DERIVADAS PARCIALES

En AMI, para funciones $\Re \to \Re$ se define la **derivada** de f en $x_0 \in I$ como el valor del límite $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando este existe. (decimos que f es diferenciable en x0).
Si $f'(x)$ existe, su valor nos da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$
Las funciones importantes a estudiar, bajo la óptica del cálculo, son las funciones diferenciables Cuando se tiene una función diferenciable, lo importante es obtener información a partir de su derivada. El simple hecho de la existencia de $f'(x)$ nos habla del comportamiento suave de la gráfica de la función alrededor del punto $(x_0, f(x_0))$, el signo de la derivada nos habla del crecimiento y/o decrecimiento de la función alrededor del punto, etc. Es decir, el objetivo del cálculo es obtener información de la función a partir de su derivada.

Funciones de dos Variables $\Re^2 \to \Re$

Resulta importante disponer de un concepto de “diferenciabilidad” para funciones de varias variables. (Concepto que será abordado más adelante)

Comencemos por considerar una función de dos variables $\Re^2 \to \Re$
El procedimiento para hallar el *ritmo de cambio* de una función $Z = f(x, y)$ con respecto a unas de las dos variables independientes se lo llama *derivada parcial* con respecto a esa variable elegida.

Definición

Si $Z = f(x, y)$, las primeras *derivadas parciales* de $Z = f(x, y)$ respecto a x e y son las

funciones $\frac{\partial f(X)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(X)}{\partial y}$ definidas como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

siempre que el límite exista

- Esta definición significa que, dada $Z = f(x, y)$ para calcular $\frac{\partial f(X)}{\partial x}$ debemos considerar a "y" como constante y derivar respecto a "x". Del mismo modo, para calcular $\frac{\partial f(X)}{\partial y}$ mantenemos "x" constante, y derivamos con respecto a "y".
-

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) = Z_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y) = Z_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

Las primeras derivadas parciales evaluadas en (a, b)

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a,b) \quad \wedge \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a,b)$$

<u>Ejemplo 1</u>

Derivar la siguiente función $f(x, y) = x^2 y^3$ aplicando definición de derivada.

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial f(X)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 y^3 - x^2 y^3}{\Delta x}$$ Trabajando el numerador:

$$(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) y^3 - x^2 y^3 = x^2 y^3 + 2x\Delta x y^3 + (\Delta x)^2 y^3 - x^2 y^3 = \Delta x(2xy^3 + \Delta x y^3)$$

Tomando límite en el denominador ya trabajado, se obtiene:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2xy^3 + \Delta x\, y^3)}{\Delta x} = 2xy^3$$

Se repite el procedimiento para encontrar la $\frac{\partial f(X)}{\partial y}$

<u>Ejemplo 2</u>

Hallar las derivadas parciales $\frac{\partial f(X)}{\partial x} \wedge \frac{\partial f(X)}{\partial y}$ de la función $f(x, y) = 3x - x^2 y^2 + 2x^3 y$ aplicando las técnicas de derivación del Análisis Matemático I

Solución:

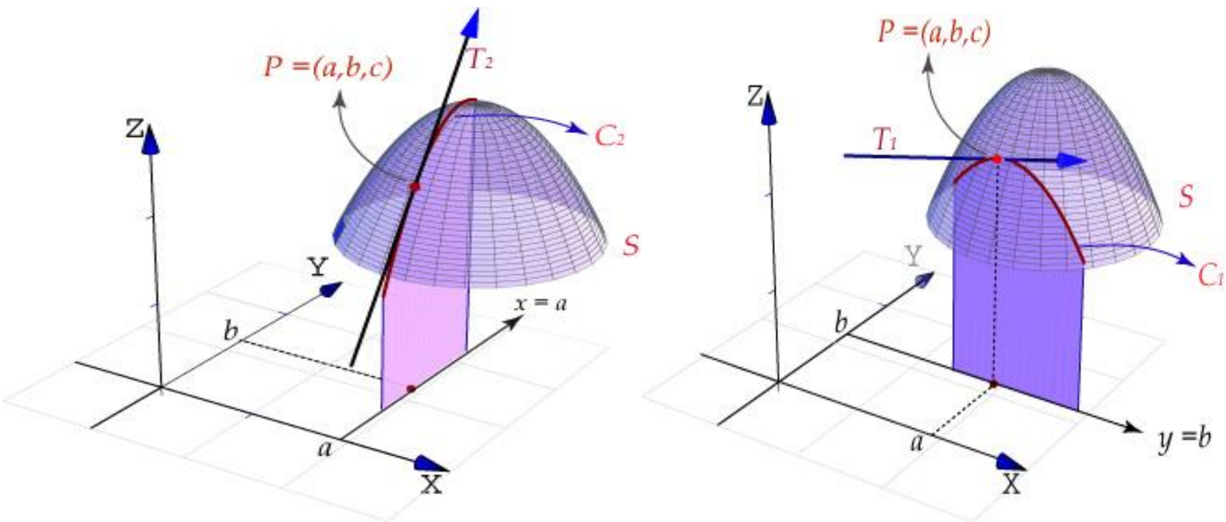
$$\frac{\partial f(X)}{\partial x} = \mathbf{3} - \mathbf{2}xy^{2} + \mathbf{6}x^{2}y \quad \wedge \quad \frac{\partial f(X)}{\partial y} = -\mathbf{2}x^{2}y + \mathbf{2}x^{3}$$

<u>Ejemplo3</u>:

Dada $f(x,y) = x e^{x^2 y}$ calcular $\frac{\partial f(X)}{\partial x} \wedge \frac{\partial f(X)}{\partial y}$

Solución: $\frac{\partial f(X)}{\partial x} = x\, e^{x^2 y}(\mathbf{2}xy) + e^{x^2 y} = \mathbf{2}x^{2}ye^{x^2 y} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(X)}{\partial y} = x\, e^{x^2 y}(x^{2}) = x^{\mathbf{3}}e^{x^2 y}$

INTERPRETACION GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA PARCIAL



En las derivadas parciales de una función $z = f(x;y)$, continua, al igual que todas sus derivadas, en el entorno de un punto $P(x_0;y_0) = P(a;b)$ de su dominio, se interpretan como el valor de la pendiente de una recta tangente a la superficie de la función sobre un punto ubicado en la curva de intersección de la superficie con un plano para y constante, o para x constante, según se trate de $\frac{\partial z}{\partial x}$ o de $\frac{\partial z}{\partial y}$, respectivamente.

La función toma un valor $z = f(x_0; y_0) = z_0$ para un punto $P(x_0; y_0)$ de su dominio. Ello define un punto $\mathrm{P(a, b, c)}$, situado sobre la intersección del plano con la superficie en el que se produce la tangencia.

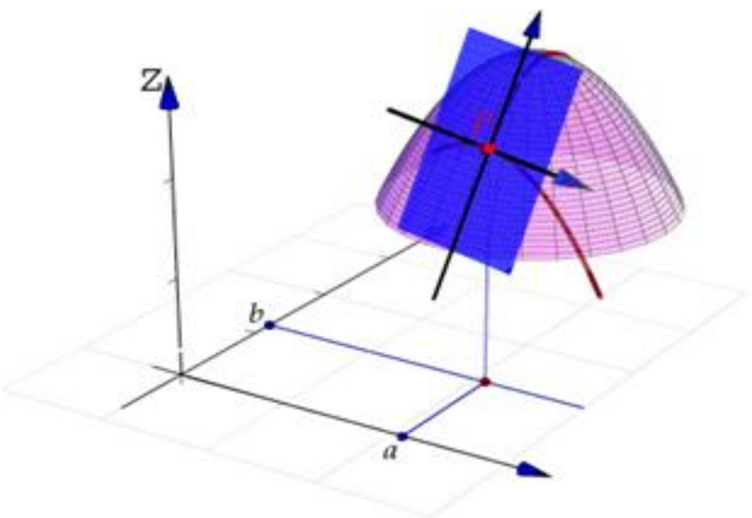
Cuando x pasa de un valor x_0 a otro valor x, mayor o menor que x_0, decimos que se produjo un incremento Δx sobre la recta paralela al eje de abscisas que pasa por $P(x_0; y_0)$. O sea que los desplazamientos de estos valores de x ocurren en la "dirección x". Lo propio ocurre cuando se trata de un incremento Δy, pero en una "dirección y".

Conforme ocurren estos desplazamientos, en una o en otra dirección, las rectas tangentes tienen proyecciones sobre el plano $[xy]$, pasantes por $P(x_0; y_0)$, y paralelas o al eje x o al eje y.

En consecuencia, tanto la recta tangente en $\mathrm{P(a, b, c)}$, como su proyección en el $[xy]$, están contenidas en una "dirección x", o en una "dirección y".

Por ello, podemos decir que la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ es una derivada en la dirección del eje x, y que la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial y}$ es una derivada en la dirección del eje y. Es decir, tales derivadas parciales son derivadas siguiendo una dirección, o derivadas direccionales, en la dirección de los **ejes coordenados**.

PLANO TANGENTE



Supongamos que una superficie S está representada por la función $z = f(x, y)$ y tiene derivadas parciales $\frac{\partial f(x,y)}{\partial_x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial_y}$ evaluadas en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre S.

Sean C_1 y C_2 las curvas que se obtienen de intersectar los planos verticales $y = y_0$ y $x = x_0$ con la superficie S. Entonces, el **plano tangente** a la superficie S en el punto P se define como el plano que contiene las rectas tangentes T_1, T_2.

El plano tangente en P es el plano que más se aproxima a la superficie S cerca del punto P.

Sabemos que cualquier plano que pase por $P(x_0, y_0, z_0)$ tiene una ecuación de la forma:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Al dividir esta ecuación por C y hacer $a = \frac{-A}{C} \wedge b = \frac{-B}{C}$, podemos escribirla en la forma:

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Si esta ecuación representa el plano tangente en P , su intersección con el plano $y = y_0$ debe ser la recta tangente $y = y_0$. Al hacer $y = y_0$ en la ecuación anterior obtenemos:

$$z - z_0 = a(x - x_0) \quad : \; y = y_0$$

Identificamos a esta expresión como la ecuación de una recta con pendiente a. Pero sabemos que la pendiente de la recta tangente T_1 es $a = f_x(x_0, y_0)$

Y la pendiente de la recta tangente T_2 es $b = f_y(x_0, y_0)$

Concluimos que la ecuación del palo tangente es:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) \text{ Forma explícita}$$

Ejemplo: $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$

$z = f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 12}$ en el punto $P = (1, -1, 4)$

$$f_x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 2y^2 + 12}}; \; f_x(x_0, y_0) = \frac{1}{2}$$

$$f_y = \frac{2y}{\sqrt{2x^2+2y^2+12}} \; ; \; f_y(x_0, y_0) = -\frac{1}{2}$$

Entonces

$$z = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y+1) + 4$$

$$z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} + 4$$

$z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3$ Ecuación explicita del Plano tangente en P(1,-1,4)

<u>Funciones de tres o más variables</u>

$X = (x_1, x_2, \ldots\ldots. x_n) \quad \in \Re^n$, se define:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, \ldots\ldots x_i + t, \ldots\ldots. x_n) - f(x_1, \ldots.. x_i, \ldots.. x_n)}{t}$$

Se considera a f como una función de la i-ésima variable.

- Sea cual fuera el número de variables, las derivadas parciales siempre pueden interpretarse como **ritmos de cambio**.

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Es posible hallar las derivadas parciales segunda, tercera, o de orden más alto. Por ejemplo, la función $f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

1. Derivar dos veces con respecto de x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

2. Derivar dos veces con respecto de y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

3. Derivadas parciales *cruzadas* o *mixtas*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \quad \text{o} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

Ejemplo

Hallar las derivadas parciales de segundo orden de $f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$ y evaluar en el punto $f_{xy}(-1\,,2)$

Igualdad de las derivadas parciales cruzadas

- Si f es una función de x e y, con f_{xy} , f_{yx} continuas en todo (x,y) decimos que:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

- Este teorema también es válido para funciones de *tres o más variables*, siempre que las derivadas de segundo orden sean continuas.

Ejemplo

Probar que $f_{xz} = f_{zx} \;\wedge\; f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$ para la función $f(x,y,z) = y\,e^x + x\ln z$