

Funciones de campo vectorial

Integral de línea de campos vectoriales

$$W = \vec{F} \cdot \vec{D}$$

$$W = \int_a^b F[g(t)] \cdot g'(t) \cdot dt$$

Campo vectorial conservativo

Un campo vectorial $F(x, y) = (M, N)$ es conservativo $\Leftrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$

Si un campo es conservativo, es el **Gradiente de una función vectorial real** (Función potencial de F que lo origina)

$$F(x, y) = \nabla f(x, y)$$

Teorema fundamental de la integral de línea

El trabajo realizado por un campo vectorial conservativo sobre una partícula que se mueve entre dos puntos a y b es **independiente del camino seguido (independiente de la trayectoria)**.

$$W = f(x_b, y_b) - f(x_a, y_a) \quad | \quad f = \text{Función Potencial}$$

Si la trayectoria es cerrada $\rightarrow W = 0$

Teorema de Green

Sea una región simple del plano cuyo borde es una curva cerrada C , suave a trozos (sin picos), orientada en sentido antihorario, y si M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a D , se cumple:

$$\int_C M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

Establece la relación entre una integral de línea a lo largo de la curva C cerrada y simple, y una integral doble sobre una región plana D , limitada por C . La circulación antihoraria de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple es la integral doble del Rotor del campo sobre la región encerrada por la curva.

Para funciones de R^2

$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ representa el Rotor de F , este se indica $Rot(F)$

Para funciones de R^3

$$Rot F(x, y, z) = \nabla \times F(x, y, z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) i - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) k \right]$$

Integrales Dobles

Teorema de Fubini

Verticalmente simple

$$V = \iint f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Se analiza de Izquierda->Derecha->Abajo->Arriba
 a es el inicio de extremo de integracion, b es donde termina en x
 $g_1(x)g_2(x)$ son las funciones entre las que varia en el eje y

Horizontalmente simple

$$V = \iint f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Cálculo de Área

Podemos hacer uso de la integral doble para el cálculo de Áreas, para esto consideramos a la función $f(x, y) = 1$ recuerden que la función nos da la altura de cada prisma y si lo consideramos = 1 el valor calculado por la integral nos representa el área de la región R.

$$A = \iint dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \longrightarrow \text{Si es verticalmente simple}$$

$$A = \iint dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy \longrightarrow \text{Si es horizontalmente simple}$$