Дифференциальные уравнения

Свирщевский Сергей Ростиславович

16 сентября 2017 г.

Набор: Алесандр Валентинов
Об ошибках писать: vk.com/valentiay

Содержание

Лекция 1

Введение

Основные понятия

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n-го порядка называется уравнение вида:*

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) \tag{1}$$

где x - независимая переменная, $y(x)$ - искомая функция, $y', \dots, y^{(n)}$ - ее производные, F - заданная функция, определенная в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Порядок n уравнения равен порядку старшей производной, входящей в уравнение.

Определение. *Функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором интервале $X = (\alpha, \beta)$, называется решением уравнения (1), если*

1. *$\varphi(x)$ n раз дифференцируемо на X,*
2. *$x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots \varphi^{(n)} \in \Omega, \quad \forall x \in X$,*
3. *$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$.*

Замечание. *В этом определении в качестве X можно взять полуинтервал или отрезок, т.е любой промежуток действительной оси.*

Замечание. *Решение может быть определено на сколько можно малом интервале. Разные решения могут быть определены на разных интервалах.*

Определение. *Уравнение*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \tag{2}$$

где f - заданная функция, определенная в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, называется разрешенным относительно старшей производной или уравнение в нормальной форме.

Определение. *Функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором интервале $X = (\alpha, \beta)$, называется решением уравнения (2), если*

1. *$\varphi(x)$ n раз дифференцируемо на X,*
2. *$x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots \varphi^{(n-1)} \in D, \quad \forall x \in X$,*
3. *$\varphi^{(n)} \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$.*

Замечание. *Процесс нахождения решений уравнения называется его интегрированием.*

Пример 1.

1.
$$y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$$
$$y' = e^{-x^2}, \quad y = \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

2.
$$y^{(n)} = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$$
$$y'' = 2x, \quad y' = x^2 + C_1, \quad y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$$

3.
$$y' = ky, \quad k = const \neq 0$$
$$y = Ce^{kx}$$

4.
$$y' = y^2, \quad y = -\frac{1}{x}$$

Замечание. *Формулы, описывающие все решения уравнения содержат n произвольных постоянных.*

Задача Коши и теорема существования и единственности для уравнения (2)

Для получения из множества решений какого-либо частного решения, необходимо задать дополнительные условия. Рассмотрим, например, уравнение первого порядка:
$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D \tag{3}$$
$$y_0 = y(x_0) \tag{4}$$
Возьмем точку $(x_0, y_0) \in D$ и рассмотрим начальное условие (НУ).

Определение. *Найти решение уравнения (3), удовлетворяющее НУ (4)*

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в области $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда, $\forall (x_0, y_0) \in D$:*

1. *Существует решение задачи Коши, определенное на некотором интервале $X \ni x_0$*
2. *Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ - какие-либо решения, то $y_1(x) \equiv y_2(x)$ на пересечении их интервалов определения.*

Пример 2.

$$y' = kx, \quad k = const \neq 0$$

Решение: $y = Ce^{kx}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$ *Докажем, что других решений нет. Пусть* $y = \varphi(x), x \in X$ *- какое-либо решение. Возьмем произвольную* $x_0 \in X$ *и найдем* $y_0 = \varphi(x_0)$. *Теперь покажем, что в этом семействе есть решение с такими же начальными условиями. Рассмотрим* $y = C_0 e^{kx}, \ C_0 = y_0 e^{kx_0}$. *Оба этих решения являются решениями одной и той же задачи Коши с НУ* (x_0, y_0). *В силу единственности по теореме (1) мы имеем* $\varphi(x) = C_0 e^{kx}$ *на* X.

Замечание. *Решение* $y = \varphi(x), \quad x \in X$ *называется сужением решения* $y = C_0 e^{kx}, \quad x \in \mathbb{R}$, *на интервал* X. *А решение* $y = C_0 e^{kx}$ *называется продолжением решения* $y = \varphi(x)$ *на* $\mathbb{R}$.

Определение. *Пусть* $y = \varphi_1(x), \ \ x \in X_1$ *и* $y = \varphi_2(x), \ \ x \in X_2$ *- какие-либо решения уравнения, и пусть* $X_1 \subseteq X_2$. *Тогда решение* $y = \varphi_2(x)$ *называется продолжением решения* $y = \varphi_1(x)$ *на* X_2.

Замечание. *В дальнейшем докажем, что каждое решение может быть продолжено на некоторый максимальный интервал до непродолжаемого решения.*

Определение. *График решения* $y = \varphi(x)$ *на плоскости* (x, y) *называется его интегральной кривой. Если под интегральной кривой понимать непродолжаемое решение, то теорему (1) можно переформулировать так:*

Через каждую точку $(x_0, y_0) \in D$ *проходит единственная интегральная кривая уравнения (3).*

Замечание. *Мы можем нарисовать интегральные кривые, не решая уравнение, поскольку мы знаем, как направлена касательная в любой точке. Не каждое уравнение не имеет аналитическое решение, например:* $y' = x^2 + y^2$. *В качестве альтернативы можно нарисовать на плоскости* (x, y) *изоклины и получить представления о том, как выглядят интегральные кривые.*

Замечание. *Для* ***существования*** *решения задачи Коши достаточно непрерывности функции* $f(x, y)$. *Но решение может быть не единственным.*

Пример 3.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

$$\textit{Решения: } y = 0, y = (x - C)^3$$

В каждой точки интегральной кривой $y = 0$ *нарушается единственность решения задачи Коши. Решение* $y = 0$ *называется особым.*

Лекция 2

Определение. *Решение уравнения (3) и его интегральная кривая l называются особыми, если в любой окрестности каждой точки кривой l через эту точку проходит, касаясь l, по крайней мере одна интегральная кривая уравнения (3), отличная от l.*

Замечание. *Условие про касание l избыточно.*

Аналогично рассмотрим уравнение (2) при $n \geqslant 1$. Возьмем точку $(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}) \in D$. Рассмотрим НУ:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{5}$$

Задача Коши: найти решение уравнения (2) для НУ (5)

Теорема 2. *Пусть функция f и ее частные производные $f_y, f_{y'}, \dots f_{y^{(n+1)}}$ непрерывны в $D \subseteq \mathbb{R}^{(n+1)}$. Тогда задача Коши (2), (5) имеет решение на интервале $X \ni x_0$. Любые два решения задачи (2), (5) совпадают на пересечении их интервалов определения.*

Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах

Уравнения с разделяющимися переменными

$\boxed{y' = f(x)g(y)}$, где f и g - непрерывны на X и Y.
Схема решения:

1. $g(y) = 0 \Rightarrow$ постоянные решения $y = y_1$, $y = y_2$, ...

2. $g(y) \neq 0$ На каждом интервале это выполнено.

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

$$G(y) = F(x) + C \text{ - решение в неявной форме}$$

G, F - первообразные, C - константа. Т.к. $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ на рассмаотриваемом интервале сохраняет знак, то $G(y)$ строго монотонна и, следовательно, имеет обратную. Поэтому можно написать явную формулу для решения.

Однородные уравнения

$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

Замена: $\frac{y(x)}{x} = z(x)$, $y = xz$.
$xz' + z = f(z)$, $xz' = f(z) - z$ - уравнение, с разделяющимися переменными.

Замечание. *Уравнение инвариантно относительно растяжения:* $x \to ax$, $y \to ay$; $a > 0$.

Обобщенные однородные уравнения

$\boxed{\frac{1}{x^{m-1}}\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x^m}\right)}$, $x \neq 0$

Замена $\frac{y}{x^m} = z$, $y = x^m z$.

Линейные уравнения

$\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$

Схема решения:

1. Рассматриваем однородное уравнение $y' + a(x)y = 0$, $y' = -a(x)y$,

   (a) $y = 0$ - решение.

   (b) $y \neq 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int a(x)dx$.

$$ln|y| = A(x) + \dot{C}, \quad A(x) = \int a(t)dt$$

$$y = Ce^{-A(x)}$$

2. Ищем решение в виде $y = C(x)e^{-A(x)}$.

$$C'(x)e^{-A(x)} + C(x)e^{-A(x)}\left(-a(x)\right) + C(x)e^{-A(x)}\left(a(x)\right) = b(x)$$

$$C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt + C_0$$

Общее решение:

$$y = e^{-A(x)}\int\limits_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt + C_0e^{-A(x)}$$

Задача Коши с НУ $y(x_0) = y_0$, $C_0 = y_0$.

Каждое решение линейного уравнения определено на всем интервале X.

Уравнение Бернулли

$\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^n}$, $n \neq 0, 1$

Схема решения. При $n > 0$ имеется решение $y = 0$. Пусть $y \neq 0$. Разделим на y^n:

$$y^{-n}y' + a(x)y^{1-n} = b(x)$$

$$\frac{1}{1-n}(y^{1-n})' + a(x)y^{1-n} = b(x)$$

$$\text{Замена: } y^{1-n} = z$$

Уравнения Риккати

$\boxed{y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)}$

В общем случае не решается в квадратурах. Рассмотрим случай, когда известно какое-либо частное решение $y_0(x)$.

Замена: $y = z + y_0(x)$

$$z' + y_0' = a(z^2 + 2zy_0 + y_0^2) + b(z + y_0) + C$$

$$z' = az^2 + (2ay_0 + b)z \text{ - уравнение Бернулли}$$

Уравнение в полных дифференциалах

Уравнения 1-го порядка в симметричной форме

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0} \tag{6}$$

где P, Q непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^2$, $P^2 + Q^2 \neq 0$ в D.

Уравнение называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $U(x,y)$ непрерывно дифференцируемая в области D, такая, что

$$dU = Pdx + Qdy \tag{7}$$

в D. $dU(x,y) = 0$, $U(x,y) = C$ - содержит все решения $x(y)$ и $y(x)$.

Пусть выполнено (7), тогда $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Пусть P_y и Q_x непрерывны в D. Тогда имеем:

$$P_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = Q_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- необходимое условие того, что (6) - уравнение в полных дифференциалах.

Замечание. *Если область D односвязна, то это условие является и достаточным. (Из курса математического анализа известно, что любой замкнутый контур можно стянуть в точку в этой области)*