SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Muchos problemas de ingeniería y de otras ciencias involucran la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.
En el curso de álgebra y durante este RA en particular, nos ocuparemos de las técnicas de resolución, análisis e interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales, herramientas fundamentales para comprender los conceptos centrados en el álgebra lineal.
En la planificación de la cátedra encontrarás la sección “Recomendaciones de estudio”. Resaltamos algunos aspectos importantes:

- Sé constante, lo ideal es todos los días dedicarle tiempo al estudio.
- Lee el material y mira los videos recomendados por los docentes con tiempo de anticipación a la clase presencial. En el aula virtual tendrás toda la información importante y bibliografía para ayudarte en tu aprendizaje.
- Practica desarrollar en hojas los ejercicios con su correspondiente justificación teórica.
- Practica el uso de software e intenta siempre interpretar los resultados que muestra.

1) De las siguientes ecuaciones, ¿cuáles son lineales en x_1, x_2 y x_3? Explique cuando los sistemas son lineales.

a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$ b) $x_1 + 3x_2 + x_1 x_2 = 2$ c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$

d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$ e) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$ f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

2) Dado que *k* es una constante, ¿cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales?

a) $x_1 - x_2 + x_3 = sen\, k$ b) $kx_1 - \frac{1}{k}x_2 = 9$ c) $2^3 x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

3) Para cada uno de los siguientes sistemas lineales hallar:

a) la matriz aumentada
b) el vector de las incógnitas
c) El vector de los términos independientes

a) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 \qquad - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$

4) Determinar un sistema de ecuaciones lineales correspondientes a la matriz aumentada que se da a continuación, realizando el producto A.X=B

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

5) Responde:

a) ¿Qué es el método de Gauss Jordan y para qué sirve?
b) ¿A qué llamamos “sistema equivalente”?
c) ¿Qué teorema permite analizar el tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales?
d) ¿Sobre qué concepto se basa dicho Teorema? Explícalo.
e) ¿Cuáles son las conclusiones del mismo?
f) ¿Cómo se clasifican los sistemas de ecuaciones lineales?
g) ¿Cuándo un sistema es *no* homogéneo? Da un ejemplo.
h) ¿Cuándo es homogéneo? Da un ejemplo. ¿Qué tipo de solución admiten los sistemas no homogéneos?, ¿y los homogéneos?

6) En los sistemas siguientes:

a) Encuentre la solución, reduciendo con Gauss Jordan.
b) Grafique el sistema.
c) Elabore una conclusión sobre la relación entre la solución del sistema y las rectas graficadas.

a) $\begin{array}{l} 3x-2y=7 \\ 4y=6x-14 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} x-2y=7 \\ 3x=4+6y \end{array}$ c) $\begin{array}{l} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=6 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} 5x+y=1 \\ 7y=3x \end{array}$

7) Para seguir avanzando en la guía, necesita responder:

a) ¿A qué llamamos “determinante” de una matriz?
b) ¿Todas las matrices tienen un determinante?
c) ¿Qué métodos usamos para calcular el valor del determinante?

8) En los siguientes sistemas:

a) Encuentre las soluciones, si las hay, de los sistemas dados.
b) En cada caso calcule el valor del det(A).
c) Elabore una conclusión sobre la relación entre el valor del det(A) y la existencia o no de la solución del sistema.

a) $\begin{array}{r} x-3y=4 \\ -4x+2y=6 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 2x-8y=5 \\ -3x+12y=8 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 6x+y=3 \\ -4x-y=8 \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 4x-6y=0 \\ -2x+3y=0 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 2x+3y=4 \\ 3x+4y=5 \end{array}$

9) En cada inciso, suponer que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales ha sido reducida mediante operaciones elementales a la forma escalonada reducida dada. Analizar y expresar la solución del sistema.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

10) Sabemos que una ecuación con 2 incógnitas, en el plano, representa una recta. Investiga y responde:

a) ¿Qué representa geométricamente una ecuación con 3 incógnitas?
b) Verifica tus respuestas con GeoGebra

11) Considere los Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos dados abajo:

a) ¿Qué tipo de solución admiten?
b) ¿Es posible anticipar el tipo de solución que tienen, antes de reducir con Gauss Jordan? ¿De qué manera? Compruébalo.
c) Encuentra la solución de cada uno reduciendo con Gauss Jordan, interpreta geométricamente la misma y valida tus resultados con GeoGebra.
d) Grafica el espacio solución, cuando sea posible.

a) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - 2y + 4z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 6x - y + 3z = 6 \\ 7x + y + 5z = 1 \\ 5x - 3y + z = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 = -3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$

12)

a) ¿Para qué valores de a el siguiente sistema no tiene solución?, ¿tiene exactamente una solución?, ¿tiene infinitas soluciones?
b) ¿Cuáles son las representaciones gráficas de cada tipo de solución?
c) Utiliza software para validar tus conclusiones en los ítems *a)* y *b)*

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3x-y+5z=2 \\ 4x+y+(a^2-14)z=a+2 \end{cases}$$

13)

a) ¿Para qué valor de a, el siguiente sistema de ecuaciones tendrá soluciones no triviales?
b) Realiza la interpretación geométrica de la solución,
c) Utiliza software para validar tus conclusiones en los ítems *a)* y *b)*

$$\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+ay-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

14)

a) ¿Para qué valor de k el siguiente sistema será compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible?
b) Realiza la interpretación geométrica de la solución,
c) Utiliza software para validar tus conclusiones en los ítems a) y b)

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \\ x+ky+3z=2 \end{cases}$$

15) Para cada uno de los sistemas homogéneos dados abajo:

a) ¿Qué tipo de solución admiten?
b) ¿Es posible anticipar el tipo de solución que tienen, antes de reducir con Gauss Jordan? ¿De qué manera? Compruébalo.
c) Encuentra la solución de cada uno, e interpreta geométricamente la misma.
d) Grafica el espacio solución, si es posible

a) $\begin{cases} 2x_1+4x_2-6x_3=0 \\ 8x_1-2x_2+10x_3=0 \\ 6x_1+4x_2+6x_3=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3=0 \\ -2x_1-4x_2-2x_3=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_1-4x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+7x_2-x_3=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_1-4x_2+3x_3=0 \\ -5x_1+13x_2-10x_3=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=0 \\ 3x_1+2x_3-2x_4=0 \\ 4x_2-x_3-x_4=0 \\ 5x_1+3x_3-x_4=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x_1-x_2=0 \\ 7x_1+3x_2=0 \\ -8x_1+6x_2=0 \end{cases}$

16) Determinar si el espacio solución del sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ es una recta que pasa por origen, un plano que pasa por el origen o solo el origen. Si es un plano, encontrar su ecuación, si es una recta, encontrar sus ecuaciones paramétricas y graficarla.

a) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

17) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos $x-y+z-3=0$ y $-x+5y+3z+4=0$.

18) Calcule:

a) El ángulo que forman los planos $6x+y+z-1=0$ y $x+y-z+1=0$.
b) Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos
c) El ángulo que forma la recta con el plano xy
d) Validar con GeoGebra

19) Hallar:

a) El punto de intersección de la recta $x-2y+z+4=0$, $x+2y+3z-4=0$ y el plano $3x-7y+8z-9=0$.
b) El ángulo que la recta forma con el plano
c) Validar con GeoGebra

20) Hallar:

a) El punto de intersección de la recta $x+2y-z-6=0,\quad 2x-y+3z+13=0$ con el plano $3x-2y+3z+16=0$.
b) El ángulo que la recta forma con el plano
c) Validar con GeoGebra

21) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta $x-y-z+8=0,\quad 5x+y+z+10=0$ y $x+y+z-2=0,\ 2x+y-3z+9=0$. Comprobar con GeoGebra

22) Hallar la ecuación del plano determinado por la recta: $2x+2y-z+3=0$, $x-y+2z+2=0$ y el punto $(3,-1,2)$.

23) Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $2x+y-4z-2=0$, $4x-3y+2z-4=0$ y $x+5y+z+1=0$, $x+y-z-1=0$.

24) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1,-2,3)$ y es paralela a los planos $2x-4y+z-3=0$ y $x+2y-6z+4=0$.

ANEXO 1: Operaciones con Matrices

1) Identifique las filas o renglones, las columnas, los tamaños y los elementos $(2,2)$ de las matrices A y B que se dan a continuación. Determine el elemento $(3,1)$ de A y el elemento $(2,3)$ de B.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

2) Investigue y responda.

a) ¿Cuál es la condición necesaria para poder sumar o restar matrices?
b) ¿Cómo se realiza la suma y la resta de matrices?
c) ¿Cómo realizar el producto de un escalar por una matriz?

3) Calcule, si es posible, lo siguiente. Si las operaciones no pueden efectuarse, explique por qué.

a) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ b) $-3\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -5\\ -6 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & -6\\ -5 & 4\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

d) $-\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -4 & -6\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}3 & -5\\ 7 & 0\end{pmatrix}$

Matriz Transpuesta

4) Investiga: *¿a qué llamamos "matriz transpuesta"?* Encuentre la transpuesta de las matrices dadas:

a) $\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 1 & 5 & 5\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5) Sean $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & -3 & -5\\ 0 & 1 & 2\\ 4 & -7 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ 1 & 7 & 4\\ 3 & 5 & 9\end{pmatrix}$ y $a=4,\quad b=-7$

Demostrar:

a) $(A^T)^T=A$ b) $(A+B)^T=A^T+B^T$ c) $(aC)^T=aC^T$ d) $(AB)^T=B^TA^T$.

Producto de matrices

6) Investiga y responde.

a) ¿Qué condición debe cumplirse para poder realizar el producto de matrices?

b) ¿Es conmutativa esta operación? Justifique.

7) Cuando sea posible, calcule los siguientes productos de matrices.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1/2 \\ 5 & 3/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Tipos de Matrices

8) Busca información sobre los tipos de matrices que existen. Luego clasifica las matrices dadas en:

a) Triangular superior.
b) Triangular inferior.
c) Diagonal
d) Escalar
e) Nada de lo anterior
f) Identidad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9) Investiga cuando una matriz es escalonada, escalonada reducida o ambas. (Puede consultar en la página 285 del Kozak o de la fuente que prefiera).

10) De las siguientes matrices 3x3, identifica cuáles están en forma escalonada:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11) De las siguientes matrices 3x3, Identificar cuáles están en forma escalonada reducida.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12) En cada inciso, determinar si la matriz está en forma escalonada o escalonada reducida:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Reducción de Matrices

13) Reducir las siguientes matrices por "eliminación de Gauss Jordan". Determinar el *rango* de cada una.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz Inversa

14) Calcula la inversa de las siguientes matrices usando Gauss Jordan. Valida tus respuestas con software.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

ANEXO 2: Ejercicios prácticos con Determinantes

1) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el determinante de la matriz A por el método de Sarrus
b) Calcule el det(A) por el método de Laplace.
c) Calcule el det(A) por el método de Chio

2) En los ejercicios siguientes calcule los determinantes por el método que estime más conveniente.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 100 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 11 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ b & c & b \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

3) Resuelva aplicando el método de Chío.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

Propiedades de los determinantes

4) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

a) Demuestre que $\det(A)=\det(A^T)$.

b) Compruebe que $\det(AB)=\det(A).\det(B)$.

c) Demuestre que $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$.

5) En los ejercicios siguientes evalúe los determinantes sólo por inspección, justifique las respuestas.

a) $\begin{vmatrix}5 & 1 & 14\\ 0 & 10 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 4\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 6 & 6 & 4 & 0\\ 5 & 5 & 5 & 5 & -1\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 6 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 6 & 6 & 4 & 5\\ -1 & 5 & 5 & 5 & 5\end{vmatrix}$

6) Explique, sin hacer cálculos, porque las sustituciones $x=0$, $x=2$, hacen que el determinante sea igual a cero.

$$\begin{vmatrix}x & x & 2x\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

Determinante y Matriz Invertible

7) Investiga *¿cuál es la relación entre el valor del determinante de una matriz, y que la misma sea o no invertible?*
Luego, indica cuáles de las siguientes matrices son invertibles:

$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$ $B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$ $C=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}$ $D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$

8) Encuentre todos los valores de k tales que la matriz sea no invertible.

$$A = \begin{pmatrix} k & k^2 & 0 \\ 0 & k^2 & 4 \\ -k & 0 & k \end{pmatrix}$$

9) Encuentre los valores de k para que la matriz sea invertible.

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{pmatrix}$$

ANEXO 3: Ejercicios prácticos con Vectores

En los ítems 1) y 2) recuerda que los vectores son matrices de una sola fila o una sola columna. Por los que la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar, se obtienen del mismo modo que al operar con matrices.

1) Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcule:

i) $2\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$

ii) $\mathbf{u} - 0\mathbf{v} - 6\mathbf{w} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Trace los vectores:

i) V_1, V_2 y V_3
ii) (V_1+V_2), (V_3-V_2)
iii) $3V_1$
iv) $-2\ V_3$
v) $(w_1 - w_2)$;
vi) ½ $(w_1 + w_2)$

3) Trace el vector libre PQ y calcule sus componentes.

a) $P=(1,1)$, $Q=(1,-1)$ b) $P = (2,-3), Q = (-3,4)$ c) $P=(2,-1,1)$, $Q=(-1,1,3)$

4) Para los ejercicios que se dan a continuación, encuentre:

a) El producto escalar entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
b) $\|\mathbf{u}\|$ y proporcione un vector unitario con la dirección de $\mathbf{u}$.
c) Escriba en su forma canónica los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de **i)** y de **ii)**.

i) $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ii) $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

5) En los ejercicios siguientes determine el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

i) $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ii) $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

6) Haciendo uso del producto escalar determinar ¿Cuáles pares de vectores son ortogonales?

a) $(1,1),\ (1,-1)$
b) $(1,-1,-1),\ (0,1,-1)$
c) $(4,-2,-1),\ (-2,3,4)$

7) Para los vectores que se dan a continuación:

a) $\mathbf{u}=(1,-3,2), \quad \mathbf{v}=(-1,1,1)$
b) $\mathbf{u}=(2,-3,1), \quad \mathbf{v}=(1,0,1)$
c) $\mathbf{u}=(1,0,-2), \quad \mathbf{v}=(5,2,3)$

Calcular los siguientes productos vectorial o producto cruz:

i) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, ii) $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$, iii) $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$, iv) $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|$,

¿Cuál es la dirección y el sentido de los vectores obtenidos en (i) y en (ii)? Grafícalos.

8) Sean los vectores $\mathbf{u}=(-1,2,-2)$, $\mathbf{v}=(4,-3,5)$, $\mathbf{w}=(-4,-2,0)$. Efectúe las siguientes operaciones:

i) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ii) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ iii) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$
iv) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ v) $\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ vi) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$

9) Determine un vector unitario perpendicular al plano definido por $\mathbf{u}=(3,-4,0)$ y $\mathbf{v}=(7,5,-4)$.

10) Aplique el producto cruz para demostrar que $(1,2,-1)$ y $(-2,-4,2)$ son paralelos.

11) Determine cuáles de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son coplanares. Interprete geométricamente:

a) $\mathbf{u}=(-1,-1,9),\ \mathbf{v}=(0,1,-3),\ \mathbf{w}=(-1,2,0)$
b) $\mathbf{u}=(1,-1,1),\ \mathbf{v}=(1,0,2),\ \mathbf{w}=(1,-1,0)$
c) $\mathbf{v}_1=(2,-2,0), \quad \mathbf{v}_2=(6,1,4), \quad \mathbf{v}_3=(2,0,-4)$

d) $\mathbf{v}_1=(-6,7,2),\quad \mathbf{v}_2=(3,2,4),\quad \mathbf{v}_3=(4,-1,2)$

12) Sean $\mathbf{u}=(3,0,2),\quad \mathbf{v}=(-4,1,-1),\quad \mathbf{w}=(2,1,3)$ Calcular:

a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ b) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ c) $(\mathbf{w}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$

13) Sabemos que el volumen del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son los vectores de posición $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ está expresado por: $V=\left|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\right|$

Calcule el volumen del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son los vectores de posición $\mathbf{u}=(1,-1,2)$, $\mathbf{v}=(0,2,1)$ y $\mathbf{w}=(3,-2,-1)$.

a) Realizando las operaciones indicadas en la ecuación dada.

b) Usando la función determinante.

ANEXO 4: Ejercicios prácticos con Rectas y Planos

Rectas

1) Deduzca la ecuación vectorial de la recta que pasa por P(1,2,5) y tiene la dirección del vector v=(-1,3,-3)

2) Deduzca las ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta del apartado anterior.

3) Deduzca la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos PQ, siendo:

a) $P(-1,2)$ y $Q(1,1)$ b) $P(2,1)$ y $Q(1,-1)$ c) $P(0,1,-1)$ y $Q(6,-8,1)$

4)

a) Hallar las ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P_0=(3,2,-5)$ y es paralela al vector $\mathbf{u}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-8\mathbf{k}$.

b) Indicar si el punto $P_1=(3,2,-7)$ pertenece a la recta del ítem (a). Si esto no es así, hallar un punto que sí pertenezca a dicha recta.

c) Obtener las coordenadas del punto (x,y,z) cuando $\lambda=5$.

d) ¿En qué punto la recta corta al plano "*xoy*"? Verificar con GeoGebra

5) En los ejercicios que se dan a continuación, obtener la ecuación simétrica de la recta que:

i) Pasa por el punto (-1, 0, 3) y es paralela al vector $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

ii) Pasa por el punto (0, 0, 2) y es paralela al vector $\mathbf{u}=(3,1,1)$.

iii) Pasa por los puntos $P_1=(-1,-2,-3)$ y $P_2=(0,3,5)$.

iv) ¿Dónde cortan estas rectas a los planos coordenados? Verificar con GeoGebra.

6) Investiga: *¿Cómo podemos hallar la ecuación general de una recta dados 2 puntos?* Luego:

a) Encuentre la ecuación general de la recta que pasa por los puntos (1, 2) y (– 2, 0).

b) A partir de la ecuación general, encuentre una forma de deducir la ecuación vectorial de la misma.

c) Construya el gráfico.

7) Demuestre que las rectas dadas a continuación son paralelas.

$$\begin{aligned} x &= 1-2t \\ y &= -1+4t \\ z &= 2-8t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= -t \\ y &= 2+2t \\ z &= 7-4t \end{aligned}$$

8) Demuestre que las rectas dadas a continuación son perpendiculares:

$$\begin{aligned} x &= 1-2t \\ y &= -1+4t \\ z &= 2-2t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= -t \\ y &= 2-2t \\ z &= 7-3t \end{aligned}$$

9) Deduzca las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por $(-2,3,1)$ cuya dirección es $[-1,-2,1]$

10) La recta l_1 pasa por los puntos (-6, -1, 3), (-3,2,7) y la recta l_2 que pasa por los puntos (4, 2,1), (3, -2, 5). Hallar el ángulo agudo formado por l_1 y l_2.

Planos

11) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(5,-1,3)$ y cuya normal tiene `por números directores $[1,-4,2]$.

12) ¿Cuál es la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(-1,2,3)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{u}=(-2,1,4)$.

13) Determine la ecuación del plano que pasa por $(1,-2,4)$ y es paralelo al plano $2x-5y+2z=0$.

14) Deduzca la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(2,0,1)$, $Q(1,2,0)$ y $R(-3,2,1)$. Verifique con GeoGebra

15) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por:

a) $P_1(-3,2,4)$, $P_2(1,5,7)$ y $P_3(2,2,-1)$

b) $P(1,3,-7)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{u}=(3,-2,4)$ y $\mathbf{v}=(-1,-1,3)$

16) Demuestre que son perpendiculares los siguientes planos:

$$x-y+2z+3=0 \quad \text{y} \quad -x+2y+\frac{3}{2}z=0 .$$

17) Hallar la ecuación del plano que contiene al punto (6, 4, -2) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (7, -2, 3) y (1, 4, -5).

18) En cada uno de los siguientes ejercicios, partiendo de la ecuación del plano, hallar sus intercepciones con los ejes coordenados y las ecuaciones de sus trazas sobre los planos coordenados. Construir la gráfica en cada caso.

a) $x+y+z-1=0$
b) $x+2y-z-2=0$
c) $5x-3y+15z-15=0$

19) Busca información sobre "posiciones particulares del plano". Luego completa:

a) Si estamos en R3, x=0 representa el plano coordenado ….
b) Si estamos en R2, x=0 representa el eje ….
c) El plano x=2 es paralelo al plano coordenado……. y perpendicular al eje …..
d) El plano z=3 es paralelo al plano coordenado ……y perpendicular al eje …
e) El plano 2x+3y=6 es perpendicular al plano …… y paralelo al eje…..
f) El plano 4y + z =2 es perpendicular al plano …… y paralelo al eje….
g) Valida tus respuestas con GeoGebra

20) a) Hallar la ecuación del plano a partir de los siguientes datos:

$$P_1(1,3,-7) \qquad \bar{u}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k} \qquad \bar{v}=-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$$

b) Indicar si $P_1(1,1,1)$ pertenece o no pertenece al plano π.
c) Averigua un punto P_2(?, ?,?) que pertenezca el plano π.