Аналитическая механика

Муницина Валерия Александровна

28 сентября 2017 г.

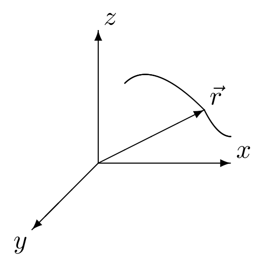
Набор: Александр Валентинов
Об ошибках писать: vk.com/valentiay

Содержание

Кинематика точки

Определение. *Материальная точка - точка, размером которой можно пренебречь.*

Мы будем полагать, что время меняется равномерно и непрерывно.



Векторное описание движения

Зависимость координат от времени назовем законом движения.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \in C^2$$

Определение. $\gamma = \{\vec{r}(t),\ t \in (0,\ +\infty)\}$ - *траектория*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Декартовы координаты

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e_x} + y(t)\vec{e_y} + z(t)\vec{e_z}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e_x} + \dot{y}(t)\vec{e_y} + \dot{z}(t)\vec{e_z}$$

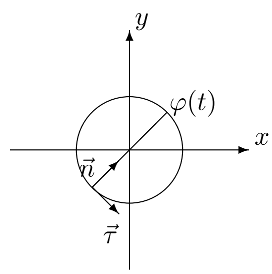
$$\vec{w}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e_x} + \ddot{y}(t)\vec{e_y} + \ddot{z}(t)\vec{e_z}$$

Движение по окружности

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - R\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + R\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{cases}$$



$$\vec{v} = R\dot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \vec{e_x} + \cos\varphi \cdot \vec{e_y}) = R\dot{\varphi}\vec{\tau}$$
$$\vec{w} = R\ddot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \vec{e_x} + \cos\varphi \cdot \vec{e_y}) + R\dot{\varphi}^2(-\cos\varphi \cdot \vec{e_x} - \sin\varphi \cdot \vec{e_y}) = R\ddot{\varphi}\vec{\tau} + R\dot{\varphi}^2\vec{n}$$

$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\vec{\tau} = v\vec{\tau}$$
$$\vec{w} = R\ddot{\varphi}\vec{\tau} + R\dot{\varphi}^2\vec{n} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

Естественное описание движения

Кривая задана параметрически естественным параметром s. $ds = |\vec{dr}| \neq 0$

Определение.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}} \text{ - касательный вектор} \tag{1}$$

$$\vec{n} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{\tau}}|} \text{ - вектор главной нормали} \tag{2}$$

$$\vec{b} = [\vec{t}; \vec{n}] \text{ - вектор бинормали} \tag{3}$$

Утверждение 1. $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$ *- тройка ортогональных единичных векторов.*

Доказательство.

$$|\vec{\tau}| = \frac{|d\vec{r}|}{|ds|} = 1 \tag{4}$$

$$|\vec{n}| = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{\tau}}|} = 1 \tag{5}$$

$$|\vec{\tau}| = 1 \Rightarrow (\tau, \tau) = 1 \tag{6}$$

$$(\dot{\vec{\tau}}, \vec{\tau}) + (\vec{\tau}, \dot{\vec{\tau}}) = 0 \tag{7}$$

$$2(\dot{\vec{\tau}}, \vec{\tau}) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{\tau}} \perp \vec{\tau} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{\tau} \tag{8}$$

■

Этот трехгранник называют репер Ферне. (Дарбу, сопровождающий трехгранник).

Теорема 1. $\vec{v} = v\vec{\tau}$, $\vec{w} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$, *где* $v = \dot{s}$.

Доказательство.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\vec{\tau} \tag{9}$$

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{n}kv, \text{ по формуле (2)} \tag{10}$$

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{\tau} + v\dot{\vec{\tau}} = \dot{v}\vec{\tau} + v^2 k\vec{n} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \tag{11}$$

$$\dot{v}\vec{\tau} \text{ - касательное ускорение}$$

$$\frac{v^2}{\rho}\vec{n} \text{ - нормальное ускорение}$$

$$\rho = \frac{1}{|\dot{r}|} \text{ - радиус кривизны}$$

$$k = |\ddot{\vec{r}}| \text{ - кривизна}$$

$$\ddot{\vec{r}} \text{ - вектор кривизны}$$

■

Формулы Френеля:

$$\begin{cases} \vec{\tau}' = k\vec{n} \\ \vec{n}' = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{b} \\ \vec{b}' = -\varkappa\vec{n} \end{cases}$$

где $\varkappa$ - коэффициент кручения.

Доказательство.

$$|\vec{n}| = 1 \Rightarrow (\vec{n}, \vec{n}) = 0$$

$$\vec{n} \perp \vec{\tau} \Rightarrow (\vec{n}', \vec{\tau}) + (\vec{n}, \vec{\tau}') = 0 \Rightarrow (\vec{n}', \vec{\tau}) + k = 0$$

$$\vec{b}' = [\vec{\tau}', \vec{n}] + [\vec{\tau}, \vec{n}'] = [k\vec{n}, \vec{n}] + [\vec{\tau}, -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{b}] = 0 + \varkappa[\vec{r}, \vec{b}] = -\varkappa\vec{n}$$

■

Ортогональные векторные координаты

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t)) \tag{12}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i \tag{13}$$

$$\vec{H_i} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = H_i\vec{e_i}, \text{ где } H_i \text{ - коэффициенты Ламе.} \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Геометрический смысл

$$ds_i = H_i dq_i$$

s_i - длина дуги i-й к-ой линии.

$$H_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} H_i \dot{q}_i \vec{e}_i, \quad v^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = \sum H_i^2 \dot{q}_i^2$$

Теорема 2. *Копоненты вектора ускорения в ортогональном криволинейном базисе определяются равенством:*

$$w_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right)$$

Доказательство.

$$(\vec{w}, \vec{H}_i) = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}, \frac{\vec{r}}{\partial q_i}\right) - \left(\vec{v}, \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) \triangleq \tag{16}$$

$$1)\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i'} \text{ - из определения скорости} \tag{17}$$

$$2)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j = \tag{18}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \tag{19}$$

$$\triangleq \frac{d}{dt}\left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}\right) - \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}(\vec{v}, \vec{v}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}(\vec{v}, \vec{v}) = \tag{20}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) \tag{21}$$

$$w_i = (\vec{w}, \vec{e}_i) = \frac{1}{H_i}(\vec{w}, \vec{H}_i) \tag{22}$$

■

Кинематика твердого тела

Определение. *Абсолютно твердым телом называется множество точек, расстояние между которыми не меняется со временем.*

$\{\vec{r}_i, i = \overline{1 \ldots n} \quad : \quad |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = C_{ij} = const, \quad n \geqslant 3\}$

$OXYZ$ - неподвижная система отсчета.
$S\xi\eta\zeta$ - связаны с телом (движется).

$$X = \begin{pmatrix} (\vec{e_\xi}, \vec{e_x}) & (\vec{e_\xi}, \vec{e_y}) & (\vec{e_\xi}, \vec{e_z}) \\ (\vec{e_\eta}, \vec{e_x}) & (\vec{e_\eta}, \vec{e_y}) & (\vec{e_\eta}, \vec{e_z}) \\ (\vec{e_\zeta}, \vec{e_x}) & (\vec{e_\zeta}, \vec{e_y}) & (\vec{e_\xi}, \vec{e_\zeta}) \end{pmatrix} \text{ - матрица направляющих косинусов.}$$

$$\vec{AB} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$$

$$\vec{AB} = \xi\vec{e_\xi} + \eta\vec{e_\eta} + \zeta\vec{e_\zeta}$$

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{e_\xi}, x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) \\ (\vec{e_\eta}, x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) \\ (\vec{e_\zeta}, x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{e_\xi}, \vec{AB}) \\ (\vec{e_\eta}, \vec{AB}) \\ (\vec{e_\zeta}, \vec{AB}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{\rho}$$

$$\vec{\rho} = X\vec{r}$$

Утверждение 2. X - *ортогональная матрица.*

Доказательство.

$$XX^T = X^T X = \begin{pmatrix} (\vec{e_\xi}, \vec{\xi}) & (\vec{e_\xi}, \vec{\eta}) & (\vec{e_\xi}, \vec{\zeta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \dots & \end{pmatrix} = 0$$

Т.к. базис ортогональный. ∎

$$\begin{pmatrix} \vec{e_\xi} \\ \vec{e_\eta} \\ \vec{e_\zeta} \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \vec{e_x} \\ \vec{e_y} \\ \vec{e_z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{e_\xi}} \\ \dot{\vec{e_\eta}} \\ \dot{\vec{e_\zeta}} \end{pmatrix} = \dot{X} \begin{pmatrix} \vec{e_x} \\ \vec{e_y} \\ \vec{e_z} \end{pmatrix} = \underbrace{\dot{X}X^T}_{\Omega} \begin{pmatrix} \vec{e_\xi} \\ \vec{e_\eta} \\ \vec{e_\zeta} \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \vec{e_\xi} \\ \vec{e_\eta} \\ \vec{e_\zeta} \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \dot{X}X^T$$

Утверждение 3. Ω - *кососимметрична.*

Доказательство.

$$\Omega\Omega^2 = \dot{X}X^T + (\dot{X}X^T)T = \dot{X}X^T + X\dot{X}^T = \frac{d}{dt}(XX^T) = \frac{d}{dt}(E) = 0$$

∎

Следствие.

$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{pmatrix}$ - *Факт, который может быть законспектирован неправильно*

Определение. $\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{e_\xi} + \omega_\eta \vec{e_\eta} + \omega_\zeta \vec{e_\zeta}$ - *угловая скорость подвижного репера.*

Формулы Пуассона

Утверждение 4.

$$\dot{\vec{e_i}} = [\vec{\omega}, \vec{e_i}], \quad i = \overline{1 \dots 3}$$

Доказательство.

$$\dot{\vec{e_\xi}} = \omega_\zeta \vec{e_\eta} - \omega_\eta \vec{e_\zeta} = \begin{vmatrix} \vec{e_\xi} & \vec{e_\eta} & \vec{e_\zeta} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [\vec{\omega}, \vec{e_\xi}]$$

■

Утверждение 5. $\vec{\omega} = \vec{e_\xi}(\dot{\vec{e_\eta}}, \vec{e_\zeta}) + \vec{e_\eta}(\dot{\vec{e_\zeta}}, \vec{e_\xi}) + \vec{e_\zeta}(\dot{\vec{e_\xi}}, \vec{e_\eta})$

Доказательство.

$$(\dot{\vec{e_\xi}}, \vec{e_\eta}) = \omega_\zeta$$

$$(\dot{\vec{e_\eta}}, \vec{e_\zeta}) = \omega_\xi$$

$$(\dot{\vec{e_\zeta}}, \vec{e_\xi}) = \omega_\eta$$

■

Утверждение 6. $\vec{\omega} = \frac{1}{2}([\vec{e_\xi}, \dot{\vec{e_\xi}}] + [\vec{e_\eta}, \dot{\vec{e_\eta}}] + [\vec{e_\zeta}, \dot{\vec{e_\zeta}}])$

Доказательство.

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}([\vec{e_\xi}, \dot{\vec{e_\xi}}] + [\vec{e_\eta}, \dot{\vec{e_\eta}}] + [\vec{e_\zeta}, \dot{\vec{e_\zeta}}]) = \frac{1}{2}([\vec{e_\xi}, [\vec{\omega}, \vec{e_\xi}]] + [\vec{e_\eta}, [\vec{\omega}, \vec{e_\eta}]] + [\vec{e_\zeta}, [\vec{\omega}, \vec{e_\zeta}]]) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{\omega}(\vec{e_\xi}, \vec{e_\xi}) - \vec{e_\xi}(\vec{\omega}, \vec{e_\xi}) + \vec{\omega}(\vec{e_\eta}, \vec{e_\eta}) - \vec{e_\eta}(\vec{\omega}, \vec{e_\eta}) + \vec{\omega}(\vec{e_\zeta}, \vec{e_\zeta}) - \vec{e_\zeta}(\vec{\omega}, \vec{e_\zeta})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(3\vec{\omega} - \vec{\omega}) = \vec{\omega}$$

■

Пример. *Угловая скорость репера Френеля.*

$$\begin{cases} \vec{\tau}' = k\vec{n} \\ \vec{n}' = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{b} \\ \vec{b}' = -\varkappa\vec{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\dot{s} \\ \dot{\vec{n}} = \frac{d\vec{n}}{ds}\dot{s} \\ \dot{\vec{b}} = \frac{d\vec{b}}{ds}\dot{s} \end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\tau}(\dot{s}(-k\vec{\tau} + \varkappa\vec{b}), \vec{b}) + \vec{n}(\dot{s}(-\varkappa\vec{n}, \vec{\tau}) + \vec{b}(\dot{s}(k\vec{n}), \vec{n}) = \dot{s}(\varkappa\vec{\tau} + k\vec{b})$$

Определение. *Угловой скоростью твердого тела называется угловая скорость подвижного репера, с ним связзанного.*

Формула распределения скоростей точек твердого тела

$\vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}, \vec{AB}]$

Доказательство.

$$\vec{AB} = \xi\vec{e_\xi} + \eta\vec{e_\eta} + \zeta\vec{e_\zeta}$$

$$\dot{\vec{AB}} = \xi\dot{\vec{e_\xi}} + \eta\dot{\vec{e_\eta}} + \zeta\dot{\vec{e_\zeta}}, \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$$

$$(\vec{r_B} \dot{-} \vec{r_A}) = \xi[\vec{\omega}, \vec{e_\xi}] + \eta[\vec{\omega}, \vec{e_\eta}] + \zeta[\vec{\omega}, \vec{e_\zeta}]$$

$$\dot{\vec{r_1}} - \dot{\vec{r_2}} = [\vec{\omega}, \xi\vec{e_\xi} + \eta\vec{e_\eta} + \zeta\vec{e_\zeta}]$$

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}, \vec{AB}]$$

■

Следствие. $S\xi\eta\zeta \to \vec{\omega}$, $S'\xi'\eta'\zeta' \to \vec{\omega}'$

$$\left.\begin{matrix} \vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}, \vec{AB}] \\ \vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}', \vec{AB}] \end{matrix}\right| [\vec{\omega} - \vec{\omega}', \vec{AB}] = 0; \ \forall A, B \text{ в абсолютно твердом теле} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} - \vec{\omega}' = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}'}$$

Утверждение 7. *(Формула Ривальса)* $\vec{w_B} = \vec{w_A} + [\vec{\varepsilon}, \vec{AB}] + [\vec{\omega}, [\omega, \vec{AB}]]$.

Доказательство.

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}, \vec{AB}]$$

$$\dot{\vec{v_B}} = \dot{\vec{v_A}} + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{AB}] + [\vec{\omega}, \vec{r_B} \dot{-} \vec{r_A}]$$

$$\vec{w_B} = \vec{w_A} + [\vec{\varepsilon}, \vec{AB}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{AB}]]$$

$[\vec{\varepsilon}, \vec{AB}]$ - вращательное ускорение, $[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{AB}]]$ - осестремительное ускорение

■

Геометрический смысл

$\vec{w} = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{AB}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{AB}) - \vec{AB}\omega^2 = \omega^2(\vec{e_\omega}(\vec{AB}, \vec{e_\omega}) - \vec{AB})$
$|\vec{w_{\mathbf{oc}}}| = \omega^2\rho(B, l)$

Утверждение 8. *Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны.*

Доказательство.

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}, \vec{AB}]$$

$$(\vec{v_B}, \vec{AB}) = (\vec{v_A}, \vec{AB}) + ([\vec{\omega}, \vec{AB}], \vec{AB})$$

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$$

■

Замечание. *Аналогичная теорема для ускорений не верна.*

Классификация движения твердого тела

Поступательное

Определение. *Такое движение твердого тела, при котором угловая скорость равна нулю.*

$$\vec{v_B} \equiv \vec{v_A}$$

$$\vec{w_B} \equiv \vec{v_A}$$

Мгновенное поступательное движение: $\exists t : \vec{\omega}(t) = 0, \quad \vec{\varepsilon}(t) \neq 0$

Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси)

$\exists A, B : \vec{v_A} = \vec{v_B} = 0$
$\vec{v_B} = \vec{v_A} + [\vec{\omega}, \vec{AB}], \vec{v_A} = \vec{v_B} = 0 \Rightarrow [\omega, \vec{AB}] = 0 \Rightarrow \omega \parallel \vec{AB}$
$\forall M \in l : \vec{v_M} = 0$, l - ось вращения
$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi}\vec{e}_\eta,\ \dot{\vec{e}}_\eta = -\dot{\varphi}\vec{e}_\xi,\ \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$
$\vec{\omega} = \vec{e}_\xi(-\dot{\varphi}\vec{e}_\xi, \vec{e}_\zeta) + \vec{e}_\eta(0, \vec{e}_\xi) + \vec{e}_\zeta(\dot{\varphi}\vec{e}_\eta, \vec{e}_\eta) = \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta = \dot{\varphi}\vec{e}_z$
$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\vec{e}_z$
$\vec{v}_p = \vec{v}_{p'} + [\vec{\omega}, \overrightarrow{pp'}] = 0 + [\dot{\varphi}\vec{e}_z, \xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta] = \dot{\varphi}(x\vec{e}_\eta - y\vec{e}_\xi)$
$|\vec{v}_p| = |\vec{\omega}| \cdot |\overrightarrow{p'p}|$
$\vec{w}_p = \vec{w}_{p'} + [\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{p'p}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{p'p}]] = 0 + [\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{p'p}] - \omega^2\overrightarrow{p'p}$

Плоскопараллельное движение

Определение. *Движение твердого тела называется плоскопараллельным, если скорости всех точек тела параллельны некоторой неподвижной плоскости:*

$$\vec{v}_{p_i} \parallel \pi, \ \forall p_i \in ATT$$

$$\vec{v}_{p_i} = \vec{v}_{p_j} + [\vec{\omega}, p_j\vec{p}_i]$$

$$(\vec{p}_i - \vec{v}_{p_i}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{\omega} = 0 \\ \vec{v}_{p_i} = \vec{v}_{p_j}, \ \forall p_i, p_j \in \text{ATT} \\ \vec{\omega} \perp \vec{p}_i - \vec{v}_{p_i} \parallel \pi \end{array} \right.$$

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_{M_j} + \omega[\vec{\omega}, \overrightarrow{M_j M_i}] = \vec{v}_{M_j}, \quad \forall M_i, M_j : \overrightarrow{M_i M_j} \perp \pi \Rightarrow \vec{w}_{M_i} = \vec{w}_{M_j}$$

Качение:

$$\vec{r}_S = x_S \vec{e}_x + y_S \vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi}\vec{e}_\eta, \quad \dot{\vec{e}}_\eta = \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta, \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z, \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\vec{e}_z \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_S + [\vec{\omega}, \overrightarrow{SM}]$$

$$\vec{w}_M = \vec{w}_S + [\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{SM}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{SM}]] = \vec{w}_s + [\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{SM}] - \omega^2 \overrightarrow{SM}$$

Теорема 3. *Если при плоскопараллельном движении угловая скорость твердого тела отлична от нуля, то существует точка, скорость которой равна нулю в данный момент времени.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \vec{v}_c = \vec{v}_s + [\vec{\omega}, \vec{SC}] \\ \vec{v}_c = 0 \end{cases} \Rightarrow [\vec{\omega}, \vec{v}_s] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{SC}]] = 0$$

$$[\vec{\omega}, \vec{v}_s] + \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{SC}) - \omega^2 \vec{SC} = 0$$

$$\vec{SC} = \frac{[\vec{\omega}, \vec{v}_s]}{\omega^2}$$

■

Следствие. *Любое плоскопараллельное движение является либо мгновенно-поступательным, либо мгновенно-вращательным*

Доказательство. $\vec{\omega} = 0$ - мгновенно-поступательное. $\vec{\omega}(t) \neq 0$ - вращение вокруг l.

■

Определение. *C - мгновенный центр скоростей*

Замечание. *Положение C меняется со временем.*

Пример. *Качение без проскальзывания*

Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки)

$$\exists \vec{v}_0 \equiv 0$$

$$l \parallel \vec{\omega}, O \in l$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{OM}] = 0 + 0,\ \forall M \in l$$

Определение. *l - мгновенная ось вращения*

$$\vec{v}_p = [\vec{\omega}, \vec{OP}],\ \vec{w}_p = [\vec{\varepsilon}, \vec{OP}] + \underbrace{[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{OP}]]}_{\vec{v}_{OC}}$$

Винтовое движение

Определение. *Движение твердого тела называется винтовым, если тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси, а скорости всех точек, лежащий на этой оси, равны между собой, постоянны и сонаправленны с осью.*

Общий случай

Теорема 4. $\vec{\omega} \neq 0 \Rightarrow \exists l:\ \vec{\omega} \parallel l,\ \vec{v}_{k_i} \parallel l,\ \forall k_i \in l$

Доказательство.

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\omega},\ S \in \alpha$$

$$\begin{cases} \vec{v}_c = \vec{v}_c = \vec{v}_s + [\vec{\omega}, \vec{SC}] \\ \vec{v}_c = \lambda\vec{\omega} \end{cases} \Rightarrow 0 = [\vec{\omega}, \vec{v}_s] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{SC}]]$$

$$[\vec{\omega}, \vec{v}_s] + \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{SC}) - \omega^2 \vec{SC} = 0$$

$$\vec{SC} = \frac{[\vec{\omega}, \vec{v}_c]}{\omega^2}$$

$$\exists l : C \in l, l \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_{C_1} = \vec{v}_C + [\vec{\omega}, \vec{CC}_1] = \vec{v}_C, \quad \forall C_1 \in l$$

■

$$\vec{v}_C = \vec{v}_S + \left[\vec{\omega}, \frac{[\vec{\omega}, \vec{v}_C]}{\omega^2}\right] = \vec{v}_S + \frac{1}{\omega^2}\left(\vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{v}_S) - \omega^2 \vec{v}_S\right) = \underbrace{\frac{(\vec{\omega}, \vec{v}_S)}{\omega^2}}_{\lambda} \vec{\omega}$$

$$\lambda = \frac{(\vec{\omega}, \vec{v}_S)}{\omega^2} \text{ - параметр (шаг винта).}$$

Следствие. *Любое движение твердого тела является в каждый момент времени либо мгновенно-поступательным ($\omega = 0$, $\lambda \to +\infty$), либо мгновенно-вращательным ($\omega \neq 0$, $\lambda = 0$) , либо мгновенно-винтовым ($\omega \neq 0$, $\lambda \neq 0$).*

Определение. $\{l, \vec{\omega}, \vec{v}\}$ - *кинематический винт.*

$$\vec{v}_S = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

$$\vec{r}_S = x_S\vec{e}_x + y_S\vec{e}_y + z_S\vec{e}_z$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{e}_x + \omega_y\vec{e}_y + \omega_z\vec{e}_z$$

$$\vec{r}_C = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v}_S + [\vec{\omega}, \vec{SC}] = \lambda\vec{\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{v_x + \omega_y(z - z_S) - \omega_z(y - y_S)}{\omega_x} =$$

$$= \frac{v_y + \omega_z(x - x_S) - \omega_x(z - z_S)}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x(y - y_S) - \omega_y(x - x_S)}{\omega_z}$$

Кинематика сложного движения

$OXYZ$ - неподвижная система отсчета ($\vec{r}$), $O_1\xi\eta\zeta$ - подвижная система отсчета ($\vec{\rho}$).

$$\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$$

$$\vec{u} = u_\xi\vec{e}_\xi + u_\eta\vec{e}_\eta + u_\zeta\vec{e}_\zeta$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_x\vec{e}_x + \dot{u}_y\vec{e}_y + \dot{u}_z\vec{e}_z \text{ - абсолютная производная}$$

$$\dot{\vec{u}} = \dot{u}_\xi\vec{e}_\xi + \dot{u}_\eta\vec{e}_\eta + \dot{u}_\zeta\vec{e}_\zeta \text{ - относительная производная}$$

Теорема 5. *(Связь абсолютной и относительной производной)* $\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\vec{u}} + [\vec{\omega}, \vec{u}]$*, где* $\vec{\omega}$ *- угловая скорость* $O_1\xi\eta\zeta$ *относительно* $OXYZ$

Доказательство.

$$\frac{du}{dt} = \dot{u}_\xi\vec{e}_\xi + \dot{u}_\eta\vec{e}_\eta + \dot{u}_\zeta\vec{e}_\zeta + u_\xi\frac{d\vec{e}_\xi}{dt} + u_\eta\frac{d\vec{e}_\eta}{dt} + u_\zeta\frac{d\vec{e}_\zeta}{dt} =$$

$$= \dot{\vec{u}} + u_\xi[\vec{\omega}, \vec{e}_\xi] + u_\eta[\vec{\omega}, \vec{e}_\eta] + u_\zeta[\vec{\omega}, \vec{e}_\zeta] = \dot{\vec{u}} + [\vec{\omega}, \vec{u}]$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_i}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_i] - \text{ - формула Пуассона, } \quad \dot{\vec{e}}_i = 0\right)$$

■

Сложное движение материальной точки

Определение. *Абсолютной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно неподвижной системы отсчета.* $\vec{v}_{абс} = \frac{d}{dt}\vec{r}$

Определение. *Относительной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно подвижной системы отсчета.* $\vec{v}_{отн} = \dot{\vec{\rho}}$

Определение. *Переносной скоростью материальной точки называется абсолютная скорость той точки подвижной системы отсчета, в которой находится движующаяся точка в данный момент времени.*

Теорема 6 (Формула сложения скоростей)**.** $\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}$

Доказательство.

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\vec{R} + \vec{\rho}) = \frac{dR}{dt} + \dot{\vec{\rho}} + [\vec{\omega}, \vec{\rho}] =$$

$$= \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{\text{отн}} + [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}$$

∎

Определение. *Абсолютным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно неподвижной системы отсчета.* $\vec{w}_{абс} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{абс}$

Определение. *Относительным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно подвижной системы отсчета.* $\vec{w}_{отн} = \dot{\vec{v}}_{отн}$

Определение. $\vec{\omega}_{пер} = \vec{\omega}_{O_1} + [\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]]$

Определение. $\vec{\omega}_{кор} = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{отн}]$

Теорема 7 (Формула сложения ускорений)**.** $\vec{w}_{абс} = \vec{w}_{отн} + \vec{w}_{пер} + \vec{w}_{кор}$

Доказательство.

$$\vec{w}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{O_1} + [\vec{\omega}, \vec{\rho}]) =$$

$$= \dot{\vec{v}}_{\text{отн}} + [\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{отн}}] + \frac{d}{dt}\vec{v}_{O_1} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho}\right] + [\vec{\omega}, \vec{\rho} + [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] =$$

$$= \dot{\vec{v}}_{\text{отн}} + \dot{\vec{v}}_{O_1} + [\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}] + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{отн}}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]]$$

∎

Сложное движение твердого тела

Рассмотрим неподвижную систему отсчета $OXYZ$, подвижную O_1xyz, и систему, связанную с телом $S\xi\eta\zeta$.

Определение. *Абсолютная угловая скорость - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$*

Определение. *Относительная угловая скорость - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно O_1xyz*

Определение. *Переносная угловая скорость - угловая скорость $Oxyz$ относительно $OXYZ$*

Теорема 8 (О сложении угловых скоростей). $\vec{\omega}_{абс} = \vec{\omega}_{отн} + \vec{\omega}_{пер}$

Доказательство.

$$\vec{v}_A^{\text{абс}} = \vec{v}_A^{\text{отн}} + \vec{v}_A^{\text{пер}}$$

$$\vec{v}_B^{\text{абс}} = \vec{v}_B^{\text{отн}} + \vec{v}_B^{\text{пер}}$$

$$\vec{v}_B^{\text{абс}} = \vec{v}_A^{\text{абс}} + [\vec{\omega}_{\text{абс}}, \overrightarrow{AB}]$$

$$\vec{v}_B^{\text{отн}} = \vec{v}_A^{\text{отн}} + [\vec{\omega}_{\text{отн}}, \overrightarrow{AB}]$$

$$\vec{v}_B^{\text{пер}} = \vec{v}_A^{\text{пер}} + [\vec{\omega}_{\text{пер}}, \overrightarrow{AB}]$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + [\vec{\omega}_{\text{абс}} - \vec{\omega}_{\text{отн}} - \vec{\omega}_{\text{пер}}, \overrightarrow{AB}] = 0, \quad \forall \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{\omega}_{\text{абс}} = \vec{\omega}_{\text{отн}} + \vec{\omega}_{\text{пер}}$$

■

Замечание. $\frac{d\vec{\omega}_{пер}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}_{пер} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{пер}] = \dot{\vec{\omega}}_{пер}$

Теорема 9 (О сложении угловых ускорений). $\vec{\varepsilon}_{абс} = \vec{\varepsilon}_{отн} + \vec{\varepsilon}_{пер} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{отн}]$, *где* $\vec{\varepsilon}_{абс} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{абс}$, $\vec{\varepsilon}_{отн} = \dot{\vec{\omega}}_{отн}$, $\vec{\varepsilon}_{пер} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{пер} = \dot{\vec{\omega}}_{пер}$

Доказательство.

$$\vec{\varepsilon}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{\text{отн}} + \vec{\omega}_{\text{пер}}) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}}_{\text{отн}} + [\vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{\omega}_{\text{отн}}] + \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{\text{пер}} = \vec{\varepsilon}_{\text{отн}} + [\vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{\omega}_{\text{отн}}] + \vec{\varepsilon}_{\text{пер}}$$

■

Несколько подвижных сисем отсчета
$OXYZ$ - неподвижная СО
$Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $\ldots Ox_ny_nz_n$ - подвижные СО
$S\xi\eta\zeta$ - связана с телом
$\vec{\omega}$ - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$
Тогда: $\vec{\omega} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i$

Кинематические формулы Эйлера

Определение. $Ox = (OXY) \cap (O\xi\eta)$ *- линия узлов*

Определение. $\psi = \angle(Ox, OX)$ *- угол прецессии*

Определение. $\Theta = \angle(O\zeta, OZ)$ *- угол нутации*

Определение. $\varphi = \angle(Ox, O\xi)$ *- угол нутации*

Определение. $\{\psi, \Theta, \varphi\}$ *- углы Эйлера*

Повороты: $OXYZ \xrightarrow{\psi, OZ} OxyZ \xrightarrow{\Theta, Ox} Oxy\zeta \xrightarrow{\varphi, O\zeta} O\xi\eta\zeta$
$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\Theta}\vec{e}_x + \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta$
$\vec{e}_x = \cos\varphi\vec{e}_\xi + \sin\varphi\vec{e}_\eta$
$\vec{e}_z = \cos\Theta\vec{e}_\zeta + \sin\Theta(\sin\varphi\vec{e}_\xi + \cos\varphi\vec{e}_\eta)$

$$\begin{array}{rcl} \vec{\omega} & = & \dot{\psi}(\sin\Theta\sin\varphi\vec{e}_\xi + \sin\Theta\cos\varphi\vec{e}_\eta + \cos\Theta\vec{e}_\zeta) \\ & + & \dot{\Theta}(\cos\varphi\vec{e}_\xi - \sin\vec{e}_\eta) \\ & + & \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta = \omega_\xi\vec{e}_\xi + \omega_\eta\vec{e}_\eta + \omega_\zeta\vec{e}_\zeta \end{array}$$

$$\begin{cases} \vec{\omega}_\xi = \dot{\psi}\sin\Theta\sin\varphi + \dot{\Theta}\cos\varphi \\ \vec{\omega}_\eta = \dot{\psi}\sin\Theta\cos\varphi + \dot{\Theta}\sin\varphi \\ \vec{\omega}_\zeta = \dot{\psi}\cos\Theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad \text{- кинематические формулы Эйлера}$$

Определение. *Движение твердого тела называется прецессией, если некоторая ось, неподвижная в теле, в абсолютном пространстве движется по поверхности неподвижного кругового конуса.* $\dot{\Theta} = 0$. *Если* $\dot{\psi} = const$, $\dot{\varphi} = const$, *то прецессия называется регулярной.*

Алгебра кватернионов

Определение. *Алгеброй над полем называется векторное пространство над этим полем, снабженное билинейной операцией умножения.*

Пример. $\underline{n = 2}$*(Комплексные числа).* $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$\underline{n = 4}$(Алгебра кватернионов)

$$\Lambda = \lambda_0\vec{i}_0 + \lambda_1\vec{i}_1 + \lambda_2\vec{i}_2 + \lambda_3\vec{i}_3 \in \mathbb{H}$$
$$\{\vec{i}_0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\} \text{ - базис}$$
$$\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda}$$
$$i_0 \circ i_k = i_k k = \overline{1, 3},\ i_0 \circ i_0 = 1$$
$$i_k \circ i_m = -(i_k, i_m) + [i_k, i_m] k, m \in \{1, 2, 3\}$$
$$\overline{\lambda} \circ \overline{\mu} = (\lambda_1\vec{i}_1 + \lambda_2\vec{i}_2 + \lambda_3\vec{i}_3) \circ (\mu_1\vec{i}_1 + \mu_2\vec{i}_2 + \mu_3\vec{i}_3) = -(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) + [\overline{\lambda}, \overline{\mu}]$$
$$\Lambda \circ M = (\lambda + \overline{\lambda}) \circ (\mu + \overline{\mu}) = \lambda_0\mu_0 + \lambda\overline{\mu} + \overline{\lambda}\mu - (\overline{\lambda}, \overline{\mu}) + [\overline{\lambda}, \overline{\mu}]$$

Свойства:

1. $(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N)$
2. $(\Lambda + M) \circ N = \Lambda \circ N + M \circ N$
3. $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$