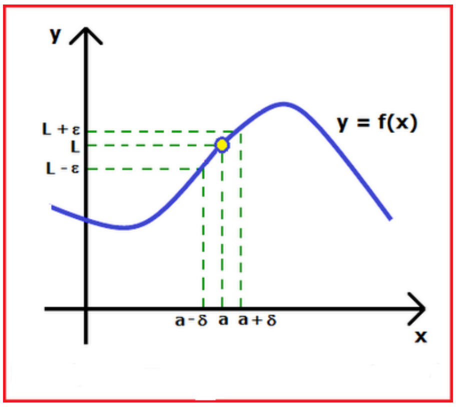
LÍMITES Y CONTUINIDAD DE FUNCIONES VECTORIALES REALES

Definición de límite

Para funciones de $\Re \to \Re$

Recordemos el concepto de límite para funciones $f : \Re \to \Re$, definida en un intervalo abierto.



Definición:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / x \in D(f) \cap 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Decir que el límite de $f(x)$, cuando $x \to x_0$, es L, significa que estando x cerca de x_0 (en el dominio) se tiene $f(x)$ cerca de L (en la imagen). El concepto de "cercanía" en la recta lo podemos establecer con la idea de "entorno": un entorno de centro x_0 y radio δ.

Veamos lo dicho en un ejemplo

Ejemplo:

Calcular $\lim_{x \to 3} (x + 1) = 4$

Resolución:

$$\lim_{x \to 3} (x + 1) = 4 \iff \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 / \left(x \in \Re \cap 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x + 1 - 4| < \in \right)$$

Nuestro objetivo es encontrar el valor de ε en $f(\delta)$

Partimos de $|x + 1 - 4| < \varepsilon$, $|x - 3| < \varepsilon$ Por otro lado tenemos que $|x - 3| < \delta$

Entonces podemos decir que $\delta = \varepsilon$

Para funciones $\Re^2 \to \Re$

El estudio de límite de funciones de dos o más variables es mucho más complejo que el de funciones de una variable, pues en éste, únicamente se tiene dos caminos para acercarse a un punto x_0, por la derecha y por la izquierda sobre el eje x; mientras que en el caso de varias variables veremos que existen infinitas direcciones para acercarnos a un punto.

Definimos el límite de una función $\Re^2 \to \Re$ en un disco abierto $D((x_0, y_0), \delta)$, Gráfico 1, disco abierto es el conjunto de puntos que satisfacen: $\left\{(x,y) : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}$

Cuando en la fórmula de distancia aparece el signo menor, el disco es abierto y cuando aparece el signo $\leq$ el disco se llama cerrado. Esta definición se corresponde con la empleada para definir los intervalos abierto y cerrados.

Un punto (x_0, y_0) en una región D del plano es un **punto interior** de D si existe un entorno centrado en (x_0, y_0) que este contenido completamente en D. Si todo punto se dice que es interior entonces la región es abierta.

Un punto (x_0, y_0) es un **punto frontera** de D si todo disco abierto centrado en él contiene puntos de D y puntos que no pertenece a D.

Por definición, una región debe contener a sus puntos interiores, pero no tiene necesidad de contener a todos sus puntos frontera.

Si una región contiene a todos sus puntos frontera se dice que es cerrada. Una región que contiene algunos puntos frontera no es ni abierta ni cerrada.

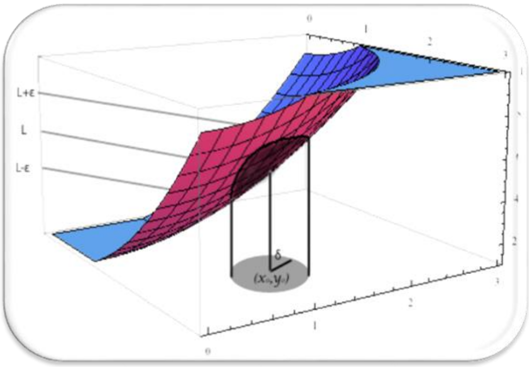
Definición:

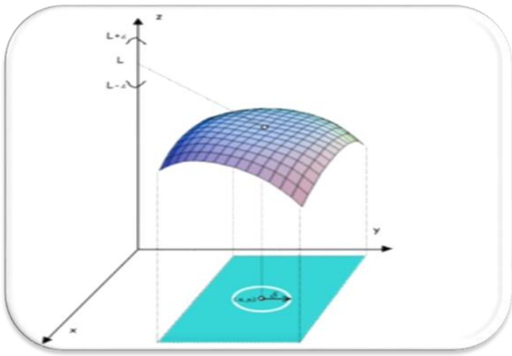
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \text{ si } \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \,/\, (x,y) \in D(f) \;\wedge\; 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta, \Rightarrow$$
$$|f(X) - L| < \varepsilon$$

El entorno δ de centro (x_0, y_0) como el disco con radio positivo.

Lo podemos reinscribir como $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \vee \quad 0 < |X - X_0| < \delta$

Gráficamente esta definición significa que para un punto cualquiera $(x,y) \in D((x_0, y_0), \delta)$, el valor de $f(x,y)$ esta en el intervalo $(L-\varepsilon \;,\; L+\varepsilon)$, como se ilustra en la figura:





Un disco $D(P,\delta)$ abierto, o simplemente un disco, de radio $\delta > \mathbf{0}$ y centro en $P = (x_0, y_0)$ es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que su distancia a (x_0, y_0) es menor que δ.

CÁLCULO DEL LÍMITE

Aplicando la definición de límite.

Ejemplo

Sea $f: R^2 \to R$ la función. Se sabe que $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 8$, la $f(x,y) = \mathbf{4}y$ Dado $\varepsilon = 0.1$, halle $\delta > 0$ tal que:

$$\|(x,y)-(1,2)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-8| < \varepsilon$$

Solución

$|4y-8| < 0.1 \quad : \quad |4|\,|y-2| < 0.1 \quad : \quad |y-2| < \dfrac{0.1}{|4|} \quad : \quad |y-2| < 0.025$, por otro lado:

$\|\,(x,y)-(1,2)\| < \delta \;:\; \|\,(x-1)\,,(y-2)\,\| < 0.025 \;:\; (x-1)^2 + (y-2)^2 \;<\; (0.025)^2$

Ecuación de la circunferencia de centro (1,2)

$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$

Por la desigualdad triangular: $\|X+Y\| = \|X\| + \|Y\|$

$$\sqrt{(x-x_0)^2} \quad < \quad \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

$\sqrt{(x-x_0)^2} < \delta \quad : \quad |x-x_0| < \delta$ ... lo mismo podemos hacer para y.

Aplicando procedimientos prácticos

Dado que el uso de la definición de límite para el cálculo del mismo, suele ser complicado cuando la función es compleja, se utilizan procedimientos prácticos que permiten determinar la probable existencia del límite.

Estos procedimientos podrán ser: 1) cálculo del límite simultáneo o inmediato, 2) cálculo de límites reiterados o sucesivos, 3) cálculo del límite radial, en alguna dirección que está determinada por una función $\varphi(x)$.

a) Límite simultáneo o inmediato: consiste en considerar que las variables independientes tienden, simultáneamente, a los valores del punto (x_0, y_0)

$$\operatorname*{Lím}_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x_0, y_0) = L \quad .$$

$$L = \operatorname*{Lím}_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f(x;y)) = \quad \textit{Indeterminado}$$

Si la función $z = f(x;y)$ es una expresión funcional fraccionaria, y nos da un valor indeterminado, se procede a factorear numerador y denominador y simplificar los factores comunes, hasta lograr levantar la indeterminación.

Ejemplos:

a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = -3$

b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = 5$ (siempre (+) porque se trata de una función)

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$

Resolución

$$\lim_{(x,y)\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{x(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} = \lim_{(x,y)\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{x(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{x(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} = \lim_{(x,y)\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{x(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) = \mathbf{0}$$

$\exists$ el límite y vale **0**

b) Límite sucesivo e Iterado: consiste en calcular límites en forma secuencial, primero para una variable y después para la otra variable.

Ejemplo:

$$Z = f(x,y) = \frac{(x+y)}{(x-y)} \quad \text{en el punto } P(\mathbf{0},\mathbf{0})$$

b1) $\mathop{\text{Lím}}\limits_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}}(f(x;y)) = \mathop{\text{Lím}}\limits_{x\to x_o}\left[\mathop{\text{Lím}}\limits_{y\to y_o} f(x,y)\right] = \mathop{\text{Lím}}\limits_{x\to x_o}\left[f(x,y_{\mathbf{0}})\right] = \mathop{\text{Lím}}\limits_{x\to x_o}[F(x)] = L_{\mathbf{1}}$

$$\mathop{\text{Lím}}_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}}(f(x;y)) = \mathop{\text{Lím}}_{x\to \mathbf{0}}\left[\mathop{\text{Lím}}_{y\to \mathbf{0}} \frac{x+y}{x-y}\right] = \mathop{\text{Lím}}_{x\to x_o} \frac{x+\mathbf{0}}{x-\mathbf{0}} = \mathop{\text{Lím}}_{x\to x_o} \frac{x}{x} = \mathbf{1}$$

Evaluó primero lo que está dentro el corchete en cero y luego trabajo la función, para luego evaluar la otra variable en el punto en este caso en cero.

Decimos entonces, en el caso particular que nos aproximemos por eje $x \;\Rightarrow\; y = 0$

b2) $\mathop{\text{Lím}}\limits_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}}(f(x;y)) = \mathop{\text{Lím}}\limits_{y\to y_o}\left[\mathop{\text{Lím}}\limits_{x\to x_o} f(x,y)\right] = \mathop{\text{Lím}}\limits_{y\to y_o}\left[f(x_{\mathbf{0}},y)\right] = \mathop{\text{Lím}}\limits_{y\to y_o}[F(y)] = L_{\mathbf{2}}$

$$\mathop{\text{Lím}}_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}}(f(x;y)) = \mathop{\text{Lím}}_{y\to \mathbf{0}}\left[\mathop{\text{Lím}}_{x\to \mathbf{0}} \frac{x+y}{x-y}\right] = \mathop{\text{Lím}}_{x\to x_o} \frac{\mathbf{0}+y}{\mathbf{0}-y} = \mathop{\text{Lím}}_{x\to x_o} \frac{y}{-y} = -\mathbf{1}$$

Decimos entonces, en el caso particular que nos aproximemos por eje $y \;\Rightarrow\; x = 0$

Donde $L_1 \wedge L_2$ son valores determinados, reales, finitos.

Si ambos cálculos coinciden en el valor L, se dirá que es probable que el límite sea L .

Si no coinciden, categóricamente se dice que la función no tiene límite para el punto considerado (en realidad tiene un límite para cada trayectoria, pero no son iguales).

En este ejemplo vemos que no existe el límite doble, y si bien existen los iterados estos son diferentes. Por lo tanto, decimos que el límite en (0,0) **no existe.**

Límite radial: consiste en tomar como trayectorias posibles, las pertenecientes al haz de rectas que pasa por el punto (x_0, y_0), cuya ecuación es: $y = mx$, donde m es la pendiente de cada recta considerada.

Se sustituye el haz de rectas en la expresión de la función, obteniéndose una nueva expresión en función de la variable x y del parámetro m.

Puede determinarse el límite por otras trayectorias, cuadráticas, cúbicas, exponenciales, etc., que pasen por el origen, pero basta que una sola dé un valor distinto para decir que no exista el límite.

Observación: Si bien el límite radial se pude utilizar para calcular el límite en cualquier punto de su dominio, **limitaremos nuestro estudio al caso del cálculo del límite en el origen de coordenadas.**

Ejemplos:

Calcular los siguientes límites en las distintas direcciones, con funciones que pasen por el origen.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$:

En este primer caso vemos que en el origen la función no está definida, nos acercamos al origen, por la recta $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xmx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2m}{x^2(1+m^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2m}{(1+m^2)}$$

Donde sí $m = 0 \Rightarrow L = 0$, $m = 1 \Rightarrow L = 1$, $m = 2 \Rightarrow L = 4/5$ …………

Como podemos observar en las distintas direcciones sus valores son distintos, concluimos entonces que el límite no existe.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \frac{0}{0}$: haciendo $y = kx^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2kx^2}{x^4+k^2x^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2kx^4}{x^4(1+k^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2k}{(1+k^2)}$$

Si $k = 0 \Rightarrow L = 0$ nos acercamos al origen por el eje x
Si $k = 1 \Rightarrow L = 1$ nos acercamos al origen por la parábola $y = x^2$

Conclusiones complementarias:

Si el límite doble existe en un punto, dicho límite es único. Por lo tanto puede verificarse la definición de límite y también se verifica que existen y son iguales los límites sucesivos.

Cuando el límite doble no existe, pero al aplicar todos los procedimientos prácticos descriptos, el valor de límite obtenido es el mismo, se dice que es probable que el límite hallado es el límite de la función: $L = L_1 = L_2 = L_R$; entonces, es probable que el límite de la función sea L.
Si algunos de los límites son distintos: $L = L_1 = L_R \neq L_2$ entonces **podemos asegurar que** la función no tiene límite.

Dijimos que si la función tiene límite en un punto, ese límite es único, y cualquiera fuera la trayectoria utilizada debe obtenerse el mismo valor de límite.

Por ejemplo, puede obtenerse un valor de límite doble, pero los reiterados son distintos; la función no tiene límite. O los límites reiterados son iguales, pero el radial es distinto; no existe el límite.
¿Qué procedimiento utilizar primero? Ello depende de la consigna del problema, en primer lugar; cada procedimiento implica una trayectoria, al menos, por lo que se suele tomar dos o tres caminos para verificar si los valores coinciden o no; luego, si es necesario, verificar mediante la definición.

Nociones de Continuidad en un punto

Sea $f:\Re^2 \to \Re$ una función de dos variables, sea $P=(x_0, y_0)$ un punto que pertenece a la región y sea $D((x_0, y_0), \delta)$ un disco abierto centro en P y radio δ, decimos que:

- $f(\overrightarrow{X})$ es continua en $P=(x_0, y_0)$ si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

Decimos que es continua en la región si es continua en cada punto de la región

Ejemplo:

1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ No existe la función en (0,0), existe el límite: discontinuidad evitable.

2) $f(x,y)=\dfrac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$ tomar el límite en (0,0) y decir si es continua.
No existe el límite, Discontinua Esencial en (0,0)

3) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } x=y=0 \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

Límites sucesivos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^2}{(x^2+y)} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{3x^2y^2}{(x^2+y)}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{3\times 0\times y^2}{(0+y)}\right] = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^2}{(x^2+y)} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{3x^2y^2}{(x^2+y)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3x^2 0}{(x^2+0)}\right] = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Limite Radial: si $y = mx \Rightarrow \dfrac{3x^2mx}{x^2+(mx)^2} : \dfrac{x^2(3mx)}{x^2(1+m^2)} : \dfrac{(3mx)}{(1+m^2)}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3mx}{(1+m)} = 0 \ ,$$

El límite existe y vale 0, por la cual la función es continua en el origen.

4) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \quad \text{si } x=y=0 \end{cases}$

Aquí f se define en (0,0) pero f es <u>Discontinua Esencial</u> en (0,0) porque el límite no existe.

<u>Funciones de tres o más variables</u>

Todo lo tratado anteriormente se puede generalizar para tres o más variables:

$$\lim_{(X)\to(X_0)} f(X) = L \quad : \quad X = (x_1, x_2, \ldots\ldots. x_n) \quad X_0 = (x_1, x_2, \ldots\ldots. x_n)$$

La función es continua en $X_0 = (x_1, x_2, \ldots\ldots. x_n)$ si $\lim_{(X)\to(X_0)} f(X) = f(X_0)$