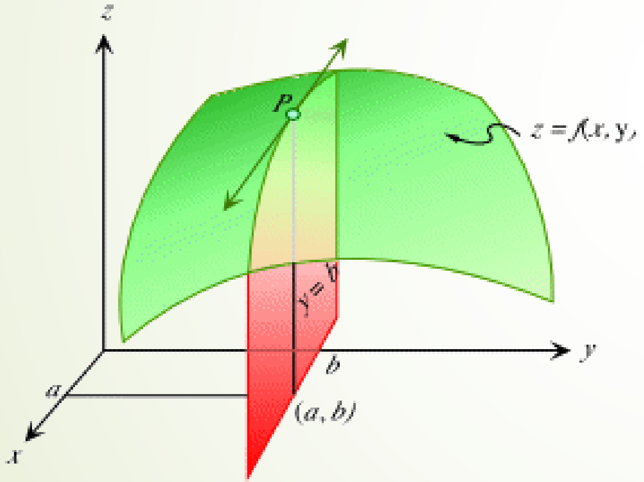
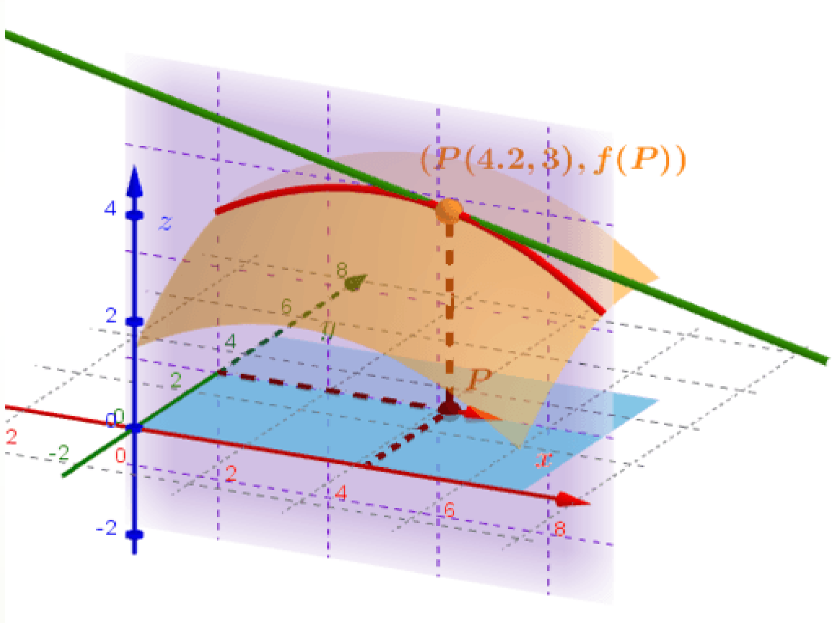
DERIVADAS PARCIALES





En AM I, para funciones de $R \to R$ se define la derivada de f en x_0 como el valor del límite

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cuando el límite existe, decimos que f es diferenciable en x_0

Si $f'(x)$ existe, su valor nos da la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$

Cuando se tiene una función diferenciable, lo importante es obtener información a partir de su derivada. El simple hecho de la existencia de $f'(x)$ nos habla del comportamiento suave de la gráfica de la función alrededor del punto $(x_0, f(x_0))$, el signo de la derivada nos habla del crecimiento y/o decrecimiento de la función alrededor del punto, etc.

El objetivo del cálculo es obtener información de la función a partir de su derivada.

FUNCIONES DE DOS VARIABLES $f\colon R^2 \to R$

Comencemos por considerar una función de dos variables $f\colon R^2 \to R$. El procedimiento para hallar el **ritmo de cambio** de una función $z = f(x,y)$ con respecto a unas de las dos variables independientes se lo llama derivada parcial con respecto a esa variable elegida.

DEFINICIÓN

Las primeras derivadas parciales de $f(x, y)$ respecto de x e y son:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Siempre que el límite exista

Esta definición significa que, dada $z = f(x, y)$:

- ✓ para calcular $\frac{\partial f(X)}{\partial x}$ debemos considerar a "y" como constante e incrementar la variable x en $x + \Delta x$; esto significa que derivamos respecto a "x" .

- ✓ para calcular $\frac{\partial f(X)}{\partial y}$ mantenemos "x" constante e incrementamos la variable y en $y + \Delta y$; esto significa que derivamos respecto a "y"

Ejemplos

1) Derivar $f(x,y) = x^2y^3$ aplicando la definición de derivada

2) Derivar luego usando las reglas de la derivada.

¿Cómo representar las derivadas parciales?

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = f_x = Z_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = f_y = Z_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

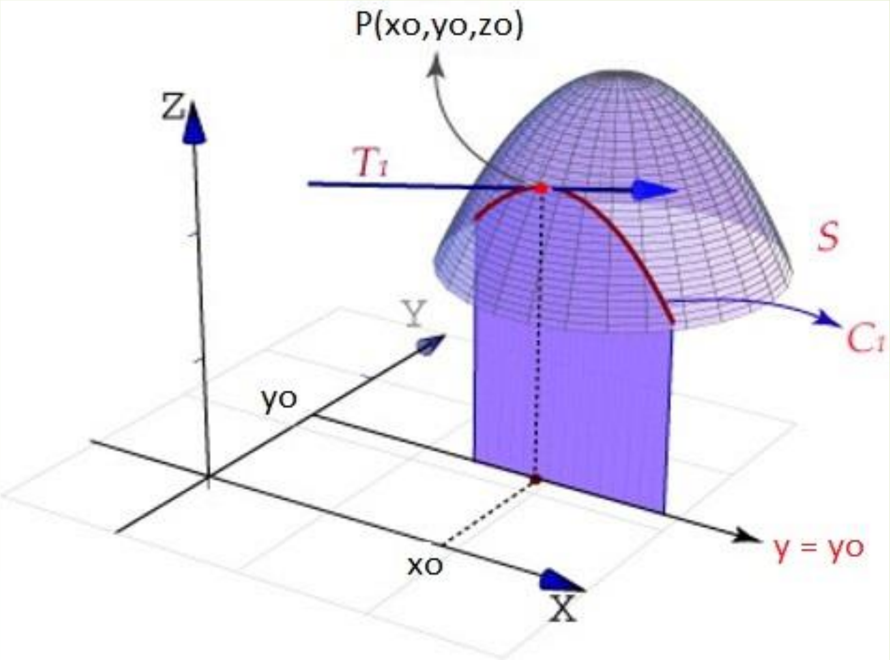
Ejemplos

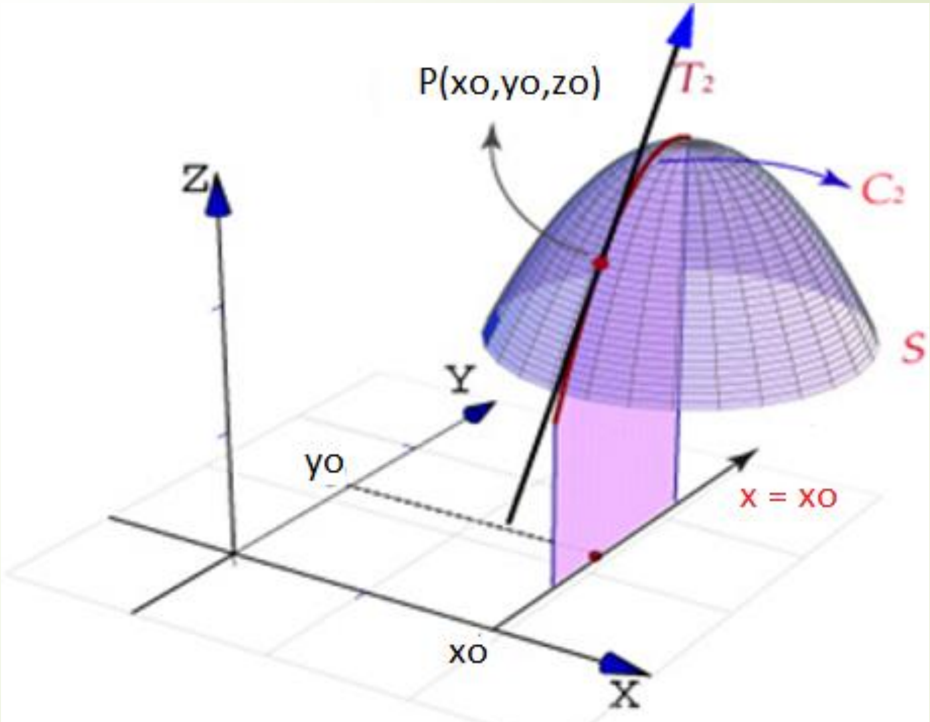
Derivar usando las reglas de la derivación

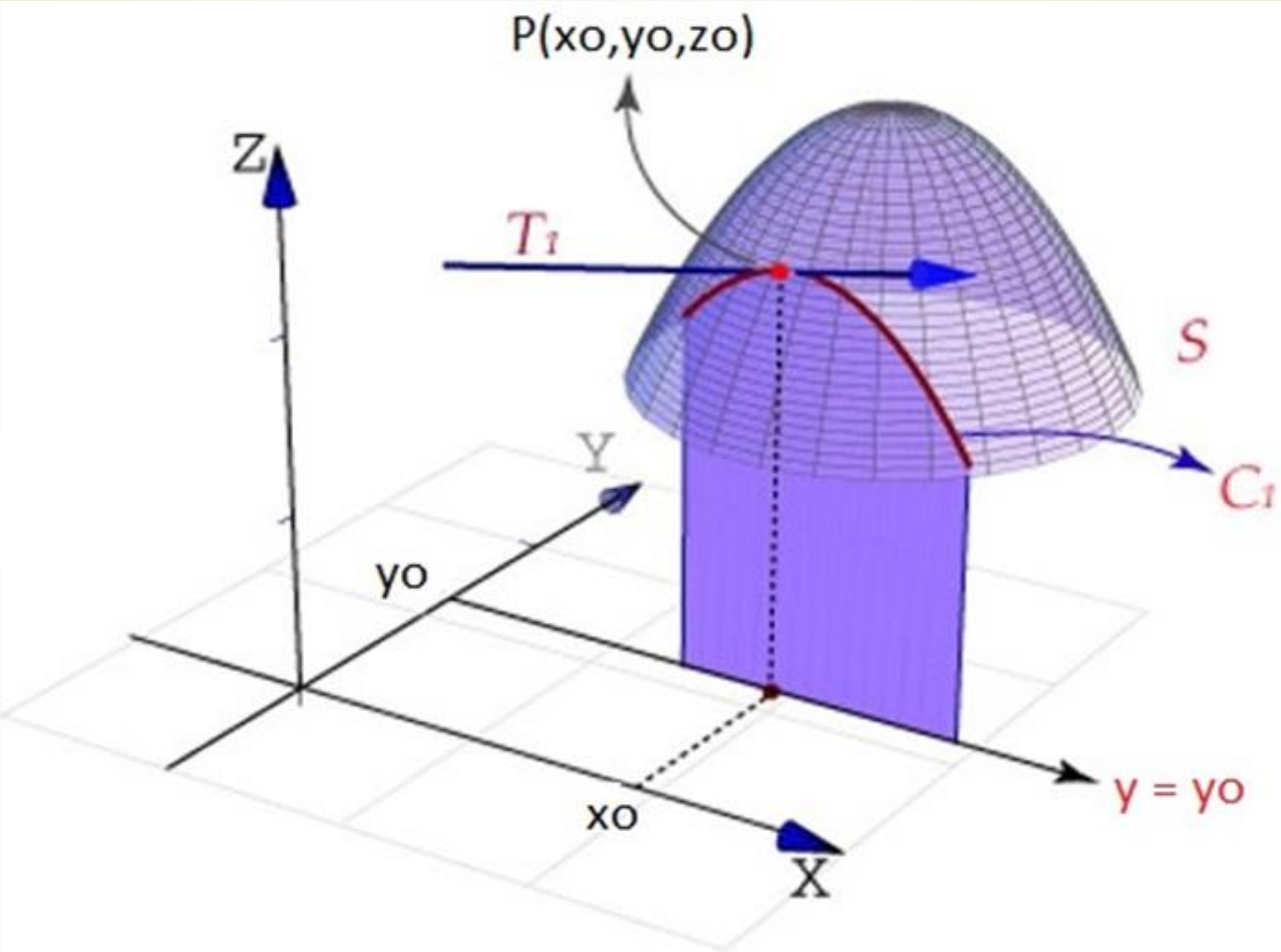
1. $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + \cos(y)$

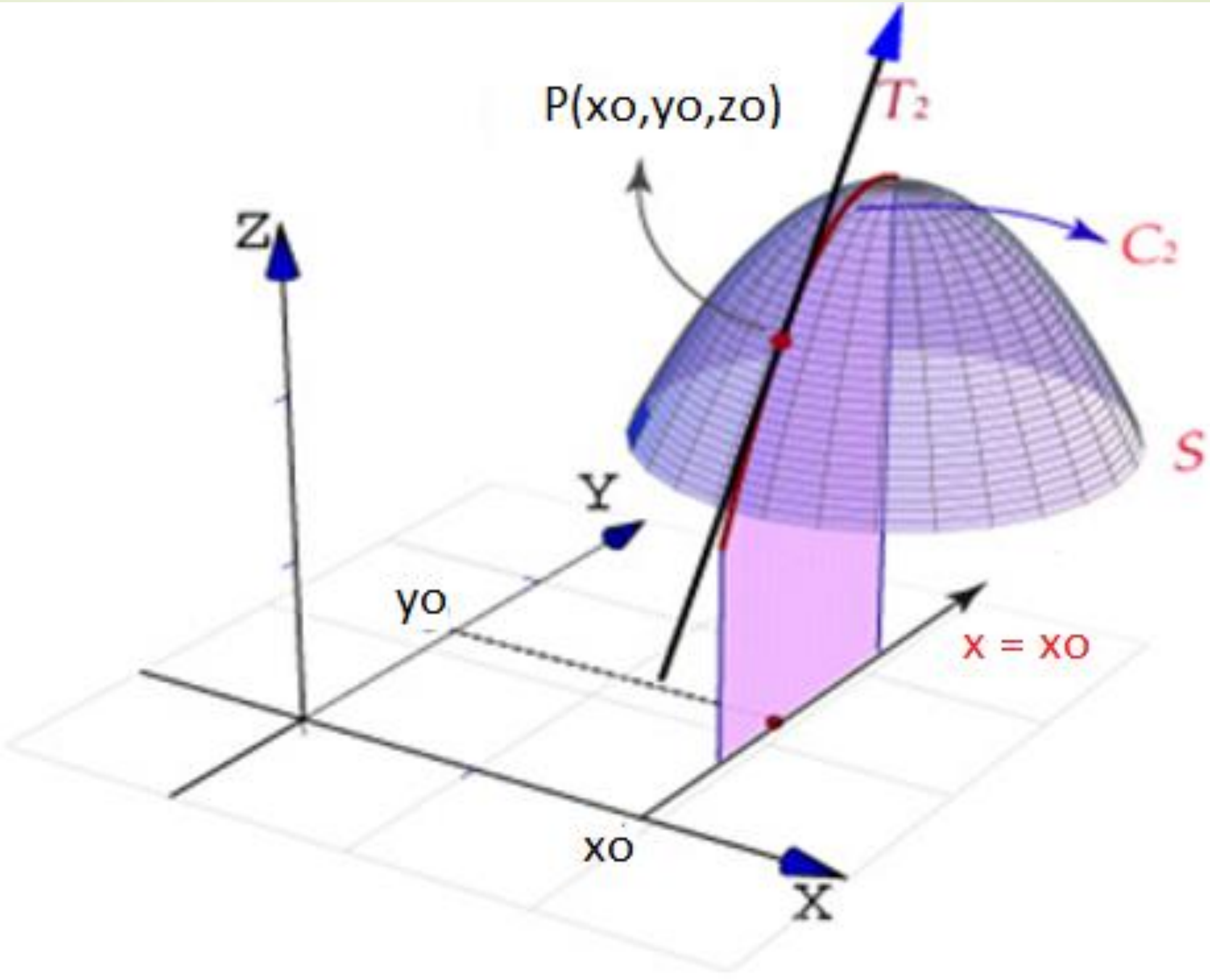
2. $f(x, y) = xy + x^2y^2 + ln(y)$

INTERPRETACION GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA






P(xo,yo,zo)
Z
T1
S
Y
C1
yo
y = yo
xo
X



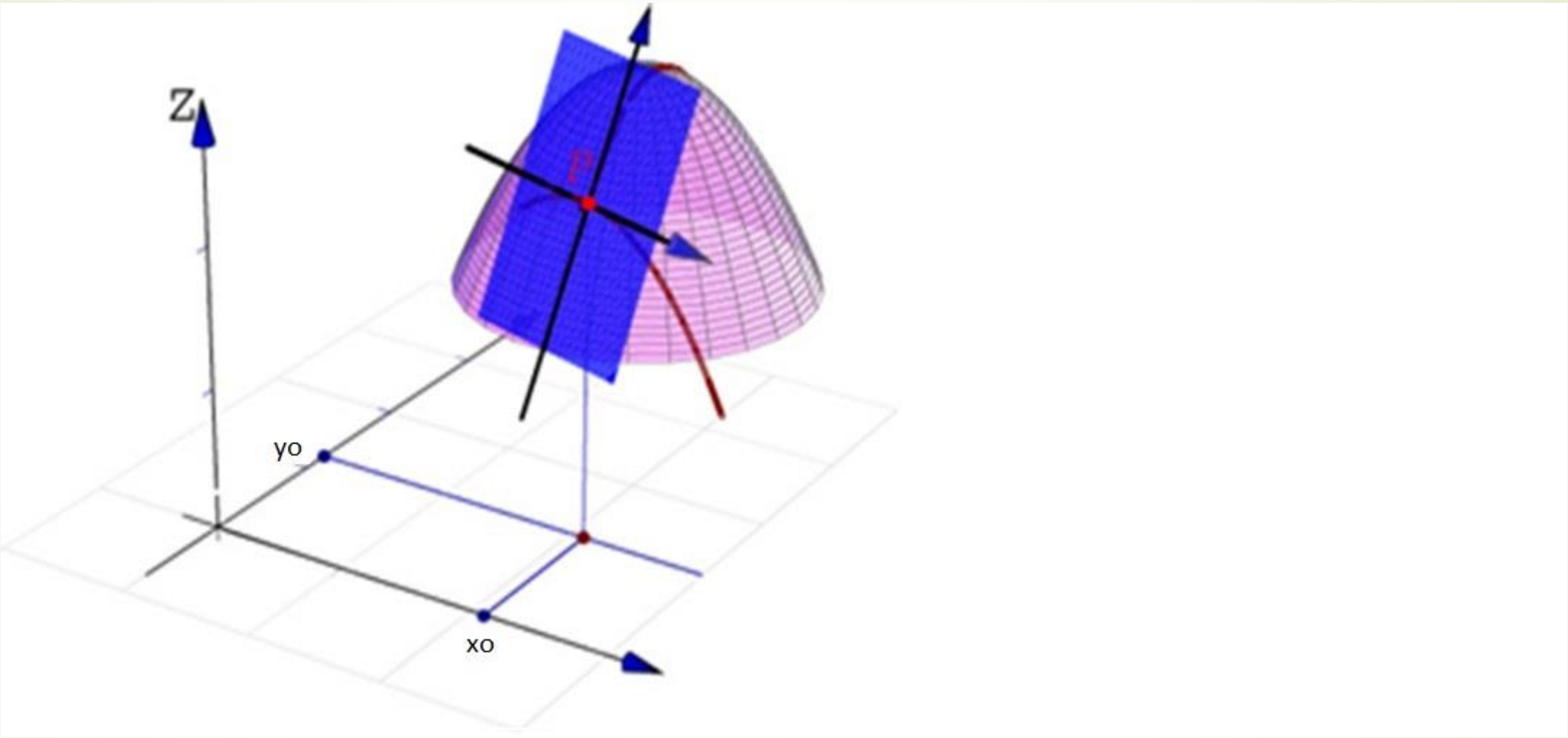
P(xo,yo,zo)
T2
C2
S
Z
Y
yo
x = xo
xo
X

La derivada parcial respecto de $\boldsymbol{x}$ de una función $z = f(x, y)$, continua en el entorno de un punto $P(xo, yo)$ de su dominio, se interpreta como la **pendiente** de la **recta tangente** a la curva de intersección de la superficie con el plano $y = yo$.

La derivada parcial respecto de $\boldsymbol{y}$ de una función $z = f(x, y)$, continua en el entorno de un punto $P(xo, yo)$ de su dominio, se interpreta como la **pendiente** de la **recta tangente** a la curva de intersección de la superficie con el plano $x = xo$.

En general, hablamos de la tasa de cambio de la función en dirección del eje $\boldsymbol{x}$ o del $\boldsymbol{y}$, respectivamente.

PLANO TANGENTE



$$z = f(X_0) + f_x(X_0)(x - x_0) + f_y(X_0)(y - y_0)$$

La superficie S está representada por la función $z = f(x,y)$

La función tiene derivadas parciales $\frac{\partial f(x,y)}{\partial_x}$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial_y}$

Evaluadas en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$, que pertenece a la superficie.

Sean C_1 y C_2 las curvas que se obtienen de intersectar los planos verticales $y = y_0$ y $x = x_0$ con la superficie s.

El plano tangente en P es el plano que mejor aproxima a la superficie S cerca del punto P. También la conocemos como Función Afín

Desarrollo analítico para obtener la ecuación del plano tangente

$$\pi: A(x\text{-}x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\frac{A}{c}(x\text{-}x_0) + \frac{B}{C}(y - y_0) + \frac{C}{C}(z - z_0) = 0$$

$$(z - z_0) = -\frac{A}{c}(x\text{-}x_0) - \frac{B}{C}(y - y_0)$$

$Reemplazamos\ -\frac{A}{c} = a$ y $-\frac{B}{C} = b$

$$(z - z_0) = a\,(x\text{-}x_0) + b(y - y_0) \qquad (1)$$

Desarrollo analítico para obtener la ecuación del plano tangente

Si hacemos $y = y_0$, que es lo que hacemos al derivar respecto de x, queda:

$(z - z_0) = a\,(x\text{-}x_0)$ REPRESENTA LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Si hacemos $x = x_0$, que es lo que hacemos al derivar respecto de y, queda:

$(z - z_0) = b(y - y_0)$ REPRESENTA LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

PARA QUE LAS DOS RECTAS ANTERIORES SEAN DOS RECTAS TANGENTES ¿CUÁNTO DEBEN VALER LAS PENDIENTES a y b?

Desarrollo analítico para obtener la ecuación del plano tangente

$a = f_x(x_0, y_0)$ $\qquad\qquad$ $b = f_y(x_0, y_0)$

REEMPLAZAMOS a y b EN (1)

$$(z - z_0) = f_x(x_0, y_0)(x\text{-}x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = f_x(x_0, y_0)(x\text{-}x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0$$

$$\boxed{z = f_x(x_0, y_0)(x\text{-}x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)}$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA DEL PLANO TANGENTE A $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0)

Ejemplo1:

Calcular la ecuación del plano tangente a la función

$f(x,y)=\sqrt{2x^2+2y^2+12}$, en el punto (1,-1,4)

Derivada de funciones de tres o mas variables

Sea $X = (x_1, x_2, \ldots \ldots x_n) \in R^n$ se define:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta xi \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots \ldots x_i + \Delta x_i, \ldots \ldots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_i \ldots x_n)}{\Delta xi}$$

Se considera a f como una función de la i-ésima variable.

Sea cual fuera el número de variables, las derivadas parciales siempre pueden interpretarse como ritmos de cambio.

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Es posible hallar las derivadas parciales segunda, tercera, o de orden más alto. Por ejemplo la función $f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

1. Derivar dos veces con respecto de:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

2. Derivar dos veces con respecto de:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

3. Derivadas parciales *cruzadas* o *mixtas*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

Igualdad de las derivadas parciales cruzadas

- Si f es una función de x e y, con f_{xy}, f_{yx} continuas en todo punto (x, y), decimos que:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

- Este teorema también es válido para funciones de tres o más variables, siempre que las derivadas de segundo orden sean continuas.

Ejemplo 1:

Hallar las derivadas parciales de segundo orden de

$$f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$$

Ejemplo 2:

Dada La función: $f(x,y,z) = ye^x + xln(z)$

Demostrar que: $f_{xz} = f_{zx} \quad \wedge \quad f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$

GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL REAL

Sea f(X) una función vectorial real $R^n \to R$, diferenciable, definida en un conjunto abierto en el dominio ∈ R^n. La derivada total de f(x) se define como:

$$f'(X) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

La derivada total de una función vectorial real, evaluada en un punto Xo, recibe el nombre de VECTOR GRADIENTE:

$$\nabla f(Xo) = (\frac{\partial f(Xo)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(Xo)}{\partial x_2}, \ldots\ldots \frac{\partial f(Xo)}{\partial x_n})$$