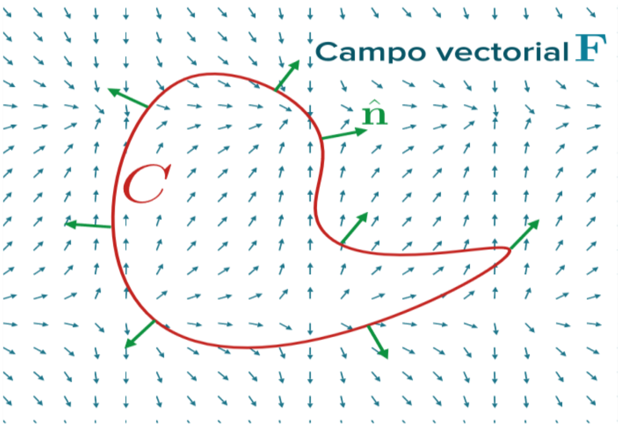
ANÁLISIS VECTORIAL

Definición de un Campo Vectorial

Sea F: una función vectorial de $\Re^n \rightarrow \Re^m$ donde el espacio dominio e imagen son iguales, a dicha funciones le damos el nombre de *funciones vectoriales de campo* o *campos vectoriales*.

Si se trata de una función de $\Re^2 \rightarrow \Re^2$:

$F(x,y) = (M\ ,\ N)$



Si se trata de una función de $\Re^3 \rightarrow \Re^3$:

$$F(x,y,z) = (M\ ,\ N\ ,\ P)$$

La representación gráfica son flechas, donde el origen de la flecha lo determina el punto del dominio y cuyo extremo es el punto de la imagen, el conjunto de esas flechas dan origen a un campo vectorial.

Ejemplos de campos vectoriales en física son los campos de velocidades, los gravitatorios, y de fuerzas eléctricas; algunos ejemplos de campos de velocidades están dado, por la velocidad de circulación de un fluido a través de una tubería, o por el flujo de corrientes aéreas alrededor de un objeto móvil. Por ejemplo un auto en movimiento.

Ejemplo:

Dibujar el campo vectorial dado por $F(x,y)=(-x,y)$ dentro del círculo $x^2+y^2\leq 4$

Cálculo de la Integral de línea en un campo vectorial

Una de las aplicaciones físicas más importantes de las *Integrales de Línea* consiste en calcular el *trabajo* realizado sobre una partícula que se mueve en un campo de fuerzas *F*, a lo largo de una trayectoria, parametrizada por una función vectorial de variable real.
De la Física sabemos que:

$$W = F \times d$$

Curva γ *definida por* $g(t)\ \Re \to \Re^m$
Fuerza de campo F $\Re^m \to \Re^m$
$a \leq t \leq b$
W_k = *trabajo en el segmento* k
$F(X_k)\,\hat{t}(t_k) \Rightarrow$ *comp. en la dirección tg.*
$\| g(t_{k+1})-g(t_k)\|$ *desplazamiento*

El trabajo en el segmento *k* será:

$$W_k = F(X_k)\,\hat{t}\,\| g(t_{k+1})-g(t_k)\|$$

$$\sum_{k=1}^{n} W_k = \sum_{k=1}^{n} F(X_k)\,\hat{t}\,\| g(t_{k+1})-g(t_k)\|$$

$$\lim_{\Delta t(k)\to 0}\sum_{k=1}^{n} W_k = \lim_{\Delta t(k)\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(X_k)\ \hat{t}\ \sum_{k=1}^{n}\| g(t_{k+1})-g(t_k)\|$$

$$\sum_{k=1}^{n} W_k = \lim_{\Delta t(k)\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(X_k)\ \frac{g'(t_k)}{\|g'(t_k)\|}\,\|g'(t_k)\|\,\Delta t(k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} W_k = \lim_{\Delta t(k)\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(X_k)\ g'(t_k)\ \Delta t(k)$$

$$\mathrm{W_T} = \int_a^b \mathrm{F}\left[\mathrm{g(t)}\right]\mathrm{g'(t)\,dt}$$

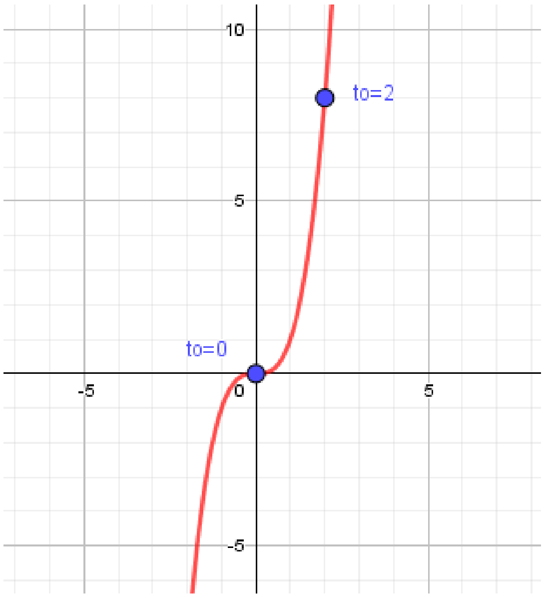
<u>Ejemplo 1:</u>

Calcular el trabajo necesario para desplazar una partícula en un campo vectorial según una la trayectoria dada.

$g(t) = (t\,, t^3) \quad \Re \to \Re^m$

$F(x\,, y) = (\,x\,y\,, x+1) \quad \Re^2 \to \Re^2$

$0 \le t \le 2$



Resolución:

Gráfica de la trayectoria $\begin{array}{l} x = t \\ y = t^3 \end{array} \Rightarrow y = x^3$

Cálculo del trabajo

$$W_k = \int_a^b F[g(t)]\, g'(t)\, dt$$

$$F[g(t)] = F(t\,, t^3) = (t\,t^3\,, t+1)$$

$$F[g(t)] = (t^4\,, t+1)$$

$$g'(t) = (1\,, 3\,t^2)$$

$$W_t = \int_0^2 (t^4\,, t+1)\,(1\,, 3t^2)\,dt \quad \Rightarrow \quad W_t = \int_0^2 \left(t^4 + 3t^2 t + 3t^2\right) dt$$

$$W_t = \int_0^2 \left(t^4 + 3t^3 + 3t^2\right) dt \quad \Rightarrow \quad W_t = \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{3}t^3\right)\Bigg|_0^2$$

$$W_t = \frac{1}{5}2^5 + \frac{3}{4}2^4 + 2^3 \quad \Rightarrow \quad W_t = \frac{132}{5}$$

<u>Ejemplo 2:</u>

Calcular el trabajo realizado para desplazar una partícula aplicando una fuerza de campo $F(x, y) = (x^2 y - 3x\,, xy - 2\,)$ a lo largo de la curva $y = x^2 + 2$ entre los puntos $(\mathbf{1}\,, \mathbf{3}) \wedge (\mathbf{3}, \mathbf{11})$

Resolución:

Parametrizaciòn de la trayectoria y cálculo del trabajo

$g(t)=\left(t\,,t^2+2\right)$

$F(t\,,t^2+2)=\left[\,t^2(t^2+2)-3t\,,\;t\,(t^2+2)-2\right]$

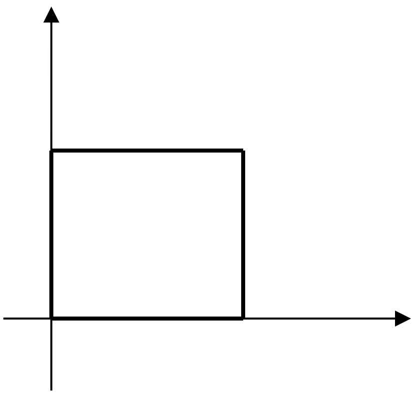
$g'(t)=(1\,,\;2t)$

$W_t=\int_1^3 (t^4+2t^2-3t\,,t^3+2t-2)\,(1\,,2t)\,dt$

$W_t=169{,}2$

Ejemplo 3:

Dada la fuerza de campo $F(x,y)=\left(x^2+y^2\,,2xy\right)$, calcular el trabajo que debe realizar una partícula para recorrer la trayectoria indicada en la figura siguiente:



$Tramo\;\overline{0-1}\qquad 0\le t\le a$

$g(t)=(t\,,0)$

$w_{\overline{0-1}}=\int_0^a \left(t^2\,,0\right)\left(1\,,0\right)dt$

$w_{\overline{0-1}}=\dfrac{1}{3}a^3$

$Tramo\;\overline{1-2}\qquad 0\le t\le a$

$g(t)=(a\,,t)$

$w_{\overline{1-2}}=\int_0^a \left(a^2+t^2\,,2at\right)\left(0\,,1\right)dt$

$w_{\overline{1-2}}=\;a^3$

$Tramo\;\overline{2-3}\qquad 0\le t\le a$

$g(t)=(t\,,a)$

$w_{\overline{2-3}}=\int_a^0 \left(t^2+a^2\,,0\right)\left(1\,,0\right)dt$

$w_{\overline{2-3}}=-\dfrac{4}{3}a^3$

$Tramo\;\overline{3-4}\qquad 0\le t\le a$

$g(t)=(0\,,t)$

$w_{\overline{3-4}}=\int_a^0 \left(t^2\,,0\right)\left(0\,,1\right)dt$

$w_{\overline{3-4}}=0$

$$W_t=\frac{1}{3}a^3-\frac{4}{3}a^3+a^3=0$$

Ejemplo 3:

Calcular el trabajo realizado para desplazar una partícula aplicando una fuerza de campo $F(x,y)=\left(x^2y-3x\,,\,xy-2\right)$ a lo largo de la curva $y=x^2+2$ entre los puntos $\left(\mathbf{1}\,,\mathbf{3}\right)\ \wedge\ \left(\mathbf{3}\,,\mathbf{13}\right)$

$$g(t)=\left(t\,,t^2+2\right)$$

$$F(t\,,t^2+2)=\left[\,t^2(t^2+2)-3t\ ,\ t\,(t^2+2)-2\right]$$

$$g'(t)=(1\,,\ 2t)$$

$$W_t=\int_1^3(t^4+2t^2-3t\,,t^3+2t-2)\,(1\,,2t)\,dt$$

$$W_t=169{,}2$$

Campos vectoriales conservativos

Un campo vectorial $F(x,y)=\ (M\,,N)$ es conservativo $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$$

El término conservativo tiene su origen en la ley de conservación de la energía, según la cual la suma de la energía cinética y la energía potencial de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas conservativo es *constante*. (La energía cinética de la partícula es la debido al movimiento, y la energía potencial a su posición en el campo de fuerza)

Ejemplo:

a) $F(x,y)=(2x\,,y)$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y}=0$$ Sí es conservativo

b) $F(x,y)=(x^2y\,,xy)$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=x^2 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y}=y$$ No es conservativo

Definición de función potencial

Esto nos permite pensar que si el campo es conservativo el mismo puede ser originado por el gradiente de una función vectorial real.

$$F = \nabla f$$

Esa función vectorial real que origina el campo de vectores se llama FUNCIÒN POTENCIAL y el campo originado siempre va a ser conservativo.

Ejemplo:

Dado la función vectorial real de $\Re^2 \to \Re \quad f(x,y) = x^2 y - \frac{1}{2} y^2$ construir un campo vectorial.

$$F(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad , \qquad F(x,y) = \left(2xy,\ x^2 - y\right)$$

Cálculo de una función potencial

Si nuestro dato es la función campo vectorial y necesitamos determinar la función potencial que le da origen al campo, el procedimiento es el siguiente:

$$F(x,y) = \left(2xy,\ x^2 - y\right): \quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \ f(x,y) = \int 2xy\, dx = \ xy + \varphi(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y \Rightarrow f(x,y) = \int (x^2 - y) dy = x^2 y - \dfrac{y^2}{2} + \varphi(x) \end{array}$$

La función potencial buscada es $f(x,y) = x^2 y - \frac{1}{2} y^2 + k$

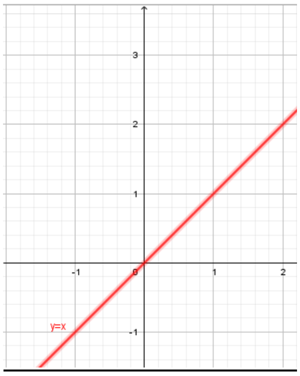
Teorema fundamental de las integrales de líneas

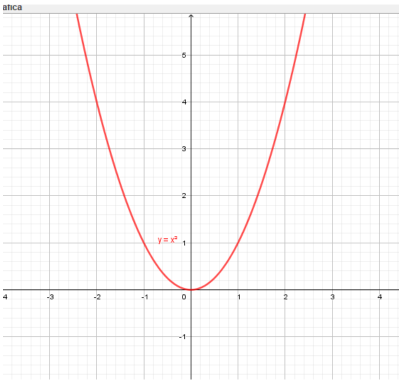
El trabajo realizado por un campo vectorial conservativo sobre una partícula que se mueve entre dos puntos es independiente del camino seguido.

Ejemplo: Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas: $F(x,y) = \left(\frac{1}{2} xy\, , \frac{1}{4} x^2 \right)$

sobre una partícula que se mueve desde (0,0) hasta (1,1) a los largo de las siguientes caminos:

$g_1(t) = (t,t)$ b) $g_2(t) = (t,t^2)$ c) $g_3(t) = (t,t^3)$





Solución:

Si calculamos el trabajo para desplazar una partícula recorriendo las distintas trayectorias, en un campo vectorial, con la particularidad que ese campo vectorial es conservativo, podemos demostrar que para los tres casos el resultado es el mismo $W_T = \frac{1}{4}$

Teoremas:

1) Afirmamos que si ***la función de campo vectorial es continúo y conservativo*** en una región abierta, el valor de la integral de línea es el mismo para toda ***curva abierta*** suave a trozos que vaya desde un punto fijo a otro punto fijo. Si se dan estas condiciones decimos entonces que la integral de línea es ***independiente de la trayectoria*** en la región R.

2) Sea C una ***curva abierta***, suave a trozos, contenida en una región abierta R, dada por $g(t) = [g_1(t), g_2(t)]$ para $a \le t \le b$ y una ***función de campo conservativo***, decimos que:

$$W_t = f[x(b), y(b)] - f[x(a), y(a)] \quad \text{Donde } f \text{ es una función potencial de F.}$$

Es decir $F(x,y) = \nabla f(x,y)$

Ejemplo:

El campo vectorial $F(x,y)=\left(\frac{1}{2}xy\,,\frac{1}{4}x^2\right)$ es conservativo porque $F(x,y)=\nabla f(x,y)$

donde $f(x,y)=\frac{1}{4}x^2y$

$$\Rightarrow\ W_t=\int_C F[g(t)]\,g'(t)\,dt=\ f\left[x(1)\,,y(1)\right]-f\left[x(0)\,,y(0)\right]=\frac{1}{4}$$

3) Si C es una ***curva cerrada***, y ***el campo vectorial es continuo y conservativo***, según el teorema fundamental de las integrales de línea, en una región abierta*, la* ***integral de línea sobre cualquier curva cerrada es igual a cero.***

Ejemplos:

Calcular el trabajo para desplazar una partícula a través de las trayectorias que muestran las figuras siguientes, desde:

1) $(-1,4)\ \to(1,2)\ \ y\ F(x,y)=(2xy,x^2-y)$ Rta: 4
2) $(1,1,0)\ \to(0,2,3)\ \ y\ F(x,y,z)=(2xy,x^2+z^2,2yz)$ Rta. 17

Integral de línea en forma diferencial

$$W=\int_a^b F\left[g(t)\right]\,g'(t)dt=\int_a^b Mdx+Ndy$$

$$g(t)=\left(x(t)\,,y(t)\right)\ \Rightarrow\ g'(t)=\left(x'(t)\,,y'(t)\right)$$

$$g'(t)=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$$

$Si\ F=\left(M\,,N\right)$

$$F\left[g(t)\right]=F\left[x(t)\,,y(t)\right]=\left[M[g(t)]\,,N[g(t)]\right]=\left[M\left(x(t)\,,y(t)\right),N\left(x(t)\,,y(t)\right)\right]$$

$$\int_a^b\left[M\left(x(t),y(t)\right)\ ,\ N\left(x(t)\,,y(t)\right)\right]\left[\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right]dt$$

$$\int_a^b M\,dx+N\,dy\ =\ \int_a^b F\,dX$$

Teorema de Green

Enunciado:

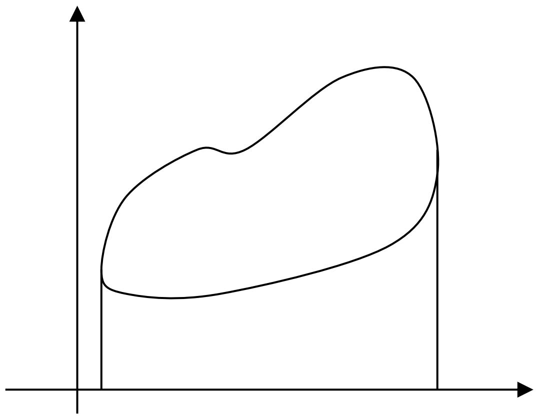
Sea una región del plano simple cuyo borde es una ***curva cerrada C***, suave a trozos, orientada en sentido anthiorario, y si M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R, se cumple:

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

El teorema de Green establece la relación entre una integral de línea alrededor de una curva C cerrada y simple, y una integral doble sobre la región plana R limitada por C.
En otras palabras, el teorema de Green dice que la circulación anthioraria de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple es la integral doble del rotacional del campo sobre la región encerrada por la curva.

Demostración:

Lo probaremos sólo para regiones vertical y horizontalmente simples.



$$\int_C M dx = \int_{C_1} M\,dx + \int_{C_2} M\,dx$$

$$= \int_a^b M(x\,,\,f_1(x))dx + \int_b^a M(x\,,\,f_2(x))dx$$

$$= \int_a^b \left[\,M(x\,,\,f_1(x)) - M(x\,,\,f_2(x))\right] dx$$

Por otra parte:

$$\int_R\int \frac{\partial M}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, dy\, dx$$
$$= \int_a^b M(x,y)\ \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)}\ dx$$
$$= \int_a^b \left[M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)) \right] dx$$
$$= \int_a^b M(x,y) = -\int_R\int \frac{\partial M}{\partial y}\, dA$$

Por tanto: $$= \int_a^b M(x,y) = -\int_R\int \frac{\partial M}{\partial y}\, dA$$

<u>Ejemplo 1</u>:

Cuando el rotor $rot = f(x,y)$

Calcular el trabajo para desplazar una partícula, según la trayectoria indicada, donde actúa el siguiente campo de fuerza: $F(x,y) = (y^3 \,,\, x^3 + 3x\, y^2)$

1ª paso: calcular el rotor

$$rot = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad : \quad rot = 3x^2 + 3y^2 - 3y^2 \ ,\ rot = 3x^2$$

2ºpaso: Observar el rotor obtenido, como el rotor es una $f(x,y)$ entonces debemos decidir nosotros mismo si trabajar con la integral doble o calcular la integral de línea en la trayectoria propuesta.
A modo de ejemplo lo haremos de las dos formas.

Resolviendo la integral de línea:

Tramo 1:

$$g(t) = \left(t\,,t^3\right)\ :\ F\left(t\,,t^3\right) = \left(t^9\,,t^3 + 3t^7\right)$$
$$\int_0^1 \left(t^9\,,t^3 + 3t^7\right)\left(1\,,3t^2\right)dt = \int_0^1 \left(10t^9 + 3t^5\right)dt = \frac{3}{2}$$

Tramo 2:

$$g(t)=(t\,,t)\ :\ F(t\,,t)=\left(t^3\,,t^3+3t^3\right)$$

$$\int_1^0\left(t^3\,,4t^3\right)(1\,,1)dt=\int_1^0\left(5t^3\right)dt=-\frac{5}{4}$$

Trabajo total:

$$W_T=\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$$

Resolviendo la integral doble

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3y^2\quad,\quad\frac{\partial N}{\partial x}=3x^2+3y^2$$

$$\iint_D\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$

$$\int_0^1\int_{x^3}^{x}\left(3x^2+3y^2-3y^2\right)dy\,dx=\int_0^1\int_{x^3}^{x}3x^2dxdy=$$
$$\int_0^1\left(3x^3-3\,x^5\right)dx=\frac{1}{4}$$

<u>Ejemplo 2</u>:

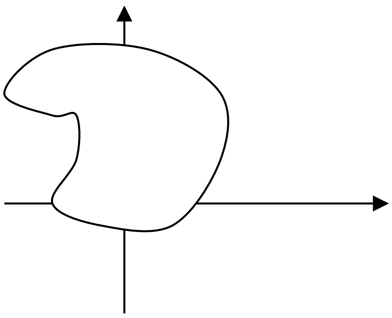
Cuando el rotor $rot=0$

Calcular la integral de línea:

$\int_C y^3dx+3xy^2\,dy$ Donde C es el camino indicado en la figura.

Solución: donde $\frac{\partial M}{\partial y}=3y^2$ $\frac{\partial N}{\partial x}=3y^2$, luego el campo es conservativo. Por lo tanto al ser C cerrada, concluimos que:

$$\int_c y^3dx+3xy^2dy=0$$



<u>Ejemplo 3:</u>

Cuando el rotor $rot = cte$

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \qquad \text{Donde } \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = rot \iint_R dA = rot \;\; Area\ de\ la\ regiòn$$

Ejemplo, guía de trabajos prácticos ejercicio 14,b)

Coordenadas Polares

Usando las coordenadas cartesianas, un elemento de área infinitesimal puede ser calculado como $dA = dx\,dy$. El método de integración por sustitución para las integrales múltiples establece que, cuando se utiliza otro sistema de coordenadas, debe tenerse en cuenta la matriz de conversión Jacobiana:

$$J = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = r.$$

Por lo tanto, un elemento de área en coordenadas polares puede escribirse como:

$$dA = J\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta.$$

Una función en coordenadas polares puede ser integrada como sigue:

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_a^b \int_0^{r(\theta)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Donde R es la región comprendida por una curva $r(\theta)$ y las rectas $\theta = a$ y $\theta = b$.

Ejemplo:

Evaluar: $\int_c \left(\arctan x + y^2\right)dx + (e^y - x^2)dy$ donde la trayectoria la muestra la figura.

Solución: En coordenadas polares, R está dado por $1 \le r \le 3 \quad para \quad 0 \le \theta \le \pi$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -2x - 2y = -2r(\cos\theta + sen\theta)$$

Así por el teorema de Green:

$$\int_c \left(\arctan x + y^2\right)dx + (e^y - x^2)dy = \iint_R -2(x+y)\, dA$$
$$= \int_0^\theta \int_1^3 -2r\left(\cos\theta + sen\theta\right) r dr d\theta$$
$$= \int_0^\theta -2\left(\cos\theta + sen\theta\right)\frac{r^3}{3}\, d\theta \; entre 1 \wedge 3$$
$$= -\frac{52}{3}\left[sen\theta - sen\theta\right] \; entre\; 0 \wedge \pi$$
$$= -\frac{104}{3}$$

Rotacional de un campo vectorial

El rotacional de $F(x, y, z) = (M, N, P)$, se define como:

$$rot\ F(x,y,z) = \nabla \times F(x,y,z)$$
$$= \left(\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) i - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \right)$$

Como una ayuda memoria para obtener la fórmula del rotacional podemos usar el determinante siguiente:

$$rot\ F(x,y,z) = \nabla \times F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) i - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \right)$$

Ejemplo:

Calcular el **rot F** para el campo vectorial: $F(x,y,z) = (2xy\ ,\ x^2 + y^2\ ,\ 2zy)$

Para este campo vectorial el **rot F = 0**

El criterio establece que para un campo vectorial cuyo dominio sea todo el espacio tridimensional, el rotacional es el **vector nulo** en todo punto del dominio si y solo si **F** es conservativo.

Si es conservativo, podemos hallar una función potencial, aplicando el siguiente criterio:
Hallar la función potencial para: $F(x,y,z) = (2xy\ ,\ x^2 + y^2\ ,\ 2zy)$

$$f_x(x,y,z) = 2xy \ ,\ f_y(x,y,z) = x^2 + y^2 \ ,\ f_z(x,y,z) = 2zy$$

Integrando:

$$f(x,y,z) = \int M\,dx = \int 2xy\,dx = x^2y + g(y,z)$$
$$f(x,y,z) = \int N\,dy = \int x^2 + z^2\,dy = x^2y + z^2y + h(x,z)$$
$$f(x,y,z) = \int P\,dz = \int 2zy\,dx = z^2y + k(x,y)$$

$$f(x,y,z) = x^2y + z^2y + K$$

Divergencia de un campo vectorial

El rotacional de un campo vectorial es a su vez un campo vectorial. Otra importante función definida sobre un campo vectorial es la divergencia que es una *función escalar.*

La divergencia de $F(x,y)=(M\ ,\ N)$ *es*:

$$div\ F(x,y)=\nabla\,.F(x,y)=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\quad en\ el\ plano$$

$$div\ F(x,y,z)=\nabla\,.F(x,y,z)=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\quad en\ el\ espacio$$

El producto escalar considerada para la divergencia proviene de considerar a ∇ como un *operador diferencial* de la siguiente forma:

$$\nabla\ F(x,y,z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\frac{\partial}{\partial y}\,,\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(M\ ,\ N\ ,\ P\right)=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}$$

Ejemplo:

Hallar la divergencia del campo vectorial.

$$F(x,y,z)=x^3y^2z+x^2z+x^2y\quad en\ el\ Punto\ (2\,,1\,,-1)$$

$$div\ F(x,\ y,\ z)=\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2z)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2z)+\frac{\partial}{\partial z}\,x^2y=3x^2y^2z$$

$$en\ el\ Punto\ div\ F(2\,,1\,,-1)=-12$$