Основы вероятностей и теория меры

Иван Генрихович Эрлих

5 сентября 2017 г.

Семинарист: Савелов Максим Павлович

Предмет теории вероятностей

Предметом теории вероятностей могут являтся события, которые

Задача о динозавре

Какова вероятность встретить динозавра на улице?

Записки невесты программиста (Алекс Экслер)

Физика на ПМИ

Вы первые два курса активно занимаетесь чем? Вы пишете код и занимаетесь фундаментальной математикой. Но изначально математика была фундаментом для естественных наук. Но теперь есть программирование. Идея физики на ПМИ в том, чтобы показать, как можно применить математический аппарат к жизни. В теорвере примерно то же самое. Вам формулируют жизненную задачу. Вы должны построить математическую модель эксперимента.

Математическая модель эксперимента

Надо понять, будут ли применяться к этому эксперименту те методы, котрые применяются в теории вероятности. Рассмотрим две постановки задачи.

- Какова вероятность, что монета упадет "орлом"вверх.
- Какова вероятность, что Вася Иванов получит по курсу ОВиТМ отл(9).

Эксперимент для первой постановки легко повторить. Второй эксперимент нельзя провести много раз: невозможно проверить адекватность ответов.

Вместо этого сформулируем задачу так:

- Какова вероятность того, что студент со средним баллом 8,7 получит оценку отл(9).

Требования на события:

1. Возможность проводить неограничпнно большое число наблюдений.
2. Статистическую устойчивось эксперимента.

Статистическая устойчивость. Пусть у нас есть несколько экспериментов: $A_1, A_2 \dots A_n$. Событие статистически устойчиво, если частоты некоторого события $\mu(A_1), \mu(A_2) \dots \mu(A_n)$ должны быть близки.

Математическая модель эксперимента:

1. Пространство элементарных исходов - $\Omega = \{\omega\}$. Каждое ω обозначает один из элементарных исходов.
2. Вероятность элементарных исходов - $P = p(\omega)$. Задача состоит в том, чтобы задать вероятность.

Пример 1. 2 раза бросаем монетку. Получаем 4 элементарных исхода:

1. $\omega_1 = (\text{о}, \text{о}),\ p(\omega_1) = \frac{1}{4}$
2. $\omega_2 = (\text{р}, \text{о}),\ p(\omega_2) = \frac{1}{4}$
3. $\omega_3 = (\text{о}, \text{р}),\ p(\omega_3) = \frac{1}{4}$
4. $\omega_4 = (\text{р}, \text{р}),\ p(\omega_4) = \frac{1}{4}$

Пример 2. 2 раза бросаем монетку. Получаем 3 элементарных исхода:

1. $\omega_1 = \{\text{о}, \text{о}\},\ p(\omega_1) = \frac{1}{4}$
2. $\omega_2 = \{\text{о}, \text{р}\},\ p(\omega_2) = \frac{1}{2}$
3. $\omega_3 = \{\text{р}, \text{р}\},\ p(\omega_3) = \frac{1}{4}$

Стандартные математические модели:

1. Классическая. $(\Omega, P), |\Omega| = n < \infty,\ P(\omega_i) = const,\ i = 1 \dots n.$
   1.1. Урновая схема: выбор с порядком без возвращения. Шаров в урне: N. $\omega = (i_1, \dots i_k)$, где i_j - номер шара $i_j \neq i_m,\ j \neq m$. $|\Omega| = N \cdot \ldots \cdot (N - k + 1)$.
   1.2. Урновая схема: выбор с порядком с возвращением. Шаров в урне: N. $\omega = (i_1, \dots i_k)$, где i_j - номер шара $i_j \neq i_m,\ j \neq m$. $|\Omega| = N^k$.

1.3. Урновая схема: выбор без порядка без возвращения. Шаров в урне: N. $\omega = (i_1, \dots i_k)$, где i_j - номер шара, номера могут совпадать. $|\Omega| = C_n^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$.

1.4. Урновая схема: выбор без порядка с возвращением. Шаров в урне: N. $\omega = (i_1, \dots i_k)$, где i_j - номер шара, номера могут совпадать. $|\Omega| = C_{n+k-1}^k$.

Вероятность

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$