

Аналитическая механика

Муницина Валерия Александровна

11 октября 2017 г.

*Набор: Александр Валентинов
Об ошибках писать: vk.com/valentiauy*

Содержание

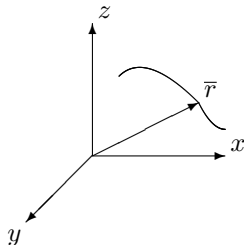
Кинематика точки	1
Векторное описание движения	1
Декартовы координаты	1
Движение по окружности	1
Естественное описание движения	2
Ортогональные векторные координаты	4
Геометрический смысл	4
Кинематика твердого тела	5
Формулы Пуассона	6
Формула распределения скоростей точек твердого тела	7
Геометрический смысл	8
Классификация движения твердого тела	8
Поступательное	8
Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси)	8
Плоскопараллельное движение	9
Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки)	10
Винтовое движение	10
Общий случай	10
Кинематика сложного движения	11
Сложное движение материальной точки	12
Сложное движение твердого тела	13
Кинематические формулы Эйлера	14
Алгебра кватернионов	14
Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов	16

Кинематика твердого тела в кватернионном описании	20
Интегрирование уравнения Пуассона	22

Кинематика точки

Определение. Материальная точка - точка, размером которой можно пренебречь.

Мы будем полагать, что время меняется равномерно и непрерывно.



Векторное описание движения

Зависимость координат от времени назовем законом движения.

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \in C^2$$

Определение. $\gamma = \{\bar{r}(t), t \in (0, +\infty)\}$ - траектория

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$
$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

Декартовы координаты

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{e}_x + y(t)\bar{e}_y + z(t)\bar{e}_z$$

$$\bar{v}(t) = \dot{x}(t)\bar{e}_x + \dot{y}(t)\bar{e}_y + \dot{z}(t)\bar{e}_z$$

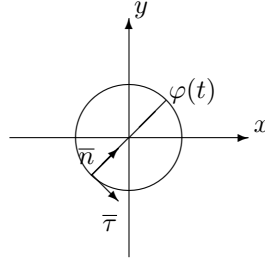
$$\bar{w}(t) = \ddot{x}(t)\bar{e}_x + \ddot{y}(t)\bar{e}_y + \ddot{z}(t)\bar{e}_z$$

Движение по окружности

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - R \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} = -R \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + R \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{cases}$$



$$\bar{v} = R\dot{\varphi}(-\sin \varphi \cdot \bar{e}_x + \cos \varphi \cdot \bar{e}_y) = R\dot{\varphi}\bar{\tau}$$

$$\bar{w} = R\ddot{\varphi}(-\sin \varphi \cdot \bar{e}_x + \cos \varphi \cdot \bar{e}_y) + R\dot{\varphi}^2(-\cos \varphi \cdot \bar{e}_x - \sin \varphi \cdot \bar{e}_y) = R\ddot{\varphi}\bar{\tau} + R\dot{\varphi}^2\bar{n}$$

$$\bar{v} = R\dot{\varphi}\bar{\tau} = v\bar{\tau}$$

$$\bar{w} = R\ddot{\varphi}\bar{\tau} + R\dot{\varphi}^2\bar{n} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{R}\bar{n}$$

Естественное описание движения

Кривая задана параметрически естественным параметром s . $ds = |\overline{dr}| \neq 0$

Определение.

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \dot{\bar{r}} - \text{касательный вектор} \quad (1)$$

$$\bar{n} = \frac{\dot{\bar{\tau}}}{|\dot{\bar{\tau}}|} - \text{вектор главной нормали} \quad (2)$$

$$\bar{b} = [\bar{\tau}; \bar{n}] - \text{вектор бинормали} \quad (3)$$

Утверждение 1. $\{\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}\}$ - тройка ортогональных единичных векторов.

Доказательство.

$$|\bar{\tau}| = \frac{|d\bar{r}|}{|ds|} = 1$$

$$|\bar{n}| = \frac{|\dot{\bar{\tau}}|}{|\dot{\bar{\tau}}|} = 1$$

$$|\bar{\tau}| = 1 \Rightarrow (\bar{\tau}, \bar{\tau}) = 1$$

$$(\dot{\bar{\tau}}, \bar{\tau}) + (\bar{\tau}, \dot{\bar{\tau}}) = 0$$

$$2(\dot{\bar{\tau}}, \bar{\tau}) = 0 \Rightarrow \dot{\bar{\tau}} \perp \bar{\tau} \Rightarrow \bar{n} \perp \bar{\tau}$$

■

Этот трехгранник называют репер Ферне. (Дарбу, сопровождающий трехгранник).

Теорема 1. $\bar{v} = v\bar{\tau}$, $\bar{w} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}$, где $v = \dot{s}$.

Доказательство.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v\bar{\tau}$$

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \bar{n}kv, \text{ по формуле (2)}$$

$$\bar{w} = \dot{\bar{v}} = \dot{v}\bar{\tau} + v\dot{\bar{\tau}} = \dot{v}\bar{\tau} + v^2k\bar{n} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}$$

$\dot{v}\bar{\tau}$ - касательное ускорение

$\frac{v^2}{\rho}\bar{n}$ - нормальное ускорение

$\rho = \frac{1}{|\dot{\bar{r}}|}$ - радиус кривизны

$k = |\ddot{\bar{r}}|$ - кривизна

$\ddot{\bar{r}}$ - вектор кривизны

■

Формулы Френеля:

$$\begin{cases} \bar{\tau}' = k\bar{n} \\ \bar{n}' = -k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b} \\ \bar{b}' = -\varkappa\bar{n} \end{cases}$$

где \varkappa - коэффициент кручения.

Доказательство.

$$|\bar{n}| = 1 \Rightarrow (\bar{n}, \bar{n}) = 0$$

$$\bar{n} \perp \bar{\tau} \Rightarrow (\bar{n}', \bar{\tau}) + (\bar{n}, \bar{\tau}') = 0 \Rightarrow (\bar{n}', \bar{\tau}) + k = 0$$

$$\bar{b}' = [\bar{\tau}', \bar{n}] + [\bar{\tau}, \bar{n}'] = [k\bar{n}, \bar{n}] + [\bar{\tau}, -k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b}] = 0 + \varkappa[\bar{\tau}, \bar{b}] = -\varkappa\bar{n}$$

■

Ортогональные векторные координаты

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\overline{H_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = H_i \bar{e}_i, \text{ где } H_i - \text{коэффициенты Ламе.}$$

Геометрический смысл

$$ds_i = H_i dq_i$$

s_i - длина дуги i -й к-ой линии.

$$H_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 H_i \dot{q}_i \bar{e}_i, \quad v^2 = (\bar{v}, \bar{v}) = \sum H_i^2 \dot{q}_i^2$$

Теорема 2. Компоненты вектора ускорения в ортогональном криволинейном базисе определяются равенством:

$$w_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right)$$

Доказательство.

$$(\bar{w}, \bar{H}_i) = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\bar{v}, \frac{\bar{r}}{\partial q_i} \right) - \left(\bar{v}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) \triangleq$$

$$1) \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} - \text{из определения скорости}$$

$$2) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}$$

$$\triangleq \frac{d}{dt} \left(\bar{v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \right) - \left(\bar{v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (\bar{v}, \bar{v}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (\bar{v}, \bar{v}) =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

$$w_i = (\bar{w}, \bar{e}_i) = \frac{1}{H_i} (\bar{w}, \bar{H}_i)$$

■

Кинематика твердого тела

Определение. Абсолютно твердым телом называется множество точек, расстояние между которыми не меняется со временем.

$$\{\bar{r}_i, i = \overline{1 \dots n} \quad : \quad |\bar{r}_i - \bar{r}_j| = C_{ij} = \text{const}, \quad n \geq 3\}$$

$OXYZ$ - неподвижная система отсчета.

$S\xi\eta\zeta$ - связаны с телом (движется).

$$X = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\eta, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\eta, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\eta, \bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_z) \end{pmatrix} - \text{матрица направляющих косинусов.}$$

$$\overline{AB} = x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z$$

$$\overline{AB} = \xi\bar{e}_\xi + \eta\bar{e}_\eta + \zeta\bar{e}_\zeta$$

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\eta, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\zeta, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \overline{AB}) \\ (\bar{e}_\eta, \overline{AB}) \\ (\bar{e}_\zeta, \overline{AB}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \bar{\rho}$$

$$\bar{\rho} = X\bar{r}$$

Утверждение 2. X - ортогональная матрица.

Доказательство.

$$XX^T = X^T X = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \bar{\xi}) & (\bar{e}_\xi, \bar{\eta}) & (\bar{e}_\xi, \bar{\zeta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = 0$$

Т.к. базис ортогональный. ■

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \\ \bar{e}_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{e}}_\xi \\ \dot{\bar{e}}_\eta \\ \dot{\bar{e}}_\zeta \end{pmatrix} = \dot{X} \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \\ \bar{e}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\dot{X} X^T}_{\Omega} \begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \dot{X} X^T$$

Утверждение 3. Ω - кососимметрична.

Доказательство.

$$\Omega\Omega^2 = \dot{X}X^T + (\dot{X}X^T)T = \dot{X}X^T + X\dot{X}^T = \frac{d}{dt}(XX^T) = \frac{d}{dt}(E) = 0$$

■

Следствие.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{pmatrix} - \text{Факт, который может быть законспектирован неправильно}$$

Определение. $\bar{\omega} = \omega_\xi \bar{e}_\xi + \omega_\eta \bar{e}_\eta + \omega_\zeta \bar{e}_\zeta$ - угловая скорость подвижного репера.

Формулы Пуассона

Утверждение 4.

$$\dot{\bar{e}}_i = [\bar{\omega}, \bar{e}_i], \quad i = \overline{1 \dots 3}$$

Доказательство.

$$\dot{\bar{e}}_\xi = \omega_\zeta \bar{e}_\eta - \omega_\eta \bar{e}_\zeta = \begin{vmatrix} \bar{e}_\xi & \bar{e}_\eta & \bar{e}_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi]$$

■

Утверждение 5. $\bar{\omega} = \bar{e}_\xi(\dot{\bar{e}}_\eta, \bar{e}_\zeta) + \bar{e}_\eta(\dot{\bar{e}}_\zeta, \bar{e}_\xi) + \bar{e}_\zeta(\dot{\bar{e}}_\xi, \bar{e}_\eta)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\dot{\bar{e}}_\xi, \bar{e}_\eta) &= \omega_\zeta \\ (\dot{\bar{e}}_\eta, \bar{e}_\zeta) &= \omega_\xi \\ (\dot{\bar{e}}_\zeta, \bar{e}_\xi) &= \omega_\eta \end{aligned}$$

■

Утверждение 6. $\bar{\omega} = \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, \dot{\bar{e}}_\xi] + [\bar{e}_\eta, \dot{\bar{e}}_\eta] + [\bar{e}_\zeta, \dot{\bar{e}}_\zeta])$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, \dot{\bar{e}}_\xi] + [\bar{e}_\eta, \dot{\bar{e}}_\eta] + [\bar{e}_\zeta, \dot{\bar{e}}_\zeta]) = \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi]] + [\bar{e}_\eta, [\bar{\omega}, \bar{e}_\eta]] + [\bar{e}_\zeta, [\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta]]) = \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\omega}(\bar{e}_\xi, \bar{e}_\xi) - \bar{e}_\xi(\bar{\omega}, \bar{e}_\xi) + \bar{\omega}(\bar{e}_\eta, \bar{e}_\eta) - \bar{e}_\eta(\bar{\omega}, \bar{e}_\eta) + \bar{\omega}(\bar{e}_\zeta, \bar{e}_\zeta) - \bar{e}_\zeta(\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta)) = \\ &= \frac{1}{2}(3\bar{\omega} - \bar{\omega}) = \bar{\omega} \end{aligned}$$

■

Пример. Угловая скорость репера Френеля.

$$\begin{cases} \bar{\tau}' = k\bar{n} \\ \bar{n}' = -k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b} \\ \bar{b}' = -\varkappa\bar{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \dot{s} \\ \dot{\bar{n}} = \frac{d\bar{n}}{ds} \dot{s} \\ \dot{\bar{b}} = \frac{d\bar{b}}{ds} \dot{s} \end{cases}$$

$$\bar{\omega} = \bar{\tau}(\dot{s}(-k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b}), \bar{b}) + \bar{n}(\dot{s}(-\varkappa\bar{n}, \bar{\tau}) + \bar{b}(\dot{s}(k\bar{n}), \bar{n})) = \dot{s}(\varkappa\bar{\tau} + k\bar{b})$$

Определение. Угловой скоростью твердого тела называется угловая скорость подвижного репера, с ним связанного.

Формула распределения скоростей точек твердого тела

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + [\bar{\omega}, \overline{AB}]$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \xi \bar{e}_\xi + \eta \bar{e}_\eta + \zeta \bar{e}_\zeta \\ \dot{\overline{AB}} &= \xi \dot{\bar{e}}_\xi + \eta \dot{\bar{e}}_\eta + \zeta \dot{\bar{e}}_\zeta, \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0 \\ (\dot{r}_B - \dot{r}_A) &= \xi [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi] + \eta [\bar{\omega}, \bar{e}_\eta] + \zeta [\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta] \\ \dot{\bar{r}}_1 - \dot{\bar{r}}_2 &= [\bar{\omega}, \xi \bar{e}_\xi + \eta \bar{e}_\eta + \zeta \bar{e}_\zeta] \\ \bar{v}_B &= \bar{v}_A + [\bar{\omega}, \overline{AB}] \end{aligned}$$

■

Следствие. $S\xi\eta\zeta \rightarrow \bar{\omega}$, $S'\xi'\eta'\zeta' \rightarrow \bar{\omega}'$

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{v}_A + [\bar{\omega}, \overline{AB}] \\ \bar{v}_B &= \bar{v}_A + [\bar{\omega}', \overline{AB}] \end{aligned} \right| [\bar{\omega} - \bar{\omega}', \overline{AB}] = 0; \quad \forall A, B \text{ в абсолютно твердом теле} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} - \bar{\omega}' = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{\omega} = \bar{\omega}'}$$

Утверждение 7. (Формула Ривальса) $\bar{w}_B = \bar{w}_A + [\bar{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{AB}]]$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{v}_A + [\bar{\omega}, \overline{AB}] \\ \dot{\bar{v}}_B &= \dot{\bar{v}}_A + [\dot{\bar{\omega}}, \overline{AB}] + [\bar{\omega}, \dot{r}_B - \dot{r}_A] \\ \bar{w}_B &= \bar{w}_A + [\bar{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{AB}]] \end{aligned}$$

$[\bar{\varepsilon}, \overline{AB}]$ - вращательное ускорение, $[\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{AB}]]$ - осестремительное ускорение

■

Геометрический смысл

$$\begin{aligned}\overline{w} &= [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]] = \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{AB}) - \overline{AB}\omega^2 = \omega^2(\overline{e_\omega}(\overline{AB}, \overline{e_\omega}) - \overline{AB}) \\ |\overline{w_{oc}}| &= \omega^2 \rho(B, l)\end{aligned}$$

Утверждение 8. *Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}\overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \\ (\overline{v_B}, \overline{AB}) &= (\overline{v_A}, \overline{AB}) + ([\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{AB}) \\ v_B \cos \beta &= v_A \cos \alpha\end{aligned}$$

■

Замечание. *Аналогичная теорема для ускорений не верна.*

Классификация движения твердого тела

Поступательное

Определение. *Такое движение твердого тела, при котором угловая скорость равна нулю.*

$$\overline{v_B} \equiv \overline{v_A}$$

$$\overline{w_B} \equiv \overline{w_A}$$

Мгновенное поступательное движение: $\exists t : \overline{\omega}(t) = 0, \quad \overline{\varepsilon}(t) \neq 0$

Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси)

$$\begin{aligned}\exists A, B : \overline{v_A} &= \overline{v_B} = 0 \\ \overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{v_A} = \overline{v_B} = 0 \Rightarrow [\overline{\omega}, \overline{AB}] = 0 \Rightarrow \overline{\omega} \parallel \overline{AB} \\ \forall M \in l : \overline{v_M} &= 0, \quad l - \text{ось вращения} \\ \dot{\vec{e}}_\xi &= \dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \quad \dot{\vec{e}}_\eta = -\dot{\varphi} \vec{e}_\xi, \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = 0 \\ \vec{\omega} &= \vec{e}_\xi(-\dot{\varphi} \vec{e}_\xi, \vec{e}_\zeta) + \vec{e}_\eta(0, \vec{e}_\xi) + \vec{e}_\zeta(\dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \vec{e}_\eta) = \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta = \dot{\varphi} \vec{e}_z \\ \vec{\varepsilon} &= \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi} \vec{e}_z \\ \vec{v}_p &= \vec{v}_{p'} + [\vec{\omega}, \overline{pp'}] = 0 + [\dot{\varphi} \vec{e}_z, \xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta] = \dot{\varphi}(x \vec{e}_\eta - y \vec{e}_\xi) \\ |\vec{v}_p| &= |\vec{\omega}| \cdot |\overline{p'p}| \\ \vec{w}_p &= \vec{w}_{p'} + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overline{p'p}]] = 0 + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] - \omega^2 \overline{p'p}\end{aligned}$$

Плоскопараллельное движение

Определение. Движение твердого тела называется плоскопараллельным, если скорости всех точек тела параллельны некоторой неподвижной плоскости:

$$\bar{v}_{p_i} \parallel \pi, \quad \forall p_i \in ATT$$

$$\bar{v}_{p_i} = \bar{v}_{p_j} + [\bar{\omega}, \overline{p_j p_i}]$$

$$(\bar{p}_i - \bar{v}_{p_i}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\omega} = 0 \\ \bar{v}_{p_i} = \bar{v}_{p_j}, \quad \forall p_i, p_j \in ATT \\ \bar{\omega} \perp \bar{p}_i - \bar{v}_{p_i} \parallel \pi \end{cases}$$

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_{M_j} + \omega[\bar{\omega}, \overline{M_j M_i}] = \vec{v}_{M_j}, \quad \forall M_i, M_j : \overline{M_i M_j} \perp \pi \Rightarrow \vec{w}_{M_i} = \vec{w}_{M_j}$$

Качение:

$$\vec{r}_S = x_S \vec{e}_x + y_S \vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \quad \dot{\vec{e}}_\eta = \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta, \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z, \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \vec{e}_z \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_S + [\vec{\omega}, \overline{SM}]$$

$$\vec{w}_M = \vec{w}_S + [\vec{\varepsilon}, \overline{SM}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overline{SM}]] = \vec{w}_s + [\vec{\varepsilon}, \overline{SM}] - \omega^2 \overline{SM}$$

Теорема 3. Если при плоскопараллельном движении угловая скорость твердого тела отлична от нуля, то существует точка, скорость которой равна нулю в данный момент времени.

Доказательство.

$$\begin{cases} \bar{v}_c = \bar{v}_s + [\bar{\omega}, \overline{SC}] \\ \bar{v}_c = 0 \end{cases} \Rightarrow [\bar{\omega}, \bar{v}_s] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{SC}]] = 0$$

$$[\bar{\omega}, \bar{v}_s] + \bar{\omega}(\bar{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_s]}{\omega^2}$$

■

Следствие. Любое плоскопараллельное движение является либо мгновенно-поступательным, либо мгновенно-вращательным

Доказательство. $\bar{\omega} = 0$ - мгновенно-поступательное. $\bar{\omega}(t) \neq 0$ - вращение вокруг l .

■

Определение. C - мгновенный центр скоростей

Замечание. Положение C меняется со временем.

Пример. Качение без проскальзывания

Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки)

$$\exists \bar{v}_0 \equiv 0$$

$$l \parallel \bar{\omega}, O \in l$$

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + [\bar{\omega}, \overline{OM}] = 0 + 0, \forall M \in l$$

Определение. l - мгновенная ось вращения

$$\bar{v}_p = [\bar{\omega}, \overline{OP}], \quad \bar{w}_p = [\bar{\varepsilon}, \overline{OP}] + \underbrace{[\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{OP}]]}_{\bar{v}_{OC}}$$

Винтовое движение

Определение. Движение твердого тела называется винтовым, если тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси, а скорости всех точек, лежащих на этой оси, равны между собой, постоянны и сонаправлены с осью.

Общий случай

Теорема 4. $\bar{\omega} \neq 0 \Rightarrow \exists l : \bar{\omega} \parallel l, \bar{v}_{k_i} \parallel l, \forall k_i \in l$

Доказательство.

$$\bar{\alpha} \perp \bar{\omega}, S \in \alpha$$

$$\begin{cases} \bar{v}_c = \bar{v}_c = \bar{v}_s + [\bar{\omega}, \overline{SC}] \\ \bar{v}_c = \lambda \bar{\omega} \end{cases} \Rightarrow 0 = [\bar{\omega}, \bar{v}_s] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{SC}]]$$

$$[\bar{\omega}, \bar{v}_s] + \bar{\omega}(\bar{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_c]}{\omega^2}$$

$$\exists l : C \in l, l \parallel \bar{\omega}$$

$$\bar{v}_{C_1} = \bar{v}_C + [\bar{\omega}, \overline{CC_1}] = \bar{v}_C, \forall C_1 \in l$$

■

$$\bar{v}_C = \bar{v}_S + \left[\bar{\omega}, \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_C]}{\omega^2} \right] = \bar{v}_S + \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{v}_S) - \omega^2 \vec{v}_S) = \underbrace{\frac{(\vec{\omega}, \vec{v}_S)}{\omega^2}}_{\lambda} \vec{\omega}$$

$$\lambda = \frac{(\vec{\omega}, \vec{v}_S)}{\omega^2} - \text{параметр (шаг винта)}.$$

Следствие. Любое движение твердого тела является в каждый момент времени либо мгновенно-поступательным ($\omega = 0, \lambda \rightarrow +\infty$), либо мгновенно-вращательным ($\omega \neq 0, \lambda = 0$), либо мгновенно-винтовым ($\omega \neq 0, \lambda \neq 0$).

Определение. $\{l, \bar{\omega}, \bar{v}\}$ - кинематический винт.

$$\begin{aligned}
\bar{v}_S &= v_x \bar{e}_x + v_y \bar{e}_y + v_z \bar{e}_z \\
\bar{r}_S &= x_S \bar{e}_x + y_S \bar{e}_y + z_S \bar{e}_z \\
\bar{\omega} &= \omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y + \omega_z \bar{e}_z \\
\bar{r}_C &= x \bar{e}_x + y \bar{e}_y + z \bar{e}_z \\
\bar{v}_S + [\bar{\omega}, \bar{r}_C] &= \lambda \bar{\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{v_x + \omega_y(z - z_S) - \omega_z(y - y_S)}{\omega_x} = \\
&= \frac{v_y + \omega_z(x - x_S) - \omega_x(z - z_S)}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x(y - y_S) - \omega_y(x - x_S)}{\omega_z}
\end{aligned}$$

Кинематика сложного движения

$OXYZ$ - неподвижная система отсчета (\bar{r}), $O_1\xi\eta\zeta$ - подвижная система отсчета ($\bar{\rho}$).

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= u_x \bar{e}_x + u_y \bar{e}_y + u_z \bar{e}_z \\
\bar{u} &= u_\xi \bar{e}_\xi + u_\eta \bar{e}_\eta + u_\zeta \bar{e}_\zeta
\end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \dot{u}_x \bar{e}_x + \dot{u}_y \bar{e}_y + \dot{u}_z \bar{e}_z - \text{абсолютная производная}$$

$$\dot{\bar{u}} = \dot{u}_\xi \bar{e}_\xi + \dot{u}_\eta \bar{e}_\eta + \dot{u}_\zeta \bar{e}_\zeta - \text{относительная производная}$$

Теорема 5. (Связь абсолютной и относительной производной) $\frac{d\bar{u}}{dt} = \dot{\bar{u}} + [\bar{\omega}, \bar{u}]$, где $\bar{\omega}$ - угловая скорость $O_1\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{u}}{dt} &= \dot{u}_\xi \bar{e}_\xi + \dot{u}_\eta \bar{e}_\eta + \dot{u}_\zeta \bar{e}_\zeta + u_\xi \frac{d\bar{e}_\xi}{dt} + u_\eta \frac{d\bar{e}_\eta}{dt} + u_\zeta \frac{d\bar{e}_\zeta}{dt} = \\
&= \dot{\bar{u}} + u_\xi [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi] + u_\eta [\bar{\omega}, \bar{e}_\eta] + u_\zeta [\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta] = \dot{\bar{u}} + [\bar{\omega}, \bar{u}] \\
&\left(\frac{d\bar{e}_i}{dt} = [\bar{\omega}, \bar{e}_i] - \text{формула Пуассона, } \dot{\bar{e}}_i = 0 \right)
\end{aligned}$$

■

Сложное движение материальной точки

Определение. Абсолютной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно неподвижной системы отсчета. $\bar{v}_{abc} = \frac{d}{dt}\bar{r}$

Определение. Относительной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно подвижной системы отсчета. $\bar{v}_{отн} = \dot{\bar{\rho}}$

Определение. Переносной скоростью материальной точки называется абсолютная скорость той точки подвижной системы отсчета, в которой находится движущаяся точка в данный момент времени.

Теорема 6 (Формула сложения скоростей). $\bar{v}_{abc} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\bar{v}_{abc} &= \frac{d}{dt}(\bar{R} + \bar{\rho}) = \frac{dR}{dt} + \dot{\bar{\rho}} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}] = \\ &= \bar{v}_{O_1} + \bar{v}_{отн} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}] = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}\end{aligned}$$

■

Определение. Абсолютным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно неподвижной системы отсчета. $\bar{w}_{abc} = \frac{d}{dt}\bar{v}_{abc}$

Определение. Относительным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно подвижной системы отсчета. $\bar{w}_{отн} = \dot{\bar{v}}_{отн}$

Определение. $\bar{\omega}_{пер} = \bar{\omega}_{O_1} + [\bar{\varepsilon}, \bar{\rho}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \bar{\rho}]]$

Определение. $\bar{\omega}_{кор} = 2[\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}]$

Теорема 7 (Формула сложения ускорений). $\bar{w}_{abc} = \bar{w}_{отн} + \bar{w}_{пер} + \bar{w}_{кор}$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\bar{w}_{abc} &= \frac{d}{dt}(\bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}) = \frac{d}{dt}(\bar{v}_{отн} + \bar{v}_{O_1} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}]) = \\ &= \dot{\bar{v}}_{отн} + [\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}] + \frac{d}{dt}\bar{v}_{O_1} + \left[\frac{d\bar{\omega}}{dt}, \bar{\rho}\right] + [\bar{\omega}, \dot{\bar{\rho}} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}]] = \\ &= \dot{\bar{v}}_{отн} + \dot{\bar{v}}_{O_1} + [\bar{\varepsilon}, \bar{\rho}] + 2[\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \bar{\rho}]]\end{aligned}$$

■

Сложное движение твердого тела

Рассмотрим неподвижную систему отсчета $OXYZ$, подвижную O_1xyz , и систему, связанную с телом $S\xi\eta\zeta$.

Определение. Абсолютная угловая скорость - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$

Определение. Относительная угловая скорость - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно O_1xyz

Определение. Переносная угловая скорость - угловая скорость $Oxyz$ относительно $OXYZ$

Теорема 8 (О сложении угловых скоростей). $\vec{\omega}_{abc} = \vec{\omega}_{отн} + \vec{\omega}_{пер}$

Доказательство.

$$\vec{v}_A^{abc} = \vec{v}_A^{отн} + \vec{v}_A^{пер}$$

$$\vec{v}_B^{abc} = \vec{v}_B^{отн} + \vec{v}_B^{пер}$$

$$\vec{v}_B^{abc} = \vec{v}_A^{abc} + [\vec{\omega}_{abc}, \overline{AB}]$$

$$\vec{v}_B^{отн} = \vec{v}_A^{отн} + [\vec{\omega}_{отн}, \overline{AB}]$$

$$\vec{v}_B^{пер} = \vec{v}_A^{пер} + [\vec{\omega}_{пер}, \overline{AB}]$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + [\vec{\omega}_{abc} - \vec{\omega}_{отн} - \vec{\omega}_{пер}, \overline{AB}] = 0, \quad \forall \overline{AB} \Leftrightarrow \vec{\omega}_{abc} = \vec{\omega}_{отн} + \vec{\omega}_{пер}$$

■

Замечание. $\frac{d\vec{\omega}_{пер}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}_{пер} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{пер}] = \dot{\vec{\omega}}_{пер}$

Теорема 9 (О сложении угловых ускорений). $\vec{\varepsilon}_{abc} = \vec{\varepsilon}_{отн} + \vec{\varepsilon}_{пер} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{отн}]$, где $\vec{\varepsilon}_{abc} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{abc}$, $\vec{\varepsilon}_{отн} = \dot{\vec{\omega}}_{отн}$, $\vec{\varepsilon}_{пер} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{пер} = \dot{\vec{\omega}}_{пер}$

Доказательство.

$$\vec{\varepsilon}_{abc} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{отн} + \vec{\omega}_{пер}) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}}_{отн} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{отн}] + \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{пер} = \vec{\varepsilon}_{отн} + [\vec{\omega}_{пер}, \vec{\omega}_{отн}] + \vec{\varepsilon}_{пер}$$

■

Несколько подвижных систем отсчета

$OXYZ$ - неподвижная СО

$Ox_1y_1z_1, Ox_2y_2z_2, \dots, Ox_ny_nz_n$ - подвижные СО

$S\xi\eta\zeta$ - связана с телом

$\vec{\omega}$ - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$

Тогда: $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i$

Кинематические формулы Эйлера

Определение. $Ox = (OXY) \cap (O\xi\eta)$ - линия узлов

Определение. $\psi = \angle(Ox, OX)$ - угол прецессии

Определение. $\Theta = \angle(O\xi, OZ)$ - угол нутации

Определение. $\varphi = \angle(Ox, O\xi)$ - угол нутации

Определение. $\{\psi, \Theta, \varphi\}$ - углы Эйлера

Повороты: $OXYZ \xrightarrow{\psi, OZ} Oxyz \xrightarrow{\Theta, Ox} Oxy\xi \xrightarrow{\varphi, O\xi} O\xi\eta\xi$

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\Theta}\vec{e}_x + \dot{\varphi}\vec{e}_\xi$$

$$\vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_\xi + \sin \varphi \vec{e}_\eta$$

$$\vec{e}_z = \cos \Theta \vec{e}_\xi + \sin \Theta (\sin \varphi \vec{e}_\xi + \cos \varphi \vec{e}_\eta)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\psi}(\sin \Theta \sin \varphi \vec{e}_\xi + \sin \Theta \cos \varphi \vec{e}_\eta + \cos \Theta \vec{e}_\xi) \\ &+ \dot{\Theta}(\cos \varphi \vec{e}_\xi - \sin \varphi \vec{e}_\eta) \\ &+ \dot{\varphi} \vec{e}_\xi = \omega_\xi \vec{e}_\xi + \omega_\eta \vec{e}_\eta + \omega_\zeta \vec{e}_\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \vec{\omega}_\xi = \dot{\psi} \sin \Theta \sin \varphi + \dot{\Theta} \cos \varphi \\ \vec{\omega}_\eta = \dot{\psi} \sin \Theta \cos \varphi + \dot{\Theta} \sin \varphi \\ \vec{\omega}_\zeta = \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad \text{- кинематические формулы Эйлера}$$

Определение. Движение твердого тела называется прецессией, если некоторая ось, неподвижная в теле, в абсолютном пространстве движется по поверхности неподвижного кругового конуса. $\dot{\Theta} = 0$. Если $\dot{\psi} = \text{const}$, $\dot{\varphi} = \text{const}$, то прецессия называется регулярной.

Алгебра кватернионов

Определение. Алгеброй над полем называется векторное пространство над этим полем, снабженное билинейной операцией умножения.

Пример.

$\underline{n=2}$ (Комплексные числа). $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$\underline{n=4}$ (Алгебра кватернионов)

$$\Lambda = \lambda_0 \vec{i}_0 + \lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3 \in \mathbb{H}$$

$\{\vec{i}_0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\}$ - базис

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\Lambda}$$

$$i_0 \circ i_k = i_k k = \overline{1, 3}, \quad i_0 \circ i_0 = 1$$

$$\begin{aligned}
i_k \circ i_m &= -(i_k, i_m) + [i_k, i_m]k, m \in \{1, 2, 3\} \\
\bar{\lambda} \circ \bar{\mu} &= (\lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3) \circ (\mu_1 \vec{i}_1 + \mu_2 \vec{i}_2 + \mu_3 \vec{i}_3) = -(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + [\bar{\lambda}, \bar{\mu}] \\
\Lambda \circ M &= (\lambda + \bar{\lambda}) \circ (\mu + \bar{\mu}) = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \bar{\mu} + \bar{\lambda} \mu_0 - (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + [\bar{\lambda}, \bar{\mu}]
\end{aligned}$$

Свойства:

1. $(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N)$
2. $(\Lambda + M) \circ N = \Lambda \circ N + M \circ N$
3. $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$

Определение.

$$\bar{\Lambda} = \lambda_0 - \bar{\lambda}$$

Утверждение 9.

$$\overline{\Lambda \circ M} = \bar{M} \circ \bar{\Lambda}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda \circ M} &= \lambda_0 \mu_0 - (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) - \lambda_0 \bar{\mu} - \mu_0 \bar{\lambda} - [\bar{\lambda}, \bar{\mu}] = \\
&= (\mu_0 - \bar{\mu}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \bar{M} \circ \bar{\Lambda}
\end{aligned}$$

■

Определение.

$$\| \Lambda \| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = \sum_{k=0}^3 \lambda_k^2 = |\Lambda|^2 - \text{норма } \Lambda$$

Утверждение 10.

$$\| \Lambda \circ M \| = \| \Lambda \| \cdot \| M \|^2$$

Доказательство.

$$\| \Lambda \circ M \| = (\Lambda \circ M) \circ (\overline{\Lambda \circ M}) = \Lambda \circ \underbrace{M \circ \bar{M}}_{\|M\|^2} \circ \bar{\Lambda} = \| \Lambda \| \cdot \| M \|^2$$

■

Определение.

$$\Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\| \Lambda \|^2}, \quad \| \Lambda \| \neq 0$$

Замечание.

$$\Lambda \circ \frac{\bar{\Lambda}}{\| \Lambda \|^2} = \frac{\bar{\Lambda}}{\| \Lambda \|^2} \circ \Lambda = \frac{\| \Lambda \|^2}{\| \Lambda \|^2} = 1$$

Формула Муавра

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda} = |\Lambda| \left(\frac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} \frac{|\bar{\lambda}|}{|\Lambda|} \right) = |\Lambda| (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu)$$

$$\bar{e} = \frac{\bar{\lambda}}{|\bar{\lambda}|}, \quad \cos \nu = \frac{\lambda_0}{\Lambda}, \quad \sin \nu = \frac{\bar{\lambda}}{|\Lambda|}$$

$$\Lambda_1 = |\Lambda_1|(\cos \nu_1 + \bar{e} \sin \nu_1)$$

$$\Lambda_2 = |\Lambda_2|(\cos \nu_2 + \bar{e} \sin \nu_2)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \circ \Lambda_2 &= |\Lambda_1| \cdot |\Lambda_2| (\cos \nu_1 \cos \nu_2 - \sin \nu_1 \sin \nu_2 (\bar{e}, \bar{e}) + \cos \nu_1 \sin \nu_2 \bar{e} + \\ &+ \cos \nu_2 \sin \nu_1 \bar{e} + \sin \nu_2 \sin \nu_1 [\bar{e}, \bar{e}]) = |\Lambda_1| |\Lambda_2| \cdot (\cos(\nu_1 + \nu_2) + \bar{e} \sin(\nu_1 + \nu_2)) \end{aligned}$$

$$\Lambda^k = |\Lambda|^k \cdot (\cos k\nu + \bar{e} \sin k\nu) \text{ — формула Муавра}$$

Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов

$E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ — неподвижный базис

$E' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ — связанный с телом

Теорема 10. Произвольному положению твердого тела с неподвижной точкой соответствует нормированный кватернион, удовлетворяющий равенству:

$$\bar{e}_i = \Lambda \circ \bar{e}_i \circ \bar{\Lambda}, \quad i = 1 \dots 3$$

Замечание. Λ — нормирован, если $\|\Lambda\| = 1$

Доказательство.

1. Нормированность

$$\|\bar{e}'_i\| = \|\Lambda\| \cdot \|\bar{e}_i\| \cdot \|\bar{\Lambda}\| \Rightarrow 1 = \|\Lambda\| \cdot 1 \cdot \|\Lambda\| \Rightarrow \|\Lambda\| = 1$$

2. Существование решения. $\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ \bar{e}'_i \circ \Lambda = \Lambda \circ \bar{e}_i \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ \bar{e}'_i \circ (\lambda_0 + \bar{\lambda}) = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ \bar{e}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 \bar{e}'_i - (\bar{e}'_i, \bar{\lambda}) + [\bar{e}'_i, \bar{\lambda}] = \lambda_0 \bar{e}_i - (\lambda, \bar{e}'_i) + [\bar{\lambda}, \bar{e}_i] \\ \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ (\bar{\lambda}, \bar{r}_i) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_i - [\bar{\lambda}, \bar{s}_i] = 0 \end{cases} \quad \bar{r}_i = \bar{e}'_i - \bar{e}_i, \quad \bar{s}_i = \bar{e}'_i + \bar{e}_i \quad i = 1 \dots 3$$

(a)

$$\begin{aligned} (\bar{r}_k, \bar{s}_k) &= (\bar{e}'_k - \bar{e}_k, \bar{e}'_k + \bar{e}_k) = (\bar{e}'_k, \bar{e}'_k) - (\bar{e}_k, \bar{e}_k) = 0 \\ (\bar{r}_k, \bar{s}_l) &= (\bar{e}'_k - \bar{e}_k, \bar{e}'_l + \bar{e}_l) = (\bar{e}'_k, \bar{e}'_l) + (\bar{e}'_k, \bar{e}_l) - (\bar{e}_k, \bar{e}'_l) - (\bar{e}_k, \bar{e}_l) = \\ &= -(\bar{e}'_l - \bar{e}_l, \bar{e}'_k + \bar{e}_k) = -(\bar{s}_k, \bar{r}_l), \quad k \neq l \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) &= (\bar{e}'_1 - \bar{e}_1, \bar{e}'_2 - \bar{e}_2, \bar{e}'_3 - \bar{e}_3) = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3) - (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) - \\ &- (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}_3) + (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}'_3) = 1 - 1 - \underbrace{(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}_3)}_{\bar{e}'_3} + \underbrace{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}'_3)}_{\bar{e}_3} = 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} &\bar{r}_1(\bar{s}_2, \bar{r}_3) + \bar{r}_2(\bar{s}_3, \bar{r}_1) + \bar{r}_3(\bar{s}_1, \bar{r}_2) \\ (2b) &\Rightarrow c_1 \bar{r}_1 + c_2 \bar{r}_2 + c_3 \bar{r}_3 = 0 \\ &\begin{cases} 0 + c_2(\bar{s}_1, \bar{r}_2) - c_3(\bar{s}_2, \bar{r}_1) = 0 \\ -c_1(\bar{s}_1, \bar{r}_2) + 0 + c_3(\bar{s}_2, \bar{r}_3) = 0 \\ c_1(\bar{s}_3, \bar{r}_1) - c_2(\bar{s}_2, \bar{r}_3) + 0 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} c_1 = (\bar{s}_2, \bar{r}_3) \\ c_2 = (\bar{s}_3, \bar{r}_1) \\ c_3 = (\bar{s}_1, \bar{r}_2) \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ (\bar{r}_k, \bar{\lambda}) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_k + [\bar{s}_k, \bar{\lambda}] = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \\ (3) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 \bar{r}_1 + [\bar{s}_1, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_2 + [\bar{s}_2, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_3 + [\bar{s}_3, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} \lambda_0 \bar{r}_1 + \alpha \bar{r}_1(\bar{s}_1, \bar{r}_1) - 0 = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_2 + 0 - \alpha \bar{r}_2(\bar{s}_2, \bar{r}_1) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_3 + \alpha \bar{r}_1(\bar{s}_3, \bar{r}_2) - \alpha \bar{r}_2(\bar{s}_3, \bar{r}_1) = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} \lambda_0 \bar{r}_1 + \alpha \bar{r}_1(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_2 + \alpha \bar{r}_2(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_3 + \alpha \bar{r}_3(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \end{cases} \quad \lambda_0 = -\alpha(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = \alpha(\bar{s}_2, \bar{r}_1) \\ (1) &\Rightarrow \alpha^2((\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{e}_2]^2) = 1 \Rightarrow \quad \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{(\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{r}_2]^2}} \end{aligned}$$

$$\Lambda = \pm \frac{(\bar{s}_2, \bar{r}_1) + [\bar{r}_1, \bar{r}_2]}{\sqrt{(\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{r}_2]^2}}$$

■

Определение.

$f(M) = \Lambda \circ M \circ \bar{\Lambda}$; $M \rightarrow f(M)$, $\|\Lambda\| = 1$ — присоединенное преобразование

Утверждение 11. Присоединенное преобразование не меняет скалярные части кватернионов и модуль векторной части

Доказательство.

1. $f(M) = \Lambda \circ (\mu_0 + \bar{\mu}) \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ \mu_0 \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \bar{\mu} \circ \Lambda = \mu_0 \|\Lambda\| + f(\bar{\mu}) = \mu_0 + \bar{\mu}'$
2. $\mu_0^2 + \bar{\mu}^2 = \|M\| = \|\Lambda \circ M \circ \bar{\Lambda}\| = \|f(M)\| = \mu_0'^2 + \bar{\mu}'^2 \Rightarrow \mu^2 = \bar{\mu}'^2$

■

Следствие. Всегда существует присоединенное преобразование, переводящее орты неподвижного базиса в орты базиса, связанного с телом.

Доказательство.

$$\bar{e}'_i = \Lambda \circ \bar{e}_i \circ \bar{\Lambda} = f(\bar{e}_i) \quad (4)$$

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^3 r_k \bar{e}_k, \quad f(r) = \Lambda \circ \sum r_k \bar{e}_k \bar{\Lambda} = \sum_k r_k f(\bar{e}_k) = \sum_k r_k \bar{e}'_k = \bar{r}' \quad (5)$$

$$(6)$$

■

$$\boxed{\bar{r}' = \Lambda \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}} \quad (7)$$

Следствие. При повороте твердого тела вокруг неподвижной точки справедлива (7), где \bar{r} — начальное положение точки, \bar{r}' — ее положение после поворота, а Λ — кватернион соответствующего преобразования.

Теорема 11. Преобразование, заданное кватернионом $\Lambda = \cos \nu + \bar{e} \sin \nu$ соответствует повороту пространства вокруг вектора \bar{e} на угол 2ν

Доказательство.

1.

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$$

$$\bar{\lambda}' f(\bar{\lambda}) = \Lambda \circ \bar{\lambda} \circ \bar{\Lambda} = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ \bar{\Lambda} \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) =$$

$$\begin{aligned}
(\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (-\lambda^2 + \lambda_0 \bar{\lambda}) &= -\lambda_0 \bar{\lambda}^2 - \lambda_0 \bar{\lambda}^2 + \lambda_0^2 + \lambda^2 \bar{\lambda} = \\
\bar{\lambda}(\lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2) &\Rightarrow \bar{\lambda} - \text{неподвижная ось} \Rightarrow \\
\Rightarrow \bar{e} &= \frac{\bar{\lambda}}{\sin \nu} - \text{ось поворота} \\
\bar{a} &\in \pi \perp \bar{e} \\
\bar{a}' = f(\bar{a}) &= (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu) \circ \bar{a} \circ (\cos \nu - \bar{e} \sin \nu) = \\
&= (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu) \circ ([\bar{a}, \bar{e}] \cdot \sin \nu + \cos \nu \bar{a} - \sin \nu [\bar{a}, \bar{e}]) = \\
&= \cos^2 \nu \bar{a} + \cos \nu \sin \nu (\bar{a}, \bar{e}) + \cos \nu \sin \nu = \dots
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\bar{a}' &= (\cos \frac{\varphi}{2} + e \sin \frac{\varphi}{2} \circ \bar{a} \circ (\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) = \\
&= (\bar{a} \cos \frac{\varphi}{2} + [\bar{e}, \bar{a}] \sin \frac{\varphi}{2}) \circ (\cos \frac{\varphi}{2} - \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) = \\
&= \bar{a} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2[\bar{e}, \bar{a}] \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \bar{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \\
&= \bar{a} \cos \varphi + [\bar{e}, \bar{a}] \sin \varphi
\end{aligned}$$

$$|\bar{a}'| = |\bar{a}|$$

■

Следствие.

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{e}'_1 + \lambda_2 \bar{e}'_2 + \lambda_3 \bar{e}'_3$$

Определение.

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — *Параметры Родрига-Гамильтона*

Следствие (Теорема Эйлера о конечном повороте). *Любые два положения твердого тела с неподвижной точкой могут быть получены одно из другого одним поворотом вокруг некторой оси, проходящей через неподвижную точку на некоторый угол*

Доказательство.

1.

$$\forall E, E' \exists \Lambda E \rightarrow E'$$

2.

$$\forall \Lambda \bar{r} \rightarrow \bar{r}' \Leftrightarrow \text{Поворот вокруг } e \text{ на } \varphi$$

■

$$\begin{aligned}
E &\xrightarrow{\Lambda_1} E' \xrightarrow{\Lambda_2} E'', \quad E \xrightarrow{\Lambda} \\
\bar{r}' &= \Lambda_1 \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}, \quad \bar{r}'' = \Lambda_2 \circ \bar{r}' \circ \bar{\Lambda} \\
\bar{r}'' &= \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}_2 = \Lambda \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}, \quad \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1} \text{ — формула сложения поворотов}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k'' = \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k' \\
\Lambda_2^* &= \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k \text{ — собственный к } \Lambda_2 \text{ кватернион} \\
\bar{e}_k' &= \Lambda_1 \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}_1, \quad \Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \Lambda_1 \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}_1 = \\
&= \Lambda_1 \circ (\lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k) \circ \bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ \bar{\Lambda}_1 \\
\Lambda &= \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ (\bar{\Lambda}_1 \circ \Lambda_1) = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*, \quad \Lambda_1^* = \Lambda_1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*}$$

— формула сложения поворотов в параметрах Родрига-Гамильтона

Кинематика твердого тела в кватернионном описании

Теорема 12. Угловая скорость твердого тела определяется равенством:

$$\bar{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}$$

где Λ - кватернион, задающий положение твердого тела относительно неподвижного базиса

Доказательство.

1.

$$\begin{aligned}
B &= \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} \\
B + \bar{B} &= \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \overline{(\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda})} = \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \bar{\Lambda} = \\
&= \frac{d}{dt}(\Lambda \circ \bar{\Lambda}) = \frac{d}{dt}(\|\Lambda\|) = 0 \Rightarrow B = \bar{B}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{e}}'_k &= [\bar{\omega}, \bar{e}_k] \\
\bar{e}'_k &= \Lambda \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}, \quad \bar{e}_k = \bar{\Lambda} \circ \bar{e}'_k \circ \Lambda \\
\dot{\bar{e}}'_k &= \dot{\Lambda} \circ \bar{e}_k \circ \Lambda + \Lambda \circ \bar{e}_k \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \\
&= \dot{\Lambda} \circ (\bar{\Lambda} \circ \bar{e}'_k \circ \Lambda) \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ (\bar{\Lambda} \circ \bar{e}'_k \circ \Lambda) \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \\
&= \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} \circ \bar{e}'_k + \bar{e}'_k \circ \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = B \circ \bar{e}'_k + \bar{e}'_k \circ \bar{B} = \\
[2\bar{B}, \bar{e}_k] &\Rightarrow 2\bar{B} = \bar{\omega}
\end{aligned}$$

■

Пример.

$$\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} &= 2(-\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \dot{\bar{e}} \sin \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi}) \circ (\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) = \\
&= -\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \bar{e} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \\
&+ \bar{e} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + 2\dot{\bar{e}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2[\bar{e}, \dot{\bar{e}}] \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \bar{e}\dot{\varphi} + \dot{\bar{e}} \sin \varphi + 2[\bar{e}, \dot{\bar{e}}] \sin^2 \frac{\varphi}{2}
\end{aligned}$$

Замечание.

1.

$$\bar{\omega} = \bar{e}\dot{\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \dot{\bar{e}} = 0 \end{cases}$$

2.

$$\varphi \ll 1. \quad \bar{\omega} \approx \bar{e}\varphi + \dot{\bar{e}}\varphi = \frac{d}{dt}(\bar{e}\varphi)$$

3.

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{e} \Delta \varphi}{\Delta t}, \quad E(t) \xrightarrow{\Delta \Lambda} E(t + \delta t), \quad \Delta \Lambda = \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \Delta \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Уравнение Пуассона

$$\omega = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}$$

$$\boxed{\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega}\Lambda} \text{ — кинематическое уравнение Пуассона} \quad (8)$$

$$\omega = p\bar{e}'_1 + q\bar{e}'_2 + r\bar{e}'_3, \quad \bar{\omega}^* = p\bar{e}_1 + q\bar{e}_2 + r\bar{e}_3$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \bar{\omega}^* \quad (9)$$

Интегрирование уравнения Пуассона

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) \quad (10)$$

Определение. Функция $\Phi(\bar{x}, t)$ называется первым интегралом системы (10), если

$$\Phi(\bar{x}(t), t) = \text{const}$$

где $\bar{x}(t)$ — решение системы (10)

Утверждение 12. Система (8) имеет первый интеграл вида

$$\| \Lambda \| = \text{const}$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}(\| \Lambda \|) = \frac{d}{dt}(\Lambda \circ \bar{\Lambda}) = \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda \circ \bar{\Lambda} \dots$$

■

Утверждение 13. Общее решение системы (8) имеет вид:

$$\Lambda(t) = \Lambda'(t) \cdot C$$

где Λ' — частное решение, $C = \text{const}$.

Доказательство. Λ, Λ' — Нетривиальные решения (8)

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda, \quad \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda'$$

$$M = (\Lambda')^{-1} \circ \Lambda, \quad \Lambda = \Lambda' \circ M$$

$$(9) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Lambda}' \circ M + \Lambda' \circ \dot{M} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda' \circ M \\ \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Lambda' \circ \dot{M} = 0 \Leftrightarrow \dot{M} = 0 \Leftrightarrow M = C = \text{const}$$

■

Следствие.

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda, \quad \Lambda(\varphi) = 1 \quad (11)$$

Случай 1. Вращение вокруг неподвижной оси $\bar{\omega} = \bar{e}\omega$, $\bar{e} = \text{const}$:

$$(11) \Rightarrow \Lambda \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$$

Случай 2. Регулярная прецессия:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$$

$$\Lambda_z = \cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_z \sin \frac{\varphi}{2}, \psi = \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau$$

$$\Lambda_\zeta = \cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_\zeta \sin \frac{\varphi}{2}, \psi = \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau$$

1 способ:

$O\zeta$ — ось тела (подвижная)

$$\Lambda_1 = \Lambda_z, \quad \Lambda_2 = \Lambda_\zeta$$

$Oxyz$ — неподвижный базис, $Oxz = O\nu\zeta(0)$

$$\Lambda_2^* = \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e}_\xi(0) \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} + (\sin \Theta \bar{e}_x + \cos \Theta \bar{e}_z) \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\Lambda = \left(\cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_z \sin \frac{\psi}{2} \right) \circ \Lambda_2 = \dots$$

2 способ:

$O\zeta$ — неподвижна (ось тела в начальный момент времени)

$$\Lambda_1 = \Lambda_\zeta, \quad \Lambda_2 = \Lambda_z$$