FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE REAL. PARAMÉTRICAS

Una función vectorial de variable real o también llamada función paramétrica, es una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales y cuyo rango o imagen es un conjunto de vectores g: $R \to R^m$.
Las gráficas de estas funciones son curvas en el plano o curvas en el espacio ya sea la g: $R \to R^2$, g: $R \to R^3$

<u>Curvas en el Plano.</u> $R \to R^2$

Si g1(t) y g2(t) son funciones continuas en t en un intervalo (a, b), entonces las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x &= g1(t) \\ y &= g2(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{para } a \leq t \leq b$$

Se denominan ecuaciones paramétricas, siendo t el parámetro. El conjunto de puntos, m(x, y) obtenidos cuando t varía en el intervalo (a, b) representa la gráfica de las ecuaciones paramétricas.

El par formado por las ecuaciones paramétricas definen, la función paramétrica g(t)=[g1(t),g2(t)] y el gráfico de su imagen representa *una curva en el plano o una curva plana.*

Curvas en el espacio: $R \rightarrow R^3$

Si g1(t), g2(t), y g3 (t) son funciones continúas en t en un intervalo (a, b), entonces las ecuaciones:

$$x = g1(t)\ ,\ y = g2(t)\ ,\ z = g3(t) \qquad a \leq t \leq b$$

Las mismas representan las ecuaciones paramétricas, que definen g(t)=[g1(t),g2(t),g3(t)] y el gráfico de su imagen representa una curva en el espacio.

Al trabajar con funciones paramétricas nos interesa especialmente el gráfico de su imagen, ya sea en el plano o en el espacio.

Métodos para graficar la imagen de éstas funciones.

1) Dada una curva descripta por ecuaciones paramétricas, construir una tabla donde le damos valores al parámetro t.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x = t^2-4 \\ y = t/2 \end{array}\right\} \quad g(t)=(t^2-4 , t/2) \quad -2 \leq t \leq 3$$

t	x	y
-2	0	-1
-1	-3	-1/2
0	-4	0
1	-3	1/2
2	0	1
3	5	3/2

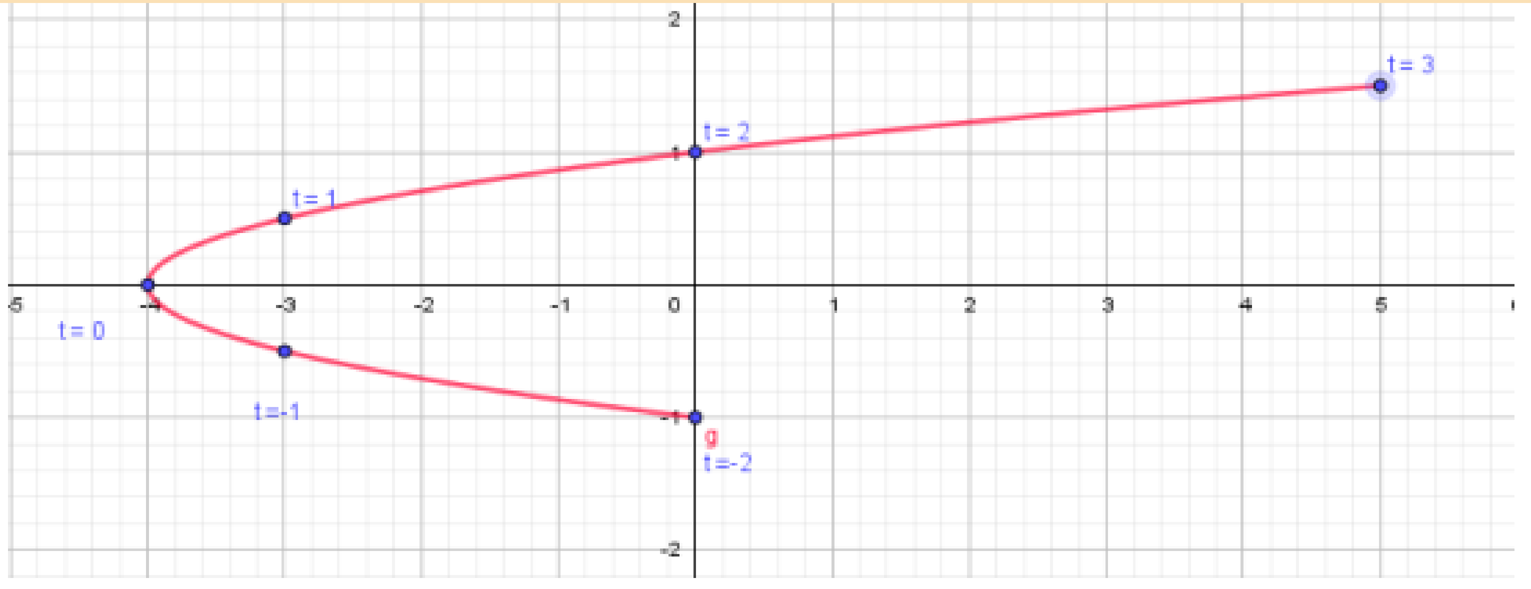


Grafico 1

Para pensar... Si tengo el dato de un punto sobre la curva dado por el par ordenado (0,1), y tengo la función $g(t)=(t^2-4, t/2)$. ¿Cómo calculo el valor de t?

2) Eliminar el parámetro t y encontrar la ecuación cartesiana.

Dada la ecuación paramétrica $g(t) = (\underbrace{t^2-4}_{x}, \underbrace{\frac{t}{2}}_{y})$ $\longrightarrow$ $x = t^2-4 \;\wedge\; y = \frac{t}{2}$ $\longrightarrow$ $t = \pm\sqrt{x+4} \;\wedge\; t = 2y$

Una vez eliminado el parámetro tenemos la ecuación cartesiana $y = \pm\frac{\sqrt{x+4}}{2}$ como la ecuación de una parábola de eje horizontal y vértice (-4,0). Destacar la palabra ECUACIÓN para representar el lugar geométrico de la gráfica representada en el gráfico 1 .

El gráfico de toda la función de g(t) será una parábola en R^3.

Ejemplo: <u>Gráfico de la Imagen</u>. $g(t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t)$

Gráfico de la I(f) =

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ \underline{y = r \operatorname{sen} t} \\ x^2 + y^2 = r^2 \underbrace{(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}_{1} \end{cases} \Rightarrow X^2 + y^2 = r^2$$

La imagen es un circulo de radio r

(Elevamos al cuadrado a ambos miembros de las igualdades y sumamos.)

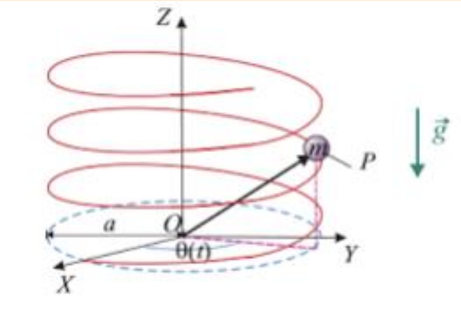
<u>Gráfico de la función</u>.

Si r= 1 , $g(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Generamos las ternas para los distintos valores de t. $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$

Para $t = 0$; (1,0,0)

Para $t = \frac{\pi}{4}$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

Para $t = \frac{\pi}{2}$; $\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$

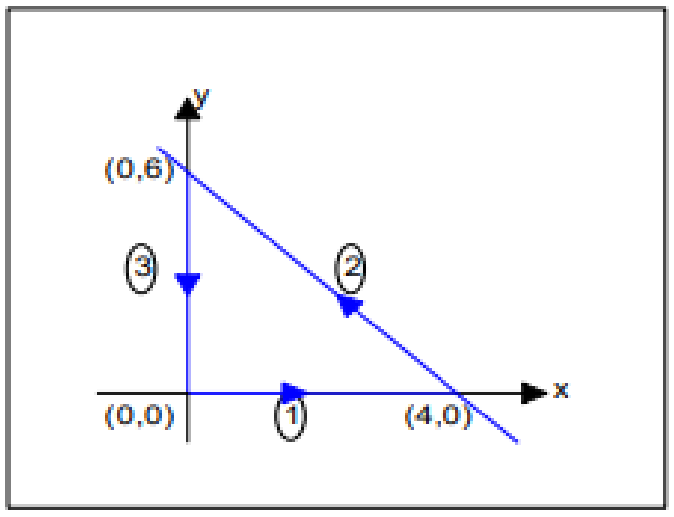


Esto significa que la curva está en un cilindro circular recto de radio 1 centrado en el eje z. La curva crece en un espiral ascendente

Ejemplo . Desparametrizar $g(t) = (a \cos t \ , \ b \text{ sen } t)$

Ejemplo .

Dados los siguientes gráficos, expresar las ecuaciones que parametricen cada tramo del recorrido, es decir encontrar la g(t) de cada trayectoria.



Tramo 1: $x = t \quad , \quad y = 0$

$g(t) = (t \, , 0) \qquad 0 \leq t \leq 4$

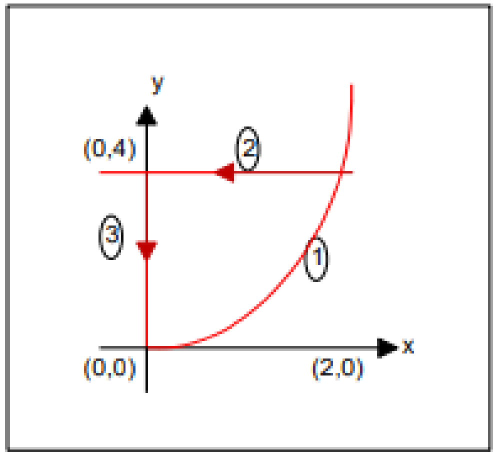
Tramo 2: ec. de la recta que pasa por $P_1(4,0)$ $P_2(0,6)$

$x = t \qquad y = -3/2 \, x + 6$

$g(t) = (t \, , -3/2 \, t + 6) \qquad 0 \leq t \leq 4$

Tramo 3: $x = 0 \qquad y = t$

$g(t) = (0 \, , t) \qquad 0 \leq t \leq 6$



Límite de una función vectorial de variable real.

Siendo g(t) = [g1(t), g2(t),…,gm(t)]

El límite de una función vectorial se define obteniendo los límites de cada una de sus funciones componentes.

$$\lim_{t \to 0} = [\lim_{t \to 0} g_1(t), \lim_{t \to 0} g_2(t), \ldots\ldots, \lim_{t \to 0} g_m(t)]$$

Ejemplo. g(t)= (sen t, cos t)

RECTA TANGENTE

La recta tangente es la recta que **contiene** al vector tangente y la podemos obtener mediante la siguiente expresión.

$$r(t) = g(t_0) + t\, g'(t_0)$$

Ejemplo: $g(t) = (t, t^2)$ $t_0 = 1$

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

$\overrightarrow{g(t_0)}$ = vector posición

$\overrightarrow{V} = g'(t)$ **Vector Velocidad**

$V(t) = \| g'(t) \| =$ **Velocidad instantánea o rapidez.**

$\| g'(t) \|' = (a_t)$ **Componente escalar de la aceleración tangencial**

$\overrightarrow{a}(t) = g''(t) =$ **Vector aceleración**

$\| g''(t) \| =$ **aceleración instantánea.**

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\|g'(t)\|} g'(t)$$ **Dirección del movimiento**

$\overrightarrow{a_t} = a_t \cdot \hat{\tau}$ **Componente vectorial de la aceleración tangencial** (multiplicamos tao por la componente escalar de la aceleración tangencial)

$(a_t)^2 = (a_t)^2 + (a_n)^2$ **Componente escalar de la aceleración normal** (teniendo la aceleración instantánea y la componente escalar de la aceleración tangencial, podemos obtener la a_n.

LONGITU DE ARCO

Si una función g(t) es continua por tramos, la longitud de arco nos permite calcular longitudes de curvas mediante la siguiente expresión:

$$l_c = \int_a^b \left\| g'(t_k) \right\| dt$$

Ejemplo: g(t) = (r cos t , r sen t) $\quad\quad 0 \le t \le 2\pi$