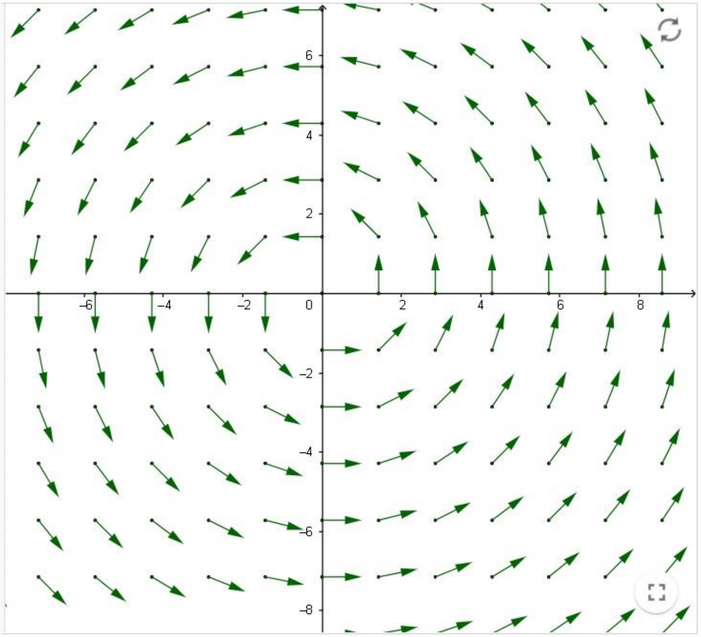
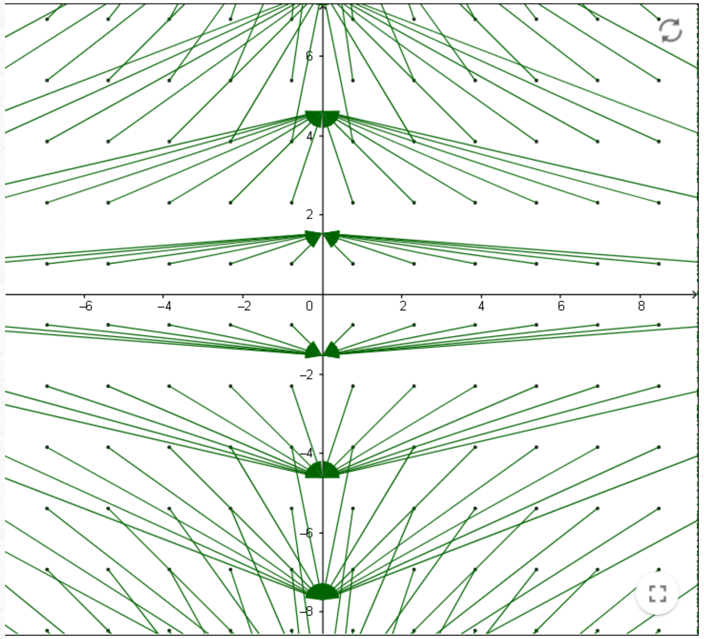
FUNCTIONES VECTORIALES DE CAMPO

$$F: R^n \to R^n \quad (n = m \land n \neq 1)$$

La grafica de estas funciones son vectores en el plano o en espacio.

- ✓ Si F: $R^2 \to R^2$ $\quad F(x,y) = (M(x,y), N(x,y)) = (M,N)$
- ✓ Si F: $R^3 \to R^3$ $\quad F(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z)) = (M,N,P)$





EJEMPLO: $F(x,y) = (-x,y)$

INTEGRAL DE LINEA DE CAMPOS VECTORIALES

Una de las aplicaciones físicas más importantes de las integrales de línea consiste en calcular el TRABAJO que realiza un campo de fuerzas F sobre una partícula para desplazarla sobre una trayectoria, parametrizada por una función vectorial de variable real $g(t)$.

Sabemos que $W = \vec{F} . \vec{D}$

Trasladaremos esta idea de Trabajo a un campo vectorial

El trabajo en el segmento k será:

$$W_k = F[g(t_k)].\hat{\tau}.\|g(t_{k+1}) - g(t_k)\|$$

$$\sum_{k=0}^{n} W_k = \sum_{k=0}^{n} F[g(t_k)].\hat{\tau}.\|g(t_{k+1}) - g(t_k)\|$$

$$\sum_{k=0}^{n} W_k = \sum_{k=0}^{n} F[g(t_k)].\hat{\tau}.\|g'(t_k)\|\Delta t_k$$

Reemplazando $\hat{\tau}$

$$\sum_{k=0}^{n} W_k = \sum_{k=0}^{n} F[g(t_k)].\frac{g'(t_k)}{\cancel{\|g'(t_k)\|}}.\cancel{\|g'(t_k)\|}\Delta t_k$$

$$\lim_{\Delta t_{k \to 0}} \sum_{k=0}^{n} W_k = \lim_{\Delta t_{k \to 0}} \sum_{k=0}^{n} F[g(t_k)].g'(t)_k.\Delta t_k$$

$$\boxed{W = \int_a^b F[g(t)].g'(t).dt}$$

EJEMPLO 1

Calcula el trabajo para desplazar una partícula en un campo vectorial $F(x, y) = (xy, x + 1)$ sobre la trayectoria $g(t) = (t, t^3), 0 \leq t \leq 2$

EJEMPLO 2

Calcula el trabajo realizado para desplazar una partícula aplicando una fuerza de campo $F(x, y) = (x^2y - 3x, xy - 2)$ a lo largo de la curva $y = x^2 + 2$ entre los puntos $(1,3) \wedge (3,11)$

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

Un campo vectorial $F(x, y) = (M, N)$ es conservativo $\Leftrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$

El término conservativo tiene su origen en la Ley de Conservación de la Energía, según la cual la suma de la energía cinética y la energía potencial de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas conservativo, es constante.

Ejemplos: $F(x, y) = (4x + 5y, 6y + 5x)$ $\quad F(x, y) = (x^3 y, x + y)$

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

Si un campo es conservativo, significa que es el Gradiente de una función vectorial real. Dicha función recibe el nombre de **función potencial de F**

Ejemplo: $f(x,y) = x^2y + y^3 + 2y$

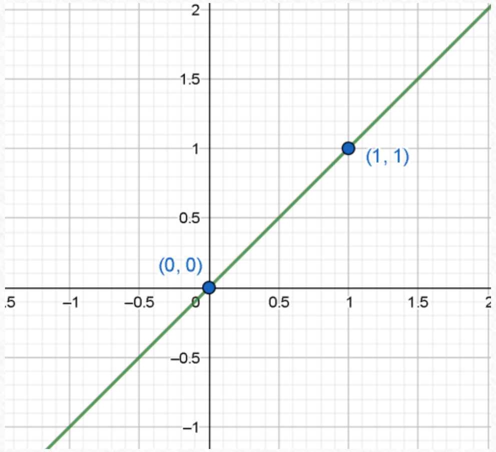
CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

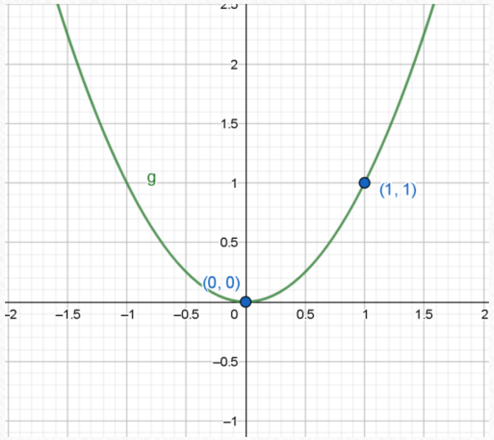
Si conocemos el campo F, podemos hallar la función potencial que lo origina, siempre que F sea conservativo:

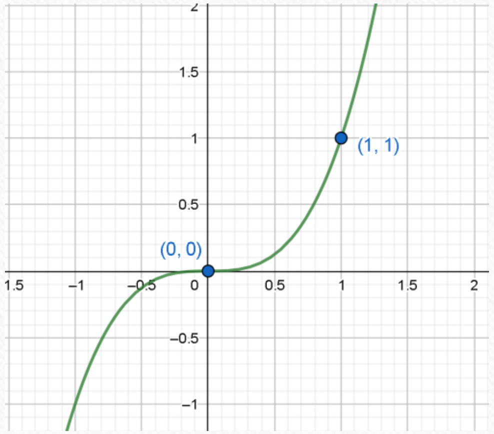
Supongamos F$(x, y) = (2xy, x^2 - y)$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA INTEGRAL DE LINEA

Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y) = (\frac{1}{2}xy, \frac{1}{4}x^2)$ sobre una partícula que se mueve desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ a lo largo de los siguientes caminos:





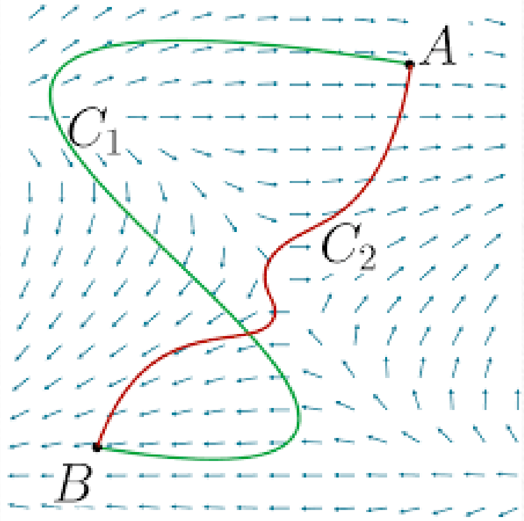


TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA INTEGRAL DE LINEA

¿Cómo es el campo de fuerzas del ejemplo?

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{2}x \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{2}x \;\Rightarrow CAMPO\ CONSERVATIVO$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA INTEGRAL DE LINEA



C_1 *está dada por* $g(t)$
C_2 *está dada por* $h(t)$

El trabajo realizado por un campo vectorial conservativo sobre una partícula que se mueve entre dos puntos a y b es independiente del camino seguido, y está dado por

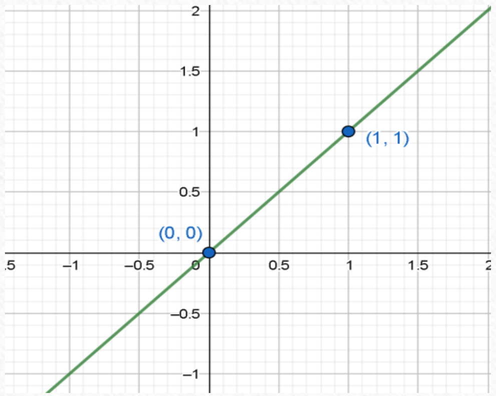
$$W = f(x_b, y_b) - f(x_a, y_a)$$

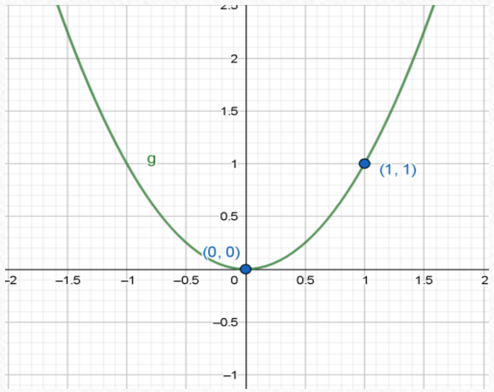
Donde f es una función potencial de F, es decir, $F(x, y) = \nabla f(x, y)$

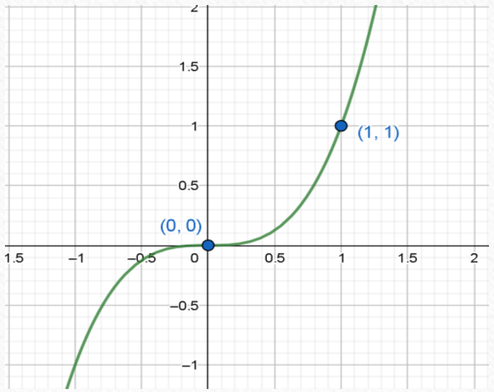
TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA INTEGRAL DE LINEA

Retomemos este ejemplo, pero usando ahora el Teorema Fundamental que vimos: Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y) = (\frac{1}{2}xy, \frac{1}{4}x^2)$ sobre una partícula que se mueve desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ a lo largo de los siguientes caminos:

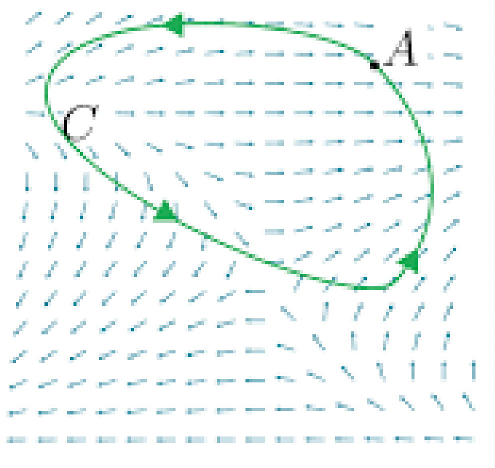
$$W = f(x_b, y_b) - f(x_a, y_a)$$







TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA INTEGRAL DE LINEA



$C \text{ está dada por } g(t)$

¿Qué pasa si la trayectoria es cerrada?

$$W = f(x_a, y_a) - f(x_a, y_a) = 0$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA INTEGRAL DE LINEA

Ejemplo 1

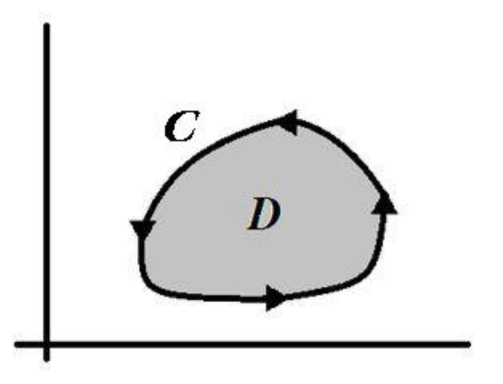
Calcular el trabajo que realiza $F(x,y) = (2xy, x^2 - y)$ para desplazar una partícula desde (-1,4) hasta (1,2)

Ejemplo 2

Calcular el trabajo que realiza $F(x,y,z) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz)$ para desplazar una partícula desde (1,1,0) hasta (0,2,3)

TEOREMA DE GREEN

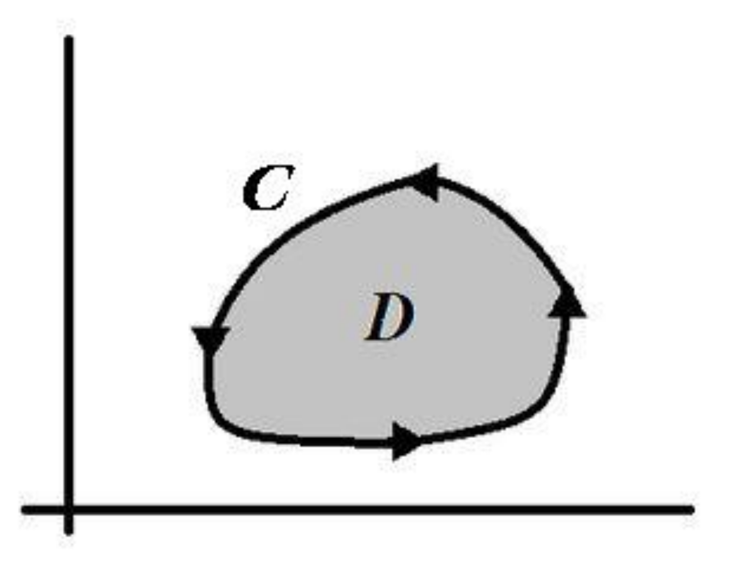
Sea una región simple del plano cuyo borde es una curva cerrada C, suave a trozos, orientada en sentido antihorario, y si M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a D, se cumple:



$$\int_C Mdx + Ndy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Donde $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ representa el Rotor de F y se indica Rot(F)

TEOREMA DE GREEN



El Teorema de Green establece la relación entre una integral de línea a lo largo de una curva C cerrada y simple, y una integral doble sobre una región plana D, limitada por C.

En otras palabras, dice que la circulación antihoraria de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple es la integral doble del Rotor del campo sobre la región encerrada por la curva.

TEOREMA DE GREEN

Ejemplo 1

Calcular el trabajo para desplazar una partícula según la trayectoria dada por $C1: y = x \ \wedge \ C2: y = x^3$, donde actúa el campo $F(x, y) = (y^3, x^3 + 3xy^2)$

Ejemplo 2

Evaluar $\int_C \ y^3 dx + 3xy^2 dy$ donde C está dada por $C1: y = x \ \wedge \ C2: y = x^3$

Ejemplo 3

Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x, y) = \left(x^{\frac{3}{2}} - 3y, 6x + 5\sqrt{y}\right)$ sobre una partícula que se mueve a los largo del triángulo de vértices (0,0), (5,0) y (0,5)

ALGUNAS CONCLUSIONES

- Campo no conservativo y trayectoria abierta:

$$W = \int_a^b F[g(t)].\, g'(t)dt$$

- Campo Conservativo y trayectoria abierta:

$$W = \int_a^b F[g(t)].\, g'(t)dt = f(x_b, y_b) - f(x_a, y_a)$$

donde f es la función potencial que origina el Campo.

ALGUNAS CONCLUSIONES

- Campo conservativo y trayectoria cerrada:

$$W = \int_a^b F[g(t)].g'(t)dt = f(x_b, y_b) - f(x_a, y_a) = 0$$

porque el punto final coincide con el inicial

- Campo no conservativo y trayectoria cerrada:

$$W = \int_a^b F[g(t)].g'(t)dt = \iint_R Rot(F)dA$$