VECTORES

INTRODUCCIÓN

En diversas oportunidades de la vida usamos magnitudes. Algunas magnitudes quedan completamente definidas mediante un escalar (número real) y la unidad correspondiente. Ejemplo: la cantidad de líquido para llenar una botella: 1 litro, la cantidad de cable necesaria para efectuar una instalación eléctrica: 500 metros, etc. Este tipo de magnitudes se denominan magnitudes escalares.

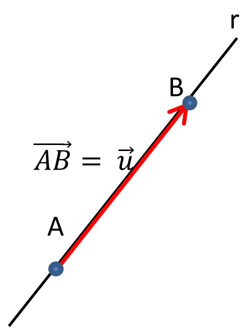
Las magnitudes escalares son aquellas que se caracterizan mediante un número real con una unidad apropiada de medida.

Sin embargo, en otras situaciones tanto en la vida cotidiana como en las ciencias, un gran número de sucesos están relacionados con magnitudes que para ser representadas requieren se indique una intensidad, una dirección y un sentido. Estas magnitudes se denominan magnitudes vectoriales.

Las magnitudes vectoriales son aquellas que se caracterizan por tener intensidad (tamaño), dirección y sentido.

A estas magnitudes las estudiaremos como vectores geométricos. Comenzaremos con el concepto de vector geométrico en espacios bidimensionales R^2, y tridimensionales, R^3 y luego estudiaremos las operaciones algebraicas con vectores y sus propiedades.

VECTOR: es todo segmento orientado



Si consideramos al punto A como el origen y al punto B como el extremo tendremos un segmento orientado, entonces queda definido el vector $\overrightarrow{AB}$ que también podemos llamar $\vec{u}$

Podemos identificar en $\vec{u}$ una dirección, un sentido y una magnitud.

La dirección o recta de acción está dada por la recta "r". Al decir "con origen en A y extremo en B", estamos fijando un sentido y lo

Además, la longitud desde el origen A hasta el extremo B es el módulo o norma del vector que se simboliza $\|\vec{u}\|$.

Supongamos que $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$ entonces el **modulo o longitud** de $\vec{u}$ se calcula:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

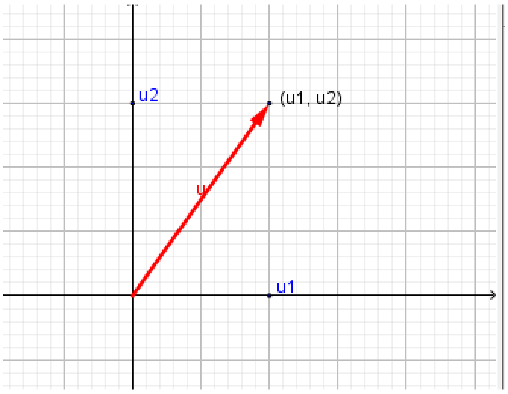
Diremos que un vector $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$ de n componentes es un elemento de R^n o pertenece a R^n.

Llamaremos **versor o vector unitario** a todo vector de módulo 1 y lo simbolizaremos $\hat{u}$:

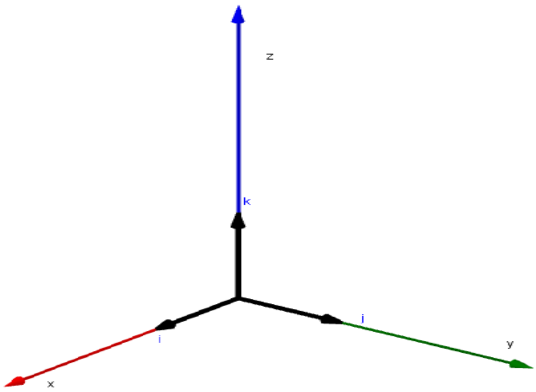
$$\hat{u} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\,\vec{u}$$

Representación gráfica de un vector en R^2

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, diremos que u_1 es la componente en **x** del vector y u_2 es la componente en **y**



Un vector puede definirse según sus componentes o como una **combinación lineal de los versores fundamentales $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$;** (versores que tiene la misma dirección y sentido que los ejes coordenados x, y, z)



De este modo

En R^2, $\hat{\imath} = (1,0)\ \ y\, \hat{\jmath} = (0,1)$

$\vec{v} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ = 5(1,0)+2(0,1) = (5,0)+(0,2) = (5,2)

En R^3, $\hat{\imath} = (1,0,0), \hat{\jmath} = (0,1,0) y\ \hat{k} = (0,0,1)$

$\vec{u} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 9\hat{k}$ = 2(1,0,0)+ 3(0,1,0) -9(0,0,1) = (2,0,0)+(0,3,0)+(0,0,-9) = (2,3,-9)

OPERACIONES ENTRE VECTORES

a) Suma de vectores

La suma de dos vectores de igual dimensión da como resultado otro vector cuyas componentes son igual a la suma de las componentes homologas:

$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots.., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots.., v_n)$ entonces $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2 + \cdots + u_n + v_n)$

Propiedades de la suma de vectores:

1) Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2) Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3) Elemento *Neutro* para la suma, denominado vector nulo, simbolizado $\vec{0}$, tal que para cualquier vector $\vec{u}$ se cumple que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.
4) Elemento *opuesto*:
   Para todo vector $\vec{u}$ existe un vector opuesto $-\vec{u}$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$

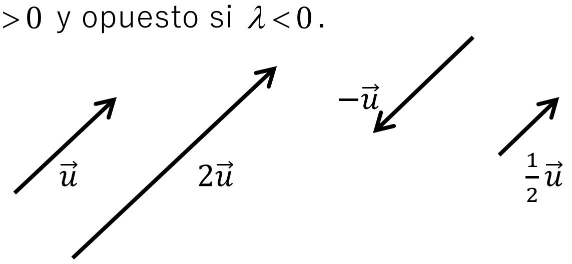
b) Resta de vectores

La resta de vectores se define a través de la suma de un vector más su opuesto.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

c) Producto de un escalar por un vector

El producto de un vector $\vec{u}$ por un escalar λ $(\lambda \neq 0)$, es otro vector $\lambda\vec{u}$ cuya dirección coincide con la del vector $\vec{u}$, cuyo módulo es $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$ y cuyo sentido es igual al de $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ y opuesto si $\lambda < 0$.



Propiedades del producto de un vector por un escalar.

1) Asociativa

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u})$$

2) Distributiva:

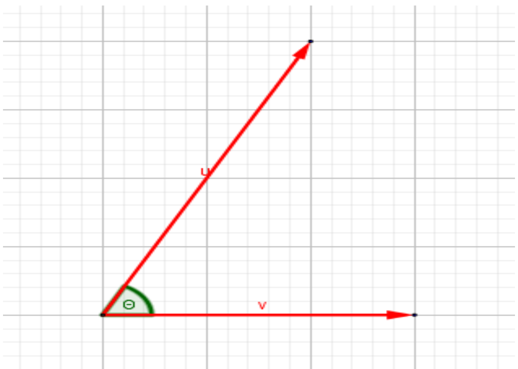
- Respecto a la suma de vectores: $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

- Respecto a la suma de escalares.($\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.

3) El escalar 1 es neutro para el producto de un vector por un escalar: $1\vec{u} = \vec{u}$

d) Producto Punto (o Producto Escalar)

Cuando dos vectores no nulos $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ se colocan de manera que sus puntos iniciales coincidan, forman un ángulo θ.



El producto punto $\vec{u}.\vec{v}$ entre los dos vectores es igual al módulo de $\vec{u}$ por el módulo de $\vec{v}$ por el coseno del ángulo θ:

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos\theta$$

Y da por resultado un **número o escalar**.

Supongamos $\vec{u} = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath} + u_3\hat{k}\ \ y\ \ \vec{v} = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$:

$$\vec{u}.\vec{v} = (u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath} + u_3\hat{k}).(v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k})$$

$$\vec{u}.\vec{v} = (u_1v_1\hat{\imath}.\hat{\imath} + u_1v_2\hat{\imath}.\hat{\jmath} + u_1v_3\hat{\imath}.\hat{k} + u_2v_1\hat{\jmath}.\hat{\imath} + u_2v_2\hat{\jmath}.\hat{\jmath} + u_2v_3\hat{\jmath}.\hat{k} + u_3v_1\hat{k}.\hat{\imath} + u_3v_2\hat{k}.\hat{\jmath} + u_3v_3\hat{k}.\hat{k})$$

$u_1v_1,\ u_1v_2, \ldots . . u_nv_n$ son productos entre dos números y se resuelve sin dificultad. En cambio $\hat{\imath}.\hat{\imath},\ \hat{\imath}.\hat{\jmath},$ etc. se resuelve como un producto punto entre dos vectores:

$\hat{\imath}.\hat{\jmath} = \|\hat{\imath}\|\|\hat{\jmath}\| \cos 90º$, el módulo de $\hat{\imath}$ y el de $\hat{\jmath}$ valen 1. El ángulo entre ellos es 90° y el coseno de 90° es 0, por lo que el producto punto da 0.

$\hat{\imath}.\hat{\imath} = \|\hat{\imath}\|\|\hat{\imath}\| \cos 0º$, el módulo de $\hat{\imath}$ y el de $\hat{\jmath}$ valen 1. El ángulo entre ellos es 0° y el coseno de 0° es 1, por lo que el producto punto da 1.

La tabla siguiente resume el resultado del producto punto entre los versores fundamentales:

.	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{k}$
$\hat{\imath}$	1	0	0
$\hat{\jmath}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

Esto significa que se anulan todos los términos excepto aquellos donde aparece $\hat{\imath}.\hat{\imath}, \hat{\jmath}.\hat{\jmath}, y\ \hat{k}.\hat{k}$. Por esta razón, el producto punto se calcula como la suma de los productos de las componentes homologas:

$$\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1\hat{\imath}.\hat{\imath} + u_2v_2\hat{\jmath}.\hat{\jmath} + u_3v_3\hat{k}.\hat{k} \implies \vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Ejemplo

$\vec{u} = (2, -6, 3) \quad \vec{v} = (5, 1, -4)$

$\vec{u}.\vec{v} = 2x5 + (-6)x1 + 3x(-4)$

$\vec{u}.\vec{v} = 10 - 6 - 12$

$\vec{u}.\vec{v} = -8$

- **Propiedades del Producto Punto**
  1) Es conmutativo: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
  2) Es distributivo respecto a la suma de vectores: $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
  3) Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ siendo $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$ entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

- **Aplicaciones del Producto Punto**

Usaremos el producto punto para:

1) Calcular el ángulo entre dos vectores

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos\theta \quad \rightarrow cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \quad \rightarrow \quad \theta = cos^{-1}(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|})$

Ejemplo

El ángulo entre $\vec{u} = (2,-6,3)$ y $\vec{v} = (5,1,-4)$ es:

$$\theta = cos^{-1}(\frac{-8}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}\sqrt{5^2+1^2+(-4)^2}})$$

$$\theta = cos^{-1}(\frac{-8}{7\sqrt{42}})$$

$$\theta = 100°\ 9'25.33''$$

2) Conocer si dos vectores son perpendiculares

La condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares es que el producto punto entre ellos sea nulo ya que:

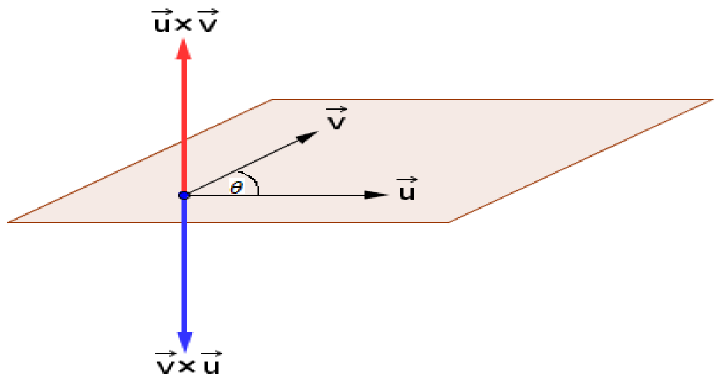
$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos90º = 0$$

e) Producto Cruz (o Producto Vectorial)

El producto cruz es una operación que **solo está definida para vectores de R³**. Dados dos vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ el producto cruz se indica como $\vec{u}x\vec{v}$. Este producto **da por resultado un vector** $\vec{c}$ con las siguientes características:

- Su dirección es perpendicular al plano formado por $\vec{u}\ y\ \vec{v}$
- Su módulo está dado por $\|\vec{c}\| = \|\vec{u}x\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|sen\theta$, siendo θ el ángulo que forman dichos vectores.
- Su sentido es positivo si el sentido de $\vec{u}x\vec{v}$ es contrario al de las agujas del reloj. Es decir, considerando la figura, si el vector $\vec{u}$ sigue el giro según el ángulo θ hasta coincidir con $\vec{v}$, en sentido antihorario, entonces $\vec{c}$ es positivo $(\vec{c} = \vec{u}x\vec{v})$

  Si el vector $\vec{v}$ sigue el giro según el ángulo θ hasta coincidir con $\vec{u}$, en sentido horario, entonces su sentido es $\vec{c} = \vec{v}x\vec{u} = -\vec{u}x\vec{v}$



Ahora supongamos $\vec{u} = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath} + u_3\hat{k}\ \ y\ \ \vec{v} = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$:

$$\vec{u}x\vec{v} = (u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath} + u_3\hat{k})x(v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k})$$

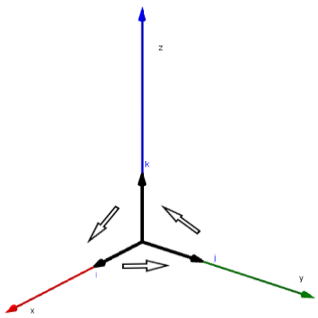
$$\vec{u}x\vec{v} = (u_1v_1\hat{\imath}x\hat{\imath} + u_1v_2\hat{\imath}x\hat{\jmath} + u_1v_3\hat{\imath}x\hat{k} + u_2v_1\hat{\jmath}x\hat{\imath} + u_2v_2\hat{\jmath}x\hat{\jmath} + u_2v_3\hat{\jmath}x\hat{k} + u_3v_1\hat{k}x\hat{\imath} + u_3v_2\hat{k}x\hat{\jmath} + u_3v_3\hat{k}x\hat{k})$$

$u_1v_1,\ u_1v_2, \ldots\ldots u_nv_n$ son productos entre dos números y se resuelve sin dificultad. En cambio $\hat{\imath}x\hat{\imath},\ \hat{\imath}x\hat{\jmath},$ etc. se resuelve como un producto cruz entre dos vectores:

$\hat{\imath}x\hat{\jmath}$ da por resultado un vector de módulo 1 perpendicular a ellos y con sentido positivo, es decir, da por resultado $\hat{k}$.

$\hat{\jmath}x\hat{\imath}$, da por resultado un vector de módulo 1 perpendicular a ellos y con sentido negativo, es decir, da por resultado $-\hat{k}$.

La tabla siguiente resume el resultado del producto cruz entre los versores fundamentales:



x	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{k}$
$\hat{\imath}$	0	$\hat{k}$	$-\hat{\jmath}$
$\hat{\jmath}$	$-\hat{k}$	0	$\hat{\imath}$
$\hat{k}$	$\hat{\jmath}$	$-\hat{\imath}$	0

Entonces,

$$\vec{u}x\vec{v} = (u_1v_2)\hat{k} + (u_1v_3)(-\hat{\jmath}) + (u_2v_1)(-\hat{k}) + (u_2v_3)\hat{\imath} + (u_3v_1)\hat{\jmath} + (u_3v_2)(-\hat{\imath})$$

$$\vec{u}x\vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\hat{\imath} + (u_3v_1 - u_1v_3)\hat{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{k}$$

$$\vec{u}x\vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\hat{\imath} - (u_1v_3 - u_3v_1)\hat{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{k}$$

Dado el resultado anterior, podemos comprobar que es posible resolver el producto cruz planteando un seudo-determinante y resolviendo el mismo por el Método de Laplace:

Sean $\vec{u} = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath} + u_3\hat{k}\ \ y\ \ \vec{v} = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$:

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \hat{k}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{u}x\vec{v} = \hat{\imath}(u_2v_3 - v_2u_3) - \hat{\jmath}(u_1v_3 - v_1u_3) + \hat{k}(u_1v_2 - v_1u_2) =$$

$$\vec{u}x\vec{v} = \hat{\imath}(u_2v_3 - v_2u_3) + \hat{\jmath}(v_1u_3 - u_1v_3) + \hat{k}(u_1v_2 - v_1u_2)$$

Ejemplo

$\vec{u} = (2, -6, 3) \quad \vec{v} = (5, 1, -4)$

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -6 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + \hat{k}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u}x\vec{v} = \hat{\imath}[24 - 3] - \hat{\jmath}[-8 - 15] + \hat{k}[2 - (-30)]$$

$\vec{u}x\vec{v} = 21\hat{\imath} + 23\hat{\jmath} + 32\hat{k}$ ó

$\vec{u}x\vec{v} = (21, 23, 32)$

Propiedades del Producto Cruz

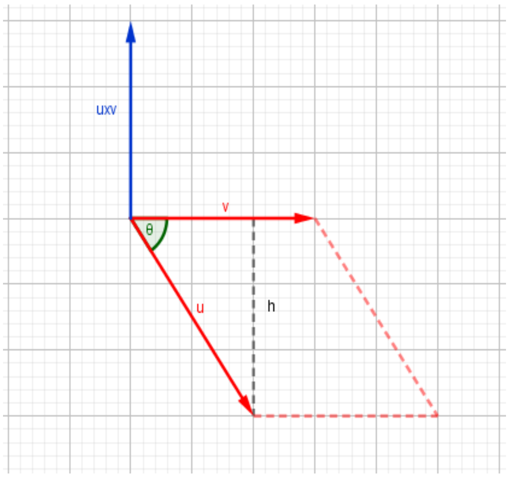
1) El producto cruz no es Conmutativo: $\vec{v}x\vec{u} = -\vec{u}x\vec{v}$
2) El producto cruz es Distributivo respecto a la suma de vectores: $\vec{u}\,x\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}x\vec{v} + \vec{u}x\vec{w}$
3) Siendo α un escalar se verifica : $\alpha\vec{u}\,x\,\vec{v} = \vec{u}x\,\alpha\vec{v} = \alpha(\vec{u}x\vec{w})$
4) Si $\vec{u} \neq \vec{0}\ y\ \vec{v} \neq \vec{0}$ entonces $\vec{u}\,x\,\vec{v} = 0$ si y solo si $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son paralelos

Aplicaciones del Producto Cruz

Usaremos el producto cruz para:

1) Conocer si dos vectores son paralelos, ya que como enuncia la propiedad 4, si $\vec{u} \neq \vec{0}\ y\ \vec{v} \neq \vec{0}$ entonces $\vec{u}\,x\,\vec{v} = \vec{0}$ si y solo si $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son paralelos.

2) Conocer el Área del paralelogramo formado por $\vec{u}\ y\ \vec{v}$:



Los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ definen un paralelogramo de altura ***h.***

Como ya dijimos: $\|\vec{u}x\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|sen\theta$ (1)

También sabemos por trigonometría que:

$$sen\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\|h\|}{\|\vec{u}\|} \Longrightarrow \|\boldsymbol{h}\| = \boldsymbol{sen\theta}\|\vec{\boldsymbol{u}}\| \quad (2)$$

Y además conocemos que el área A de un paralelogramo es el producto entre su base y su altura. Entonces:

$$A = base\ .altura\ = \|\ \vec{v}\|\ .\ \|h\|$$

Si reemplazamos $\|\boldsymbol{h}\|$ por (2) queda:

$$A = \|\ \vec{v}\|\ sen\theta\|\vec{u}\| \Longrightarrow \mathrm{A} = \|\vec{\mathrm{u}}\|\|\ \vec{\mathrm{v}}\|sen\theta \Longrightarrow \boldsymbol{A} = \|\vec{c}\| = \|\vec{u}x\vec{v}\| \quad \text{según (1)}$$

Ejemplo

El área del paralelogramo formado por $\vec{u} = (2, -6, 3)\ \ y\ \ \vec{v} = (5, 1, -4)$ es:

$$A = \|\vec{u}\ x\ \vec{v}\| = \sqrt{21^2 + 23^2 + 32^2} = \sqrt{1994}\ \cong 44{,}65\ unidades\ de\ area$$

f) **Producto Mixto**

Cuando los vectores son elementos de R^3, podemos combinar el producto punto con el producto cruz para definir una nueva operación entre tres vectores, que se denomina **Producto Mixto**, y que da por resultado un escalar.

El Producto Mixto entre los vectores $\vec{u},\ \vec{v}\ y\ \vec{w}$ se denota $[\vec{u},\ \vec{v}\ ,\vec{w}\ ]$ y se calcula como $\vec{u}\ .\ (\ \vec{v}\ x\ \vec{w}\ )$; es decir, primero se resuelve el producto cruz entre $\vec{v}\ y\ \vec{w}$, obteniendo así un vector; luego se hace el producto punto entre dicho vector y $\vec{u}$, obteniendo un escalar.

Esta operación puede resolverse en forma directa planteando un determinante de orden 3, mediante $\vec{u},\ \vec{v}\ y\ \vec{w}$, y resolviendo el mismo por el Método de Laplace, Sarrus o Chío:

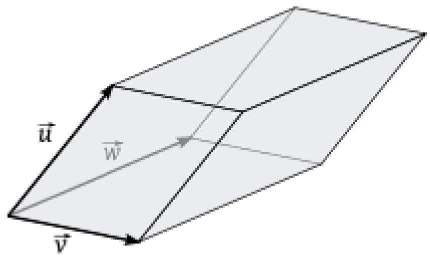
$$\vec{u}\,.\,(\,\vec{v}\;x\;\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Aplicación del Producto Mixto

Usaremos el producto mixto para averiguar Volumen: Así como el producto cruz permite calcular el Área del paralelogramo formado por $\vec{u}\ y\ \vec{v}$, el Producto Mixto permite calcular el Volumen del paralelepípedo formado por $\vec{u},\ \vec{v}\ y\ \vec{w}$, siendo éstos vectores de R^3:

$$\boldsymbol{V} = |\vec{\boldsymbol{u}}\,.\,(\,\vec{\boldsymbol{v}}\;\boldsymbol{x}\;\vec{\boldsymbol{w}})|$$

(Usamos el valor absoluto porque un Volumen negativo carece de sentido.)



Entonces, el módulo de un producto cruz representa el valor de un **área**, mientras que el valor absoluto de un producto mixto representa un **volumen**.

Ejemplo

Calcular el volumen del paralelepípedo formado por $\vec{u} = (2, -6, 3)$ $\quad \vec{v} = (5, 1, -4)$ $\ y\ \vec{w} = (2, -2, -1)$.

El valor absoluto de este producto mixto no se ve afectado por el orden de las operaciones, es decir:

$$|\vec{u}\,.\,(\,\vec{v}\;x\;\vec{w})| = |\vec{v}\,.\,(\,\vec{u}\;x\;\vec{w})| = \;|\vec{w}\,.\,(\,\vec{u}\;x\;\vec{v})|$$

Entonces, como anteriormente hemos calculado $\vec{u}\;x\;\vec{v}$ podemos resolver el producto mixto haciendo:

$$\vec{w}\,.\,(\,\vec{u}\;x\;\vec{v}) = (2,-2,-1).\;(21,23,32) = 42 - 46 - 32 = \;-36$$

$$\Longrightarrow V = |\vec{w}\,.\,(\,\vec{u}\;x\;\vec{v})| = |-36| = \;36\,unidades\;de\;volumen$$

O también podemos hacer uso del determinante. Desarrollando la primera fila queda:

$$\vec{w}\,.\,(\,\vec{u}\;x\;\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -6 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2(-1)^2\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 2(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 1(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{w}\,.\,(\,\vec{u}\;x\;\vec{v}) = 2[24 - 3] + 2[-8 - 15] - 1[2 - (-30)]$$

$$\vec{w}\,.\,(\,\vec{u}\;x\;\vec{v}) = 42 - 46 - 32$$

$$\vec{w}\,.\,(\,\vec{u}\;x\;\vec{v}) = -36$$

$$\Longrightarrow V = |\vec{w}\,.\,(\,\vec{u}\;x\;\vec{v})| = |-36| = \;36\,unidades\;de\;volumen$$

Si el producto mixto da 0 diremos que los tres vectores están en un mismo plano (no hay volumen).

Cuando termines de leer el material de lectura, te proponemos **completar el siguiente cuadro resumen** de las tres operaciones más importantes entre vectores.

	PRODUCTO ESCALAR o PUNTO	PRODUCTO VECTORIAL o CRUZ	PRODUCTO MIXTO
Expresión que lo representa	$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos\theta$		
Operador que lo representa			
¿Qué da por resultado?			
¿Cómo se calcula en la práctica?			
Realiza un ejemplo			
¿Para qué lo usamos?			