолютном пространстве движется по поверхности неподвижного кругового конуса.  $\dot{\Theta} = 0$ . Если  $\dot{\psi} = \text{const}$ ,  $\dot{\varphi} = \text{const}$ , то прецессия называется регулярной.

## Алгебра кватернионов

**Определение.** Алгеброй над полем называется векторное пространство над этим полем, снабженное билинейной операцией умножения.

**Пример.**

$\underline{n=2}$  (Комплексные числа).  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$\underline{n=4}$  (Алгебра кватернионов)

$$\Lambda = \lambda_0 \vec{i}_0 + \lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3 \in \mathbb{H}$$

$\{\vec{i}_0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\}$  - базис

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\Lambda}$$

$$i_0 \circ i_k = i_k k = \overline{1, 3}, \quad i_0 \circ i_0 = 1$$



$$\begin{aligned}
i_k \circ i_m &= -(i_k, i_m) + [i_k, i_m]k, m \in \{1, 2, 3\} \\
\bar{\lambda} \circ \bar{\mu} &= (\lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3) \circ (\mu_1 \vec{i}_1 + \mu_2 \vec{i}_2 + \mu_3 \vec{i}_3) = -(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + [\bar{\lambda}, \bar{\mu}] \\
\Lambda \circ M &= (\lambda + \bar{\lambda}) \circ (\mu + \bar{\mu}) = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \bar{\mu} + \bar{\lambda} \mu_0 - (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + [\bar{\lambda}, \bar{\mu}]
\end{aligned}$$

**Свойства:**

1.  $(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N)$
2.  $(\Lambda + M) \circ N = \Lambda \circ N + M \circ N$
3.  $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$

**Определение.**

$$\bar{\Lambda} = \lambda_0 - \bar{\lambda}$$

**Утверждение 9.**

$$\overline{\Lambda \circ M} = \bar{M} \circ \bar{\Lambda}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda \circ M} &= \lambda_0 \mu_0 - (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) - \lambda_0 \bar{\mu} - \mu_0 \bar{\lambda} - [\bar{\lambda}, \bar{\mu}] = \\
&= (\mu_0 - \bar{\mu}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \bar{M} \circ \bar{\Lambda}
\end{aligned}$$

■

**Определение.**

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = \sum_{k=0}^3 \lambda_k^2 = |\Lambda|^2 - \text{норма } \Lambda$$

**Утверждение 10.**

$$\|\Lambda \circ M\| = \|\Lambda\| \cdot \|M\|$$

*Доказательство.*

$$\|\Lambda \circ M\| = (\Lambda \circ M) \circ (\overline{\Lambda \circ M}) = \Lambda \circ \underbrace{M \circ \bar{M}}_{\|M\|} \circ \bar{\Lambda} = \|M\| \cdot \|\Lambda\|$$

■

**Определение.**

$$\Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|}, \quad \|\Lambda\| \neq 0$$

**Замечание.**

$$\Lambda \circ \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|} \circ \Lambda = \frac{\|\Lambda\|}{\|\Lambda\|} = 1$$

### Формула Муавра

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda} = |\Lambda| \left( \frac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} \frac{|\bar{\lambda}|}{|\Lambda|} \right) = |\Lambda| (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu)$$

$$\bar{e} = \frac{\bar{\lambda}}{|\bar{\lambda}|}, \quad \cos \nu = \frac{\lambda_0}{\Lambda}, \quad \sin \nu = \frac{\bar{\lambda}}{|\Lambda|}$$

$$\Lambda_1 = |\Lambda_1|(\cos \nu_1 + \bar{e} \sin \nu_1)$$

$$\Lambda_2 = |\Lambda_2|(\cos \nu_2 + \bar{e} \sin \nu_2)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \circ \Lambda_2 &= |\Lambda_1| \cdot |\Lambda_2| (\cos \nu_1 \cos \nu_2 - \sin \nu_1 \sin \nu_2 (\bar{e}, \bar{e}) + \cos \nu_1 \sin \nu_2 \bar{e} + \\ &+ \cos \nu_2 \sin \nu_1 \bar{e} + \sin \nu_2 \sin \nu_1 [\bar{e}, \bar{e}]) = |\Lambda_1| |\Lambda_2| \cdot (\cos(\nu_1 + \nu_2) + \bar{e} \sin(\nu_1 + \nu_2)) \end{aligned}$$

$$\Lambda^k = |\Lambda|^k \cdot (\cos k\nu + \bar{e} \sin k\nu) \text{ — формула Муавра}$$

### Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов

$E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  — неподвижный базис

$E' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$  — связанный с телом

**Теорема 10.** Произвольному положению твердого тела с неподвижной точкой соответствует нормированный кватернион, удовлетворяющий равенству:

$$\bar{e}_i = \Lambda \circ \bar{e}_i \circ \bar{\Lambda}, \quad i = 1 \dots 3$$

**Замечание.**  $\Lambda$  — нормирован, если  $\|\Lambda\| = 1$

*Доказательство.*

1. Нормированность

$$\|\bar{e}'_i\| = \|\Lambda\| \cdot \|\bar{e}_i\| \cdot \|\bar{\Lambda}\| \Rightarrow 1 = \|\Lambda\| \cdot 1 \cdot \|\Lambda\| \Rightarrow \|\Lambda\| = 1$$

2. Существование решения.  $\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ \bar{e}'_i \circ \Lambda = \Lambda \circ \bar{e}_i \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ \bar{e}'_i \circ (\lambda_0 + \bar{\lambda}) = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ \bar{e}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 \bar{e}'_i - (\bar{e}'_i, \bar{\lambda}) + [\bar{e}'_i, \bar{\lambda}] = \lambda_0 \bar{e}_i - (\lambda, \bar{e}'_i) + [\bar{\lambda}, \bar{e}_i] \\ \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ (\bar{\lambda}, \bar{r}_i) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_i - [\bar{\lambda}, \bar{s}_i] = 0 \end{cases} \quad \bar{r}_i = \bar{e}'_i - \bar{e}_i, \quad \bar{s}_i = \bar{e}'_i + \bar{e}_i \quad i = 1 \dots 3$$

(a)

$$\begin{aligned} (\bar{r}_k, \bar{s}_k) &= (\bar{e}'_k - \bar{e}_k, \bar{e}'_k + \bar{e}_k) = (\bar{e}'_k, \bar{e}'_k) - (\bar{e}_k, \bar{e}_k) = 0 \\ (\bar{r}_k, \bar{s}_l) &= (\bar{e}'_k - \bar{e}_k, \bar{e}'_l + \bar{e}_l) = (\bar{e}'_k, \bar{e}'_l) + (\bar{e}'_k, \bar{e}_l) - (\bar{e}_k, \bar{e}'_l) - (\bar{e}_k, \bar{e}_l) = \\ &= -(\bar{e}'_l - \bar{e}_l, \bar{e}'_k + \bar{e}_k) = -(\bar{s}_k, \bar{r}_l), \quad k \neq l \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) &= (\bar{e}'_1 - \bar{e}_1, \bar{e}'_2 - \bar{e}_2, \bar{e}'_3 - \bar{e}_3) = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3) - (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) - \\ &- (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}_3) + (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}'_3) = 1 - 1 - \underbrace{(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}_3)}_{\bar{e}'_3} + \underbrace{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}'_3)}_{\bar{e}_3} = 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} &\bar{r}_1(\bar{s}_2, \bar{r}_3) + \bar{r}_2(\bar{s}_3, \bar{r}_1) + \bar{r}_3(\bar{s}_1, \bar{r}_2) \\ (2b) &\Rightarrow c_1 \bar{r}_1 + c_2 \bar{r}_2 + c_3 \bar{r}_3 = 0 \\ &\begin{cases} 0 + c_2(\bar{s}_1, \bar{r}_2) - c_3(\bar{s}_2, \bar{r}_1) = 0 \\ -c_1(\bar{s}_1, \bar{r}_2) + 0 + c_3(\bar{s}_2, \bar{r}_3) = 0 \\ c_1(\bar{s}_3, \bar{r}_1) - c_2(\bar{s}_2, \bar{r}_3) + 0 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} c_1 = (\bar{s}_2, \bar{r}_3) \\ c_2 = (\bar{s}_3, \bar{r}_1) \\ c_3 = (\bar{s}_1, \bar{r}_2) \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ (\bar{r}_k, \bar{\lambda}) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_k + [\bar{s}_k, \bar{\lambda}] = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \\ (3) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 \bar{r}_1 + [\bar{s}_1, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_2 + [\bar{s}_2, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_3 + [\bar{s}_3, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} \lambda_0 \bar{r}_1 + \alpha \bar{r}_1(\bar{s}_1, \bar{r}_1) - 0 = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_2 + 0 - \alpha \bar{r}_2(\bar{s}_2, \bar{r}_1) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_3 + \alpha \bar{r}_1(\bar{s}_3, \bar{r}_2) - \alpha \bar{r}_2(\bar{s}_3, \bar{r}_1) = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} \lambda_0 \bar{r}_1 + \alpha \bar{r}_1(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_2 + \alpha \bar{r}_2(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_3 + \alpha \bar{r}_3(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \end{cases} \quad \lambda_0 = -\alpha(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = \alpha(\bar{s}_2, \bar{r}_1) \\ (1) &\Rightarrow \alpha^2((\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{e}_2]^2) = 1 \Rightarrow \quad \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{(\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{e}_2]^2}} \end{aligned}$$

$$\Lambda = \pm \frac{(\bar{s}_2, \bar{r}_1) + [\bar{r}_1, \bar{r}_2]}{\sqrt{(\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{r}_2]^2}}$$

■

**Определение.**

$f(M) = \Lambda \circ M \circ \bar{\Lambda}$ ;  $M \rightarrow f(M)$ ,  $\|\Lambda\| = 1$  — присоединенное преобразование

**Утверждение 11.** Присоединенное преобразование не меняет скалярные части кватернионов и модуль векторной части

*Доказательство.*

1.  $f(M) = \Lambda \circ (\mu_0 + \bar{\mu}) \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ \mu_0 \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \bar{\mu} \circ \Lambda = \mu_0 \|\Lambda\| + f(\bar{\mu}) = \mu_0 + \bar{\mu}'$
2.  $\mu_0^2 + \bar{\mu}^2 = \|M\| = \|\Lambda \circ M \circ \bar{\Lambda}\| = \|f(M)\| = \mu_0'^2 + \bar{\mu}'^2 \Rightarrow \mu^2 = \bar{\mu}'^2$

■

**Следствие.** Всегда существует присоединенное преобразование, переводящее орты неподвижного базиса в орты базиса, связанного с телом.

*Доказательство.*

$$\bar{e}'_i = \Lambda \circ \bar{e}_i \circ \bar{\Lambda} = f(\bar{e}_i) \quad (4)$$

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^3 r_k \bar{e}_k, \quad f(r) = \Lambda \circ \sum r_k \bar{e}_k \bar{\Lambda} = \sum_k r_k f(\bar{e}_k) = \sum_k r_k \bar{e}'_k = \bar{r}' \quad (5)$$

$$(6)$$

■

$$\boxed{\bar{r}' = \Lambda \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}} \quad (7)$$

**Следствие.** При повороте твердого тела вокруг неподвижной точки справедлива (7), где  $\bar{r}$  — начальное положение точки,  $\bar{r}'$  — ее положение после поворота, а  $\Lambda$  — кватернион соответствующего преобразования.

**Теорема 11.** Преобразование, заданное кватернионом  $\Lambda = \cos \nu + \bar{e} \sin \nu$  соответствует повороту пространства вокруг вектора  $\bar{e}$  на угол  $2\nu$

*Доказательство.*

1.

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$$

$$\bar{\lambda}' f(\bar{\lambda}) = \Lambda \circ \bar{\lambda} \circ \bar{\Lambda} = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ \bar{\Lambda} \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) =$$

$$\begin{aligned}
(\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (-\lambda^2 + \lambda_0 \bar{\lambda}) &= -\lambda_0 \bar{\lambda}^2 - \lambda_0 \bar{\lambda}^2 + \lambda_0^2 + \lambda^2 \bar{\lambda} = \\
&= \bar{\lambda}(\lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2) \Rightarrow \bar{\lambda} - \text{неподвижная ось} \Rightarrow \\
\Rightarrow \bar{e} &= \frac{\bar{\lambda}}{\sin \nu} - \text{ось поворота} \\
\bar{a} &\in \pi \perp \bar{e} \\
\bar{a}' = f(\bar{a}) &= (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu) \circ \bar{a} \circ (\cos \nu - \bar{e} \sin \nu) = \\
&= (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu) \circ ([\bar{a}, \bar{e}] \cdot \sin \nu + \cos \nu \bar{a} - \sin \nu [\bar{a}, \bar{e}]) = \\
&= \cos^2 \nu \bar{a} + \cos \nu \sin \nu (\bar{a}, \bar{e}) + \cos \nu \sin \nu = \dots
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\bar{a}' &= (\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2} \circ \bar{a}) \circ (\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) = \\
&= (\bar{a} \cos \frac{\varphi}{2} + [\bar{e}, \bar{a}] \sin \frac{\varphi}{2}) \circ (\cos \frac{\varphi}{2} - \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) = \\
&= \bar{a} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2[\bar{e}, \bar{a}] \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \bar{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \\
&= \bar{a} \cos \varphi + [\bar{e}, \bar{a}] \sin \varphi
\end{aligned}$$

$$|\bar{a}'| = |\bar{a}|$$

■

**Следствие.**

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{e}'_1 + \lambda_2 \bar{e}'_2 + \lambda_3 \bar{e}'_3$$

**Определение.**

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — *Параметры Родрига-Гамильтона*

**Следствие** (Теорема Эйлера о конечном повороте). *Любые два положения твердого тела с неподвижной точкой могут быть получены одно из другого одним поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку на некоторый угол*

*Доказательство.*

1.

$$\forall E, E' \exists \Lambda E \rightarrow E'$$

2.

$$\forall \Lambda \bar{r} \rightarrow \bar{r}' \Leftrightarrow \text{Поворот вокруг } e \text{ на } \varphi$$

■

$$\begin{aligned}
E &\xrightarrow{\Lambda_1} E' \xrightarrow{\Lambda_2} E'', \quad E \xrightarrow{\Lambda} \\
\bar{r}' &= \Lambda_1 \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}, \quad \bar{r}'' = \Lambda_2 \circ \bar{r}' \circ \bar{\Lambda} \\
\bar{r}'' &= \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}_2 = \Lambda \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}, \quad \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1} \text{ — формула сложения поворотов}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k'' = \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k' \\
\Lambda_2^* &= \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k \text{ — собственный к } \Lambda_2 \text{ кватернион} \\
\bar{e}_k' &= \Lambda_1 \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}_1, \quad \Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \Lambda_1 \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}_1 = \\
&= \Lambda_1 \circ (\lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k) \circ \bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ \bar{\Lambda}_1 \\
\Lambda &= \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ (\bar{\Lambda}_1 \circ \Lambda_1) = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*, \quad \Lambda_1^* = \Lambda_1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*}$$

— формула сложения поворотов в параметрах Родрига-Гамильтона

## Кинематика твердого тела в кватернионном описании

**Теорема 12.** Угловая скорость твердого тела определяется равенством:

$$\bar{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}$$

где  $\Lambda$  - кватернион, задающий положение твердого тела относительно неподвижного базиса

*Доказательство.*

1.

$$\begin{aligned}
B &= \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} \\
B + \bar{B} &= \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \overline{(\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda})} = \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \bar{\Lambda} = \\
&= \frac{d}{dt}(\Lambda \circ \bar{\Lambda}) = \frac{d}{dt}(\|\Lambda\|) = 0 \Rightarrow B = \bar{B}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{e}}'_k &= [\bar{\omega}, \bar{e}_k] \\
\bar{e}'_k &= \Lambda \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}, \quad \bar{e}_k = \bar{\Lambda} \circ \bar{e}'_k \circ \Lambda \\
\dot{\bar{e}}'_k &= \dot{\Lambda} \circ \bar{e}_k \circ \Lambda + \Lambda \circ \bar{e}_k \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \\
&= \dot{\Lambda} \circ (\bar{\Lambda} \circ \bar{e}'_k \circ \Lambda) \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ (\bar{\Lambda} \circ \bar{e}'_k \circ \Lambda) \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \\
&= \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} \circ \bar{e}'_k + \bar{e}'_k \circ \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = B \circ \bar{e}'_k + \bar{e}'_k \circ \bar{B} = \\
[2\bar{B}, \bar{e}_k] &\Rightarrow 2\bar{B} = \bar{\omega}
\end{aligned}$$

■

**Пример.**

$$\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} &= 2(-\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \dot{\bar{e}} \sin \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi}) \circ (\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) = \\
&= \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \bar{e} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \\
&+ \bar{e} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + 2\dot{\bar{e}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2[\bar{e}, \dot{\bar{e}}] \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \bar{e}\dot{\varphi} + \dot{\bar{e}} \sin \varphi + 2[\bar{e}, \dot{\bar{e}}] \sin^2 \frac{\varphi}{2}
\end{aligned}$$

**Замечание.**

1.

$$\bar{\omega} = \bar{e}\dot{\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \dot{\bar{e}} = 0 \end{cases}$$

2.

$$\varphi \ll 1. \quad \bar{\omega} \approx \bar{e}\varphi + \dot{\bar{e}}\varphi = \frac{d}{dt}(\bar{e}\varphi)$$

3.

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{e} \Delta \varphi}{\Delta t}, \quad E(t) \xrightarrow{\Delta \Lambda} E(t + \delta t), \quad \Delta \Lambda = \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \Delta \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}$$

**Уравнение Пуассона**

$$\omega = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}$$

$$\boxed{\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega}\Lambda} \text{ — кинематическое уравнение Пуассона} \quad (8)$$

$$\omega = p\bar{e}'_1 + q\bar{e}'_2 + r\bar{e}'_3, \quad \bar{\omega}^* = p\bar{e}_1 + q\bar{e}_2 + r\bar{e}_3$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \bar{\omega}^* \quad (9)$$

## Интегрирование уравнения Пуассона

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) \quad (10)$$

**Определение.** Функция  $\Phi(\bar{x}, t)$  называется первым интегралом системы (10), если

$$\Phi(\bar{x}(t), t) = \text{const}$$

где  $\bar{x}(t)$  — решение системы (10)

**Утверждение 12.** Система (8) имеет первый интеграл вида

$$\|\Lambda\| = \text{const}$$

*Доказательство.*

$$\frac{d}{dt}(\|\Lambda\|) = \frac{d}{dt}(\Lambda \circ \bar{\Lambda}) = \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda \circ \bar{\Lambda} \dots$$

■

**Утверждение 13.** Общее решение системы (8) имеет вид:

$$\Lambda(t) = \Lambda'(t) \cdot C$$

где  $\Lambda'$  — частное решение,  $C = \text{const}$ .

*Доказательство.*  $\Lambda, \Lambda'$  — Нетривиальные решения (8)

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda, \quad \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda'$$

$$M = (\Lambda')^{-1} \circ \Lambda, \quad \Lambda = \Lambda' \circ M$$

$$(9) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Lambda}' \circ M + \Lambda' \circ \dot{M} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda' \circ M \\ \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Lambda' \circ \dot{M} = 0 \Leftrightarrow \dot{M} = 0 \Leftrightarrow M = C = \text{const}$$

■

**Следствие.**

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda, \quad \Lambda(\varphi) = 1 \quad (11)$$

Случай 1. Вращение вокруг неподвижной оси  $\bar{\omega} = \bar{e}\omega$ ,  $\bar{e} = \text{const}$ :

$$(11) \Rightarrow \Lambda \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$$

Случай 2. Регулярная прецессия:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$$



$$\Lambda_z = \cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_z \sin \frac{\varphi}{2}, \psi = \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau$$

$$\Lambda_\zeta = \cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_\zeta \sin \frac{\varphi}{2}, \varphi = \int_0^t \omega_2(\tau) d\tau$$

1 способ:

$O\zeta$  — ось тела (подвижная)

$$\Lambda_1 = \Lambda_z, \quad \Lambda_2 = \Lambda_\zeta$$

$Oxyz$  — неподвижный базис,  $Oxz = O\nu\zeta(0)$

$$\Lambda_2^* = \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e}_\xi(0) \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} + (\sin \Theta \bar{e}_x + \cos \Theta \bar{e}_z) \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\Lambda = \left( \cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_z \sin \frac{\psi}{2} \right) \circ \Lambda_2 = \dots$$

2 способ:

$O\zeta$  — неподвижна (ось тела в начальный момент времени)

$$\Lambda_1 = \Lambda_\zeta, \quad \Lambda_2 = \Lambda_z$$