Análisis Matemático II

UTN
Facultad
Regional
Villa Maria

CAMPOS VECTORIALES – INTEGRALES DE LINEA – TEOREMA DE GREEN

1) Dibuje varios vectores representativos de los siguientes campos vectoriales:

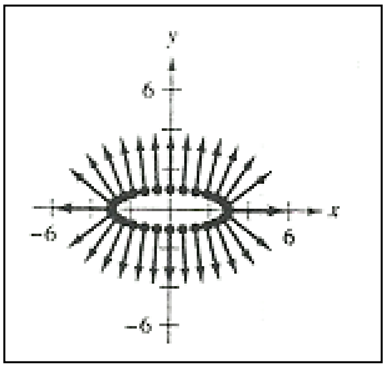
a) $f(x,y)=(-x,y)$, para $x^2+y^2\leq 4$

b) $f(x,y)=(1,x)$, para $-1\leq x\leq 2 \qquad y=1 \wedge y=0$

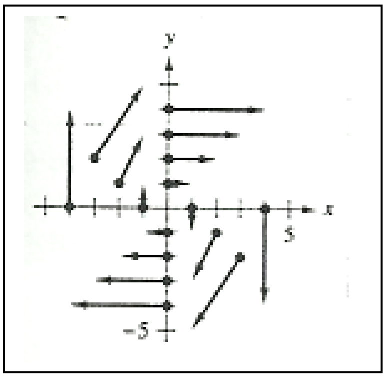
c) $f(x,y)=\left(x,\dfrac{y}{2}\right)$

2) En los ejercicios que se dan a continuación, relacione cada campo vectorial con su gráfica.

a)



b)



1) $\mathbf{F}(x,y)=x\mathbf{j}$ 2) $\mathbf{F}(x,y)=x\mathbf{i}+3y\mathbf{j}$ 3) $\mathbf{F}(x,y)=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$

3) Halle un campo vectorial a partir de la función vectorial real dada. Verifique si es conservativo.

a) $f(x,y)=5x^2+3xy+10y^2$

b) $f(x,y)=sen3x\cdot\cos 4y$

c) $f(x,y,z)=z-ye^{-x^2}$

d) $f(x,y)=xy\ln(x+y)$

4) Averigüe si el campo vectorial es conservativo. Justifique la respuesta.

a) $\mathbf{F}(x,y)=5y^2(3y\mathbf{i}-x\mathbf{j})$

b) $\mathbf{F}(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$

c) $\mathbf{F}(x,y)=\dfrac{2}{y^2}e^{\frac{2x}{y}}(y,-x)$

d) $\mathbf{F}(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}(y\mathbf{i}-x\mathbf{j})$

5) Discutir si el campo de vectores es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

a) $\mathbf{F}(x,y)=2xy\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}$

b) $\mathbf{F}(x,y)=x\,e^{x^2y}(2y,\ x)$

c) $\mathbf{F}(x,y)=(3x^2y^2,\ 2x^3y)$

d) $\mathbf{F}(x,y)=e^x(\cos y\mathbf{i}+sen y\mathbf{j})$

e) $\mathbf{F}(x,y,z)=sen(y)\mathbf{i}-x\cos(y)\mathbf{j}+\mathbf{k}$

f) $\mathbf{F}(x,y,z)=e^x(y,x,xy)$

g) $\mathbf{F}(x,y,z)=(2xy,x^2+z^2,2zy)$

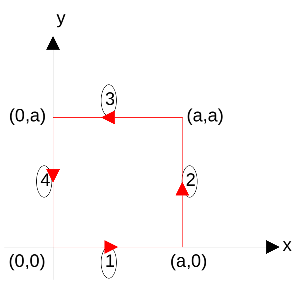
6) En los puntos siguientes, calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}$, al mover una partícula a lo largo de la trayectoria que se especifica:

a) $g(t)=(\cos t,sent)$ $\quad F(x,y)=(x,y)$ $\quad 0\le t\le 2\pi$

b) $g(t)=(t,t^2)$ $\quad F(x,y)=(x,2y)$ $\quad 1\le t\le 2$

c) $g(t)=(\cos^3 t,sen^3 t,t)$ $\quad F(x,y,z)=\left(senz,\cos z,-(xy)^{1/3}\right)$ $\quad 0\le t\le 7/2\,\pi$

7) Determine el trabajo realizado por el campo de fuerza $F(x,y)=(x^2+y^2,2xy)$, al mover una partícula en el sentido *antihorario* recorriendo la curva indicada en la figura.

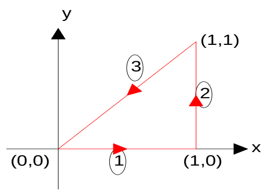


8) Determine el trabajo realizado por el campo de fuerza $F(x,y)=(x,xy)$. Recorriendo la curva indicada en la figura anterior.

9) Calcule el trabajo efectuado por una partícula a lo largo de la curva $y=x^2 \quad\wedge\quad z=0$ en el intervalo $-1\le x\le 2$ considerando que sobre la misma actúa una fuerza $F(x,y,z)=(x,\ y,\ z)$. Considerar *F* en $\overrightarrow{kg}$ y *x* en *mt*.

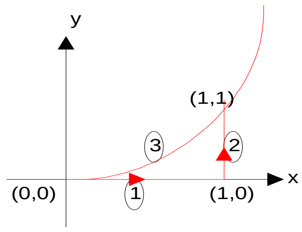
10) Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}$ al mover una partícula a lo largo de las trayectorias que se especifica en los siguientes gráficos:

a)



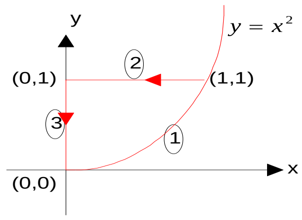
$F(x,y)=(x-1,xy)$

b)



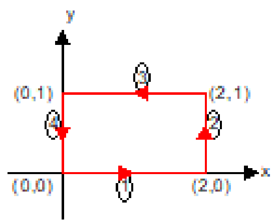
$F(x,y)=(y-1,x^2)$

c)



$F(x,y)=(x,y^2+x)$

d)



$F(x,y)=(x,y+2)$

11) Evaluar la integral de línea usando el teorema fundamental.

a) $\int_{\gamma} y\,dx + x\,dy \;,\quad \gamma:$ curva suave desde $(0,0)$ hasta $(3,8)$

b) $\int_{\gamma} \cos(x)sen(y)\, dx + sen(x)\cos(y)\, dy$, $\gamma:$ curva suave desde $(0,-\pi)$ hasta $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

12) Usar el Teorema de Green con el fin de calcular el valor de la integral de línea.

a) $\int_{\gamma} 2xy\, dx + (x+y)\, dy$ $\gamma:$Contorno de la región comprendida entre las gráficas $y=0$ e $y=4-x^2$.

b) $\mathbf{F}(x,y)=\left(x^{\frac{3}{2}}-3y\right)\mathbf{i}+\left(6x+5\sqrt{y}\right)\mathbf{j}$; $\gamma:$Contorno del triángulo de vértices $(0,0)$, $(5,0)$ y $(0,5)$.

13) En los ejercicios dados a continuación, calcular el rotacional de $\mathbf{F}$ en el punto indicado.

a) $\mathbf{F}(x,y,z)=xyz\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $P(1,2,1)$

b) $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2z\mathbf{i}-2xz\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$, $P(2,-1,3)$

14) Si se cumplen las hipótesis del Teorema de Green utilice el mismo para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva dada, positivamente orientada.

$$\oint (2y + \sqrt{1+x^5})dx + (5x - e^{y^2})\, dy \qquad C:\ y = x^2,\ x = y$$

15) Muestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y evalúe la integral.

$$\int_C 2x\, seny\, dx + \left(x^2\cos y - 3y^2\right)dy \qquad C:\ \textit{Cualquier trayectoria desde } (-5,0) \textit{ hasta } (5,1)$$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1) Dibuje varios vectores representativos de los siguientes campos vectoriales:

a) $f(x,y)=\left(\dfrac{1}{x^2+y^2},\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$, para $x^2+y^2\leq 4$

b) $f(x,y)=(0,x)$

c) $f(x,y)=(y,-x)$

2) En los puntos siguientes, calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza F, al mover una partícula a lo largo de la trayectoria que se especifica:

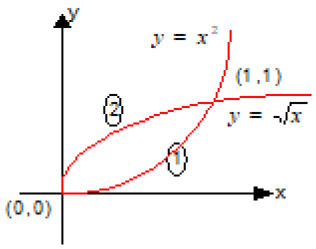
a) $g(t)=(t,t^2,t^3)$ $\quad F(x,y,z)=(x,x+y,z^2)$ $\quad 0\leq t\leq 1$

b) $g(t)=(t,|t|)$ $\quad F(x,y)=(x,y)$ $\quad -1\leq t\leq 1$

c) $g(t)=(t,t,t)$ $\quad F(x,y,z)=(x+z,2y,2z+y)$ $\quad 0\leq t\leq 1$

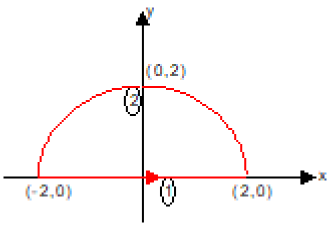
3) Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza **F**, al mover una partícula a lo largo de las trayectorias que se especifican en los siguientes gráficos:

a)

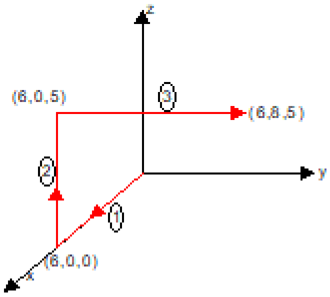


$F(x,y)=(x^2+y^2,-2xy)$

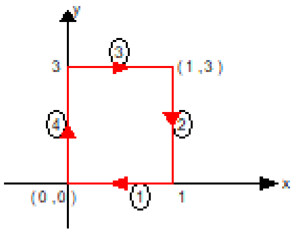
b)



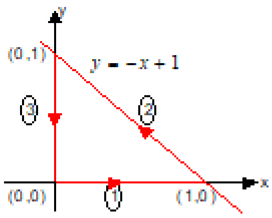
$F(x,y)=(x^2+y^2,-2xy)$

c) 

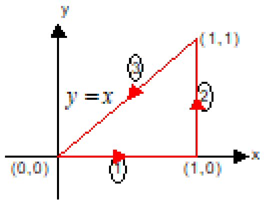
$F(x,y,z)=(y,z,x)$

d) 

$F(x,y)=(x-1,xy)$

e) 

$F(x,y)=(x\,,y^2+x)$

f) 

$F(x,y)=(x-y,y)$

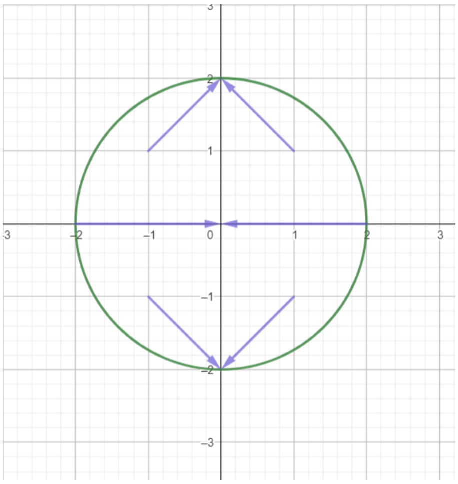
4) Dado $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\,sent \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

y el campo de fuerzas $F(x,y)=(y\ ,\ -x)$, dibuje la trayectoria y calcule el trabajo realizado, por medio de la integral de línea.

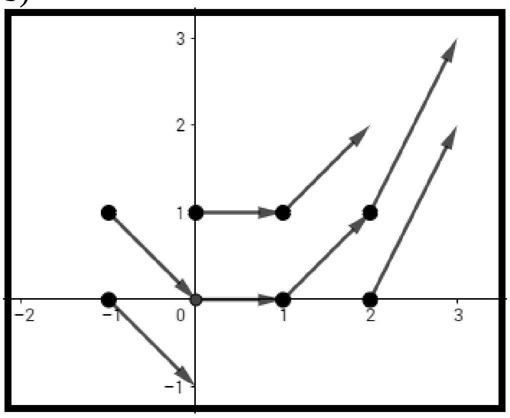
5) Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $F(x,y)=(x^2y-3x\ ,\ xy-2)$ a lo largo de la curva $y=x^2+2$ entre los puntos *(1, 3)* $\wedge$ *(3, 11)*

RESPUESTAS TRABAJO PRACTICO N° 8

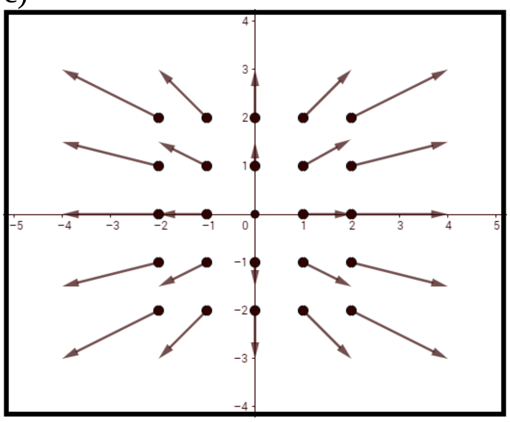
1) a)



b)



c)



2)

- La segunda función corresponde con el grafico número uno
- La tercera función corresponde con el grafico número dos

3)

a) $F(x,y)=(10x+3y,3x+20y)$

b) $F(x,y)=(3\cos(3x)\cos(4y),-4sen(3x)sen(4y))$

c) $F(x,y,z)=(ye^{-x^2}2x,-e^{-x^2},1)$

d) $F(x,y,z)=\left(y\ln(x+y)+\dfrac{xy}{x+y},x\ln(x+y)+\dfrac{xy}{x+y}\right)$

4)

a) Campo no conservativo b) Campo conservativo
c) Campo conservativo d) Campo no conservativo

5)

a) Campo conservativo. $f(x,y)=x^2y+k$

b) Campo conservativo. $f(x,y)=e^{x^2y}+k$

c) Campo conservativo. $f(x,y)=x^3y^2+k$

d) Campo no conservativo

e) Campo no conservativo

f) Campo no conservativo

g) Campo conservativo. $f(x,y,z)=x^2y+z^2y+k$

6) a) $\omega=0$ b) $\omega=\dfrac{33}{2}$ c) $\omega=-\dfrac{1}{2}$

7) $\omega=\dfrac{a^3}{3}+a^3-\dfrac{4a^3}{3}+0=0$

8) $\omega=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{2}-\dfrac{a^2}{2}+0=\dfrac{a^3}{2}$

9) $\omega=9$

10) a) $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$ b) $\omega=-1+1+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$ c) $\omega=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

11)

a) $\omega=24$ o $\int y\,dx+x\,dy=24$ b) $\int_\gamma \cos(x)\,\mathrm{sen(y)\,dx}+\mathrm{sen(x)\cos(y)\,dy}=-1$

12) a) $\int_\gamma 2xy\,dx+(x+y)\,dy=\dfrac{32}{3}$

b) $\mathbf{F}(x,y)=\left(x^{\frac{3}{2}}-3y\right)\mathbf{i}+\left(6x+5\sqrt{y}\right)\mathbf{j}=\dfrac{225}{2}$

13)

a) $Rot(\mathrm{F})(1,2,1)=(0,2,-1)$ b) $Rot(\mathrm{F})(2,-1,3)=(7,4,-6)$

14) $\int_\gamma M\,dx+N\,dy=\dfrac{1}{2}$

15) $\int_C=-0.563$

RESPUESTAS EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1) A cargo del alumno

2) a) $\omega = 2$ b) $\omega = 0$ c) $\omega = \frac{7}{2}$

3)

a) $\omega_T = -\frac{4}{15} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{5}$

b) $\omega_T = \frac{16}{3} - \frac{80}{3} = -\frac{64}{3}$

c) $\omega_T = 0 + 30 + 40 = 70$

d) $\omega_T = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$

e) $\omega_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

f) $\omega_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

4) $\omega = -12\pi$

5) $\omega = 846/5$