Теоремы о неявной обратной функции

Линейные отображения

Определение. *Функция* $L : R^n \to R^m$ *называется линейным отображением, если* $\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall x, y \in R^n : \quad L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$

Лемма 1. *Если* $L \in \mathcal{L}(R^n, R^m)$, *то* $\exists C \in R : \forall x \in R^n : ||L|| < C||x||$.

Доказательство. Имеем $||L(x)||^2 = \sum\limits_{i=1}^{m}(L_i, x)^2$, где $L_i = (a_{i1}, \dots a_{in})$. По неравенству Коши-Буняковского: $(L_i, x)^2 \leqslant ||L_i||^2 \cdot ||x||^2$ и, значит $||L||^2 \leqslant ||x||^2 \sum\limits_{i=1}^{m} ||L_i||^2 = ||x||^2 \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ так, что $||L(x)|| \leqslant C||x||$ выполняется для $C = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$. ■

Определение. *Число* $||L|| = \inf\{C \in R$, *таких, что* $\forall x \in R^n : ||L(x)|| < C||x||^2\}$ *называется нормой линейного отображения* L.

Замечание.

1. *Определение корректно.*
2. *Поскольку условие* $(\forall x \in R^n : ||L(x)|| \leqslant ||L|| + \varepsilon||x||$ *выполняется при всех* $\varepsilon > 0$, *то* $\inf$ *достигается, т.е.* $\forall x \in R^n : \quad ||L(x)|| \leqslant ||L|| \cdot ||x||$
3. $||L(x) - L(y)|| <= ||L||||x - y||\forall x, y from R^n$ *Применяя последнее неравенство к разности векторов и пользуясь линейностью* L *получим*

$$||L(x) - L(y)|| \leq ||L|| \cdot ||x - y|| \quad \forall x, y \in R^n$$

в частности, заключаем, что любое линейное оторажение непрерывно.

Лемма 2. *Ф-ция* $|| \; || : L(R^n, R^m) \to R$ *удовлетворяет свойствам.*

1. $||L|| \geqslant 0, \quad ||L|| = 0 \Leftrightarrow L = \Theta$ *- нулевое отображение*
2. $\forall \alpha \in R ||\alpha L|| = |\alpha| \cdot ||L||$
3. $||L_1 + L_2|| \leqslant ||L_1|| + ||L_2||$
4. *Если* $L_1 \in L(R^n, R^m), \quad L_2 \in L(R^m, R^k)$, *то определено произведение (композиция)* $L_2 L_1 \in L(R^n, R^k), \quad ||L_1 L_2|| \leqslant ||L_1|| \cdot ||L_2||$

Определение. *Последовательность* $L_k L \in (R^n, R^m)$ *сходится к* $L \in L(R^n, R^m)$, *если* $||L_k - L|| \to 0$.

Лемма 3. *Пусть линейные оторажение* L_k *и* L *имеют матрицы* $A_k = (a_{ij}^{(k)}$ *и* A *соответственно. Последовательность* $L_k \to L$, *тогда и только тогда, когда* $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$.

Доказательство. Заменяя L_k на $L_k - L$ - линейное отображение с матрицей $A_k - A$, сведем к случаю $L = \Theta$, что равносильно $a_{ij} = 0 \ \ \forall i, j$.

Элемент $a_{ij}^{(k)}$ - i-й элемент $L_k(e^j)$. Поэтому $a_{ij}^{(k)} \leqslant L_k(e^j) \leqslant ||L_k|| \to 0$. Обратно, если все $A_{ij}^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$, то $||L_k|| \to 0$ в силу оценки. ∎

Напомним, что $f : E \subset R^n \to R^m$ задается набором координатных функций: $f_i : E \to R, \quad f = (f_1, \dots f_m)$.

Дифференцируемые отображения

Определение. *Пусть $E \subset R^n$, a - внутренняя точка E. Отобрадение $f : E \to R^m$ называется дифференцируемым в a, если существует линейное отображение $L_a : R^n \to R^m$ такое, что*

$$f(a+h) - f(a) = L_a(h) + \alpha(h)||h||, \tag{1}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $h \to 0$. В случае существования отображение L_a определено однозначно. Оно называется дифференциалом f в точке a D_{f_a}.

Матрица дифференциала D_{f_a} называется матрицей Якоби отображения f в a и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

Теорема 1. *Отобрадение f дифференцируесм в точке a тогда, и только тогда, когда все координатные функции f_i дифференцируемы.*

Доказательство. Пусть $L_a = (L_1, \dots L_m)$, равенство (1) эквивалентно системе:

$$f(a+h) - f(a) = L_i(h) + \alpha_i(h)||h||$$

L_a линейно тогда, и только тогда, когда все L_i линейны. $\alpha(h) \to 0 \Leftrightarrow \alpha_i(h) \to 0$. ∎

Следствие. *Если отображение $f : E \to R^n$ дифф. в точке a, то ij-й элемент матрицы Якоби f в этой точке равен $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.*

Теорема 2. *(О композиции) Если отображение $f : E \to F \subset R^n$ дифференцируемо в точке a, а отображение $g : F \to R^k$ дифференцируемо в точке $b = f(a)$, то композиция $g \circ f E \to R^k$ дифференцируема в точке a и $D(g \circ f)_a = D_{g_b} \circ D_{f_a}$.*

Доказательство. Доказательство очевидно. ∎

Теорема 3. *(О среднем) Пусть U - открытое множество в R^n, отрезок $\Delta_{a,b} \subset U$. Если отображение f дифференцируемо на U и $D_{f_x} \leqslant M$ для всех $x \in U$, то $||f(b) - f(a)|| \leqslant M||b - a||$.*

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $t \to \gamma(t) = f(a + (b-a)t)$. Эта функция дифференцируема по теореме 2 в каждой точке $t \in [0,1]$, $\gamma(1) = f(b)$, $\gamma(0) = f(a)$ и по правилу дифференцирования композиции $\gamma(t) = D_{f_{a+t(b-a)}}(b-a)$. По теореме Лагранжа для вектор функций $\exists \Theta \in$

$(0,1) : ||\gamma(1)-\gamma(0)|| \leqslant ||\gamma(\Theta)$. Положим $c = a + \Theta(b-a)$. Тогда по пункту 4 леммы 2 $||\gamma'(\theta)|| \leqslant ||Df_c||||b-a||$ Следовательно, $||f(b)-f(a)|| \leqslant ||\gamma'(\theta)|| \leqslant M||b-a||$ ■