



Análisis Matemático II

UTN
Facultad
Regional
Villa María

Trabajo Práctico N°3 – Bloque I

MATRIZ JACOBIANA – DIFERENCIAL TOTAL INCREMENTO DE LA FUNCIÓN

Matriz Jacobiana

Defina **Matriz Jacobiana**, cuál es su relación con la derivada total y cómo se la obtiene.

1) Hallar la matriz jacobiana de las siguientes funciones.

a) $f(x, y, z) = (x^2, -2xy, yz^2)$

b) $f(x, y) = (x + y, x - y, x^2 + y^2)$

c) $f(x, y, z) = (x^2 + e^y, x + y \operatorname{sen} z)$

2) Sea f la función vectorial definida por $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$; encuentre la derivada de f en los siguientes puntos.

a) (x, y) ; b) (a, b) ; c) $(1, 0)$; d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Diferencial Total - Incremento de la Función

3) Dadas las siguientes funciones, encontrar la diferencial total y el incremento de la función, en los puntos indicados para los incrementos señalados en cada uno de los casos.

a) $f(x, y, z) = (x \operatorname{sen} y, z + \ln x)$ Punto $(1, 0, 2)$ $\Delta X = (0.1, 0.2, 0.1)$

b) $f(x, y) = (x^3 y^2, 2x, x^2 - y)$ Punto $(1, 2)$ $\Delta X = (0.1, 0.2)$

c) $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ Punto $(1, 0)$ $\Delta X = (0.1, 0.2)$

4) En los siguientes problemas compara los valores de Δz y dz ($\Delta z =$ incremento de la función; $dz =$ diferencial de la función) para la función indicada cuándo (x, y) varía del primer punto al segundo.

a) $z = 3x + 4y + 8$ $(2, 4)$ a $(2.2, 3.9)$

b) $z = (x + y)^2$ $(3, 1)$ a $(3.1, 0.8)$

c) $z = 2x^2 y + 5y$ $(0, 0)$ a $(0.2, -0.1)$



Análisis Matemático II

UTN
Facultad
Regional
Villa María

Trabajo Práctico N°3 – Bloque I

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Matriz jacobiana

1)

a) $f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

b) $f(x, y, z) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y, z)$

2) Encuentre la matriz Jacobiana de cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$ en $t = \pi/4$

b) $f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ en $t = 1$

c) $g(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$ en $(x, y) = (1, 2)$

d) $g(u, v) = (u + v, u - v, 1)$ en $(u, v) = (1, 0)$

e) $T(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \operatorname{sen} v \\ v \end{pmatrix}$ en $(u, v) = (1, \pi)$

f) $f(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + xz, xyz)$ en (x, y, z)

g) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 256, \quad p = (x_0, y_0)$

h) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x \cdot \cos y, \cos y), \quad p = (0, \frac{\pi}{2})$

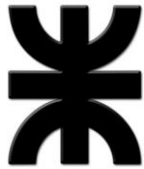
i) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = \left(\frac{1+x^2}{1+z^2}, (z+x^2)(z+y^2) \right), \quad p = (1, 1, 1)$

j) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z, u) = xy^2z^3u^4, \quad p = (1, 1, 1, 1)$

3) Dadas las siguientes funciones, encontrar la diferencial total y el incremento de la función, en los puntos indicados para los incrementos señalados en cada uno de los casos.

a) $f(x, y) = (x^2 + y^2, x + 2y, 2x)$ Punto $(1, 1)$ $\Delta X = (0.1, 0.1)$

b) $f(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v)$ Punto $(1, \pi)$ $\Delta X = (0.1, 0.2)$



Análisis Matemático II

UTN
Facultad
Regional
Villa María

Trabajo Práctico N°3 – Bloque I

f) $f(x, y) = (x^2 + y^2, \cos(xy), 2x + 2y)$ Punto $(0, 1)$ $\Delta X = (0.01, 0.01)$

g) $f(x, y, z) = (x^2 yz, 2x + 3y^2 z)$ Punto $(1, 1, 2)$

$\Delta X = (0.01, 0.02, 0.02)$

4) En los siguientes problemas compara los valores de Δz y dz
($\Delta z =$ incremento de la función; $dz =$ diferencial de la función) para la función indicada cuándo (x, y) varía del primer punto al segundo.

a) $z = 9 - x^2 - y^2$ $(1, 2)$ a $(1.05, 2.1)$

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(1, 2)$ a $(1.05, 2.1)$

c) $z = \frac{x}{y}$ $(1, 2)$ a $(1.05, 2.1)$



Análisis Matemático II

UTN
Facultad
Regional
Villa María

Trabajo Práctico N°3 – Bloque I

RESPUESTAS TRABAJO PRACTICO N°3

$$1) \text{ a) } F'(X) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ -2y & -2x & 0 \\ 0 & z^2 & 2zy \end{pmatrix} \quad \text{b) } F'(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } F'(X) = \begin{pmatrix} 2x & e^y & 0 \\ 1 & \text{sen}(z) & y \cos(z) \end{pmatrix}$$

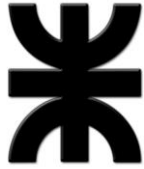
$$2) \text{ a) } F'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad \text{b) } F'(a, b) = \begin{pmatrix} 2a & -2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} \quad \text{c) } F'(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } F'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$3) \text{ a) } df = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}; \quad \Delta f = \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.19 \end{pmatrix} \quad \text{b) } df = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta f = \begin{pmatrix} 2.44 \\ 0.2 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } df = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}; \quad \Delta f = \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.44 \end{pmatrix}$$

$$4) \text{ a) } \Delta z = 0.2; \quad dz = 0.2 \quad \text{b) } \Delta z = -0.79; \quad dz = -0.8 \\ \text{c) } \Delta z = -0.508; \quad dz = -0.5$$



Análisis

Matemático II

UTN
Facultad
Regional
Villa María

Trabajo Práctico N°3 – Bloque I

RESPUESTAS EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Matriz jacobiana

$$1) a) F'(x) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) F'(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) & 0 \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) a) F'(\pi/4) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$b) F'(1) = \begin{pmatrix} e \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c) g'(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d) g'(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) F'(1,\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f) F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & y+x \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$g) F'(x_0, y_0) = (0,0)$$

$$h) F'\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$i) F'(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$j) F'(1,1,1,1) = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

$$3) a) df = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}; \quad \Delta f = \begin{pmatrix} 0.42 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$b) df = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}; \quad \Delta f = \begin{pmatrix} -0.0781 \\ -0.2185 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$c) df = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0 \\ 0.04 \end{pmatrix}; \quad \Delta f = \begin{pmatrix} 0.02 \\ -0.0001 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

$$d) df = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.32 \end{pmatrix}; \quad \Delta f = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.32 \end{pmatrix}$$

$$4) a) dz = -0.5; \quad \Delta z = -0.5125$$

$$b) dz = 0.1118; \quad \Delta z = 0.1118$$

$$c) dz = 0; \quad \Delta z = 0$$