Аналитическая механика

Муницина Валерия Александровна

6 сентября 2017 г.

Кинематика точки

Материальная точка - точка, размером которой можно пренебречь.

Мы будем полагать, что время меняетсяр равномерно и непрерывно.

Векторное описание движения

. Зависимость координат от времени назовем законом движения.

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) \in C^2$$

$$\gamma = \{\overrightarrow{r}(t),\ t \in (0,\ +\infty)\}$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$$

$$\overrightarrow{w} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}$$

Декартовы координаты

$$\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{e_x} + y(t)\overrightarrow{e_y} + z(t)\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{v}(t) = x'(t)\overrightarrow{e_x} + y'(t)\overrightarrow{e_y} + z'(t)\overrightarrow{e_z}$$

Движение по окружности

$$x = Rcos\varphi$$

$$y = Rsin\varphi$$

$$x' = -Rsin\varphi\varphi'$$

$$y' = -Rcos\varphi\varphi'$$

$$x'' = -Rcos\varphi\varphi'^2 - Rsin\varphi\varphi''$$

$$y'' = -Rsin\varphi\varphi'^2 + Rcos\varphi\varphi''$$

$$\overrightarrow{v} = 2\varphi'(-sin\varphi\overrightarrow{e_x} + cos\varphi\overrightarrow{e_y} = R\varphi'\overrightarrow{\tau}$$

$$w = R\varphi''(-sin\varphi\overrightarrow{e_x} + cos\varphi\overrightarrow{e_y}) + R\varphi'^2(-cos\varphi\overrightarrow{e_x} - sin\varphi\overrightarrow{e_y}) = R\varphi''\overleftarrow{\tau} + R\varphi'^2\overrightarrow{n}$$

$$\overrightarrow{v} = R\varphi'\overrightarrow{\tau}$$

$$\overrightarrow{w} = R\varphi''\overrightarrow{\tau} + R\varphi'^2\overrightarrow{n}$$

Естественное описание движения

Кривая задана параметрически естественным параметром s. $ds = |dr\overrightarrow{dr}| \neq 0$
Определение:

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{d\overrightarrow{r}}{ds} = \overrightarrow{r}'\text{Касательный вектор}$$

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{\tau}'}{|\overrightarrow{\tau}'|}\text{ - вектор главной нормали}$$

$$\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{t}; \overrightarrow{n}]\text{ - вектор бинормали}$$

Утверждение $\{\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}$ - тройка ортогональных единичных векторов.

$$|\overrightarrow{\tau}| = \frac{|d\overrightarrow{r}|}{|ds|} = 1$$

$$|\overrightarrow{n}| = \frac{|\overrightarrow{\tau}'|}{|\overrightarrow{\tau}'|} = 1$$

Этот трехгранник называют репер Ферне. (Дарбу, сопровождающий трехгранник).

Теорема $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{w} = v'\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n}$, где $v = s'$.

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\overrightarrow{\tau}' = \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \overrightarrow{n}kv$$

k - кривизна.

$$\overrightarrow{w} = \overleftarrow{v}' = v'\overrightarrow{\tau} + v\overrightarrow{\tau}' = v'\overrightarrow{\tau} + v^2k\overrightarrow{n} = v'\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n}$$

$v'\overrightarrow{\tau}$ - касательное ускорение

$\dfrac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n}$ - нормальное ускорение

Формулы Френе:

$$\overrightarrow{\tau}' = k\overrightarrow{n}$$
$$\overrightarrow{n}' = -k\overrightarrow{\tau} + \kappa\overleftarrow{b}$$
$$\overrightarrow{b}' = -\kappa\overrightarrow{n}$$

$$|\overrightarrow{n}| = 1 \Rightarrow (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}) = 0$$
$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\tau} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{n}', \overrightarrow{\tau}) + (\overleftarrow{n}, \overrightarrow{\tau}) + k = 0$$

$$\overrightarrow{b}' = [\overrightarrow{\tau}', \overrightarrow{n}] + [\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}'] = [k\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}] + [\overrightarrow{\tau}, -k\overrightarrow{\tau} + \kappa\overrightarrow{b}] = 0 + \kappa[\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{b}] = -\kappa\overrightarrow{n}$$

Ортогональные векторные координаты

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t)) \tag{1}$$
$$\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_i}q_i' \tag{2}$$
$$\overrightarrow{H_i} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_i} = H_i\overrightarrow{e_i} \tag{3}$$

H_i - коэффициенты Ламе.

$$\overrightarrow{H_i} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2} \tag{4}$$

Копоненты вектора ускорения в ортогональном криволинейном базисе определяются равенством:

$$w_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i'}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right)$$

$$(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{H_i}) = \left(\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}, \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{v}, \frac{\overrightarrow{r}}{\partial q_i}\right) - \left(\overrightarrow{v}, \frac{d}{dt}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i}\right)$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial q_i'} \text{ - из определения скорости}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \overrightarrow{r}}{\partial q_j \partial q_i} q_j' = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \overrightarrow{r}}{\partial q_i \partial q_j} q_i' = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right) = \frac{\partial \overrightarrow{r}'}{\partial q_i} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{v}, \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial q_i}\right) - \left(\overrightarrow{v}, \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \dots$$