FUNCIONES VECTORIALES REALES

Dominio de una funcion de varias variables

1) Defina el dominio de una función generalizándolo para las n-uplas pertenecientes al dominio y luego particularice para funciones de $\Re^2 \to \Re$ es decir para funciones $z = f(x,y)$

2) Determine el dominio de las funciones siguientes y haga un esquema en el plano xy de dicho dominio.
-Utilice curvas punteadas para indicar cualquier parte de la frontera que no pertenezca al dominio y curvas continuas para indicar las partes de la frontera que pertenezcan al dominio-

a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

b) $f(x,y) = \sqrt{\ln(1+x+y)}$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

d) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

e) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln\left(x+y-3\right)}$

f) $f(x,y) = \dfrac{arcsen(y-x^2)}{\sqrt{2-|x|}}$

Representación gráfica de superficies

3) Indique los conceptos necesarios para realizar el gráfico de una superficie.
4) Dibuje las superficies definidas explícitamente por las funciones que se dan a continuación.

a) $f(x,y) = 6 - x - 2y$

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}$

d) $f(x,y) = -\sqrt{16-x^2-y^2}$

Curvas y superficies de nivel

5) Defina curvas y superficies de nivel, indique cómo se las obtiene y cuáles son sus aplicaciones.

6) Dadas las siguientes funciones defina el conjunto de curvas de nivel y la ecuación general correspondiente. Luego dibuje las curvas (o superficies) de nivel.

a) $f(x,y)=e^{xy}$ para 1, 2, e, 4, $\frac{1}{2}$, e^{-1}

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

c) $f(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y)=x-|y|$

e) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

7) Haciendo uso de un software matemático realice los siguientes mapas de contorno (conjunto de curvas de nivel)

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y)=\ln|x+y|$

c) $f(x,y)=e^y\cos x$

d) $f(x,y)=sen\ x+\cos\ y$

8) Una plancha delgada de metal, situada en un plano xy , está a una temperatura $T(x,y)$ en el punto (x,y). Las curvas de nivel de T se llaman isotermas porque la temperatura es igual en todos los puntos sobre la curva. Trace algunas isotermas si la función de temperatura está dada por: $T(x,y)=\dfrac{100}{1+x^2+2y^2}$

Límites de funciones reales de $\Re^2 \to \Re$

9) Calcule los límites que se indican a continuación:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{x^2+2xy+y^2+y+x}{x+y}\right)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{(-1+y^2)\,\text{sen(x)}}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left(3+y^2\right) sen\, x}{x}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen\,(x)\, sen\,(3y)}{2xy}$

10) Verificar que no existe el límite doble en el origen, mediante límites sucesivos, radiales ($y = \alpha x$), o bien utilizando un camino dado por $y = \varphi(x)$.

a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

b) $f(x,y) = \dfrac{6x^2-5y^2}{x^2+2y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{y^4+x^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{3x^2+y^2}{x^2+y^2}$

11) Sea $f(x,y) = \dfrac{3x^2 y}{x^4+2x^2+y^2}$ ¿Existe el limite doble en (0,0)?

12) Sea $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^3}$ ¿Existe el limite doble en (0,0)?

13) Estudiar la continuidad en el origen para cada una de las siguientes funciones. Si es discontinua clasificarla. Si la discontinuidad es evitable redefina la función.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Derivadas Parciales

14) Dar el concepto de derivadas parciales y su interpretación geométrica.

a) $f(x,y)=\ln\left(x^2-2\,sen(y)\right)$

b) $f(x,y)=arc\,tg\,(xy)$

c) $f(x,y)=sen\left[tg\,(4x-2y)\right]$

d) $f(x,y)=\sqrt{\ln\left(x^2+y^2\right)}$

e) $f(x,y,z)=(xy)^z$

f) $f(x,y,z)=x^{yz}$

15) Derivar las siguientes funciones, evaluarlas en el punto indicado e interpretar el resultado obtenido:

a) $g(x,y)=4-x^2-y^2$, $(1,1,2)$

b) $h(x,y)=x^2-y^2$, $(-2,1,3)$

c) $z=e^{-x}\cos y$, $(0,0,1)$

d) $z=\cos(2x-y)$, $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

16) Un depósito de forma de cilindro recto tiene 2 metros de radio por 3 de altura, queremos conocer la tasa de cambio de su volumen respecto del radio y después respecto de su altura.

El volumen del cilindro es $V = \pi\, r2\, h$ y el volumen con las dimensiones dadas es de 12 $\pi\ metros\ cubicos$

Mida la variación de este volumen al aumentar, primero su radio y después su altura, para ver que nos conviene más modificar para aumentar su capacidad.

Plano Tangente – Función Afín

17) Dar el concepto de plano tangente. Trabajarlo en forma explícita e implícita.

a) $f(x,y)=x^3y-2y^2x$ en el punto $(3,-1,-33)$.

b) $f(x,y)=x^3-3x^2y+y^2$ en $(1,-2,\ f(1,-2))$.

c) $f(x,y)=e^{3x\cos(y)}$ en $(0,\pi,1)$.

Derivadas de Orden Superior

18) Calcule $D_{xx} f(x,y)$, calcule $D_{yy} f(x,y)$, pruebe que $D_{xy} f(x,y)$ y $D_{yx} f(x,y)$ son iguales.

a) $f(x,y) = e^{2x} sen(y)$

b) $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

19) Verifique $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$, siendo:

a) $f(x,y,z) = e^{-x}\ senyz$

b) $f(x,y,z) = x^2 - 3xy + 4yz + z^3$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Dominio de funciones Vectoriales Reales

1)

a) $f(x,y)=Ln(1+2x^2+4y^2)$

b) $f(r,s)=e^{2r}\ \sqrt{s^2-1}$

c) $f(x,y)=x^3-2y^2+8xy$

d) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2-1}$

e) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

f) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Representación gráfica de superficies

2)

a) $f(x,y)=6$

b) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

d) $f(x,y)=y^2-x^2$

Curvas y Superficies de nivel

3)

a) $f(x,y)=x^2+y^2$

b) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}$

c) $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ para 8, 6, 4, 2 y 0

d) $f(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$ para 0, 1, 2, 3 y 4

e) $f(x,y)=x^2-y^2$ para 16, 9, 4, 0, -4, -9 y -16

Límites y continuidad de funciones reales

4)

a) Sea $f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$. Demuestre que no existe limite en (0,0,0). Analice la continuidad en dicho punto.

b) Sea $f(x,y,z)=\frac{x+y+z}{x+y-z}$. Demuestre que no existe el límite en (0,0,0). Analice la continuidad en dicho punto.

5) Dada la función $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ demuestre que no existe el limite dado en el origen.

6) Estudiar en (0,0) los limites radiales y dobles de las funciones:

a) $f(x,y)=\dfrac{x-y-xy}{x+y}$; b) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Derivadas parciales

7) Evaluar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ de los ejercicios que se presentan a continuación e interpretar geométricamente el resultado obtenido.

a) $f(x,y)=\cos\left(x^3-3y^2x\right)$ b) $f(x,y)=3^{xy}-\ln\left(x^2y\right)$

Plano Tangente – Función Afín

8)

a) $f(x,y)=x^3-3x^2y+y^2x$ en $(-1,2,-11)$.

b) $f(x,y)=x^3+8y^3, \quad p=(0,0)$

c) $f(x,y)=x\ arctg(arctg\ y), \quad p=(1,0)$

Derivadas de Orden Superior

9)

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y}{x^2}$

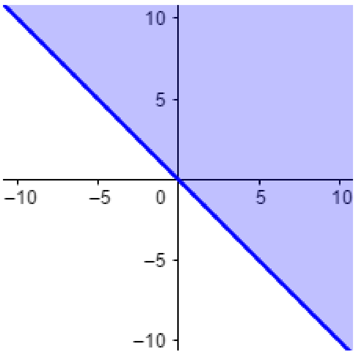
b) $f(x,y)=xy+x^2y^3$

c) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

RESPUESTAS TRABAJO PRACTICO N°2

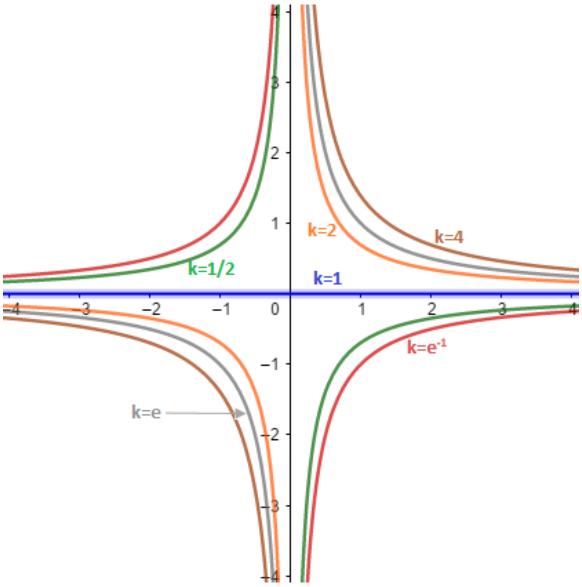
Dominio de Funciones Vectoriales Reales

2) a) $Df = \{(x,y) \mid y \geq -x\}$



Curvas y superficies de nivel

6) a) $C_k = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid e^{xy} = k\}$; $y = \dfrac{\ln(k)}{x}$



Límites de funciones reales de $\Re^2 \to \Re$

9) a) 1 b) -1 c) 3 d) $\frac{3}{2}$

11) Si el limite doble existe, lo cual se verifica mediante la definición de limite, su valor es 0

12) Si el limite doble existe, lo cual se verifica mediante la definición de limite, su valor es 0

13) a) Discontinuidad esencial

b) Discontinuidad evitable

c) Discontinuidad esencial

d)Continua en (0,0)

Derivadas Parciales

14)

a) $\frac{df}{dx} = \frac{2x}{x^2 - 2sen(y)}$; $\frac{df}{dy} = \frac{-2\cos(y)}{x^2 - 2sen(y)}$

b) $\frac{df}{dx} = \frac{y}{1+(xy)^2}$; $\frac{df}{dy} = \frac{x}{1+(xy)^2}$

c) $\frac{df}{dx} = \cos[tg(4x-2y)]4\sec^2(4x-2y)$; $\frac{df}{dy} = \cos[tg(4x-2y)](-2)\sec^2(4x-2y)$

d) $\frac{df}{dx} = \frac{x}{\sqrt{\ln(x^2+y^2)}(x^2+y^2)}$; $\frac{df}{dy} = \frac{y}{\sqrt{\ln(x^2+y^2)}(x^2+y^2)}$

e) $\frac{df}{dx} = z(xy)^{z-1}y$; $\frac{df}{dy} = z(xy)^{z-1}x$; $\frac{df}{dz} = (xy)^z \ln(xy)$

f) $\frac{df}{dx} = x^{yz-1}(yz)$; $\frac{df}{dy} = x^{yz}z\ln(x)$; $\frac{df}{dz} = x^{yz}y\ln(x)$

15) a) $\frac{dg}{dx}(1,1)=-2$; $\frac{dg}{dy}(1,1)=-2$

b) $\frac{dh}{dx}(-2,1)=-4$; $\frac{dh}{dy}(-2,1)=-2$

c) $\frac{dz}{dx}(0,0)=-1$; $\frac{dz}{dy}(0,0)=0$

d) $\frac{dz}{dx}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})=-1$; $\frac{dz}{dy}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$

16) Para aumentar la capacidad del tanque conviene incrementar su radio porque el valor de la derivada parcial respecto a “r” es mayor

Plano Tangente – Función Afín

17) a) $-29x+39y-z+93=0$

b) $15x-7y-z-18=0$

c) $-3x-z+1=0$

Derivadas de Orden Superior

18) a) $f_{xx}=4e^{2x}sen(y)$; $f_{yy}=-e^{2x}sen(y)$; $f_{xy}=f_{yx}=2e^{2x}\cos(y)$

b) $f_{xx}=2arctg\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{2xy}{x^2+y^2}$; $f_{yy}=2arctg(\frac{y}{x})+\frac{2xy}{x^2+y^2}$; $f_{xy}=f_{yx}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

19) a) $f_{xyy}=f_{yxy}=f_{yyx}=e^{-x}sen(yz)z^2$;

b) $f_{xyy}=f_{yxy}=f_{yyx}=0$

RESPUESTAS EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Límites y continuidad de funciones reales

4) a) Discontinuidad esencial

b) Discontinuidad esencial

6) a) Los limites radiales son distintos para cada recta que pasa por el origen, por lo tanto, el limite doble no existe.

b) Los limites radiales son distintos para cada recta que pasa por el origen, por lo tanto, el limite doble no existe.

Derivadas parciales

7) a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=8,999$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=11,999$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=17,77$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=9,387$

Plano Tangente – Función Afín

8) a) $19x-7y-z+22=0$

b) $z=0$

c) $z-y=0$

Derivadas de Orden Superior

9) a) $f_{xx}=\frac{2}{y}-\frac{6y}{x^4}$; $f_{yy}=\frac{2x^2}{y^3}$; $f_{xy}=f_{yx}=\frac{-2x}{y^2}+\frac{2}{x^3}$

b) $f_{xx}=2y^3$; $f_{yy}=6yx^2$; $f_{xy}=f_{yx}=1+6xy^2$

c) $f_{xx}=\frac{6x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^3}$; $f_{yy}=\frac{6y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^3}$; $f_{xy}=f_{yx}=\frac{8xy}{(x^2+y^2)^3}$