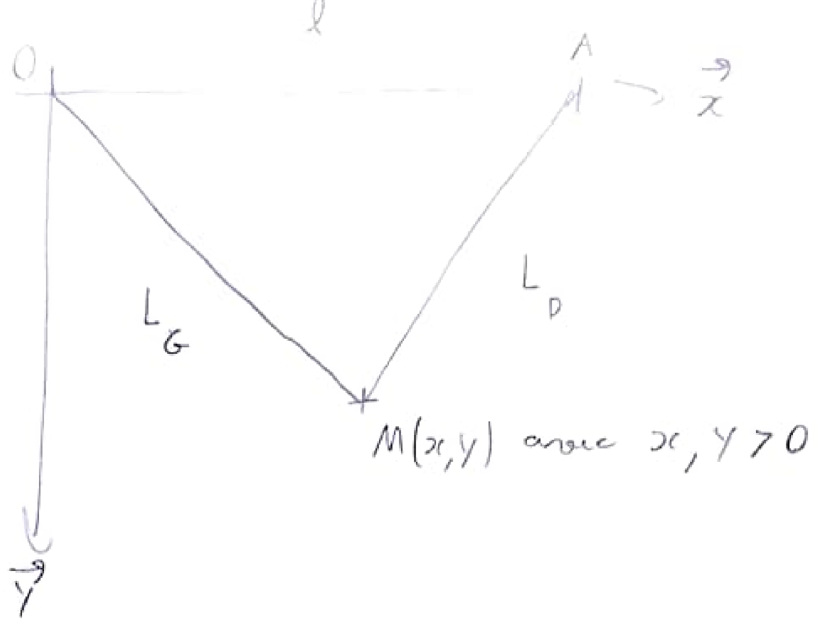
Cinématique



$$\begin{cases} L_G^2 = x^2 + y^2 & (1) \\ L_D^2 = (l-x)^2 + y^2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \iff L_D^2 - L_G^2 = (l-x)^2 - x^2 = l^2 - 2lx$$

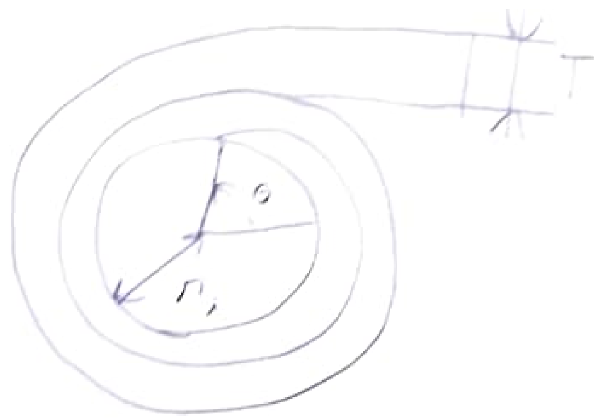
$$\iff \boxed{x = \frac{l^2 + L_G^2 - L_D^2}{2l}}$$

$$(1) \iff \boxed{y = \sqrt{L_G^2 - x^2}}$$

$$\begin{cases} \boxed{L_G = \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \boxed{L_D = \sqrt{(l-x)^2 + y^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{L}_G = \dfrac{2x\dot{x} + 2y\dot{y}}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \boxed{\dfrac{x\dot{x} + y\dot{y}}{L_G}} \\ \dot{L}_D = \dfrac{2\dot{x}(l-x) + 2y\dot{y}}{2\sqrt{(l-x)^2+y^2}} = \boxed{\dfrac{(l-x)\dot{x} + y\dot{y}}{L_D}} \end{cases}$$

Treuil



$r(\theta) = r_i + T\dfrac{\theta}{2\pi}$ le rayon d'enroulement augmente de T à chaque tour

$$L_e = \int_0 \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\, d\theta \simeq \int_0 r(\theta)\, d\theta = \boxed{\theta\left(r_i + \frac{T\theta}{4\pi}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T}{4\pi}\theta^2 + r_i\theta - L_e = 0$$

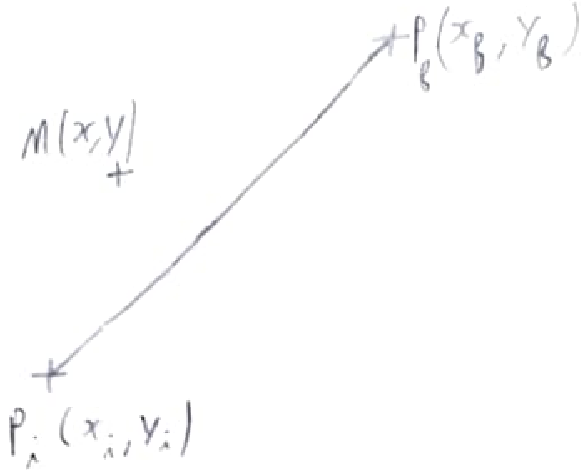
$$\Delta = r^2 + 4\frac{T}{4\pi}L_e = r_i^2 + \frac{T L_e}{\pi} > 0$$

$$\boxed{\theta = 2\pi \frac{\sqrt{r_i^2 + \frac{T L_e}{\pi}} - r_i}{T}}$$

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{\frac{T}{\pi}\dot{L}_e}{2\sqrt{r_i^2 + \frac{T L_e}{\pi}}}\right) = \boxed{\frac{\dot{L}_e}{\sqrt{r_i^2 + \frac{T}{\pi}L_e}}}$$

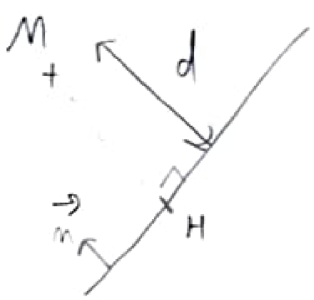
avec $L_e = L_{tot} - L_G$ ou $L_{tot} - L_D$ et $\theta = \theta_G$ ou θ_D

Correction de trajectoire



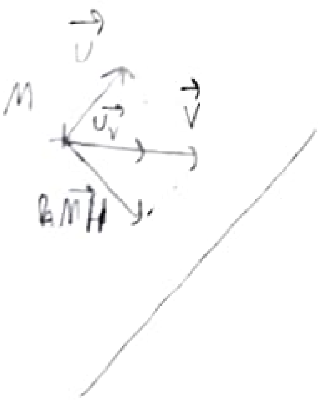
Plus le robot est loin du trajet qu'il doit emprunter, plus il doit essayer de s'en rapprocher.

On pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \dfrac{\overrightarrow{P_iP_f}}{\|\overrightarrow{P_iP_f}\|}$ et $\vec{m} = \begin{pmatrix} -y_u \\ x_u \end{pmatrix}$



$$d = \overrightarrow{P_f M} \cdot \vec{m} = \boxed{(y - y_f)x_u - (x - x_f)y_u}$$

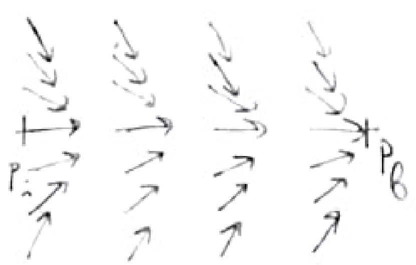
$$\overrightarrow{MH} = -d\,\vec{m}$$



$$\vec{V} = \vec{u} + k_{corr}\,\overrightarrow{MH} = \boxed{\begin{pmatrix} x_u + d\,k_{corr}\,y_u \\ y_u - d\,k_{corr}\,x_u \end{pmatrix}}$$

où $k_{corr} \geq 0$ est le coefficient de correction de trajectoire. Expérimentalement, $k_{corr} = 0,1$

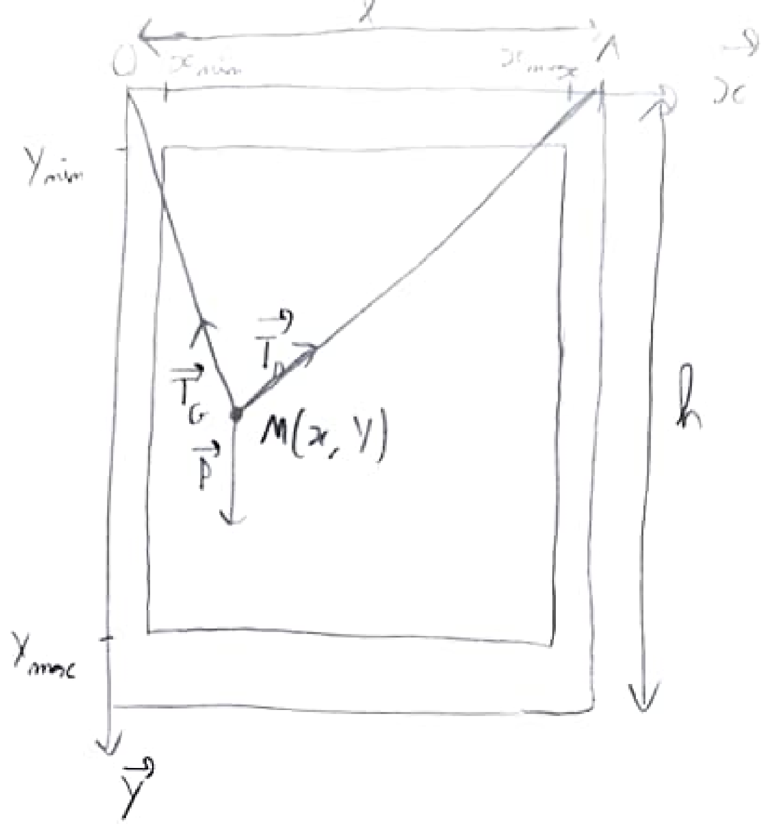
On normalise $\vec{V}$: $\vec{U_V} = \dfrac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$



Champ de vecteur $\vec{U_V}$

rmq: invariance du champ par translation selon $\overrightarrow{P_iP_f}$

zone de dessin



Choix d'une zone de dessin rectangulaire car c'est plus facile de positionner le dessin.

On pose $n_G = \|\vec{MO}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $n_D = \|\vec{MA}\| = \sqrt{(l-x)^2+y^2}$

$$\vec{U_G} = \frac{\vec{MO}}{n_G} = \frac{-1}{n_G}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{U_D} = \frac{\vec{MA}}{n_D} = \frac{1}{n_D}\begin{pmatrix} l-x \\ -y \end{pmatrix}$$

$\sum \vec{F}_{ext \to M} = m\vec{a}_M = \vec{0}$ On se place en quasi-statique. Les forces d'inertie sont négligeables.

$$\Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T_G} + \vec{T_D} = \vec{0} \quad \text{avec} \begin{cases} \vec{P} = mg\vec{U_y} \\ \vec{T_G} = T_G\vec{U_G} \\ \vec{T_D} = T_D\vec{U_D} \end{cases}$$

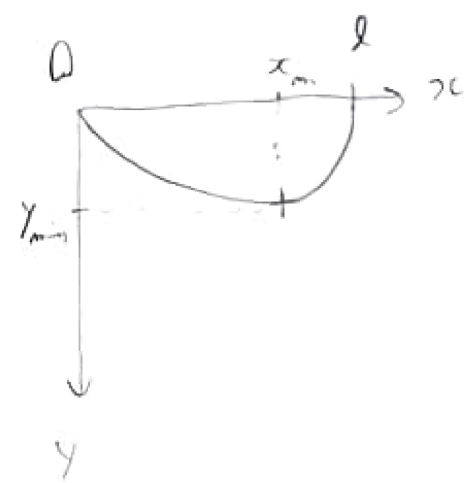
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{x} : -\frac{T_G}{n_G}x + \frac{T_D}{n_D}(l-x) = 0 & (1) \\ |\vec{y} : mg - \frac{T_G}{n_G}y - \frac{T_D}{n_D}y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$y(1) + x(2) \Leftrightarrow T_D\frac{y}{n_D}l = mgx \Leftrightarrow \boxed{T_D = \frac{\sqrt{(l-x)^2+y^2}\,mgx}{yl}}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{T_G}{n_G}x = \frac{T_D}{n_D}(l-x) \Leftrightarrow \boxed{T_G = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,mg(l-x)}{yl}}$$

Rmq : T_G à la même formule que T_D en remplaçant x par $l - x$

On se fixe la contrainte suivante : la tension dans les rubans ne doivent pas excéder 1 poid.



$$T_D = mg$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-l)^2+y^2}\,x = yl$$

$$\Rightarrow \left((x-l)^2+y^2\right)x^2 - y^2 l^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-l)^2 x^2 + y^2(x^2-l^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2(x-l)^2}{l^2-x^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x(l-x)}{\sqrt{l^2-x^2}} = f(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(l-2x)\sqrt{l^2-x^2} + \frac{(l-x)x^2}{\sqrt{l^2-x^2}}}{l^2-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (l-2x)(l^2-x^2) + (l-x)x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow l^3 - lx^2 - 2l^2x + 2x^3 + lx^2 - x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2l^2x + l^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-l)(x^2+lx-l^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-l)(x+\phi l)\left(x-\frac{l}{\phi}\right) = 0$$ avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or

seul $\frac{l}{\phi} \in]0, l[$ donc $x_m = \frac{l}{\phi}$

$$Y_{min} = f\left(\frac{l}{\phi}\right) = \frac{\frac{l}{\phi}\left(l-\frac{l}{\phi}\right)}{\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{\phi}\right)^2}} = l\frac{(\phi-1)(2-\phi)}{\sqrt{1-(1-\phi)^2}} = l\sqrt{\frac{(\phi-1)^2(2-\phi)^2}{\phi\,\cancel{(2-\phi)}}}$$

$$= l\sqrt{\frac{2-\phi}{2\phi+1}} = l\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}} \simeq \boxed{0,3l}$$

$$T_D \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Il faut imposer une tension minimale εmg à corde définissant les cotés droit et gauche de la zone de dessin.

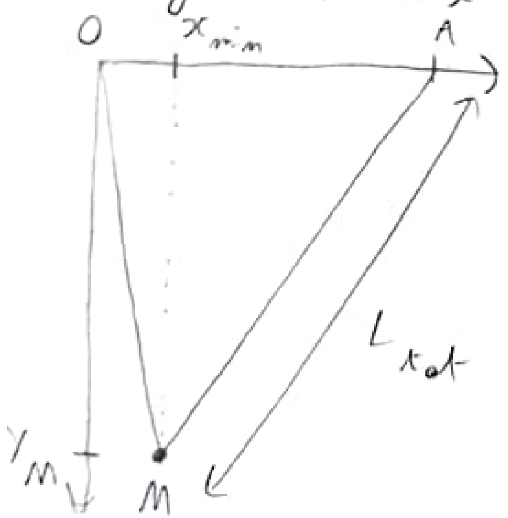
$$T_D = \frac{1}{l}\left(\underbrace{\sqrt{\left(\frac{l-x}{Y}\right)^2+1}}_{\underset{Y\to+\infty}{\sim}1}\ mg\, x\right) \underset{Y\to+\infty}{\sim} \frac{mg}{l}x$$

$$T_D - \frac{mg}{l}x = \frac{mg}{l}x\left(\underbrace{\sqrt{\left(\frac{l-x}{Y}\right)^2+1}}_{>1} - 1\right) > 0 \Leftrightarrow T_D > \frac{mg}{l}x$$

donc prenons $\frac{mg}{l}x$ comme approximation de T_D lorsque x est au voisinage de 0

$$\varepsilon mg = \frac{mg}{l}x_{min} \Leftrightarrow \boxed{x_{min} = \varepsilon l = 0,06\, l}$$ avec ε déterminer expérimentalement

Par symétrie, $x_{max} = (1-\varepsilon)l$



$$L_{tot}^2 = (l-\varepsilon l)^2 + Y_M^2 \Leftrightarrow Y_M = \sqrt{L_{tot}^2 - l^2(1-\varepsilon)^2}$$

$$Y_{max} = \min(Y_M, h) - \underbrace{240}_{\text{taille du robot en mm}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y_{max} = \min\left(\sqrt{L_{tot}^2 - l^2(1-\varepsilon)^2},\ h\right) - 240}$$