MATRIZ JACOBIANA – DIFERENCIAL TOTAL
INCREMENTO DE LA FUNCIÓN

Matriz Jacobiana

Defina **Matriz Jacobiana**, cuál es su relación con la derivada total y cómo se la obtiene.

1) Hallar la matriz jacobiana de las siguientes funciones.

a) $f(x,y,z)=\left(x^2\ ,-2xy\ ,\ yz^2\right)$

b) $f(x,y)=\left(x+y\ ,\ x-y\ ,\ x^2+y^2\right)$

c) $f(x,y,z)=\left(x^2+e^y\ ,\ x+y\,senz\right)$

2) Sea f la función vectorial definida por $f(x,y)=\begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$; encuentre la derivada de f en los siguientes puntos.

a) (x,y) ; b) (a,b) ; c) $(1,0)$; d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Diferencial Total - Incremento de la Función

3) Dadas las siguientes funciones, encontrar la diferencial total y el incremento de la función, en los puntos indicados para los incrementos señalados en cada uno de los casos.

a) $f(x,y,z)=\left(x\,seny\,,z+\ln x\right)$ Punto $(1\ ,\ 0\ ,\ 2)$ $\Delta X=(0.1\ ,\ 0.2\ ,\ 0.1)$

b) $f(x,y)=\left(x^3y^2\,,2x\,,x^2-y\right)$ Punto $(1\ ,\ 2)$ $\Delta X=(0.1\ ,\ 0.2)$

c) $f(x,y)=\left(x^2-y^2\,,2xy\right)$ Punto $(1\ ,\ 0)$ $\Delta X=(0.1\ ,\ 0.2)$

4) En los siguientes problemas compara los valores de $\Delta z \wedge dz$ ($\Delta z = incremento\ de\ la\ función$; *dz = diferencial de la* función) para la función indicada cuándo (x,y) varía del primer punto al segundo.

a) $z=3x+4y+8$ $(2,4)\ a\ (2.2\ ,\ 3.9)$

b) $z=(x+y)^2$ $(3,1)\ a\ (3.1\ ,\ 0.8)$

c) $z=2x^2y+5y$ $(0,0)\ a\ (0.2\ ,\ -0.1)$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Matriz jacobiana

1)

a) $f(x,y,z)=(yz\ ,\ xz\ ,\ xy)$

b) $f(x,y,z)=(e^x\cos y\ ,\ e^x\,seny\ ,\ z)$

2) Encuentre la matriz Jacobiana de cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(t)=\begin{pmatrix} sent \\ \cos t \end{pmatrix}$ en $t=\pi/4$

b) $f(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ en $t=1$

c) $g(x,y)=\begin{pmatrix} x+y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$ en $(x,y)=(1\ ,\ 2)$

d) $g(u,v)=(\ u+v\ ,\ u-v\ ,\ 1)$ en $(u,v)=(1\ ,\ 0)$

e) $T(u,v)=\begin{pmatrix} u\cos v \\ u\,senv \\ v \end{pmatrix}$ en $(u,v)=(1\ ,\ \pi)$

f) $f(x,y,z)=(x+y+z\ ,xy+yz+xz\ ,xyz)$ en (x,y,z)

g) $f:\Re^2\to\Re,\ f(x,y)=256,\quad \mathrm{p}=(x_0,y_0)$

h) $f:\Re^2\to\Re^3,\ f(x,y)=(sen\,x, sen\,x\cdot\cos y,\cos y),\quad \mathrm{p}=(0,\frac{\pi}{2})$

i) $f:\Re^3\to\Re^2,\ f(x,y,z)=\left(\dfrac{1+x^2}{1+z^2},(z+x^2)(z+y^2)\right),\quad \mathrm{p}=(1,1,1)$

j) $f:\Re^4\to\Re,\ f(x,y,z,u)=xy^2z^3u^4\ ,\quad \mathrm{p}=(1,1,1,1)$

3) Dadas las siguientes funciones, encontrar la diferencial total y el incremento de la función, en los puntos indicados para los incrementos señalados en cada uno de los casos.

a) $f(x,y)=(x^2+y^2\ ,x+2y,\ \ 2x)$ Punto $(1\ ,\ 1)$ $\Delta X=(0.1\ ,\ 0.1)$

b) $f(u,v)=(u\cos v,u\,senv,v)$ Punto $(1\ ,\ \pi)$ $\Delta X=(0.1\ ,\ 0.2)$

f) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\,,\cos(xy)\,,2x+2y\right)$ Punto $(0\,,1)$ $\Delta X=(0.01\,,\,0.01)$

g) $f(x,y,z)=\left(x^2yz\,,2x+3y^2z\right)$ Punto $(1\,,1\,,2)$

$\Delta X=(0.01\,,\,0.02\,,\,0.02)$

4) En los siguientes problemas compara los valores de $\Delta z \wedge dz$ ($\Delta z = incremento\ de\ la\ función;$ *dz = diferencial de la* función) para la función indicada cuándo (x,y) varía del primer punto al segundo.

a) $z=9-x^2-y^2$ $(1,2)\ a\ (1.05\,,\,2.1)$

b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(1,2)\ a\ (1.05\,,\,2.1)$

c) $z=\dfrac{x}{y}$ $(1,2)\ a\ (1.05\,,\,2.1)$

RESPUESTAS TRABAJO PRACTICO N°3

1) a) $F'(X)=\begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ -2y & -2x & 0 \\ 0 & z^2 & 2zy \end{pmatrix}$ b) $F'(X)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$

c) $F'(X)=\begin{pmatrix} 2x & e^y & 0 \\ 1 & sen(z) & y\cos(z) \end{pmatrix}$

2) a) $F'(x,y)=\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ b) $F'(a,b)=\begin{pmatrix} 2a & -2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$ c) $F'(1,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $F'\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

3) a) $df=\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$; $\Delta f=\begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.19 \end{pmatrix}$ b) $df=\begin{pmatrix} 2 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\Delta f=\begin{pmatrix} 2.44 \\ 0.2 \\ 0.01 \end{pmatrix}$

c) $df=\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}$; $\Delta f=\begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.44 \end{pmatrix}$

4) a) $\Delta z=0.2$; $dz=0.2$ b) $\Delta z=-0.79$; $dz=-0.8$

c) $\Delta z=-0.508$; $dz=-0.5$

RESPUESTAS EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Matriz jacobiana

1) a) $F'(x)=\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$ b) $F'(x)=\begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x sen(y) & 0 \\ e^x sen(y) & e^x\cos(y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) a) $F'(\pi/4)=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ b) $F'(1)=\begin{pmatrix} e \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $g'(1,2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $g'(1,0)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $F'(1,\pi)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $F'(x,y,z)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & y+x \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$ g) $F'(x_0,y_0)=(0,0)$

h) $F'\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i) $F'(1,1,1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

j) $F'(1,1,1,1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3) a) $df=\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$; $\Delta f=\begin{pmatrix} 0.42 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ b) $df=\begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$; $\Delta f=\begin{pmatrix} -0.0781 \\ -0.2185 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

c) $df=\begin{pmatrix} 0.02 \\ 0 \\ 0.04 \end{pmatrix}$; $\Delta f=\begin{pmatrix} 0.02 \\ -0.0001 \\ 0.04 \end{pmatrix}$ d) $df=\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.32 \end{pmatrix}$; $\Delta f=\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.32 \end{pmatrix}$

4) a) $dz=-0.5$; $\Delta z=-0.5125$

b) $dz=0.1118$; $\Delta z=0.1118$

c) $dz=0$; $\Delta z=0$