

GUÍA Nro. 3: FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES
(Parte A)

1. Definición y representaciones gráficas

En general, al estudiar fenómenos del mundo real es usual que una cantidad dependa de más de una variable. Por ejemplo, el servicio meteorológico informa el índice de sensación térmica I que refleja el efecto que ejerce la acción del viento sobre la temperatura real del aire; este índice combina, bajo determinadas condiciones, la velocidad del viento v y la temperatura real T , mediante una **función de dos variables**: $I(v, T)$. Así también, una dada carga eléctrica (ubicada, digamos, en el origen de un sistema de referencia) produce sobre otra carga (ubicada en $P(x, y, z)$) una fuerza atractiva si ambas cargas son del mismo signo, o repulsiva si son de signos opuestos; esta fuerza varía de un punto a otro del espacio y se puede estudiar el problema definiendo el llamado potencial eléctrico V en términos de la posición relativa de las cargas, en este caso mediante una **función de tres variables**: $V(x, y, z)$. Por otro lado, si en un laboratorio se quiere especificar la tasa de reacción R de una solución que consta de cuatro sustancias químicas en proporciones a, b, c, d , se requiere una **función de cuatro variables**: $R(a, b, c, d)$.

Vemos entonces que para estudiar este tipo de situaciones es necesario ampliar las ideas del cálculo de funciones de una variable, a **funciones escalares de varias variables**. En líneas generales, vamos a estudiar los conceptos que ya vimos en Análisis I, pero extendiendo ahora a más de una variable. En esta guía veremos, entre otras cosas, cómo representar gráficamente una función con muchas (2 ó 3, en realidad) variables y cómo estudiar los cambios parciales que sufre una función cuando cambia alguna de sus variables (esto conduce a la noción de “derivación parcial”). En la Guía 4 estudiaremos cómo caracterizar los puntos críticos en la búsqueda de valores máximos y mínimos de una función multivariable, y en la Guía 5 hablaremos de integración de este tipo de funciones.

1.1. Funciones escalares de n variables

DEFINICIÓN:

Una *función real* f de n variables es una regla que asigna a cada n -upla de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) , un único número real $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Se llama *dominio* de f , $\text{Dom}(f)$, al subconjunto de \mathbb{R}^n en el cual está definida la función f .

La *imagen* o *rango* de f , $\text{Im}(f)$, es el subconjunto de \mathbb{R} formado por los valores que toma la función f .
Escribimos:

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Si no indicamos ninguna condición especial sobre el dominio de f , se entenderá que $\text{Dom}(f)$ es el “dominio natural”, es decir, el conjunto de todas las n -uplas de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) para las cuales la expresión que define a f es un número real bien definido. Por ejemplo, la función $f(x, y, z, t) = \sin(x^2 +$

$y^2 + z^2 - t^2$) tiene dominio \mathbb{R}^4 (f está bien definida para cualesquiera x, y, z, t reales). Dada la función de dos variables $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$, su dominio natural es el conjunto de todos los puntos (x, y) de \mathbb{R}^2 para los cuales la expresión $\sqrt{y - x^2}$ es un número real bien definido. Luego el radicando $y - x^2$ no puede ser negativo, con lo cual $\text{Dom}(f) = \{(x, y) : y \geq x^2\}$. En el plano coordenado xy , dicho conjunto corresponde a los puntos de la parábola $y = x^2$ y todos los puntos por encima de ésta. Por otro lado, a partir de la expresión de f podemos deducir que esta función no toma nunca valores negativos, pero sí cero o cualquier valor positivo, o sea $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$.

En esta asignatura, nos concentraremos prácticamente en el estudio de funciones de $n = 2$ y $n = 3$ variables. La mayoría de las aplicaciones que veremos se refieren a problemas o fenómenos que se pueden modelar en términos de 2 y 3 cantidades. Además intentaremos en la medida de lo posible interpretar gráficamente las situaciones que se presenten, lo que nos limita necesariamente al plano y al espacio.

1.2. Funciones escalares de 2 variables

DEFINICIÓN:

Una *función real* f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) , un único número real $f(x, y)$.

El *dominio* de f , $\text{Dom}(f)$, es el subconjunto de \mathbb{R}^2 en el cual está definida la función; es decir que el dominio de una función de dos variables se representa como una región del plano. El *dominio natural* de una función f de dos variables es el conjunto de todos los puntos del plano para los cuales $f(x, y)$ es un número real bien definido.

La *imagen* de f es el subconjunto de \mathbb{R} formado por los valores que toma la función f .

Escribimos:

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Para $(x, y) \in \text{Dom}(f)$ se suele escribir $z = f(x, y)$, donde queda explícitamente definido que z es el valor que toma la función f al evaluarla para el par ordenado (x, y) . Las variables x e y son llamadas *variables independientes*, y z es la *variable dependiente*.

EJEMPLOS:

La *función nula* $f(x, y) = 0$ está definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; su imagen es el conjunto $\{0\}$.

La *función constante* $f(x, y) = c$ (siendo c una constante fija) tiene dominio \mathbb{R}^2 e imagen $\{c\}$.

Una regla de la forma $f(x, y) = ax + by + c$ se denomina *función lineal*. Así como las funciones lineales de una variable (de la forma general $F(x) = ax + b$) son importantes en el cálculo de una variable, veremos que las funciones lineales de dos variables desempeñan un papel central en el cálculo de dos variables.

Otros tipos de funciones incluyen las *funciones polinomiales* de dos variables (como, por ejemplo, las *funciones cuadráticas* cuya forma general es $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$); *funciones racionales*, que son cocientes de polinomios en x e y ; *funciones trigonométricas*; *funciones logarítmicas* y *exponenciales*, etc. Dé ejemplos para cada tipo.

EJEMPLO 1: Describir el dominio y la imagen de $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Si es posible, evaluar f en $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 0)$.

Observamos que la expresión $\frac{x}{x^2+y^2}$ está bien definida siempre que el denominador $x^2 + y^2 \neq 0$, lo que implica que x e y no pueden ser simultáneamente cero. Por lo tanto, el dominio natural es el conjunto $\text{Dom}(f) = \{(x, y) : (x, y) \neq (0, 0)\} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

La imagen de f está formada por los valores $z = \frac{x}{x^2+y^2}$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Observamos que z puede adoptar cualquier valor real, por lo cual $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Como $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$ pertenecen al dominio de f , podemos evaluar f en estos puntos:

$$f(-\frac{1}{2}, 0) = \frac{-\frac{1}{2}}{(-\frac{1}{2})^2 + 0^2} = -2 \qquad f(1, 0) = \frac{1}{1^2 + 0^2} = 1 \qquad f(1, 1) = \frac{1}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

Pero no se puede evaluar f en $(0, 0)$ (en la próxima sección estudiaremos cómo se comporta f cerca de $(0, 0)$).

REPRESENTACIONES GRÁFICAS

A) Gráfica de una función de 2 variables: representación en el espacio

Una forma de visualizar el comportamiento de una función de dos variables es mediante la representación de su gráfica.

DEFINICIÓN:

Se llama *gráfica* de una función f de dos variables al conjunto de todos los puntos del espacio con coordenadas (x, y, z) tales que (x, y) está en el dominio de f y $z = f(x, y)$. Llamando S a la superficie que representa la gráfica de f , entonces

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in \text{Dom}(f), z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \text{Dom}(f)\}$$

Para una función $F(x)$ de una variable, recordemos que su gráfica es una curva C en el plano, con ecuación $y = F(x)$; la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S en el espacio, con ecuación $z = f(x, y)$.

EJEMPLOS:

La *función nula* tiene como gráfica la superficie $z = 0$.

La *función constante* $f(x, y) = c$ se representa gráficamente como el plano (horizontal) de ecuación $z = c$.

EJEMPLO 2: Realizar la gráfica de la función $f(x, y) = x - y + 2$.

Como no hay ninguna condición particular para el dominio de f , consideraremos el dominio natural. Para determinarlo, observamos que la expresión $x - y + 2$ es un número real bien definido para cualesquiera valores real que adopten las variables x e y , por lo que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$. Para obtener la imagen de la función observamos que los valores que toma f son $z = x - y + 2$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vemos así que z puede adoptar cualquier valor real, por lo que, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Para trazar la gráfica de f , escribimos $z = f(x, y)$ o sea $z = x - y + 2$, que corresponde a la ecuación de un plano. Sabemos de la Guía 1 que un vector normal al plano $-x + y + z - 2 = 0$ está dado por

$\vec{n} = (-1, 1, 1)$; además un punto por donde pasa es el $P_0(0, 0, 2)$, pues $f(0, 0) = 2$. Veamos cuáles son las intersecciones de este plano con los tres planos coordenados: con el plano xy ($z = 0$) es la recta $y = x + 2$, con el plano yz ($x = 0$) es la recta $z = -y + 2$, y con el plano xz ($y = 0$) es $z = x + 2$. Con esta información podemos esbozar la gráfica de f como se ve en la Figura ??.

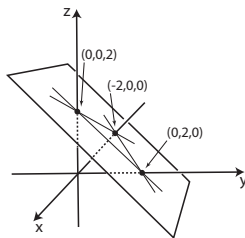


Figura 1: Ejemplo 2. La gráfica de la función $f(x, y) = x - y + 2$ es el plano $z = x - y + 2$.

La función del Ejemplo 2 es un caso particular de función lineal. La gráfica de la función $f(x, y) = a_1x + a_2y + b$ tiene ecuación $z = a_1x + a_2y + b$, que representa un plano con vector normal $\vec{n} = (-a_1, -a_2, 1)$ y que pasa por $P_0(0, 0, b)$, pues $f(0, 0) = b$. [Recordemos que para una función lineal de una variable, $F(x) = ax + b$, su gráfica es la recta de ecuación $y = ax + b$, con pendiente a y ordenada al origen b ; esto es, con vector director $\vec{v} = (1, a)$ y que pasa por el punto $p_0(0, b)$, pues $F(0) = b$.] Nos preguntamos: ¿todo plano es gráfica de una función lineal de dos variables?

EJEMPLO 3: Describir el dominio y la imagen de la función $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Señalar el dominio de f como una región en el plano xy , y representar la gráfica de f como una superficie en el espacio.

El dominio natural de f es

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) : 16 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$$

que corresponde al círculo con centro en el origen y radio 4, en el plano xy , como se ilustra en la Figura ??(a); para puntos fuera de ese círculo, la función no está definida. La imagen es el conjunto de todos los valores que toma f , en este caso entre 0 (cuando (x, y) pertenecen a la circunferencia frontera del dominio) y 4 (cuando $(x, y) = (0, 0)$, únicamente).

La gráfica de f es la superficie formada por los puntos (x, y, z) del espacio tales que $z = +\sqrt{16 - x^2 - y^2}$ para $(x, y) \in \text{Dom}(f)$. Para reconocer cuál es esta superficie, podemos elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad, $z^2 = 16 - x^2 - y^2$, teniendo en cuenta que $z \geq 0$, luego

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z \geq 0$$

Identificamos entonces que la gráfica de la función $f(x, y)$ es una cuádrica: la mitad superior de la superficie de la esfera con centro en el origen y radio 4, como se muestra en la Figura ??(b). Observe que sólo hay gráfica por encima del círculo de la Figura ??(a).

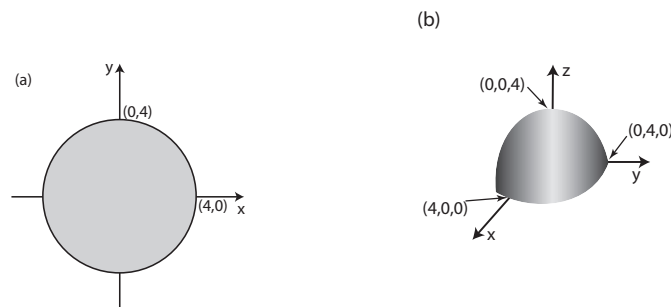


Figura 2: Ejemplo 3. (a) Dominio de $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. (b) Superficie gráfica de f .

En relación al Ejemplo 3, ¿cuál es la función de dos variables cuya gráfica es la mitad inferior de la superficie esférica? La superficie completa de una esfera, ¿puede ser la gráfica de una función de dos variables? ¿Por qué? Reflexione y explique cuáles de las superficies cuádricas vistas en la Guía 1 pueden ser la gráfica de una función de dos variables; dé un criterio gráfico general para que una superficie en el espacio sea gráfica de función de dos variables (recuerde el “criterio de la recta vertical” de Análisis 1).

EJEMPLO 4: Trazar la gráfica de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$.

Se tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$. La gráfica de f es la superficie $z = f(x, y)$, o sea $z = x^2 + 16y^2$. Para poder esbozar la superficie gráfica consideramos sus trazas horizontales y verticales. Las trazas horizontales se obtiene al hacer $z = k$ en la ecuación de la superficie, tomando distintos $k \in \text{Im}(f)$ (¿por qué este rango para k ?):

$$z = x^2 + 16y^2, \quad z = k \quad \Rightarrow \quad x^2 + 16y^2 = k, \quad z = k$$

Luego, i) si $k = 0$ da solamente el punto $(0, 0)$ del dominio, ii) si $k > 0$ da una elipse de semiejes \sqrt{k} y $\frac{\sqrt{k}}{4}$ en el plano $z = k$.

Las trazas verticales $x = a$ (tomando distintos $a \in \mathbb{R}$) se obtienen reemplazando x por a en la ecuación de la superficie: para cada a , las ecuaciones $z = 16y^2 + a^2, x = a$ representan una parábola en el plano $x = a$. De manera similar las trazas verticales $y = b$ dan: para cada b , la parábola $z = x^2 + 16b^2$ en el plano $y = b$. A partir de esta información podemos reconocer que la superficie gráfica de f es un paraboloide elíptico de eje z .

EJEMPLO 5: a) Trazar la gráfica de $f(x, y) = y^2$. b) Estudiar la gráfica de $f(x, y) = \sin x$ para $x \in [0, 4\pi]$, $y \in [0, 5]$.

a) Observamos que esta función está bien definida para cualquier valor real que adopten las variables independientes (cualquier y , de hecho), por lo que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$. Vemos también que f toma sólo valores mayores o iguales a 0, por lo que $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$.

La gráfica de f tiene ecuación $z = y^2$ que, como sabemos, corresponde a un cilindro parabólico de ejes. Para ayudarnos a dibujar notamos que la traza vertical $x = a$ determina una parábola $z = y^2$

en el plano $x = a$, como se puede ver en la Figura ?? . ¿Cómo son las trazas verticales $y = b$? ¿Y las horizontales $z = k$?

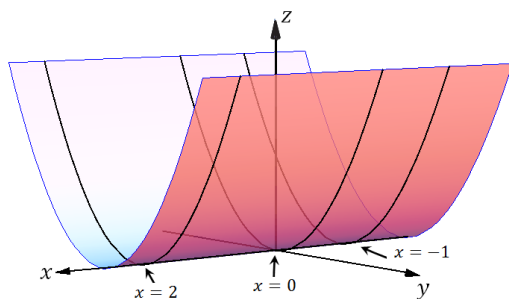


Figura 3: Ejemplo 5. La gráfica de $f(x, y) = y^2$ es la superficie dada por el cilindro parabólico $z = y^2$.

b) El dominio natural de $f(x, y) = \sin x$ es todo \mathbb{R}^2 pero aquí el dominio está expresamente acotado; entonces $\text{Dom}(f) = [0, 4\pi] \times [0, 5]$. Justifique que $\text{Im}(f) = [-1, 1]$.

La gráfica de esta función es la superficie de ecuación $z = \sin x$ que es un tipo de superficie de las denominadas cilíndricas. Dibuje esta superficie, ayudándose en la forma de las trazas verticales $y = \text{constante}$. Tiene la forma de una chapa acanalada, de dimensiones 4π por 5 de base. Ejemplifique con un trozo de cartón corrugado.

B) Curvas de nivel: representación en el dominio de la función

Una manera alternativa de visualizar una función (no constante) de dos variables $f(x, y)$ puede ser indicar en distintos puntos del dominio cuánto vale la función. Podemos entonces identificar los puntos (x, y) que den un mismo valor de f y unir esos puntos lo que da, en general, una curva dentro del dominio de f en \mathbb{R}^2 . Repitiendo el procedimiento para otros valores de f , por separado, se obtiene un conjunto de curvas en el mismo plano en el que está definida la función, donde cada una de las curvas se forma uniendo puntos del dominio donde la función toma el mismo valor (“tiene el mismo nivel”).

DEFINICIÓN:

Se llama *curva de nivel* k de una función f de dos variables al conjunto de todos los puntos del dominio de la función con coordenadas (x, y) tales que $f(x, y) = k$, donde k es una constante que pertenece a la imagen de f . Llamando C_k a la curva de nivel k , entonces

$$C_k = \{(x, y) : (x, y) \in \text{Dom}(f), f(x, y) = k\}$$

para cada $k \in \text{Im}(f)$.

La manera de representar a la función es mediante su *mapa de niveles* o *mapa de contornos*, que se obtiene dibujando unas cuantas curvas de nivel, para distintos valores de k . Es común tomar valores de k equiespaciados.

Por construcción, para los pares del dominio que forman una dada curva de nivel, la función f toma el mismo valor. Luego, la curva de nivel k muestra todos los pares del dominio donde la gráfica de f tiene nivel o “altura” k . A partir de las curvas de nivel rotuladas con su nivel o altura de función, se puede inferir la gráfica de la función, elevando mentalmente cada curva de nivel hasta la altura apropiada. Si se hiciera este procedimiento para todas las curvas de nivel C_k con $k \in \text{Im}(f)$, juntas conformarían la gráfica de f .

EJEMPLO 6: Trazar varias curvas de nivel para las funciones de los siguientes ejemplos: a) Ejemplo 2, b) Ejemplo 3, c) Ejemplo 5. En cada caso, a partir de las curvas de nivel, extraer conclusiones sobre las gráficas (ya conocidas) de las correspondientes funciones.

a) $f(x, y) = x - y + 2$:

Vimos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$, luego el mapa de contornos cubre todo el plano xy ; y vimos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, por lo tanto consideramos las curvas de nivel correspondientes a cualquier número real k .

La curva de nivel k , que se obtiene haciendo $f(x, y) = k$, en este caso queda

$$C_k : \quad x - y + 2 = k$$

o sea $y = x + 2 - k$, que es una recta (en \mathbb{R}^2) de pendiente 1 y ordenada al origen $2 - k$. Se muestran en la Figura ??(a) algunas curvas de nivel para distintos valores de k ; notamos que cuando k aumenta en una unidad (lo que significa que la función aumenta en uno, o sea que la altura de su gráfica aumenta una unidad), la curva de nivel (que es una línea recta) está desplazada hacia abajo en una unidad. Las curvas de nivel para distintos valores de k equiespaciados dan rectas paralelas entre sí, igualmente espaciadas. Por lo tanto, deducimos que la superficie gráfica tendrá siempre la misma pendiente. Esto confirma que se trata de un plano (como ya sabíamos del Ejemplo 2; ver Figura ??).

b) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$:

Su dominio es $\text{Dom}(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$, y vimos que $\text{Im}(f) = [0, 4]$, luego k debe ser un número real entre 0 y 4; podemos considerar, por ejemplo, las curvas de nivel 0, 1, 2, 3, 4.

Para obtener la curva de nivel k hacemos $\sqrt{16 - x^2 - y^2} = k$. Elevando al cuadrado y despejando queda $C_k : x^2 + y^2 = 16 - k^2$, que reconocemos como la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{16 - k^2}$ (aquí notamos que el radio queda bien definido ya que, como sabemos, $k \in [0, 4]$).

Si tomamos $k = 0$, la curva de nivel es la circunferencia de radio 4; para $k = 1$, será la circunferencia de radio $\sqrt{15}$, etc. Vemos en la Figura ??(b) que el mapa de contornos consiste en una sucesión de circunferencias concéntricas, centradas en $(0, 0)$ y de radio decreciente a medida que k aumenta: las circunferencias van desde $C_0 : x^2 + y^2 = 16$ para $k = 0$ achicándose hasta “degenerar en un punto”, el origen, ya que para $k = 4$ la curva $C_4 : x^2 + y^2 = 0$ corresponde al punto $(0, 0)$.

Observamos también que el mapa de contornos en este ejemplo (a diferencia del ejemplo anterior) ocupa solamente el círculo de radio 4 lo que se corresponde, por supuesto, con el dominio de la función. Conociendo las curvas de nivel $C_k : f(x, y) = k$ para varios k podemos imaginarnos la gráfica $S : z = f(x, y)$ si “subimos” cada curva hasta la altura $z = k$ que le corresponde. Así notamos que, partiendo de $k = 0$ (el plano xy) la gráfica será más “empinada” al principio y se hará más plana a medida que avanzamos en altura, lo que concuerda con la gráfica de la superficie esférica (ver Figura ??(b)).

c) $f(x, y) = y^2$:

Su dominio es \mathbb{R}^2 y su imagen son los números reales mayores o iguales a 0. Luego consideramos $k \geq 0$.

La curva de nivel k está dada por $C_k : y^2 = k$ en \mathbb{R}^2 , lo que implica $|y| = \sqrt{k}$, esto es $y = \pm\sqrt{k}$.

Observamos en la Figura ??(c) que las curvas de nivel son para cada k un par de rectas paralelas al eje x ; para valores pequeños del nivel k están separadas y se van juntando a medida que k crece. Esto significa por un lado que la gráfica tiene siempre la misma altura a lo largo de rectas paralelas al eje x y, por otro lado, que la superficie es cada vez más empinada a medida que crece en altura. Estas consideraciones son coherentes con la gráfica del cilindro parabólico en \mathbb{R}^3 (Figura 3).

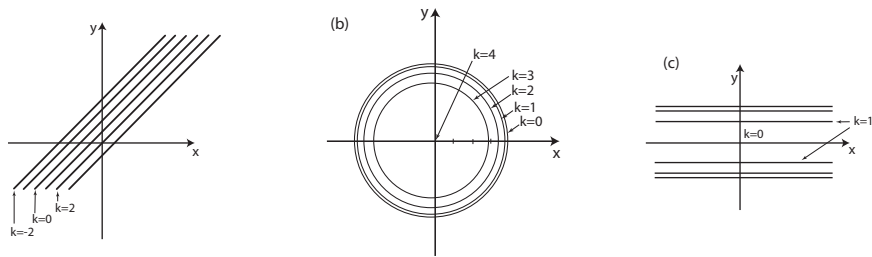


Figura 4: Ej. 6. Curvas de nivel para: (a) $f(x, y) = x - y + 2$; (b) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; (c) $f(x, y) = y^2$.

C) Conexión entre gráfica y mapa de nivel

Tracemos las curvas de nivel 0, 16 y 64 de la función $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ del Ejemplo 4, cuya gráfica vimos que es un paraboloide elíptico.

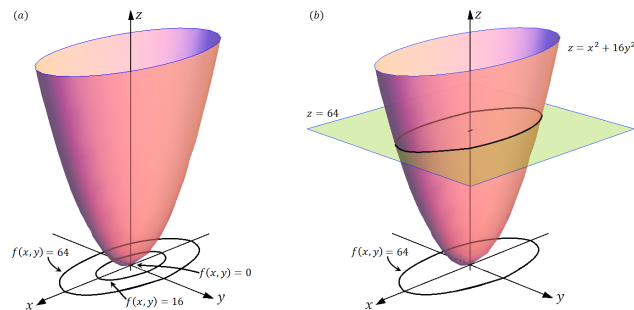


Figura 5: Dos representaciones equivalentes de la función $f(x, y) = x^2 + 16y^2$: mediante curvas de nivel planas (para $k = 0, 16, 64$) y mediante la gráfica espacial (un paraboloide elíptico).

La curva de nivel 0 está formada por los puntos del plano xy donde

$$f(x, y) = x^2 + 16y^2 = 0 \quad \text{o sea} \quad (x, y) = (0, 0)$$

es decir que $C_0 = \{(0, 0)\}$. De manera similar la curva de nivel 16 es el conjunto de puntos del plano xy donde

$$f(x, y) = x^2 + 16y^2 = 16 \quad \text{o sea} \quad \frac{x^2}{4^2} + y^2 = 1$$

es decir que $C_{16} = \{(x, y) : \frac{x^2}{4^2} + y^2 = 1\}$. La representación gráfica de C_{16} en el plano xy es la elipse con semiejes 4 y 1. Los puntos que pertenecen a la curva de nivel 64, cumplen

$$f(x, y) = x^2 + 16y^2 = 64 \quad \text{o sea} \quad \frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

es decir que $C_{64} = \{(x, y) : \frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1\}$. La representación gráfica de C_{64} en el plano xy es la elipse con semiejes 8 y 2. Las curvas de nivel 0, 16 y 64 están mostradas en la Figura ??(a).

Veamos ahora cuál es la relación entre las curvas de nivel de f y las trazas horizontales de su gráfica. La Figura ??(b) muestra la traza horizontal $z = 64$ de la gráfica de f en la superficie $S : z = x^2 + 16y^2$. Notamos que esta traza está directamente arriba de la elipse $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, que es la curva de nivel 64 de f , en el dominio de la función. Dicho de otra forma, la curva de nivel $f(x, y) = 64$ es la traza de la superficie gráfica para $z = 64$ proyectada sobre el plano xy .

El ejemplo que acabamos de analizar ilustra un resultado que es general:

La curva de nivel C_k de una función $f(x, y)$ es precisamente la proyección en el plano xy de la traza horizontal $z = k$ de la superficie que es gráfica de f , como se ilustra en la Figura ??.

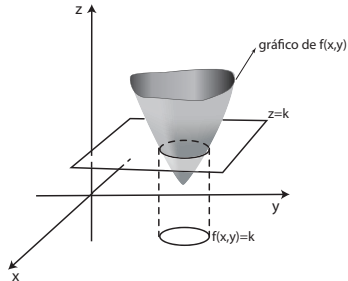


Figura 6: Relación entre la curva de nivel k y la traza horizontal $z = k$ de la gráfica de f

O sea que, si se dibujan curvas de nivel de una función y se visualizan como si se elevaran hasta el nivel que indica k , es posible trazar mentalmente una gráfica aproximada. Por ejemplo: la superficie será empinada donde las curvas de nivel se aproximan mucho y será más plana donde están más separadas.

¿Qué ejemplos conocemos de curvas de nivel?

En los mapas topográficos, por ejemplo, se trazan curvas de nivel de regiones montañosas. En este caso las curvas de nivel unen puntos de la región que tienen la misma altura respecto del nivel del mar.

Otro ejemplo son las *isotermas* correspondientes a una región. Si pensamos en un mapa meteorológico que indique por ejemplo las temperaturas promedio del mes de enero, las isotermas son curvas imaginarias en un planisferio que van conectando los lugares del mundo que tienen la misma temperatura promedio en ese mes. Del mismo modo, las *isobaras* conectan sitios de igual presión. ¿Qué otros ejemplos conoce?

Resaltamos el siguiente resultado: si evaluamos la función $f(x, y)$ en los puntos de una curva de nivel, la función toma un mismo valor, el valor del nivel correspondiente. Como vimos en la Guía 1, podemos describir la curva $C_k : f(x, y) = k, (x, y) \in \text{Dom}(f)$, por medio de una función vectorial de un parámetro como $\vec{r}_k(t) = (x_k(t), y_k(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$. Entonces

$$f(x_k(t), y_k(t)) = k \quad \Leftrightarrow \quad C_k : \vec{r}_k(t) = (x_k(t), y_k(t))$$

donde C_k indica la curva de nivel k de f .

Por ejemplo, la evaluación de $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ en los puntos de la curva $C : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ da $f(x(t), y(t)) = \sqrt{16 - \cos^2 t - \sin^2 t} = \sqrt{15} = \text{constante}$. Luego la curva dada C es la curva de nivel $k = \sqrt{15}$ de f .

Por último, podemos preguntarnos cuánto vale una función si la evaluamos en los puntos de una curva *arbitraria* contenida en el dominio de la función, aunque no sea necesariamente una curva de nivel:

Si $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in I$ es una parametrización de una dada curva $C \subset \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$, los valores que toma $f(x, y)$ para puntos de la curva C se obtienen como $f(x(t), y(t))$ o, usando notación vectorial, $f(\vec{r}(t))$. Volveremos más adelante sobre este tema.

Por ejemplo, la evaluación de $f(x, y) = y^2$ en el segmento que va de $A(1, -1)$ a $B(1, 1)$, parametrizado por $\vec{r}(t) = (1, t)$ con $t \in [-1, 1]$, da $f(\vec{r}(t)) = f(x = 1, y = t) = t^2$. ¿Cuánto da la evaluación de f en los demás bordes del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$? (Observe las Figuras 3 y 4(c)).

1.3. Funciones escalares de 3 variables

DEFINICIÓN:

Una *función real f de tres variables* es una regla que asigna a cada terna ordenada de números reales (x, y, z) , un único número real $f(x, y, z)$.

El *dominio* de f , $\text{Dom}(f)$, es el subconjunto de \mathbb{R}^3 en el cual está definida la función; es decir que el dominio de una función de tres variables se representa como una región sólida del espacio. El *dominio natural* de una función f de tres variables es el conjunto de todos los puntos del espacio para los cuales $f(x, y, z)$ es un número real bien definido.

La *imagen* de f , $\text{Im}(f)$, es el subconjunto de \mathbb{R} formado por los valores que toma la función f . Escribimos:

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Para $(x, y, z) \in \text{Dom}(f)$ se puede escribir $w = f(x, y, z)$, donde queda explícitamente definido que w es el valor que toma f para la terna ordenada (x, y, z) . Las variables x, y, z son llamadas *variables independientes*, y w es la *variable dependiente*.

¿Cómo se expresan la función nula, una función constante y una función lineal de tres variables? Dé otros ejemplos y analice dominio e imagen.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

El concepto de gráfica para una función de tres variables no es útil, pues como vivimos en un mundo tridimensional nos resulta difícil imaginar conjuntos en \mathbb{R}^4 . Como alternativa, apelamos a una representación espacial que lleva a introducir la idea de *superficie de nivel* para una función de tres variables, extendiendo el concepto de curva de nivel visto para funciones de dos variables.

Superficies de nivel: representación en el dominio de la función

DEFINICIÓN:

Se llama *superficie de nivel k* de una función f de tres variables al conjunto de todos los puntos del dominio de la función con coordenadas (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante que pertenece a la imagen de f . Llamando S_k a la superficie de nivel k , entonces

$$S_k = \{(x, y, z) : (x, y, z) \in \text{Dom}(f), f(x, y, z) = k\}$$

para cada $k \in \text{Im}(f)$.

O sea que el valor de la función f en cualquier punto de una superficie de nivel S_k , es igual a k .

Supongamos que $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, cuyo dominio es todo \mathbb{R}^3 . Una superficie de nivel es un subconjunto de \mathbb{R}^3 en donde f es constante. Por ejemplo, la superficie de nivel 1 para f es el conjunto donde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. A éste sí lo podemos visualizar: es la superficie esférica con centro en el origen y radio 1 en \mathbb{R}^3 . Entender las superficies de nivel ayuda a entender, en parte, la función en cuestión.

EJEMPLO 7: Describir las superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Dado que $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$, consideramos superficies de nivel con $k \geq 0$. Para ello hacemos $f(x, y, z) = k$; reemplazando la función queda $S_k : x^2 + y^2 + z^2 = k$, que reconocemos fácilmente: i) si $k = 0$ como el punto $(0, 0, 0)$, ó ii) si $k > 0$ como la ecuación de la superficie esférica con centro en el origen de coordenadas y radio \sqrt{k} . Por lo tanto la superficie de nivel $k > 0$ es una superficie esférica (de radio \sqrt{k}) en donde f vale k . ¿Ahora puede hacerse una idea de la gráfica de f ?

Un par de consideraciones finales de esta sección, que nos serán útiles más adelante:

Podemos preguntarnos cuánto vale una función si la evaluamos en los puntos de una curva arbitraria contenida en el dominio de la función (por ejemplo, se quiere evaluar el potencial eléctrico V que sufre una carga cuando se mueve a lo largo de cierta trayectoria en el espacio):

Si $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $t \in I$, es una parametrización de una dada curva $C \subset \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^3$, los valores que toma $f(x, y, z)$ para puntos de la curva C se obtienen como $f(x(t), y(t), z(t))$ o, usando notación vectorial, $f(\vec{r}(t))$.

De igual modo, podemos interesarnos en los valores que toma una función de tres variables en los puntos de una superficie *arbitraria* contenida en el dominio de la función, aunque no sea necesariamente una superficie de nivel de la función (donde f daría constante e igual al valor del nivel). Dejamos esto pendiente para más adelante, después de que veamos cómo parametrizar superficies en el espacio.

Mencionamos, por último, que en algunas aplicaciones será conveniente identificar una superficie que es gráfica de una función de dos variables, con una superficie de nivel de una función de tres variables. Esto se logra por ejemplo de la siguiente manera:

Dada $f(x, y)$, su gráfica es la superficie de ecuación $S : z = f(x, y)$. Podemos definir una nueva función

$$F(x, y, z) = z - f(x, y)$$

donde ahora z entra como variable independiente de F . La *superficie de nivel cero* de F satisface la ecuación $S_0 : F(x, y, z) = 0$, que coincide con la ecuación de S (observar que si queremos estudiar f y su gráfica S , no nos interesan otras superficies de nivel de F más que la de nivel $k = 0$).

Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ es el paraboloide elíptico $S : z = x^2 + 16y^2$, que coincide con la superficie de nivel 0 de la función $F(x, y, z) = z - x^2 - 16y^2$, ya que $S_0 : z - x^2 - 16y^2 = 0$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1:

1. Para cada una de las siguientes funciones, estudie su gráfica. Intente dibujarla y también “fabricarla” con ayuda de papel grueso, cartón u objeto con la forma apropiada.

a) $f(x, y) = x$

b) $f(x, y) = |x|$

- c) $f(x, y) = 1 - x^2$
- d) $f(x, y) = \sin y$
- e) $f(x, y) = \frac{1}{y^2}$

¿Qué puede concluir respecto de la gráfica de una función $f(x, y)$ que depende explícitamente de una sola de sus variables: $f(x, y) = X(x)$ ó $f(x, y) = Y(y)$?

2. a) Considere una función f cuya gráfica es “medio” cono de eje z , y una función g cuya gráfica es un paraboloide circular también de eje z ; ambas superficies tienen vértice en el origen y abren hacia arriba. Elija varios niveles (o alturas en la gráfica) y proyecte en el plano xy para formar curvas de nivel para f y para g . Compare (recuerde el ejercicio 4 de la Sección 7 de la Guía 1).
b) Revea el Ej. 2 de la autoevaluación de Guía 1, e interprete en términos de funciones de 2 variables.
3. Determine dominio e imagen de las siguientes funciones, y describa la forma de las curvas de nivel:
 - a) $f(x, y) = x - y$
 - b) $g(x, y) = 4x^2 + 9y^2$
 - c) $h(x, y) = \ln(x + y - 1)$
 - d) $f(x, y) = x^2 - y^2$
 - e) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$
 - f) $g(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$
4. Una placa metálica delgada está ubicada en el plano xy , ocupando una región plana D . La temperatura en el punto de la placa con posición (x, y) es $T(x, y)$. Las curvas de nivel de la función T son *isotermas*, pues en todos los puntos de una isoterma la temperatura es la misma. Trace algunas isotermas si la función que indica la temperatura (en grados Celsius) está dada por $T(x, y) = \frac{100}{1+x^2+2y^2}$, $(x, y) \in D$. ¿Dónde está más caliente la placa?
5. Si $V(x, y)$ es el potencial eléctrico en un punto (x, y) del plano xy , entonces las curvas de nivel de la función V se llaman *curvas equipotenciales*, pues en todos los puntos de una curva equipotencial el potencial eléctrico es el mismo. Trace algunas curvas equipotenciales si $V(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, donde a es una constante positiva, fija.
6. Consulten en el sitio web del Servicio Meteorológico Nacional cuáles son los mapas de contorno que se publican. Elijan uno y hagan un análisis del mismo en términos de una función de dos variables.
7. Describa, utilizando coordenadas polares, las curvas de nivel de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

8. Determine dominio e imagen, y describa las superficies de nivel de las siguientes funciones:
 - a) $f(x, y, z) = x^2 \ln(x - y + z)$
 - b) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
 - c) $g(x, y, z) = x^2 - y^2$
9. ¿Cómo debe ser la expresión de una función de tres variables, para que sus superficies de nivel sean elipsoides concéntricos en \mathbb{R}^3 , centrados en $(0, 0, 0)$, de tal forma que el tamaño de los elipsoides:
 - a) aumenta con el nivel; b) disminuye con el nivel?

2. Límite y continuidad

El concepto de límite es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones; nos permite estudiar derivadas y por lo tanto máximos y mínimos, asíntotas, etc. Nos dedicaremos en esta sección al estudio del límite de funciones de varias variables.

Pensemos primero en una función $F(x)$ de una variable, $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y recordemos lo visto en el curso de Análisis I. ¿Qué quiere decir que el límite de F cuando x tiende (se acerca) a x_0 es igual a L ? Intuitivamente esto significa que a medida que x se acerca más y más al número x_0 , los valores que va tomando F se acercan más y más al valor L . Formalmente se expresa así:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = L$$

si para cada número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que si $x \in \text{Dom}(F)$, entonces

$$0 < |x - x_0| \leq \delta \quad \text{implica} \quad |F(x) - L| < \epsilon.$$

Ahora bien, nos preguntamos ¿cómo se acerca x al número x_0 ? Al ser F una función de una variable (el dominio está incluido en la recta real, es unidimensional), sólo hay dos direcciones o caminos posibles para llegar al número x_0 : desde la izquierda o desde la derecha de x_0 . Si el límite por la izquierda, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x)$, es distinto del límite por la derecha, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x)$, entonces el límite de la función cuando x se acerca a x_0 no existe; mientras que si ambos límites laterales existen y coinciden, entonces la función tiene ese límite.

Para funciones de varias variables, aunque el concepto de límite es similar al visto para una variable, el cálculo es un poco más elaborado.

2.1. Límite de una función de dos variables

Pensemos ahora en una función real $f(x, y)$ de dos variables, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que la función de dos variables $f(x, y)$ tiene límite L (número real fijo) cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) , si para todos los puntos de coordenadas (x, y) suficientemente cercanos al punto (x_0, y_0) , los valores $f(x, y)$ son arbitrariamente próximos al número L . Notamos que la definición es similar a la del límite funcional para una variable. Sin embargo, si tenemos en cuenta que f es una función de dos variables (definida sobre un dominio bidimensional), entonces el punto (x, y) podrá acercarse al punto (x_0, y_0) desde muchas direcciones. De hecho, hay infinitas maneras de acercarse a un punto en el plano. La dirección del acercamiento es muy importante, como veremos a continuación.

DEFINICIÓN:

Se dice que una función $f(x, y)$ tiene *límite* L cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) , que se escribe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L,$$

si para cada número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que si $(x, y) \in \text{Dom}(f)$, entonces

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \delta \quad \text{implica} \quad |f(x, y) - L| < \epsilon.$$

La diferencia $|f(x, y) - L|$ es la distancia entre los números $f(x, y)$ y L ; mientras que $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ es la distancia entre el punto (x, y) en el dominio de la función y el punto (x_0, y_0) . La definición de límite dice, entonces, que la distancia entre $f(x, y)$ y L es arbitrariamente pequeña siempre que la distancia entre (x, y) y (x_0, y_0) sea suficientemente pequeña (aunque no nula). El punto (x_0, y_0) puede no pertenecer al $\text{Dom}(f)$; el único requisito es que los (x, y) varíen en el $\text{Dom}(f)$. [Recordar, por ejemplo, que la función $F(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ no contiene a $x_0 = 0$ en su dominio pero sin embargo F tiene límite cuando $x \rightarrow 0$; ¿cuánto vale este límite...?]

Como vemos, la definición se refiere sólo a la distancia entre (x, y) y (x_0, y_0) , y no dice nada sobre la dirección de acercamiento. Por lo tanto, si existe el límite, $f(x, y)$ debe acercarse al mismo número L independientemente de cómo (x, y) se acerque a (x_0, y_0) . Obviamente, resulta imposible analizar todos los caminos que llegan a (x_0, y_0) para ver a qué valor tiende f por cada uno de ellos. Tendríamos que construir todas las curvas que pasan por (x_0, y_0) y evaluar f en los puntos de esas curvas.

Ahora bien, si se intenta ver a qué valor tiende f , siguiendo dos o tres caminos que lleven a (x_0, y_0) , y resulta que los valores obtenidos son distintos, se tiene un criterio sencillo para determinar que el límite NO existe.

¿Pero si se prueba por varios caminos y se obtiene el mismo valor? ¿Significa que ese valor es el límite? La respuesta es no: no alcanza con que por algunos caminos dé lo mismo. Y aquí encontramos una complicación porque, como dijimos, no se puede analizar lo que ocurre con f por todos los caminos posibles. Sin embargo, después de obtener el mismo valor L a lo largo de varias trayectorias, se podría *suponer* que el límite existe y que toma el valor L . En este caso, para asegurar que efectivamente $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ es igual a L , se debe satisfacer la definición dada previamente. A menudo esta condición resulta difícil de comprobar, pero se pueden usar herramientas alternativas que permitan asegurar si el límite existe y que en tal caso vale L . Veremos a continuación algunas propiedades y criterios.

2.2. Propiedades de los límites de funciones de dos variables

Las reglas de límites para funciones de una variable se extienden a funciones de dos variables. Se tiene el siguiente *criterio del "sandwich"*:

Si existen funciones $g(x, y)$ y $h(x, y)$ tales que

$$g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$$

para todo $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en un disco con centro en (x_0, y_0) , y si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y) = L,$$

entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

EJEMPLO 8: Calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Considerando que $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$ para todo $x \neq 0$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left| y \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |y| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |y|$$

Por lo tanto

$$-|y| \leq y \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |y|$$

Si definimos $g(x, y) = -|y|$ y $h(x, y) = |y|$ tenemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0$, por lo tanto aplicando el criterio dado resulta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante, y f y g funciones reales de dos variables tales que existen los siguientes límites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = M$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f(x, y) + g(x, y)] = L + M$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [cf(x, y)] = cL$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f(x, y) g(x, y)] = L M$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \left[\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right] = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$

Además, si $M = 0$ y $L \neq 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \left[\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right]$ no existe.

Aplicando estas propiedades a funciones polinomiales y racionales, obtenemos el útil resultado de que el límite cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, puede calcularse evaluando directamente la función en (x_0, y_0) . El único requisito a tener en cuenta es que las funciones racionales estén definidas en (x_0, y_0) , esto es, que (x_0, y_0) pertenezca al dominio de la función racional.

EJEMPLO 9: a) Calcular, si existe, el límite de $\frac{5x^2y}{x^2+y^2}$ cuando $(x, y) \rightarrow (2, -1)$. b) Encontrar el límite de $\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ y cuando $(x, y) \rightarrow (1, 1)$.

a) Se trata de una función racional que está bien definida en $(2, -1)$. Por lo tanto podemos calcular el límite aplicando la regla del cociente, y por evaluación directa de los polinomios del numerador y denominador:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \frac{5 \cdot 2^2(-1)}{2^2 + (-1)^2} = -4$$

b) Como el denominador $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ tiende a 0 cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (yendo por caminos en el primer cuadrante), no podemos usar la regla del cociente. El numerador también se anula. Veamos cómo levantar esta indeterminación. Si multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ (que, fuera del origen, es distinto de cero), produciremos una fracción equivalente cuyo límite sí sabemos calcular:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Notar que el dominio de $\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ es el conjunto $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \text{ con } x \neq y\}$, por lo cual el factor $x - y$ es distinto de cero, luego pudimos simplificarlo. Notar, por otro lado, que el dominio de $x(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ es el conjunto $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. Ambas funciones coinciden, salvo sobre la recta $y = x$, donde la primera no está definida. Lo “interesante” de la noción de límite es precisamente que “en el límite” se aproximan al mismo valor real.

Resolver el caso $(x, y) \rightarrow (1, 1)$.

EJEMPLO 10: Determinar, si existe, el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ para cada una de las siguientes funciones: a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, b) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, c) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

Notamos que en los tres casos tanto el polinomio del numerador como el del denominador tienden a 0 al acercarse al origen. Veamos qué pasa con la función racional en el límite.

a) Analizaremos qué pasa cuando nos acercamos a $(0, 0)$ por diferentes caminos. Por ejemplo, si nos acercamos al origen por el eje x , o sea pasando por puntos con $y = 0$, la función toma el valor $f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ (x no es cero). Si nos aproximamos por el eje y , o sea con $x = 0$, se tiene $f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ (y no es cero). Por lo tanto, encontramos dos trayectorias que llegan al origen, pero tales que a lo largo de cada una de ellas f toma valores diferentes (1 ó -1). Esto es justificación suficiente para afirmar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no existe.

b) Observamos que a lo largo de la recta $x = 0$ (el eje y), la función queda $f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0$ siempre que $y \neq 0$. De manera similar, a lo largo de la recta $y = 0$ (el eje x), la función queda $f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0$ siempre que $x \neq 0$. Pero si consideramos llegar al origen a lo largo de, por ejemplo, una recta de pendiente m arbitraria, $y = mx$, resulta que

$$f(x, mx) = \frac{x \cdot mx}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m x^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m}{1 + m^2},$$

siempre que $x \neq 0$ (y por lo tanto se tiene $y = mx \neq 0$). O sea que, a lo largo de la recta $y = mx$, con una dada pendiente, la función tiene el valor fijo $\frac{m}{1+m^2}$. Pero para otra recta con distinta pendiente dará otro valor, ya que $f(x, mx)$ depende de m . Entonces, distintos caminos dan distinto valor. Por lo tanto $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ no existe.

c) Analicemos qué pasa con f a lo largo de una línea recta que pasa por el origen, de la forma $y = mx$. Vemos que

$$f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2},$$

si $x \neq 0$. Esta expresión tiende a 0 cuando $x \rightarrow 0$, para cualquier m (inclusive para $m = 0$ o m infinitamente grande, que corresponden a los casos de acercamiento por los ejes x e y , respectivamente). Probemos con otro tipo de camino, no recto, por ejemplo $y = \sqrt{x}$ siendo $x > 0$. Luego

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2},$$

si $y \neq 0$.

Entonces, por rectas la función tiende a 0, pero por otra curva (media parábola horizontal) vale $\frac{1}{2}$. Este tipo de comportamiento no es fácil de imaginar gráficamente, pero ocurre en dos dimensiones.

Por lo tanto $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ no existe.

EJEMPLO 11: Calcular, si existe, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$.

Fuera del origen, la función puede simplificarse como $3 + \frac{5xy^2}{x^2 + y^2}$. Observamos que a lo largo de la recta $x = 0$, la función siempre tiene el valor 3 cuando $y \neq 0$. De manera similar, a lo largo de la recta $y = 0$ la función siempre tiene el valor 3 cuando $x \neq 0$. Así, si el límite existe cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, el valor de ese límite debería ser 3. Para comprobarlo, podemos aplicar una de estas técnicas: i) la definición de límite, o ii) el criterio visto antes.

i) Sea $\epsilon > 0$, queremos encontrar un valor $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si } 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} - 3 \right| < \epsilon$$

Tenemos

$$\left| \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} - 3 \right| = \left| \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{5|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 5|x| = 5\sqrt{x^2} \leq 5\sqrt{x^2 + y^2} < 5\delta$$

donde se utilizó que $y^2 \leq x^2 + y^2$, y que $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. Entonces si elegimos $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ resulta

$$\left| \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} - 3 \right| < 5\delta = \epsilon$$

Esto significa que la diferencia entre la función y el valor 3 se puede hacer arbitrariamente pequeña, dentro de un pequeño disco alrededor de $(0, 0)$. O sea que, mediante la definición, demostramos que efectivamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} = 3$$

tal como sospechamos a partir de dos caminos donde daba el mismo resultado.

ii) Para aplicar el criterio del “sandwich”, buscamos acotar $f(x, y) = \frac{3x^2+5xy^2+3y^2}{x^2+y^2} = 3 + \frac{5xy^2}{x^2+y^2}$, para $(x, y) \neq (0, 0)$. Como $y^2 \leq x^2 + y^2$, se tiene que $0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$, y entonces

$$\left| \frac{5xy^2}{x^2+y^2} \right| = 5|x| \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 5|x|$$

de donde

$$-5|x| \leq \frac{5xy^2}{x^2+y^2} \leq 5|x|$$

Luego

$$3 - 5|x| \leq \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \leq 3 + 5|x|$$

Dado que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (3 \pm 5|x|) = 3$, comprobamos que efectivamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} = 3$$

tal como sospechamos a partir de dos caminos donde daba el mismo resultado.

Resumimos las distintas técnicas usadas para saber si una función $f(x, y)$ tiene límite al acercarse a un punto (x_0, y_0) , y en tal caso hallarlo:

- Por evaluación directa, para una función polinomial o racional (y, en general, para cualquier función continua como veremos a continuación): si $(x_0, y_0) \in \text{Dom}(f)$, entonces f tiene límite $L = f(x_0, y_0)$ [Ejemplo 9.a)].
- Simplificando la expresión de f , de modo que se pueda evaluar directamente la expresión simplificada en (x_0, y_0) [Ejemplo 9.b)].
- Por comparación, acotando inferior y superiormente la función en un entorno de (x_0, y_0) , si la función menor y la mayor tienen ambas límite L , entonces f tiene límite L [Ejemplo 8].
- Planteando el acercamiento a (x_0, y_0) por distintas curvas en el dominio de f que conducen a dicho punto. Dependiendo de los resultados que se obtienen:
 - si por dos caminos distintos da dos valores diferentes, entonces se puede asegurar que f *no tiene límite* [Ejemplo 10].
 - si por los caminos propuestos da el mismo valor L , se puede “sospechar” que ese podría ser el límite; en este caso se debe *justificar* que el límite es L usando, por ejemplo, la definición de límite [Ejemplo 11].

2.3. Continuidad de funciones de dos variables

Sabemos del curso de Análisis I que el concepto de función continua está asociado a la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una curva “sin romper”, esto es, una curva sin saltos, el tipo de curva que generaría una partícula en movimiento o al mover la punta de un lápiz sin separarla del papel.

Esta noción de continuidad se generaliza a funciones de más variables. Así, para funciones de dos variables el concepto de continuidad está basado en la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una superficie sin huecos ni rupturas.

DEFINICIÓN:

Una **función real de dos variables** $f(x, y)$ es **continua** en (x_0, y_0) si:

1. existe $f(x_0, y_0)$
2. existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$
3. se verifica que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Decimos que f es continua en una región plana D si es continua en todo punto $(x_0, y_0) \in D$.

La continuidad de una función f en un punto (x, y) significa, intuitivamente, que si se “cambia” el punto (sus coordenadas) en una pequeña cantidad, entonces el valor de $f(x, y)$ “cambia” en una pequeña cantidad.

Usando las propiedades de los límites se puede mostrar que las sumas, productos y cocientes, así como la composición, de funciones continuas son continuas en sus dominios. Por ejemplo, una función polinomial de dos variables es continua en todo \mathbb{R}^2 ; la exponencial, seno o coseno de cualquier polinomio en x e y también son funciones continuas en \mathbb{R}^2 ; $\ln(x^2 + y^2)$ es continua en todo el plano salvo el origen (donde: 1. no está definida, y 2. no tiene límite finito).

EJEMPLO 12: Estudiar la continuidad de las funciones: a) $f(x, y) = \frac{5xy^2}{x^2+y^2}$; b) $g(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

a) $\text{Dom}(f) = \{(x, y) : (x, y) \neq (0, 0)\}$ y observamos que f es continua en todos los puntos de su dominio, puesto que es una función racional.

Nos preguntamos si podemos extender esta función de manera tal de lograr una (nueva) función $F(x, y)$ que coincida con $f(x, y)$ siempre salvo en el origen, pero que además incluya al $(0, 0)$ en su dominio y sea continua en dicho punto. Para ello lo que hace falta es dar un valor apropiado para la función F en el origen: el valor “apropiado” es el límite de f en el origen, si existe.

Vimos en el Ejemplo 11 que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5xy^2}{x^2+y^2}$ existe. Por lo tanto, podemos definir la nueva función

$F(x, y)$ asignando en $(0, 0)$ dicho límite, o sea $F(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5xy^2}{x^2+y^2}$; mientras que $F(x, y) = f(x, y)$ para cualquier punto fuera del origen. Procediendo de esa manera, se obtiene:

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{5xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

y resulta que $F(x, y)$ es una función continua en todo \mathbb{R}^2 . En términos geométricos, la gráfica de f es una superficie con un “hueco”, mientras que la gráfica de F es la misma superficie más el punto $(0, 0, F(0, 0)) = (0, 0, 0)$ que rellena el hueco.

b) La función g es discontinua en $(0, 0)$ porque no está definida en ese punto, y nos preguntamos si podemos extenderla con continuidad a una nueva función G como en el caso anterior. Dado que g es una función racional, es continua en su dominio que es el conjunto $\text{Dom}(g) = \{(x, y) : (x, y) \neq (0, 0)\}$. En este caso, como vimos en el Ejemplo 10.a), no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Por lo tanto no se puede definir una función G en el origen de manera de extender la continuidad de g a todo el plano. No es fácil imaginar la gráfica de g , ya que por distintos caminos rectos, por ejemplo, que se acercan a $(0, 0)$ la función va tomando distintos valores: $g(x, mx) = \frac{1-m^2}{1+m^2}$. La discontinuidad no se trata de un hueco, sino de una discontinuidad de tipo “esencial”.

2.4. Límite y continuidad de funciones de tres o más variables

Lo que hemos visto se extiende de manera natural a funciones de tres o más variables. Así,

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L$$

significa que los valores $f(x, y, z)$ tienden al número L cuando el punto (x, y, z) se acerca a (x_0, y_0, z_0) , por cualquier camino dentro del dominio de f .

La función $f(x, y, z)$ es *continua* en (x_0, y_0, z_0) si

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

Notar que esta relación comprende los tres puntos de la definición de continuidad dada: existe la función en el punto, existe el límite y ambos valores coinciden.

Por ejemplo, la función

$$f(x, y, z) = \frac{4xy}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$$

es una función racional que resulta continua en todo punto de \mathbb{R}^3 *excepto* en aquellos puntos para los que se anula el denominador; en este caso, cuando $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Es decir, f es discontinua en todos los puntos de la superficie esférica que tiene centro en el origen y radio 3, mientras que en los puntos interiores y exteriores a dicha superficie, f resulta continua.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2:

- Supongamos que el $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} f(x, y) = 9$ ¿Qué puede decir del valor de $f(1, 3)$? ¿Qué pasa si f es continua?

2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} (x^2 + 5y)$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{7x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2 - 1}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sen x}{x}$

3. En los siguientes casos encuentre el límite, si existe, o demuestre que el límite no existe.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 - y}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \tan x}{x^2 + 2y^2}$

4. ¿Existe el límite en el origen para cada una de las siguientes funciones?

a) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, b) $g(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, c) $h(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

¿Para cuáles de estas funciones podría extenderse la definición al $(0, 0)$ de manera que resulten continuas? Justificar en cada caso.

5. Explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua o discontinua:

a) La temperatura de un lugar como función de la latitud, longitud y tiempo.

b) El costo de un viaje en taxi como función de la distancia recorrida y el tiempo de viaje.

6. En cada uno de los siguientes casos, determine el dominio de continuidad (el mayor conjunto en el que la función es continua):

a) $f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$

b) $g(x, y) = \ln(2x + 3y)$

c) $h(x, y) = \arctan(x + \sqrt{y})$

d) $p(x, y) = \frac{1}{x^2 - y}$

7. En cada uno de los siguientes casos, la función dada no está definida en el origen. ¿Se puede lograr extender la función con continuidad a todo \mathbb{R}^2 , definiéndola de manera adecuada en $(0, 0)$? En caso afirmativo, hágalo; en caso negativo, justifique por qué no.

a) $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

b) $g(x, y) = \ln \left(\frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \right)$

c) $h(x, y) = \frac{\sen(x+y)}{x+y}$

3. Derivadas parciales

Hemos visto algunos métodos para representar gráficamente funciones de 2 ó 3 variables, pero en algunos casos estos métodos no serán suficientes para comprender aún sus características más básicas. Por lo visto en *Análisis I* sabemos que el concepto de derivada puede brindarnos una gran ayuda en esta tarea. Por ejemplo, la derivada nos permite investigar zonas de crecimiento y de decrecimiento de una función, localizar sus máximos y mínimos, analizar la concavidad, etc., siendo todas estas herramientas muy útiles a la hora de estudiar la gráfica y el comportamiento de una función. También conocemos otras aplicaciones de la derivada. Por ejemplo, sabemos que la gráfica de una función continua no puede estar “quebrada”, pero ¿qué pasa si la función es derivable?, ¿qué características adicionales tiene su gráfica? La derivada se relaciona con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función. Por otro lado, sabemos que la derivada de una función en cierto valor de la variable se puede interpretar como la razón instantánea de cambio de la función cuando cambia la variable.

Nos preguntamos ahora ¿cómo se extienden estos conceptos a funciones de más variables? ¿Cómo podemos, por ejemplo, analizar el “cambio” de una función de dos variables cuando éstas cambian? En principio, podemos mirar cómo afecta a la función un “cambio parcial”, moviendo las variables de a una. Introducimos entonces el concepto de derivación parcial.

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables x e y en cierto dominio D de \mathbb{R}^2 . Si asignamos un valor numérico constante a una de las variables, por ejemplo a y , y permitimos que la otra varíe, la función f se convierte de hecho en una función de una sola variable. Por ejemplo, asignemos a y un valor fijo y_0 . ¿Cómo podemos representar gráficamente la función $f(x, y_0)$ de la única variable x ? Para ello, trazamos en \mathbb{R}^3 la curva $C_1 : z = f(x, y_0)$ que es precisamente la curva generada por la intersección de la gráfica de $f(x, y)$ con el plano $y = y_0$, o sea, C_1 es la traza para $y = y_0$ de la gráfica de f , como se ilustra en la Figura ??.

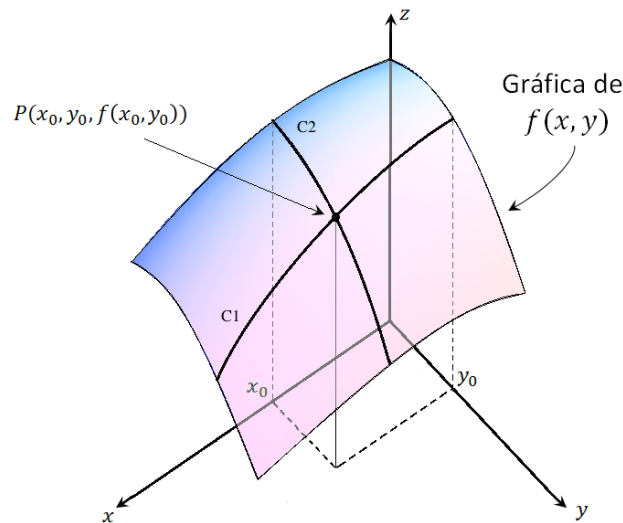


Figura 7: $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y las trazas para $y = y_0$ y para $x = x_0$ en la gráfica de $f(x, y)$.

que queda definida en el plano $y = y_0$, corresponde entonces a la gráfica de la función $F_1(x) = f(x, y_0)$ de la variable x [por ejemplo si $f(x, y) = x e^{x^2 y}$, para $y = \ln 2$, fijo, queda $F_1(x) = f(x, \ln 2) = x e^{x^2 \ln 2} = x 2^{x^2}$]. Si $F_1(x)$ tiene derivada en x_0 , entonces ésta se llama derivada parcial de f con respecto a x en (x_0, y_0) , y se denota $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. O sea que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = F_1'(x_0)$. Recordando la definición de derivada de una función

de una variable, $F_1'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_1(x_0+h) - F_1(x_0)}{h}$, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Notar que en este cociente incremental, la variable y se mantiene constante en el valor y_0 ; el cociente se construye evaluando la función en dos puntos próximos, con el mismo valor de $y = y_0$ y dos valores de x próximos en torno a x_0 .

Consideremos ahora que x queda fija. La derivada parcial de f con respecto a y en el punto (x_0, y_0) , denotada por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, se obtiene dejando x fijo ($x = x_0$) y calculando la derivada respecto de y en y_0 de la función de una variable $F_2(y) = f(x_0, y)$ [por ejemplo si $f(x, y) = x e^{x^2 y}$, para $x = 1$ queda $F_2(y) = f(1, y) = 1 e^{1^2 y} = e^y$]:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Veamos un ejemplo: si $f(x, y) = x e^{x^2 y}$, fijando $x = 1$ queda $f(1, y) = e^y$ luego $\frac{\partial f}{\partial y}(1, y_0) = e^{y_0}$, mientras que fijando $x = 2$ queda $f(2, y) = 2 e^{4y}$ luego $\frac{\partial f}{\partial y}(2, y_0) = 8 e^{4y_0}$, y en general fijando $x = x_0$ queda $f(x_0, y) = x_0 e^{x_0^2 y}$ luego $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0^3 e^{x_0^2 y_0}$. Plantee algo similar pero ahora fijando y igual a 0, 1 e y_0 : obtenga la correspondiente función que depende solamente de x , dérvela respecto de x y evalúe la derivada en x_0 .

Si consideramos que el punto donde se evalúan las derivadas parciales es un punto arbitrario (x, y) del dominio, tenemos dos nuevas funciones de dos variables y podemos escribir lo siguiente:

DEFINICIÓN:

Si $f(x, y)$ es una función de dos variables, sus *derivadas parciales respecto de x y de y* son las funciones definidas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} \end{aligned}$$

si los límites existen.

Frecuentemente también usaremos la siguiente notación para las derivadas parciales:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad , \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

(es una notación más compacta, como escribir $F'(x)$ en lugar de $\frac{dF}{dx}(x)$, pero ahora el apóstrofe no sirve, ya que debemos indicar respecto de cuál de las dos variables se está derivando parcialmente, lo que se indica con un subíndice x ó y).

Las derivadas se calculan como el límite de un cociente incremental, que mide cuánto cambia la función cuando cambian las variables; en definitiva compara el valor que toma la función en un punto dado de su dominio con el valor de la función cuando se mueve el punto “una cantidad pequeña”. En el caso de funciones de dos variables: $\frac{\partial f}{\partial x}$ representa la razón instantánea de cambio de f con respecto a x cuando y está fija, o sea cuando el punto se mueve en la dirección del versor \hat{i} ; análogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}$ representa la razón instantánea de cambio de f con respecto a y cuando x está fija, o sea cuando se mueve el punto en la dirección del

versor \check{j} . Podemos decir entonces que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son derivadas de f en las direcciones dadas por los versores canónicos (unitarios) \check{i} y \check{j} , respectivamente.

EJEMPLO 13: Evaluar, usando la definición, las derivadas parciales de $f(x, y) = xy^2$ en $(2, 3)$.

Para evaluar los cocientes incrementales necesitamos el valor de la función en el punto y en dos puntos próximos, uno con el mismo valor de y , otro con el mismo valor de x . Tenemos $f(2, 3) = 18$, $f(2 + h, 3) = 9(2 + h) = 18 + 9h$, y $f(2, 3 + k) = 2(3 + k)^2 = 18 + 12k + 2k^2$. Luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(18 + 9h) - 18}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 9 = 9$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(18 + 12k + 2k^2) - 18}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{12k + 2k^2}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} (12 + 2k) = 12$$

A los fines prácticos para computar las derivadas parciales es posible, alternativamente, aplicar las reglas de derivación válidas para funciones de una variable (manteniendo a la otra fija, como si fuera una constante). Entonces, si las funciones derivadas parciales son funciones continuas (esto es, si f es de clase \mathcal{C}^1) en $D \subset \mathbb{R}^2$, para obtener $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ se puede derivar por regla y luego evaluar las expresiones de f_x y f_y en el punto $(x_0, y_0) \in D$.

EJEMPLO 14: Si $f(x, y) = 3x^2y + y^3$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Derivando por regla, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3y \cdot 2x + 0 = 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \cdot 1 + 3y^2$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, se mantuvo a y constante; mientras que para hallar $\frac{\partial f}{\partial y}$ se pensó a x como una constante.

EJEMPLO 15: Si $f(x, y) = x e^{x^2y}$, evaluar $f_x(1, \ln 2)$ y $f_y(1, \ln 2)$.

Para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$f_x(x, y) = 1 e^{x^2y} + x e^{x^2y} 2xy = e^{x^2y}(1 + 2x^2y), \quad f_y(x, y) = x e^{x^2y} x^2 = x^3 e^{x^2y}$$

donde usamos la regla del producto y la regla de la cadena. Si ahora evaluamos estas funciones (que son ambas continuas) en el punto $(1, \ln 2)$, resulta

$$f_x(1, \ln 2) = 2(1 + 2 \ln 2), \quad f_y(1, \ln 2) = 2$$

Compare con el análisis hecho al principio de la sección donde tomamos esta función como ejemplo.

NOTA: En general, se tiene que el dominio de la función derivada está incluido en (o como mucho es iguala) el dominio de la función dada. Por ejemplo, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tiene como dominio todo \mathbb{R}^2 , pero tanto $f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ como $f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ son válidas en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. En los Ejemplos 13, 14 y 15, notamos que el dominio de f , f_x y f_y es \mathbb{R}^2 .

Sabemos de Análisis I que, en términos geométricos, una derivada se interpreta como una pendiente. Observando la Figura ??, vemos que la derivada parcial $f_x(x_0, y_0)$ puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente en $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a la curva C_1 , que es la traza para $y = y_0$ de la superficie gráfica de f ; análogamente la derivada parcial $f_y(x_0, y_0)$ da la pendiente de la recta tangente en $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a la curva C_2 , que es la traza para $x = x_0$ de la superficie gráfica de f [estas rectas, veremos, determinan un plano que es tangente a $S : z = f(x, y)$ en P_0].

EJEMPLO 16: Considerar el paraboloide del Ejemplo 4, que es la gráfica de la función de dos variables $f(x, y) = x^2 + 16y^2$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$, e interpretar estos números como pendientes.

Para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 32y$$

luego en el punto indicado resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 4 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 32$$

Además, $f(2, 1) = 20$. El plano $y = 1$ corta al paraboloide en la parábola $C_1 : z = x^2 + 16$, $y = 1$ [que, aprovechamos para recordar, se puede parametrizar mediante la función vectorial $\vec{r}_1(t) = (t, 1, t^2 + 16), t \in \mathbb{R}$]; la pendiente de la recta tangente a esta parábola C_1 en el punto $P_0(2, 1, 20)$ es $f_x(2, 1) = 4$. De modo similar, la curva en la que el plano $x = 2$ corta al paraboloide es la parábola $C_2 : z = 4 + 16y^2$, $x = 2$ [parametrizable trivialmente mediante $\vec{r}_2(t) = (2, t, 4 + 16t^2), t \in \mathbb{R}$]; la pendiente de la recta tangente a la parábola C_2 en $P_0(2, 1, 20)$ es $f_y(2, 1) = 32$.

DERIVADAS PARCIALES DE FUNCIONES DE TRES VARIABLES

Si $f(x, y, z)$ es una función de tres variables, sus *derivadas parciales* son las funciones definidas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k, z) - f(x, y, z)}{k} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + l) - f(x, y, z)}{l} \end{aligned}$$

En la primera, se calcula considerando a y y a z constantes, y derivando solamente con respecto a x ; análogamente para las otras dos. Por ejemplo, si $f(x, y, z) = \sin(4x + y^2z)$, entonces $f_x(x, y, z) = 4 \cos(4x + y^2z)$, $f_y(x, y, z) = 2yz \cos(4x + y^2z)$, y $f_z(x, y, z) = y^2 \cos(4x + y^2z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

DERIVADAS PARCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

Si $f(x, y)$ es una función de dos variables, sus derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables, de modo que podemos considerar las derivadas parciales de éstas últimas: $(f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_x$, y $(f_y)_y$, que se denominan *derivadas parciales segundas* de $f(x, y)$. Emplearemos la siguiente notación:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Se leen “derivada segunda de f respecto de x dos veces”, “derivada segunda de f respecto de x y de y ”, etc.

EJEMPLO 17: Calcular las derivadas parciales segundas de la función $f(x, y) = \cos(xy) + x \cos y$.

Primero hallamos las derivadas parciales primeras de f :

$$f_x(x, y) = -y \operatorname{sen}(xy) + \cos y, \quad f_y(x, y) = -x \operatorname{sen}(xy) - x \operatorname{sen} y$$

Derivando f_x respecto de x y de y , se obtiene:

$$f_{xx}(x, y) = -y^2 \cos(xy), \quad f_{xy}(x, y) = -\operatorname{sen}(xy) - xy \cos(xy) - \operatorname{sen} y$$

mientras que derivando f_y respecto de x y de y , se obtiene:

$$f_{yx}(x, y) = -\operatorname{sen}(xy) - xy \cos(xy) - \operatorname{sen} y, \quad f_{yy}(x, y) = -x^2 \cos(xy) - x \cos y$$

Observamos en este ejemplo que hay dos resultados que se repiten. Si bien no ocurre siempre, para la mayoría de las funciones que usaremos en la práctica las *derivadas parciales mixtas* (o *cruzadas*) f_{xy} y f_{yx} resultan iguales. El siguiente teorema nos dice bajo qué condiciones es válido que $f_{xy} = f_{yx}$:

TEOREMA (*Teorema de Clairaut*)

Sea $f(x, y)$ una función definida en una región abierta $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0) . Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D , entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

En el caso de una función de tres variables, ¿cuántas derivadas parciales segundas tiene? Calcúlelas para el ejemplo $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(4x + y^2z)$. ¿Y una función de n variables?

APLICACIÓN: Las derivadas parciales (primeras y segundas) juegan un rol importante en Física, por ejemplo, donde a partir del planteo de una situación se llega a una relación entre distintas derivadas parciales de una función desconocida. Entonces se trata de averiguar cuál (o cuáles) funciones satisfacen dicha *ecuación diferencial a derivadas parciales*. No estudiaremos aquí las técnicas para resolver ecuaciones diferenciales parciales pero sí, a modo de práctica, comprobaremos que una función dada y sus derivadas parciales verifican cierta ecuación diferencial.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3:

1. Encuentre las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

a) $f(x, y) = xy^2 + 2xy + 7x$

b) $f(x, y) = y \ln x$

c) $f(x, y) = e^{xy} + \sin(x^2 + y)$

d) $f(x, y) = x^y$

e) $f(s, t) = \frac{st^2}{s^2+t^2}$

f) $f(x, y, z) = \cos(ye^{xy}) \sin x + \arctan z$

g) $f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

[Recordatorio: $(a^x)' = a^x \ln a$, siendo a una constante positiva; $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.]

2. Calcule las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4)$

b) $f(x, y) = x^2 + \ln(x^2 + y^2)$, $(0, 1)$

c) $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$, $(-6, 4)$

d) $f(u, v, w) = w \tan(uv)$, $(2, 0, 3)$

e) $f(x, y, z) = \frac{x}{y+z}$, $(3, 2, 1)$

3. Utilice la definición de derivada parcial para hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$, en los siguientes casos:

a) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$

b) $f(x, y) = \sqrt{3x - y}$

4. Encuentre las derivadas parciales primeras para funciones de la forma: a) $f(x, y) = M(x) + N(y)$, b) $f(x, y) = M(x)N(y)$, donde $M(x)$ y $N(y)$ son funciones reales de una variable con las propiedades adecuadas. Dé un par de ejemplos.

5. Calcule todas las derivadas parciales segundas para cada una de las siguientes funciones, y verifique el teorema de Clairaut en el dominio que corresponda en cada caso:

a) $f(x, y) = e^y + \frac{y}{x} + xe^{-y}$

b) $f(x, y) = e^{-xy^2} + y^3x^2$

6. a) Verifique que la función $u(x, t) = e^{-2t} \sin(4x)$ es una solución de la ecuación diferencial llamada *ecuación de conducción del calor*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y determine cuál es el valor de la constante a .

- b) Compruebe que la función $u(x, y) = \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy)$ satisface la ecuación diferencial conocida como *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- c) Encuentre la constante de proporcionalidad entre u_{tt} y u_{xx} para la función $u(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$, siendo A, k, ω constantes. Obtendrá así una ecuación diferencial, la *ecuación de onda*, que modela las ondas transversales en una cuerda, donde u es la altura de un elemento de cuerda como función de la posición x del elemento y de la variable temporal t . Observe que si k tiene unidades de 1/m y ω de 1/s, entonces la constante de proporcionalidad se mide en $(\text{m/s})^2$ (y representa, de hecho, el cuadrado de la velocidad de la onda).

4. Diferenciabilidad, plano tangente y aproximación lineal (para funciones de dos variables)

Pensemos en una función $F(x)$ de una variable y su aproximación lineal alrededor de un valor x_0 de su dominio. Sabemos de *Análisis I* que al acercarnos suficientemente a un punto de la gráfica (en \mathbb{R}^2) de una función derivable, la curva $y = F(x)$ no se distingue de la recta tangente en dicho punto y podemos aproximar localmente la función F con una función lineal [justamente el polinomio de Taylor de primer orden: $L(x) = P_1(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$, que gráficamente corresponde a la recta tangente].

Nos interesa ahora desarrollar ideas similares para una función $f(x, y)$ de dos variables. Esto es, queremos extender la idea de derivabilidad a un nuevo concepto (“diferenciabilidad”), que garantice la aproximación lineal de la función f . Dicho en términos geométricos, queremos que al acercarnos suficientemente a un punto de la gráfica (en \mathbb{R}^3) de una función diferenciable de dos variables, la superficie $z = f(x, y)$ no se distinga del plano tangente en dicho punto, y entonces podamos aproximar localmente la función mediante una función lineal de dos variables (la que corresponde al plano tangente).

4.1. Diferenciabilidad

Para responder al tema de “diferenciabilidad” para funciones de dos variables, supondremos primero que existe el plano tangente a la gráfica S de la función $f(x, y)$ en un punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y analizaremos cómo debe ser la ecuación de dicho plano.

Para ello recordemos que un plano (no vertical) tiene una ecuación de la forma

$$z = ax + by + c$$

Ahora bien, un plano que es tangente a S en un punto P_0 , deberá contener a las rectas tangentes en P_0 a cada una de las curvas que están en S y pasan por P_0 . Las trazas C_1 y C_2 para $y = y_0$ y $x = x_0$ en S , respectivamente, son curvas que están en S y pasan por P_0 ; además, la recta que es tangente a cada una de esas curvas en P_0 tiene como pendiente una derivada parcial de f , como ya hemos visto. Por lo tanto, el plano tangente deberá contener a estas rectas tangentes, o sea que en la ecuación propuesta, $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. La constante c se determina fácilmente teniendo en cuenta que el plano debe pasar por P_0 , o sea que $z = f(x_0, y_0)$ cuando $x = x_0$ e $y = y_0$. Así, si hay plano tangente, obtenemos la siguiente ecuación:

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Ahora nos queda definir el concepto de diferenciabilidad, y lo haremos de manera tal que el plano dado por la ecuación anterior sea una “buena aproximación” a la gráfica de f cerca del punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, cuando f sea diferenciable.

DEFINICIÓN:

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es *diferenciable* en $(x_0, y_0) \in D$ si

$$\frac{f(x, y) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0) \right]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \rightarrow 0$$

cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

En esta definición se expresa qué queremos indicar cuando decimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

es una “buena aproximación” a la función $f(x, y)$ cuando (x, y) está cerca de (x_0, y_0) .

Veamos la relación entre continuidad, diferenciabilidad y la existencia de derivadas parciales.

Recordemos, para una función $F(x)$ de una variable, el teorema que asegura que si F es derivable (o sea, si existe F') en x_0 , entonces F es continua en x_0 . La extensión para una función $f(x, y)$ de dos variables se expresa así:

Si $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) , entonces f es continua en (x_0, y_0) .

Pero es importante resaltar que: ¡ NO alcanza con que existan las derivadas parciales f_x y f_y en el punto para que f sea diferenciable ! (el concepto de diferenciabilidad es “más fuerte” que el de derivabilidad). Veamos en un ejemplo que la sola existencia de derivadas parciales NO implica la continuidad ni diferenciabilidad de la función.

EJEMPLO 18: Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0 \\ 0 & \text{en todo otro caso} \end{cases}$$

Indicar si f posee derivadas parciales en $(0, 0)$, y si f es continua y/o diferenciable en dicho punto.

Como f es constantemente igual a 1 sobre el eje x y también sobre el eje y , esto no cambia, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Luego las derivadas parciales existen (y valen ambas cero) en $(0,0)$.

Pero f no es continua en $(0,0)$ porque no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$, como puede probarse acercándose al origen por los ejes coordenados (donde $f = 1$) o por cualquier otro camino (donde $f = 0$).

En resumen: i) la función dada admite derivadas parciales en el origen; ii) sin embargo, f no es continua en $(0,0)$; iii) por lo tanto, no será diferenciable en dicho punto.

La última afirmación del ejemplo anterior se justifica a través de la negación de la propiedad que dice que “continuidad implica diferenciabilidad”:

Si f no es continua en (x_0, y_0) , entonces f no es diferenciable en (x_0, y_0) .

Podemos observar que en general es fácil decidir si existen o no las derivadas parciales de una función. Sin embargo, la condición de diferenciabilidad que figura en la definición no es fácil de verificar en la mayoría de los casos. Afortunadamente existe un criterio sencillo, dado en el siguiente teorema que nos brinda una condición suficiente para que una función sea diferenciable:

TEOREMA (Condición suficiente para diferenciabilidad)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, y sea $(x_0, y_0) \in D$. Si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, y además éstas son continuas en un entorno de (x_0, y_0) , entonces f es diferenciable en (x_0, y_0) .

4.2. Plano tangente

Habiendo definido el concepto de diferenciabilidad, podemos ahora dar una definición precisa de plano tangente a la gráfica de una función diferenciable:

DEFINICIÓN:

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(x_0, y_0) \in D$. Una ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$\Pi_T : \quad z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (y - y_0)$$

EJEMPLO 19: Dar una ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punto $P_0(1, 0, 2)$.

La función dada es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 . Luego su gráfica admite plano tangente en todo punto. Además, como $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1, 0, 2)$, entonces $(x_0, y_0) = (1, 0)$ y efectivamente $f(x_0, y_0) = f(1, 0) = 2$, luego P_0 pertenece a la gráfica de f . Tiene sentido entonces buscar el plano tangente a la gráfica de f en $(1, 0, 2)$.

Las derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + ye^{xy} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + xe^{xy}$$

que evaluándolas en $(1, 0)$ dan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 2 \cdot 1 + 0e^{1 \cdot 0} = 2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 4 \cdot 0 + 1e^{1 \cdot 0} = 1$$

Así, una ecuación del plano tangente a la superficie $S : z = x^2 + y^4 + e^{xy}$, gráfica de f , en el punto $P_0(1, 0, 2)$ es

$$z = 2 + 2(x - 1) + 1(y - 0)$$

que puede simplificarse como $z = 2x + y$.

Muestre que en el Ejemplo 16, el plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ (la gráfica es la superficie de un paraboloide elíptico) en el punto $(2, 1, 20)$, tiene ecuación $z = 20 + 4(x - 2) + 32(y - 1)$, que también puede escribirse como $4x + 32y - z - 20 = 0$.

4.3. Linealización

Vimos que si $f(x, y)$ es diferenciable en un punto (x_0, y_0) de su dominio, entonces la gráfica de f admite plano tangente en el punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ¹. Sabemos también que este plano tangente Π_T es localmente una “buena aproximación” a la gráfica de f cerca de P_0 . Ahora bien Π_T , siendo una superficie plana, puede interpretarse como la superficie gráfica de otra función de dos variables, ya no de f (salvo que ésta sea lineal), sino de una función lineal.

Recordando la ecuación para el plano tangente Π_T a la gráfica de f en $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, deducimos que la función lineal de dos variables cuya gráfica es dicho plano es

$$L(x, y) = P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (y - y_0)$$

Esta función se denomina *linealización* de f en (x_0, y_0) , o también *polinomio de Taylor de primer orden* alrededor de (x_0, y_0) . Para poder obtener la linealización de una función f , ésta debe ser de clase \mathcal{C}^1 (por lo tanto, diferenciable) en el punto, lo que en términos geométricos significa que la gráfica de la función f admite plano tangente.

La estimación aproximada de f por medio de la linealización,

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (y - y_0)$$

se llama *aproximación lineal* de f en (x_0, y_0) .

¹Cuando mencionamos “el punto (x_0, y_0) ” nos referimos a un par ordenado que asigna valores x_0, y_0 a las variables independientes x e y ; es un punto en el dominio de la función, que está incluido en \mathbb{R}^2 . Mientras que “el punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ” está en \mathbb{R}^3 y se refiere a un punto de coordenadas x_0, y_0, z_0 en la superficie gráfica de f , con lo cual $z_0 = f(x_0, y_0)$, el valor de la función para el par (x_0, y_0) del $\text{Dom}(f)$.

COMENTARIO:

Salvo que la función f sea lineal (o una función constante), existirá una diferencia entre el valor exacto de la función en un par (x, y) [distinto pero próximo a (x_0, y_0)] y el valor dado por la aproximación lineal en (x, y) (esa diferencia se conoce como residuo o resto de Taylor). Típicamente, cuanto más cerca esté (x, y) de (x_0, y_0) , tanto menor será esa diferencia.

Por otro lado, una manera de mejorar la estimación de f en (x, y) sería mediante una aproximación de orden superior, por ejemplo con una aproximación cuadrática o polinomio de Taylor de segundo orden, que incluye en su definición las derivadas parciales segundas de f evaluadas en (x_0, y_0) .

EJEMPLO 20: Considerar la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ cerca del punto $(-1, 1)$ de su dominio. Sabiendo que es diferenciable en dicho punto (por ser polinomial), hallar: a) una ecuación para el plano tangente a la gráfica de f por el punto $(-1, 1, f(-1, 1))$; b) la linealización de f en $(-1, 1)$; c) la aproximación lineal para f en $(-1, 1)$. Discutir la distinción entre lo obtenido en a), b) y c).

a) Para hallar la ecuación del plano tangente debemos evaluar la función y sus derivadas parciales primeras en $(-1, 1)$. Así tenemos que $f(-1, 1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = 2$. Por lo tanto, el plano tangente a la gráfica de f por el punto $(-1, 1, f(-1, 1))$ es

$$\Pi_T : \quad z = 2 - 2(x + 1) + 2(y - 1)$$

b) La linealización de f alrededor de $(-1, 1)$ está dada por la función

$$L(x, y) = 2 - 2(x + 1) + 2(y - 1)$$

cuya gráfica es la superficie $z = -2x + 2y - 4$, precisamente el plano Π_T tangente a la gráfica de f en $(-1, 1, 2)$.

c) La aproximación lineal de f en $(-1, 1)$ está dada por la expresión

$$f(x, y) \approx 2 - 2(x + 1) + 2(y - 1)$$

Esto significa que si queremos “estimar” (sin calcular exactamente) cuánto vale la función f en un punto del dominio cercano al $(-1, 1)$, por ejemplo en $(-0,9, 1,05)$, un valor aproximado razonable “a primer orden” es

$$f(-0,9, 1,05) \approx L(-0,9, 1,05) = 2 - 2(-0,9 + 1) + 2(1,05 - 1) = 2 - 2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,05 = 1,9$$

De hecho este es el valor aproximado “más razonable a primer orden” para estimar $f(-0,9, 1,05)$.

Por curiosidad, halle el valor exacto de f en $(-0,9, 1,05)$ y calcule la diferencia que hay con el valor aproximado. ¿Es muy grande la diferencia?

¿Qué ocurrirá si realiza el cálculo estimativo para un punto más cercano a $(-1, 1)$, por ejemplo para $(-1,001, 0,95)$?

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4:

1. Analice la continuidad y la diferenciabilidad en \mathbb{R}^2 de la función $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$.
2. Determine justificadamente el mayor subconjunto de \mathbb{R}^2 en el que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua. ¿Es diferenciable f en el origen? (justificar)

3. Considere la superficie $S : z = 3x^2 - y^2 + 2x$ (¿de qué cuádrica se trata?). Dé una función de dos variables cuya gráfica sea S . Si el punto $(1, -2, 1) \in S$, encuentre una ecuación para el plano tangente a S en dicho punto. Obtenga ecuaciones para la recta que pasa por el punto dado y es perpendicular al plano tangente hallado.
4. Determine justificadamente si las siguientes funciones son diferenciables en los puntos indicados. En caso afirmativo, halle una ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en dicho punto.
 - a) $f(x, y) = xy$, $(0, 0)$
 - b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$, $(0, 1)$
 - c) $f(x, y) = e^x \cos(xy)$, $(0, 0)$
 - d) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $(0, 1)$
5. Encuentre, si existe, la linealización $L(x, y)$ de la función f en el punto indicado:
 - a) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$, $(0, 2)$
 - b) $f(x, y) = y \ln x$, $(2, 1)$
6. Encuentre la aproximación lineal de la función $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ en $(2, 1)$, y utilícela para estimar aproximadamente $f(1,95, 1,08)$.
7. Pruebe que las gráficas de $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$, tienen el mismo plano tangente en el origen de coordenadas.
Encuentre la linealización de dichas funciones en $(0, 0)$. ¿Es la misma función? Justifique.

AUTOEVALUACIÓN DE LA GUÍA Nro 3 (Parte A: Secciones 1 – 4)

Se propone que resuelva los siguientes ejercicios (del estilo de los que podrían plantearse en un parcial de la materia), en forma individual y dedicando aproximadamente 30 minutos en total. Justifique cada uno de los pasos en sus demostraciones teóricas; los cálculos numéricos puede dejarlos expresados (no es necesario el uso de la calculadora, a menos que necesite comparar valores numéricos).

1. Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizar justificadamente:

- a) la continuidad de la función en \mathbb{R}^2 ;
- b) la diferenciabilidad de la función en $(0, 0)$;
- c) la existencia de las derivadas parciales en $(0, 0)$.

2. Verificar que la función

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + B \cos(kx - \omega t)$$

con A, B, k, ω constantes, representa una onda que se propaga en el tiempo en dirección x con velocidad $v = \frac{\omega}{k}$. Para ello probar que f satisface la ecuación diferencial a derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Si x se da en metros y t en segundos, ¿cuáles serán las unidades de k , ω y v ?

3. Hallar, si es posible, una ecuación para el plano tangente al paraboloide elíptico

$$S : \quad z = 1 - \frac{x^2 + 4y^2}{10}$$

en cada uno de los siguientes puntos: a) $(1, 1, \frac{1}{2})$, b) $(1, 1, 33)$, c) $(0, 0, 1)$. Si no es posible, explicar el porqué.

Esbozar un gráfico de la superficie, indicando cada punto dado y el plano tangente cuando corresponda.