TRANSFORMACIONES LINEALES

Sea $\mathrm{V} \wedge \mathrm{W}$ conjuntos no vacíos, suponiendo que a cada elemento de V se le asigna un único elemento de W, a ésta asignación se la llama *transformación o aplicación* de V en W. El conjunto V se llama *dominio* de la transformación y el W *codominio.* Una transformación de V en W se simboliza:

$$f: V \rightarrow W$$

Ejemplo

Dada la siguiente transformación lineal: $f(x, y, z) = (x - 2y, x + z, x, y - z)$ $\quad f: R^3 \rightarrow R^4$
Si por ejemplo lo evaluamos en (1, -2, 3)

$$\mathrm{f}(\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{3}) = (\mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{1}, -\mathbf{5})$$

Transforma un elemento del primer espacio que $\in$ a $\Re^3$ en un elemento de $\Re^4$ en el segundo espacio.

Definición

Dado dos espacios vectoriales $\mathrm{V} \wedge \mathrm{W}$ llamaremos ***Aplicación o Transformación Lineal,*** si cumple con las siguientes propiedades:

1) La imagen de la suma de dos vectores es igual a la suma de sus imágenes.

$$f(X+Y) = f(X) + f(Y) \qquad \mathrm{X \text{ e } Y} \in \Re^{n}$$

2) La imagen del producto de un escalar por un vector, es igual al producto del escalar por la imagen de dicho vector.

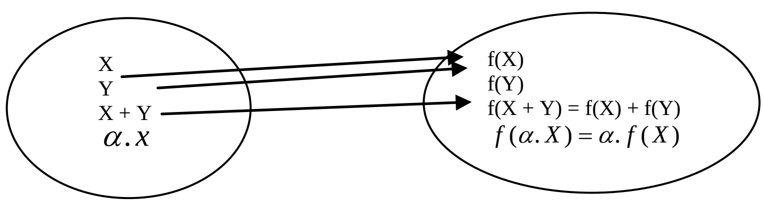
$$f(\alpha . X) = \alpha . f(X) \qquad \mathrm{X} \in \Re^{n} \wedge \alpha \in \Re$$

De 1) y 2) podemos decir que:

$$f(\alpha.X+\beta.Y) = \alpha.f(X) + \beta.f(Y) \qquad \text{X e Y} \in \Re^n \wedge \alpha \in \Re$$

"La imagen de una combinación lineal es igual a la combinación lineal de sus imágenes"

Dicho de otro modo, $f: V \to W$ es lineal si preserva la dos operaciones básicas de un espacio vectorial, la de suma vectorial y la del producto de un vector por un escalar. Además $f\left(\vec{\mathbf{0}}\right) = \vec{\mathbf{0}}$, esto es, toda aplicación lineal lleva el vector nulo al vector nulo.



<u>Ejemplo</u>

1. Verificar las propiedades:

$\mathrm{f}(x, y) = (x, y+x) \quad v_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \quad v_2 = (-\mathbf{1}, \mathbf{3}) \qquad \alpha = 2$

Resolución: $\mathrm{f}[(\mathbf{1}, \mathbf{2}) + (\mathbf{1}, \mathbf{3})] = \mathrm{f}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) + \mathrm{f}(\mathbf{1}, \mathbf{3})$

$$\mathrm{f}(\mathbf{2}, \mathbf{5}) = \mathrm{f}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) + \mathrm{f}(\mathbf{1}, \mathbf{3})$$
$$(\mathbf{2}, \mathbf{7}) = (\mathbf{1}, \mathbf{3}) + (\mathbf{1}, \mathbf{4})$$
$$(\mathbf{2}, \mathbf{7}) = (\mathbf{2}, \mathbf{7})$$

2. Verificar si es Función Lineal.

$$\mathrm{f}(x, y) = (\mathbf{2}x, y) \qquad \Re^2 \to \Re^2$$

Definimos 2 vectores genéricos de $\Re^2$. Por ejemplo: v1=(a,b) v2=(c,d)

v1 + v2 = (a+c, b+d)

Ahora debemos probar que

1) $f(v1+v2) = f(v1) + f(v2) \qquad v\mathbf{1}\ y v\mathbf{2} \in \Re^2$ (primera propiedad de TL)

Reemplazamos v1 y v2

f(a+c, b+d) = f(a,b) + f(c,d)

Buscamos estas imágenes con la función original y queda:

(2(a+c), b+d)) = (2a , b) + (2c, d)

(2a+2c, b+d) = (2a + 2c, b+d)

Se verifica la primera propiedad de Transformación lineal

Ahora debemos probar la propiedad 2:

2) $f(\alpha.v1) = \alpha.f(v1) \qquad v\mathbf{1} \in \Re^2 \wedge \alpha \in \Re$ (segunda propiedad de TL)

Reemplazamos v1

$f(\alpha.(a,b)) = \alpha.f(a,b)$

$f(\alpha a, \alpha b)) = \alpha.f(a,b)$

Buscamos las imágenes con la función dada

$(2\alpha a, \alpha b) = \alpha(2a, b)$

$(2\alpha a, \alpha b) = (2\alpha a, \alpha b)$

La segunda propiedad también se cumple. Verificamos que $f(x, y) = (\mathbf{2}x, y)$ es una Transformación Lineal

3. Verificar si es Función Lineal

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3) \qquad \Re^3 \to \Re^2$$

4. Verificar si es Función Lineal

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3,\ x_2 + x_3 + 1) \qquad \Re^3 \to \Re^2$$

5. Dado $f: V \to W \quad \Re^2 \to \Re^3$

$$f(1, 0) = (1, 2, 3) \ \wedge \ f(0, 1) = (0, -1, 2)$$

   a. ¿Cuál es la imagen $(1, 1)$?
   b. ¿Cuál es la imagen $(2, -3)$?

Resolución: a) $f[(1, 0) + (0, 1)] = (1, 2, 3) + (0, -1, 2)$

$$f(1, 1) = (1,\ 1, 5)$$

b) $f[\alpha\,(1, 0) + \beta\,(0, 1)] = (2, -3) \Rightarrow \alpha = 2, \beta = -3$

$$f[2\,(1, 0) - 3(0, 1)] = 2\,(1, 2, 3) - 3\,(0, -1, 2)$$

$$f(2, -3) = (2, 3, 0)$$

6. Dado $f: V \to W \quad \Re^2 \to \Re^3$

$$f(1, 2) = (-1, 0, 2) \qquad f(2, 1) = (0, 2, -1)$$

a. ¿Cuál es la imagen $(3, 3)$?
b. ¿Cuál es la imagen $(0, -1)$? Rta: $f(0, -1) = (2/3,\ 2/3, -5/3)$

Independencia de vectores

Considérese la aplicación lineal $f: \Re^3 \to \Re^2$ definida por: $f(x, y, z) = (x, y)$
$\to$ Dado el conjunto A = $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ L.I. y sus imágenes $\{(1,0), (0,1)\}$ L.I.

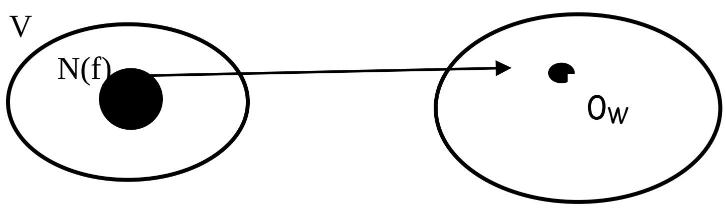
$\rightarrow$ Dado el conjunto A = $\{(1,0,1),(2,0,0)\}$ L.I. y sus imágenes $\{(1,0),(2,0)\}$ L.D.

De este ejemplo se desprende que, en general, la independencia de vectores en el primer espacio no significa la independencia en el segundo espacio.

Núcleo de una Transformación Lineal

Llamaremos Núcleo de una Transformación Lineal al subconjunto de vectores de V (primer espacio) que por f tiene como imagen al neutro en W (segundo espacio).

$$N(f) = \{\ v \in V : f(v) = \overline{\mathbf{0}}\ \}$$



Ejemplo 1

$f(x,y,z) = (x - \mathbf{2}y,\ y + \mathbf{3}z) \qquad \Re^3 \rightarrow \Re^2$

$f(x,y,z) = (x - \mathbf{2}y,\ y + \mathbf{3}z) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$

Resolución: $\begin{cases} x - 2y + 0z = 0 \\ 0x + y + 3z = 0 \end{cases}$

Resuelvo el SELH de la forma que lo veníamos haciendo, analizo por el teorema de Roche-Frobenius, obtengo el rango, y el grado de indeterminación.
Luego encuentro la solución del sistema. Ese vector que encuentro pasa a ser el **Núcleo de la transformación**.

$$N(f) = \{(-\mathbf{6}, -\mathbf{3}, \mathbf{1})\}$$

Es decir, calcular el Núcleo de una T. L., es calcular el espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo $A\,X = \bar{\mathbf{0}}$

Ejemplo 2

Dada la transformación: $f(x, y) = (x + 3y, 2x - 3y, 5x - y)$ de $R^2 \to R^3$

Resolución: $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 5x - y = 0 \end{cases}$ $N(f) = \{\bar{\mathbf{0}}\}$

Si resolvemos el sistema, encontramos que el sistema es CD. El rango es =2 y tenemos 2 incógnitas , lo que nos lleva a decir que la única solución es el vector nulo.

Ejemplo 3

$f(x, y, z) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$

Base y Dimensión del Núcleo

Son todos aquellos vectores linealmente independientes que forma el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Y la Dimensión está dada por la cantidad de vectores que forman la base.

La dimensión del Núcleo se le llama NULIDAD

Ejemplo 1:

Base N(f) = {(-6,-3,1)} dim N(f) = 1

Ejemplo 2:

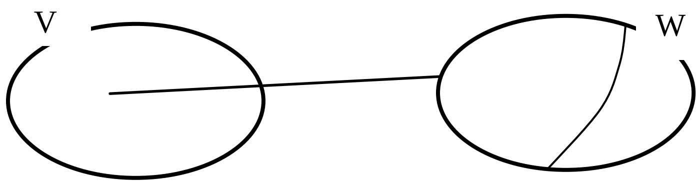
Base N(f) = $\{0\}$ dim N(f) = 0

Imagen de una Transformación Lineal

La imagen de una transformación de $f: V \rightarrow W$ es el conjunto imagen del dominio, es decir es el *conjunto de las imagenes de los vectores del primer espacio.*

$$I(f) = \{f(v)\} \subset w \qquad v \in V$$

La imagen de toda transformación lineal es un Subespacio del codominio.



Ejemplo 1: $\quad f(x, y, z) = (x - 2y, y + 3z) \qquad \Re^3 \rightarrow \Re^2$

Resolución:

Buscar la imagen de cada vector en la base canónica de $\Re^3$
Significa que en la trasformación evaluamos con los vectores canónicos.

$f(1, 0, 0) = (1, 0) \quad f(0, 1, 0) = (-2, 1) \quad f(0, 0, 1) = (0, 3)$

El conjunto imagen de la T.L será:

$I(f) = \{(1, 0), (-2, 1), (0, 3)\}$

Ejemplo 2:

$f(x, y) = (x + 3y, 2x - 3y, 5x - y) \qquad R^2 \rightarrow R^3$

Resolución: Evaluamos en la T.L. $\quad f(1, 0) = (1, 2, 5) \quad f(0, 1) = (3, -3, -1)$

$$I(f) = \{(1, 2, 5), (3, -3, -1)\}$$

Base y Dimensión de la Imagen. Rango

Son todos aquellos vectores Linealmente Independiente que forma el conjunto imagen. La dimensión es la cantidad de vectores que forman la base.

La dimensión de la Imagen se llama **RANGO.**

Ejemplo 1: Base de la $I(f) = \{(\mathbf{1},\mathbf{0}),(-\mathbf{2},\mathbf{1})\}$ $\quad \dim I(f) = \mathbf{2}$

Ejemplo 2: Base de la $I(f) = \{(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{5}),(\mathbf{3},-\mathbf{3},-\mathbf{1})\}$ $\quad \dim I(f) = \mathbf{2}$

Según el teorema de las dimensiones:

$$\dim V = \dim I(f) + \dim N(f)$$

Matriz Asociada a una Transformación Lineal

Es aquella matriz formada por los coeficientes de una transformación lineal, en la base canónica si no se especifica otra base.

Definida la $f : \Re^3 \to \Re^3$ por:

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y + 3z \\ 4x - 2y + 6z \\ -6x + 3y - 9z \end{bmatrix}$$

Calcular: A_T , $N(f), I(f), \dim I(f), \dim N(f)$

Solución: Como $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$, T $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\-9\end{pmatrix}$ se tiene

$$A_T=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 6\\ -6 & 3 & -9\end{pmatrix}$$ Matriz Asociada a la transformación

Cálculo de la N(f)

$\Rightarrow$

Armamos un sistema LH. : $\begin{matrix}2x-y+3z=0\\ 4x-2y+6z=0\\ -6x+3y-9z=0\end{matrix}$ Resolvemos por Gauss-Jordan

Analizamos por el Teorema de Roche Frobenius: y vemos que el grado de indeterminación es: h= 2, entonces vamos a tener dos vectores que van a formar el núcleo, y esos vectores son linealmente independientes, por tal razón decimos que la dimensión es igual a 2.
La tarea de ustedes es hacer esos cálculos y comprobar que realmente el N(f)es el calculado:

$$N(f)=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim I(f)=2$$

Cálculo de la I(f)

$$I(f)=\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \rho(A)=1 \Rightarrow \dim I(f)=1$$