DIAGONALIZACIÓN de MATRICES

Valores y Vectores Propios (autovalores y autovectores)

Consideremos un espacio vectorial $(V,+,R,.)$ y un endomorfismo $f: V \to V$

Nota: endomorfismo es cuando las dimensiones de $W = V$

Diremos que λ es un *valor propio* de una matriz A si existe en V un vector $\vec{X} \neq \vec{\mathbf{0}}$ en $\Re^n$, que satisface la igualdad $A.\vec{X} = \lambda.\vec{X}$ donde al vector $\vec{X}$ lo llamaremos *vector propio* asociado al valor propio λ.

λ es un *valor propio* de $A \Leftrightarrow \exists\ \vec{X} : A\,\vec{X} = \lambda\vec{X}$ con $\vec{X} \neq \vec{\mathbf{0}}$

Ejemplo1:

$f(x, y) = (x + y, x + y) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hacemos como ejemplo que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ es un valor que lo hemos calculado previamente no se inventa cualquier vector.

Reemplazamos en la igualdad anterior $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\lambda_1 = \mathbf{2} \ \wedge \ X_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Ejemplo2: hacemos lo mismo

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, $\lambda_1 = 1$ es un valor propio con su correspondiente vector propio $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

de manera similar $\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = -2. \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\lambda_2 = -2$ es un valor propio con su correspondiente vector propio $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Estos serán los únicos valores propios de A

Nuestro objetivo es ahora, dada la transformación o la matriz (siempre trabajamos dentro de un mismo espacio vectorial) es decir siempre con matrices cuadradas, veremos como calcular los **valores propios o autovalores**, para después calcular los **vectores asociados a esos autovalores.**

CÁLCULO DE LOS AUTO-VALORES

Polinomio Característico

Para obtener el polinomio característico, armamos una matriz que la vamos a llamar **matriz M**, de la siguiente manera: a la matriz A le restamos la identidad multiplicada por λ $\Rightarrow (A - \lambda \,.\, I_d)$

$\Rightarrow$ diremos que

λ es un valor propio de $A \Leftrightarrow p(\lambda) = \det\left(A - \lambda . I_d\right) = \mathbf{0}$

Ejemplo

Encontrar los valores de λ dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Si quisiéramos expresarla como una transformación lineal decimos:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \quad f(x,y) = (\mathbf{3}x - \mathbf{2}y \,, -x + \mathbf{2}y)$$

$$p(\lambda) = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{pmatrix}\right] = \mathbf{0}$$

$$p(\lambda) = \det\left[\begin{pmatrix} \mathbf{3}-\lambda & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2}-\lambda \end{pmatrix}\right] = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{3}-\lambda)(\mathbf{2}-\lambda) - (\mathbf{-2})(\mathbf{-1}) = \mathbf{0}$$

$$p(\lambda) = (\mathbf{3}-\lambda)(\mathbf{2}-\lambda) - \mathbf{2} = \mathbf{0}$$

Donde decimos que $p(\lambda) = \lambda^2 - \mathbf{5}\,\lambda + \mathbf{4} = \mathbf{0}$ donde $\lambda_1 = \mathbf{1} \wedge \lambda_2 = \mathbf{4}$

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4\,.\,4}}{2} = \lambda_1 = \mathbf{1} \quad \lambda_2 = \mathbf{4}$$

CÁLCULO DE LOS VECTORES PROPIOS

- Construir una matriz $M_{\lambda_i} = A - \lambda_i I$ para cada valor de λ_i
- Determinar un sistema lineal homogéneo para cada λ_i, $M_{\lambda_i} X = \overline{\mathbf{0}}$ y el vector o los vectores solución serán los vectores propios asociados al correspondiente valor propio.
- Los vectores propios serán las columnas de una matriz que llamaremos *P.*

Ejemplo:

De la matriz anterior donde le calculamos los auto-vectores $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \mathbf{1} \quad \wedge \quad \lambda_2 = \mathbf{4}$

Para $\lambda_1 = \mathbf{1}$

- Construimos la matriz $M_{(\lambda)}$

$$M_{\lambda=1} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} - \mathbf{1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- Determinamos el sistema lineal homogéneo $M_{\lambda=1} X = \overline{\mathbf{0}}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} : \begin{cases} \mathbf{2}x & \mathbf{-2}y & = & \mathbf{0} \\ -x & +y & = & \mathbf{0} \end{cases}$$ resolvemos por Gauss-Jordan

Obtenemos:

$$\left|\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right|$$ Analizamos por Roche –Frobenius

$$\rho(A) = \mathbf{1} \ \wedge \ n = \mathbf{2} \ \to h = \mathbf{1} \{ \ x \quad -y \quad = \quad \mathbf{0} \qquad \begin{cases} x & = & y \\ y & = & y \end{cases} \quad : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$ donde

el auto-vector asociado al valor de $\lambda = \mathbf{1}$ es $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Lo mismo hacemos para $\lambda_2 = \mathbf{4}$

$$M_{\lambda=4} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} - \mathbf{4}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\lambda=4} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

- Determinamos el sistema lineal homogéneo $M_{\lambda=1}X = \bar{\mathbf{0}}$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{cases} -1x & -2y & = & 0 \\ -x & -2y & = & 0 \end{cases}$ resolvemos por Gauss-Jordan

Obtenemos:

$\left|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \rho(A) = 1 \ \wedge \ n = 2 \ \rightarrow h = 1 \ \{ \ x \quad +2y \ = \ 0 \qquad \begin{cases} x & = & -2y \\ y & = & y \end{cases} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

donde el auto-vector asociado al valor de $\lambda = 4$ es $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matriz Diagonal

Es aquella matriz donde los elementos de la diagonal principal son los valores propios, y los demás son todos nulos.

"D" Matriz Diagonal $\Leftrightarrow d_{ij} = 0 \ : \ i \neq j \qquad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$

La matriz A es diagonalizable, $\Leftrightarrow \ \exists \ P^{-1} \ : \ P^{-1} \ A.P = D$

Ejemplo:

Seguimos con el ejemplo que venimos haciendo, encontramos los valores de $\lambda_1 = 1 \ \wedge \ \lambda_2 = 4$ y los auto-vectores para $\lambda = 1$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y para $\lambda = 4$ es $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,ahora determinaremos la matriz diagonal: $\Leftrightarrow \ \exists \ P^{-1} \ : \ P^{-1} \ A.P = D$

Armamos la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde las columnas de la matriz P son los auto-vectores

Calculamos su inversa: $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ luego resolvemos: $P^{-1} \ A.P = D$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si la matriz A es diagonalizable, entonces los elementos de la diagonal principal de la matriz D, son las raíces del polinomio característico.

La matriz A de orden *n x n* es diagonalizable si y solo si, admite "n" vectores propios linealmente independientes.

$\{p^1 \ldots\ldots p^n\}$ vectores propios asociados a los valores propios $\{\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n\}$

$$\Leftrightarrow \{p^1 \ldots\ldots p^n\} \text{ L. I.}$$

- Si el polinomio característico tiene: *todas sus raíces distintas*, entonces aseguramos que la matriz A **es diagonalizable**.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots\ldots \neq \lambda_n \;\Rightarrow\; \text{A es diagonalizable}$$

- Si el polinomio característico tiene *raíces múltiples* puede suceder que la matriz A sea:

  1- *Diagonalizable,* esto sucede cuando el grado de indeterminación del sistema lineal homogéneo (h), es igual al grado de multiplicidad de las raíces múltiples:

$$\text{A es Diagonalizable} \Leftrightarrow n - \rho(A_\lambda) = r \;:$$

r = grado de multiplicidad $\wedge$

$n - \rho(A_\lambda)$ = al grado de indeterminación = h

$$\boxed{\Rightarrow h = r}$$

  2- *No Diagonalizable*, esto sucede cuando el grado de indeterminación del sistema lineal homogéneo, sea menor al grado de multiplicidad de las raíces.

$$\text{A No Diagonalizable} \Leftrightarrow n - \rho(A_\lambda) < r$$

$$\boxed{\Rightarrow h < r}$$

Ejemplo usando una transformación de $\Re^3 \to \Re^3$

$f(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 - 4x_3\ ,\ 4x_1 + x_2 + 4x_3\ ,\ 2x_1 + 3x_3)$, la matriz asociada a la transformación es:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los valores propios

$$\det\left[\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\left[\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & -4 \\ 4 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$(1-\lambda)\left[(-3-\lambda)(3-\lambda)+8\right] = 0$ Para que sea cero el polinomio decimos si $(1-\lambda) = 0$

Entonces decimos que $\lambda_1 = 1$

Luego hacemos $\left[(-3-\lambda)(3-\lambda)+8\right] = 0$ resolviendo la expresión dentro del corchete

obtenemos $\lambda^2 - 1 = 0$ entonces $\lambda_2 = 1 \wedge \lambda_3 = -1$ concluimos que

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = -1$

Cálculo de los vectores propios

$$\left[\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & -4 \\ 4 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\left[\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ h = 2 $\wedge$ r = 2 : obtenemos dos vectores L. I.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ los vectores propios son } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_3 = -1$

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

h = 1: obtenemos un vector L. I.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ el vector propio es } \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

A es diagonalizable si se cumple que $P^{-1}.A.P = D$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Concluimos que A es diagonalizable, se cumple el caso 1)

Ejemplo 2:

f $(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ x_3)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable o no diagonalizable?

$$\det\left[\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \det\left[\begin{pmatrix}1-\lambda&1&0\\0&1-\lambda&1\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}\right]=0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$$

<u>Cálculo de los vectores propios</u>

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} : \text{h} = 1 \wedge \text{r} = 3 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ L. D.}$$

Observamos h < r lo que significa que los auto-vectores son linealmente dependientes por lo tanto no existe la inversa de P.

Concluimos que la matriz es no diagonalizable.

<u>Ejemplo 3</u>**: Verificar si la matriz nula es o no diagonalizable**

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\det\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \det\left[\begin{pmatrix}-\lambda&0&0\\0&-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{pmatrix}\right]=0 \quad -\lambda^3=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Los vectores propios asociados a $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ serán:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ L.I.}$$

$\Rightarrow$ **hace que A sea diagonalizable**

$\exists\ P^{-1}$ **se cumple** $P^{-1}.A.P=D$