ESPACIO VECTORIAL

Definición de Espacio Vectorial

Dado V un conjunto cuyos elementos le llamamos *vectores,* decimos que es un *Espacio Vectorial* y lo simbolizamos $(V,+,\Re,\bullet)$, $\wedge$ $V \neq \varnothing$, si y sólo si cumple con las siguientes propiedades:

1) Un operación interna en V.

$$(X+Y) \in V \qquad\qquad X \in V \wedge Y \in V$$

La suma es una *ley de composición interna* en V, es decir la suma de dos elementos de V nos da otro elemento de V.

2) La suma es asociativa en V.

$$X+(Y+Z)=(X+Y)+Z \qquad\qquad X \in V \wedge Y \in V \wedge Z \in V$$

3) La suma es conmutativa en V.

$$X+Y=Y+X \qquad\qquad X \in V \wedge Y \in V$$

4) Existe un neutro para la suma en V.

$$\exists\, \bar{0} \in V \,/\, \forall X \in V \quad : \quad X+\bar{0}=\bar{0}+X = X \qquad\qquad X \in V$$

5) Todo elemento de V admite inverso aditivo u opuesto en V.

$$\forall X \in V \ ,\ \exists \ \ Y \in V \ / \quad X+Y=Y+X=\bar{0} \quad \text{El opuesto de } X \text{ será } \ Y=-X=\bar{\mathbf{0}}$$

6) El producto es una *ley de composición externa* en V, con escalares en $\Re$.

$$\alpha . X \in V \qquad\qquad X \in V \ \wedge \ \alpha \in \Re$$

7) El producto satisface la asociatividad mixta.

$$(\alpha.\beta).X = \alpha.(\beta.X) \qquad \alpha \wedge \beta \in \Re \quad \wedge \quad X \in V$$

El producto de $\alpha\beta$ es una operación interna en $\Re$, luego se efectúa una externa.

8) El producto es distributiva en respecto a la suma en $\Re$.

$$(\alpha + \beta).X = \alpha.X + \beta.X \qquad \alpha \wedge \beta \in \Re \quad \wedge \quad X \in V$$

9) El producto es distributivo con respecto a la suma en V

$$\alpha.(X+Y) = \alpha X + \alpha Y \qquad \alpha \in \Re \quad \wedge \quad X \in V \quad \wedge \quad Y \in V$$

10) Existe el neutro para el producto, que es la unidad.

$$1.X = X \qquad X \in V$$

Todo elemento que pertenezca al conjunto $(\mathrm{V}, +, \Re, \bullet)$ y cumpla con los 10 propiedades de la definición de espacio vectorial pasan a ser vectores.

A modo de ejemplo podríamos citar:

1) $\mathrm{V} = \Re^2$, entonces $(\Re^2, +, \Re, \bullet)$ es el espacio vectorial de los pares ordenados de números reales.

2) $\mathrm{V} = \Re^{2x2}$, entonces $(\Re^{2x2}, +, \Re, \bullet)$ es el espacio vectorial de las matrices.

3) $\mathrm{V} = \mathrm{f}$,enntonces $(\mathrm{f}, +, \Re, \bullet)$ es el espacio vectorial de las funciones.

4) $\mathrm{V} = \mathrm{P(x)}$, entonces $(\mathrm{P(x)}, +, \Re, \bullet)$ es el espacio vectorial de los polinomios.

De igual manera podríamos nombrar tantos otros ejemplos, todo depende del nombre que le asignemos a V, y que cumpla con las propiedades de espacio vectorial.

<u>Ejemplo 1</u>

Verificar si: $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} a & b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathrm{V}, +, \Re, \bullet)$ es un espacio vectorial.

Consecuencias de las propiedades:

1- $\lambda \bar{0} = \bar{0}$

2- $0 \bar{u} = \bar{0}$

3- $\lambda \bar{u} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \vee \bar{u} = \bar{0}$

4- $\lambda \bar{u} = \mu \bar{u} \quad \wedge \quad \bar{u} \neq \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mu$

5- $\lambda \bar{u} = \lambda \bar{v} \; \wedge \; \lambda \neq \bar{0} \; \Rightarrow \; \bar{u} = \bar{v}$

6- $(-\lambda)\bar{u} = -(\lambda \bar{u})$ el opuesto de un escalar por un vector, es igual opuesto del vector que resulta de multiplicar a dicho escalar por el vector.

Subespacio Vectorial

$(S, +, \Re, \bullet)$ es S.E. de $(V, +, \Re, \bullet)$ $\Leftrightarrow$ $(S, +, \Re, \bullet)$ $\in V$ $\qquad S \neq \varnothing \wedge \subset V$

Llamaremos $(S, +, \Re, \bullet)$ SUBESPACIO de $(V, +, \Re, \bullet)$ si "S" es un conjunto no vacío incluido en V y si además $(S, +, \Re, \bullet)$ es un espacio vectorial.

Y además cumple con:

1) $X, Y \in S \;\Rightarrow\; X + Y \in S$

2) $\lambda \in \Re,\; X \in S \;\Rightarrow\; \lambda . X \in S$

El vector nulo $\bar{0}$ pertenece a todos los subespacios de un espacio vectorial.

<u>Ejemplo 1</u>

Dado $(\{x, x\}, +, \Re, .)$ es un S.E. de $(R^2, +, \Re, .)$?

Es un espacio vectorial porque verifica:

1) $(X, X) \in R^2$

$(x,x)+(y,y)=(x+y,x+y) \in S$

2) $\alpha(x,x)=(\alpha x,\alpha x) \in S$

3) $(0,0) \in S \Rightarrow S \neq \varnothing$

Ejemplo 2

Dado $(\{x, x+1\},+,\Re,.)$ es un S.E. de $(R^2,+,\Re,.)$?

No es un espacio vectorial porque no verifica las propiedades de espacio vectorial.

Gráfico del ejemplo 1)

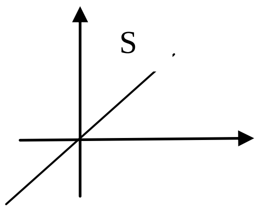
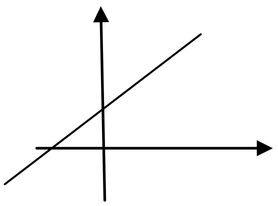


Gráfico del ejemplo 2)



Combinación Lineal

Sea $\{v_1,......v_n\}$ un conjunto de n vectores que $\in$ a V y v un vector cualquiera que $\in V$

Llamaremos *Combinación Lineal* a la expresión:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 ......\alpha_n v_n = v \ \vee \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = v \ : \alpha_i \in \Re \ \wedge \ v_i \in V$$

Dado el espacio vectorial $(V, +, \Re, \bullet)$ y un elemento v que $\in$ a V diremos que el mismo es una *combinación lineal* (CL) de los elementos $v_1,.......v_n$ que $\in$ a V, a la suma de los productos de dichos elementos por elementos de $\Re$.

<u>Ejemplo 1</u>

Dado w=(1,4) es CL del conjunto $\{(0,1),(2,4)\}$.

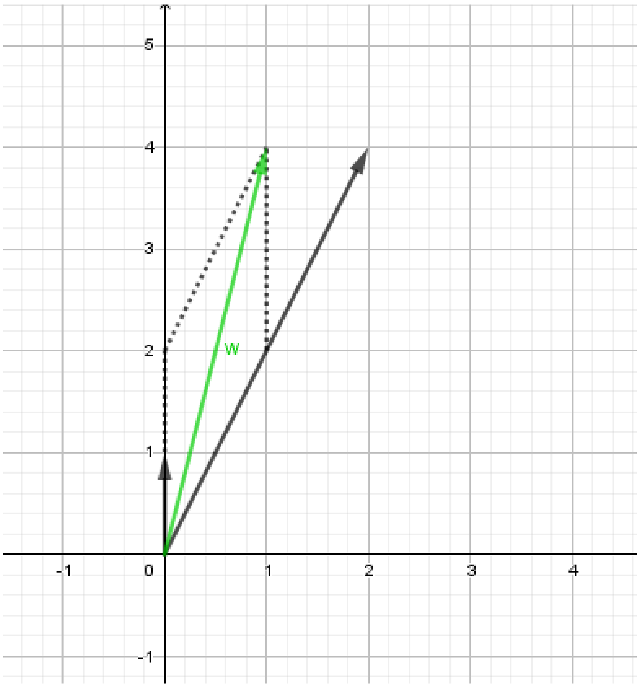
Respuesta:

$$\alpha(0,1)+\beta(2,4)=(1,4) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=2 \;\wedge\; \beta=1/2$$

Es CL, y es única porque el sistema a resolver es C*ompatible Determinado.*

Gráficamente la combinación lineal en $\Re^2$ significa que estirando o acortando, en uno u otro sentido a los vectores del conjunto para luego sumarlos, podamos obtener el vector propuesto.

En la siguiente grafica vemos que si multiplicamos por 2 el vector (0,1) y por ½ al vector (2,4) para hacerlo más corto, y luego los sumamos, obtenemos el vector w.



<u>Ejemplo 2</u>

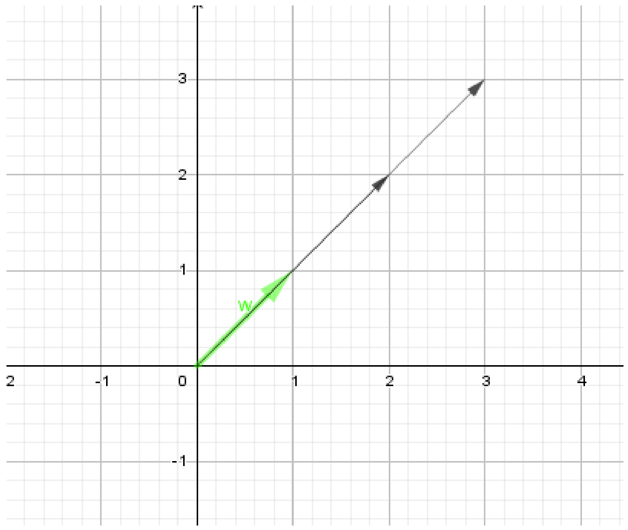
Es w= $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ CL del conjunto $\{(\mathbf{2},\mathbf{2}),(\mathbf{3},\mathbf{3})\}$

Repuesta:

$\alpha(\mathbf{2},\mathbf{2})+\beta(\mathbf{3},\mathbf{3})=(\mathbf{1},\mathbf{1})$ Es CL pero no es única porque el sistema es C*ompatible Indeterminado*.

$\alpha = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\beta;$

$\beta = \beta$



Los vectores dados tienen la misma dirección y el que queremos obtener también. Hay infinitas formas de obtener w.

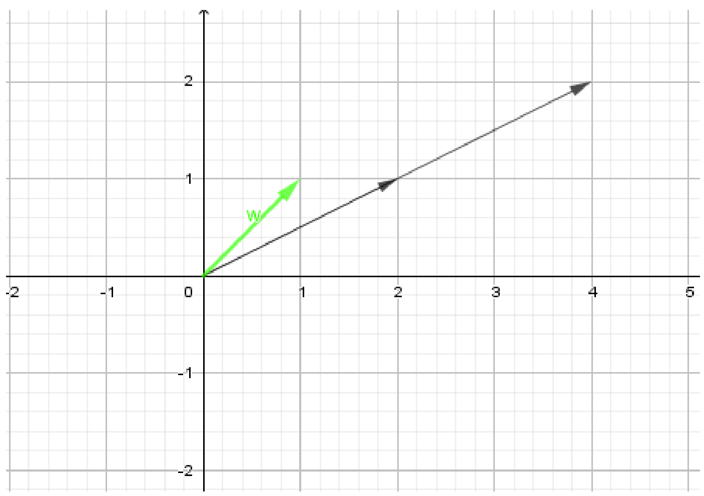
Ejemplo 3

Es w=(1,1) CL del conjunto $\{(\mathbf{2},\mathbf{1}),(\mathbf{4},\mathbf{2})\}$

Repuesta:

$\alpha(2,1)+\beta(4,2)=(1,1)$ No es CL porque el sistema es *Incompatible.*

Los dos vectores tienen la misma dirección pero el que queremos obtener no.



Dependencia e Independencia Lineal

El conjunto $\{v_1,......v_n\}$ es **L.I** $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2......\alpha_n v_n = \bar{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$

Diremos que el conjunto $\{v_1,......v_n\}$ de vectores que $\in$ a V es LINEALMENTE INDEPENDIENTE (L.I.) si la única CL posible para obtener como resultado el vector nulo, es haciendo ceros todos los coeficientes.

Ejemplo 1

Verificar si $\{(1,2),(3,4)\}$ es L.I.

Repuesta: $\alpha(1,2) + \beta(3,4) = (0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1\alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \Rightarrow \text{es L.I.}$$

Para determinar si un conjunto $\{v_1,......v_n\}$ de vectores que $\in$ a V es L.I. o L.D. se plantea un sistema de ecuaciones Homogéneo y si el mismo es *Compatible Determinado* es decir, si la única solución posible para obtener el vector nulo es la trivial, entonces decimos que el conjunto en cuestión es *Linealmente Independiente.* Si el sistema es *Compatible Indeterminado* el conjunto será *Linealmente Dependiente.*

Ejemplo 2

Verificar si $\{(2,2),(3,3)\}$ es L.D.

Repuesta: $\alpha(2,2) + \beta(3,3) = (0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2}\beta \wedge \Rightarrow \text{es L.D.}$$

Ejemplo 3

Verificar si $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$ es L.I.

Teoremas

1) $v \neq \bar{0} \;\Rightarrow\; \{v\}$ L.I. $\quad \alpha . v = \bar{0} \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0$

El conjunto constituido por un vector único no nulo es linealmente independiente.

2) $\{\ \bar{0}\ \}$ L.D $\quad \alpha \bar{0} = \bar{0} \quad \therefore \alpha \neq 0$

El conjunto que tiene como único elemento al vector nulo es linealmente dependiente.

3) $\bar{0} \in \{v_1, \ldots\ldots v_n\} \;\Rightarrow\; \{v_1, \ldots\ldots v_n\}$ L.D.

Si el vector nulo pertenece al conjunto entonces dicho conjunto es linealmente dependiente.

Ejemplo:

Si $v_j = \bar{0}$ y $\alpha_j \neq 0$ la combinación lineal será:

$$0v_1 + 0v_2 + \ldots\ldots + 1v_j + \ldots\ldots 0v_n = 0$$

Esto hace que no todos los $\alpha_i = 0$, en este caso $\alpha_j = 1$, haciendo al sistema linealmente dependiente.

4) $\{v_1, \ldots\ldots v_n\}$ L.I. $\Rightarrow\; \bar{0} \notin \{v_1, \ldots\ldots v_n\}$

Si un conjunto es linealmente independiente el vector nulo no pertenece al conjunto.

5) El conjunto A = $\{v_1, \ldots\ldots v_n\}$ L.D $\wedge \bar{0} \notin A \;\Leftrightarrow\; \exists \overset{\in A}{v_j} \;:\; v_j = \sum_{i \neq j}^{n} \beta_i v_i$

Un conjunto que no contenga al neutro es L.D. si y sólo si existe al menos un v_j que pertenece al conjunto y que pueda ser representado como una combinación lineal de los demás.

Ejemplo 1

$\{(2,3)(1,-2)(3,1)\}$ L.D

$$\alpha(2,3)+\beta(1,-2)=(3,1) \qquad \alpha=1\wedge\beta=1$$

Ejemplo 2

$\{(1,1)(1,2)(2,2)\}$ L.D.

a) $\alpha(1,1)+\beta(1,2)=(2,2) \qquad \alpha=2\wedge\beta=0$

b) $\alpha(1,1)+\beta(2,2)=(1,2)$ Incompatible

c) $\alpha(1,2)+\beta(2,2)=(1,1) \qquad \alpha=0\wedge\beta=1/2$

6) $A=\{v_1,......v_n\}$ L.I. $\Leftrightarrow \forall v_j \ : \ v_j \neq \sum_{i\neq j}^{n}\beta_i v_i$

El conjunto es L.I. si y sólo si no existe un v_j del mismo conjunto que puede ser representado como una C.L. de los demás.

Sistema Generador

Un conjunto de vectores es *Sistema Generador* de V , si y sólo si todo vector del espacio vectorial puede ser representado como C.L. de los mismos.

$$\{v_1......v_n\} \text{ S.G. de V } \Leftrightarrow \forall \ v\in V \ : \ v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$

Otra forma de definir un Sistema Generador es la que sigue: el subespacio generado por el conjunto de vectores $\{v_1......v_n\}$ es el mismo V .

Ejemplo 1

Dado $A=\{(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{1})\}$ es S.G de $\Re^2$

$$\alpha(1,1)+\beta(2,1)=(a,b) \quad : \quad \alpha=2b-a\wedge\beta=a-b$$

Decimos que el conjunto A es S.G. de todo $\Re^2$.

Ejemplo 2

Dado A = $\{(1,0),(0,1)\}$ es S.G. de $\Re^2$

$$\alpha(1,0)+\beta(0,1)=(a,b) \quad : \quad \alpha=a \wedge \beta=b$$

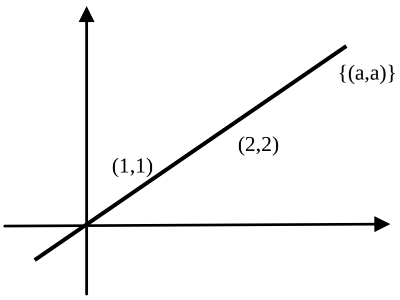
Esto sucede por haber utilizado el conjunto formado por los vectores canónicos.

Ejemplo 3

Dado $A=\{(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{2})\}$ es S.G. de $\Re^2$

$$\alpha(1,1)+\beta(2,2)=(a,b) \quad : \quad \alpha+2\beta=a \wedge \alpha+2\beta=b \quad \Leftrightarrow \quad a=b$$

Esto nos dice que los vectores propuestos solo nos genera una parte del espacio, es decir un subespacio que tendrá la forma $(\{(a,a)\},+,R,.)$, aquellos pares ordenados que tenga sus componentes iguales.



Ejemplo 4

Dado $A=\{(\mathbf{1},\mathbf{2})\}$ es S.G. de $\Re^2$

$$\alpha(1,2)=(a,b) \qquad b=2a$$

El subespacio generado es tal que la segunda componente es dos veces la primera.

$$(\{(a,2a)\},+,R,.)$$

Ejemplo 5

Dado $A=\{(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})\}$ es S.G. de $\Re^3$

$$\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)=(a,b,c)$$

El subespacio generado es el siguiente: $(\{(a,a,c)\},+,R,.)$

Podemos observar que solo nos representa un plano de $\Re^3$.

Ejemplo 6:

Dado $A = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \right\}$ es S.G de $\Re^{2\times 2}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

El subespacio formado tiene la forma $\left\{ \begin{pmatrix} 3c-2d & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$

Como conclusión podemos decir, para que un conjunto de vectores genere todo el espacio en cuestión, esto no significa que siempre suceda, el número mínimo de vectores del conjunto debe ser igual a la dimensión del espacio y ser linealmente independiente.

Dado el conjunto $A = \{v_1 \ldots\ldots v_n\}$ S.G. $\wedge \; \exists v_j \; : v_j = \sum_{i \neq j}^{n} \beta_i v_i \; \Leftrightarrow \; \wedge$ S.G.

Si un conjunto de vectores, es un sistema generador y un vector del mismo es C.L. de los demás, éste puede ser extraído del conjunto sin que el mismo deje de ser un sistema generador del espacio.

Todo conjunto que es linealmente dependiente y sistema generador cumple con este teorema, el mismo al ser L.D. existe un vector que es C.L. de los demás. Esto hace que el teorema podría haber sido escrito de la manera siguiente:

Dado el conjunto $A = \{v_1 \ldots\ldots v_n\}$ S.G. $\wedge$ L.D. $\Leftrightarrow \; \exists v_j \; : \; \left\{ v_1 \ldots \overset{v_j}{\uparrow} \ldots v_n \right\}$ S.G.

Ejemplo 1

$A=\{(\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{2})\}$ es S.G. $\wedge$ L.D.

Podemos extrae los vectores $(\mathbf{2},\mathbf{2}) \wedge (\mathbf{1},\mathbf{1})$ respectivamente y los conjuntos $\{(0,1),(1,1)\}$ $\{(0,1),(2,2)\}$ siguen siendo S.G. de $\Re^2$.

Base de un Espacio Vectorial

Diremos que un conjunto de vectores de V es una BASE (B) de V si se verifica las dos condiciones:

a) que $v_1 \ldots\ldots v_n$ generen a V
b) que $v_1 \ldots\ldots v_n$ sean linealmente independiente.

$$\{v_1,\ldots\ldots v_n\}\ \text{B} \Leftrightarrow \{v_1,\ldots\ldots v_n\}\ \text{S.G.} \wedge \text{L.I.}$$

Dados los siguientes conjuntos como ejemplo, comprobar si es una base:

<u>Ejemplos</u>

1) Dado $A=\{(\mathbf{1},\mathbf{2}),(\mathbf{2},\mathbf{1})\}$.

1) $\alpha(1,2)+\beta(2,1)=(a,b)$ es sistema generador

2) $\alpha(1,2)+\beta(2,1)=(0,0)$ es L.I. , podemos asegurar que es una base.

2) Dado $C=\{(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})\}$ L.I.

3) Dado $D=\{(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{1},\mathbf{3},-\mathbf{1}),(\mathbf{5},\mathbf{3},-\mathbf{2})\}$

Dimensión

Llamaremos dimensión (dim) de un espacio vectorial al número de vectores de sus bases.

$$\dim(V,+,\Re,\bullet)=n \Leftrightarrow n = \text{nº de vectores de la base}$$

$\{v_1......v_n\}$ es L.I. $\Leftrightarrow$ $\{v_1......v_n\}$ es una base

$\{v_1......v_n\}$ es S.G. $\Leftrightarrow$ $\{v_1......v_n\}$ es una base

Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen igual números de vectores linealmente independientes.

Teorema: Sea un espacio vectorial de dimensión finita *n*.

1. $\mathrm{n}+\mathbf{1}$ o más vectores en $\Re^{\mathrm{n}}$ son linealmente dependiente.
2. Todo conjunto L.I. $\mathrm{A}=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,.....\mathrm{u}_\mathrm{n}\}$ con "*n*" elementos, es una base de $\Re^{\mathrm{n}}$
3. Todo conjunto generador $\mathrm{A}=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,.....\mathrm{u}_\mathrm{n}\}$ con "*n*" elementos, es una base de $\Re^{\mathrm{n}}$

Ejemplo

Sea W un subespacio del espacio real $\Re^3$. Podemos distinguir los siguientes casos:

1. dim $\mathrm{W}=\mathbf{0}$, con lo que $\mathrm{W}=\{\mathbf{0}\}$, un punto.
2. dim $\mathrm{W}=\mathbf{1}$, con lo que W es una recta en el origen.
3. dim $\mathrm{W}=\mathbf{2}$, con lo que W es un plano por el origen.
4. dim $\mathrm{W}=\mathbf{3}$, con lo que W es el espacio completo de $\Re^3$

Bases Canónicas

1) Base canónica de $\Re^2$ $\quad\{(\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1})\}$

2) Base canónica de $\Re^3$ $\quad\{(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})\}$

3) Generalizando para $\Re^n$

$$\{(1,0,0,0.....,0)\,;(0,1,0,0,.....,0);\ (0,0,1,0,......,0);.......;(0,0,0,0,......,1)\}$$

Ejemplo de base de un subespacio:

Sea $W=\{(1,0,1)\,,(2,1,3),(0,1,1),(1,1,2)\}$ un conjunto de vectores, verificar si existe una base que genere todo $\Re^3$, o un subespacio del mismo, determinar la dimensión de la base generada.

$$\alpha(1,0,1)+\beta(2,1,3)+\gamma(0,1,1)+\delta(1,1,2)=(a,b,c)$$

Resolviendo podemos observar que $c=a+b$

La base que constituyen es $W=\{(1,0,1)\,,(0,1,1)\}$ base de un subespacio de dimensión 2.

Generalización del concepto de rango

Llamaremos subespacio generado por las filas de la matriz "A" al conjunto de las infinitas combinaciones lineales que podemos generar con las mismas.

$\bar{A}_f$ SUBESPACIO GENERADO POR LAS FILAS DE "A" $\Leftrightarrow$

$$\bar{A}_f=\{A_1..........\bar{A_n}\}=\{\alpha_1A_1+......+\alpha_nA_n:\alpha_i\in\Re\}$$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ calcular la dim $\bar{A}_f$

Respuesta:

$$\alpha(1,2,3)+\beta(4,5,6)=(0,0,0)\quad\Leftrightarrow\quad\alpha=0\wedge\beta=0\quad\Leftrightarrow$$

$\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ L.I. y S.G. de un plano de R^3 $\Rightarrow$ dim. $\bar{A}_f$ = 2

Llamaremos <u>subespacio generado por las columnas</u> de la matriz "A" al conjunto de las infinitas combinaciones lineales que podemos generar con las mismas.

$\bar{A}_f$ SUBESPACIO GENERADO POR LAS COLUMNAS DE "A" $\Leftrightarrow$

$$\bar{A}_c = \left\{A^1 \ldots\ldots\ldots \bar{A}^n\right\} = \left\{\alpha_1 A^1 + \ldots\ldots + \alpha_n A^n : \alpha_i \in \Re\right\}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ calcular la dim $\bar{A}_c$

Respuesta:

$$\alpha(1,4) + \beta(2,5) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\{(1,4),(2,5)\} \text{ L.I. y S.G. de } R^2 \quad \Rightarrow \text{ dim. } \bar{A}c = 2$$

$$\dim \bar{A}_f = \dim \bar{A}_c$$

La dimensión del <u>subespacio generado</u> por las filas de la matriz "A" es igual a la dimensión del <u>subespacio generado</u> por las columnas de la misma.

<u>Aclaración:</u>

$\rightarrow$ <u>No es lo mismo la dimensión del subespacio generado por las filas o columnas , que la dimensión del espacio a que pertenecen las filas o columnas.</u>

En el caso del ejemplo, las filas $\in R^3$ y las columnas $\in R^2$

En toda matriz la dimensión del subespacio generado por las filas de la matriz "A" es igual a la dimensión generado por las columnas de la misma y a dicho número lo llamaremos RANGO de la matriz y lo indicamos ρ (A).

$$\rho \text{ (A)} = \textit{Rango de } \text{"A"} \quad \Leftrightarrow \quad \rho \text{ (A)} = \dim \bar{A}_f = \dim \bar{A}_c$$

Ejemplos:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho \text{ (A)} = 3$ 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho \text{ (A)} = 2$

Teoremas

- ✓ ρ (AB) $\leq$ min { ρ (A) , ρ (B) }

El rango del producto de dos matrices es menor o igual que los rangos de dicha matrices.

Ejemplo: ρ (A) = 2 y ρ (B) = 3, entonces min {ρ (A) , ρ (B)} = min {2,3} = 2 el teorema dice que ρ (AB) $\leq$ 2

- ✓ $A^{-1}\ \exists \Rightarrow$ ρ (AB) = ρ (B) $\wedge$ $B^{-1}\ \exists \Rightarrow$ ρ (AB) = ρ (A)

Si en el producto de dos matrices una de ellas tiene inversa, el rango del producto de las mismas es igual a la de la otra matriz.

- ✓ $A^{-1}\ \exists \wedge B^{-1}\ \exists \Rightarrow$ ρ (AB) = ρ (A) = ρ (B)

Si la matriz “A” y la matriz “B” tienen inversa podemos asegurar que el rango del producto de las mismas, es iguales a cualquiera de ellas.

- ✓ $A^{-1}\ \exists \Leftrightarrow$ ρ (A) = n

Si la inversa de la matriz “A” existe, si y sólo si, su rango es igual a su orden.

- ✓ $A^{-1}\ \exists \Leftrightarrow \begin{array}{l} A\,X = 0 \Rightarrow Comp.\,Deter. \\ A\,X = B \Rightarrow Comp.\,Ind. \end{array}$