# INTEGRALES DOBLES

Análisis Matemático II

# INTEGRALES DOBLES

Ya sabemos que las integrales definidas se utilizan para medir magnitudes, como superficies, volúmenes, longitud de arco, masa, etc.

En esta oportunidad utilizaremos un proceso similar para definir la integral doble de una función de dos variables sobre una región del plano.

Para el estudio de la $\iint$ nos referiremos al caso particular de funciones de $\Re^2 \rightarrow \Re$

# INTEGRALES DOBLES
# Interpretación geométrica

Consideremos una superficie de ecuación $Z = f(x, y)$ continua en una región del plano $xy$, nuestro objetivo es hallar el *volumen del sólido S,* comprendido entre la superficie y la región del plano.

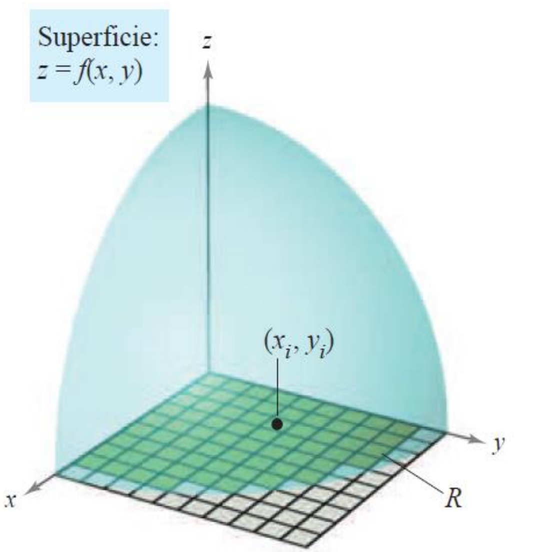
$$S = \left\{(x, y, z) \in \Re^3 / 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in \Re^2\right\}$$

Para ello subdividimos la región del plano *xy* en pequeños rectángulos, de lados $\Delta x_i$ , $\Delta y_i$ tomamos un punto $(x_i, y_i)$ en el rectángulo y construimos el prisma rectangular de altura $f(x_i, y_i)$ .

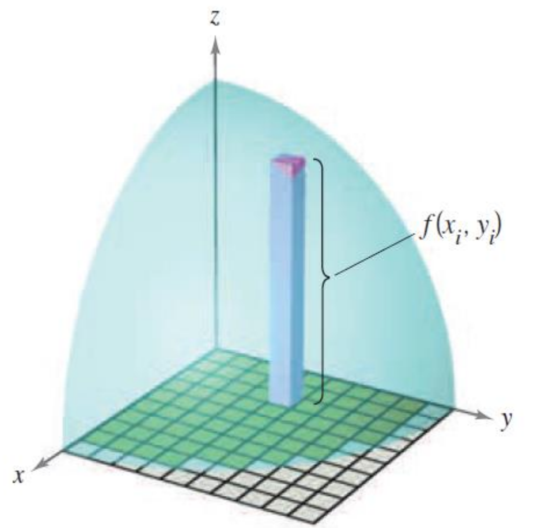
El volumen de cada prisma será $V_i = f(x_i, y_i)\,\Delta x_i\,\Delta y_i$ , aproximaremos el volumen de la región sólida por la suma de Riemman:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta i$$

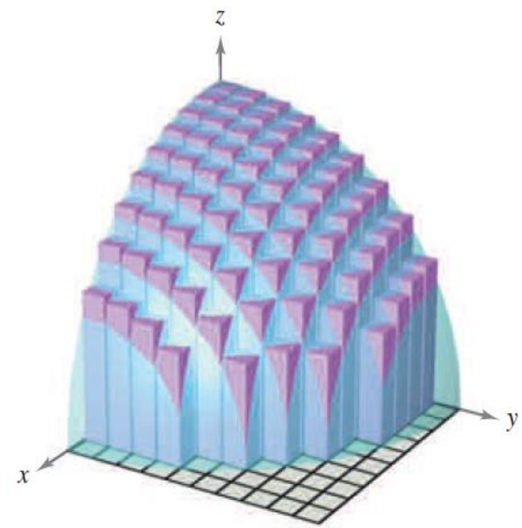
# INTEGRALES DOBLES
# Interpretación geométrica




Los rectángulos que se encuentran dentro de $R$ forman una partición interior de $R$




Prisma rectangular cuya base tiene un área de $\Delta A_i$ y cuya altura es $f(x_i, y_i)$




Volumen aproximado por prismas rectangulares

# INTEGRALES DOBLES
# Interpretación geométrica

Cuando más pequeños sean los rectángulos mejor será la aproximación.

De esta manera definimos a la integral doble como:

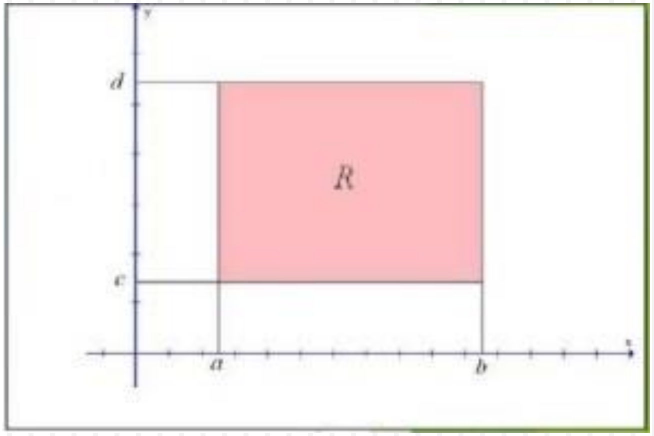
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

Siempre que el límite exista decimos que la función es integrable sobre la región.

Haciendo uso de la integral doble calcularemos el volumen de todo el sólido que está dado por:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

# INTEGRALES DOBLES
## Regiones rectangulares




Una integral doble puede escribirse como una integral iterada, tal como muestra el Teorema de Fubini:

$$R = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \rightarrow$$

$$V = \iint f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

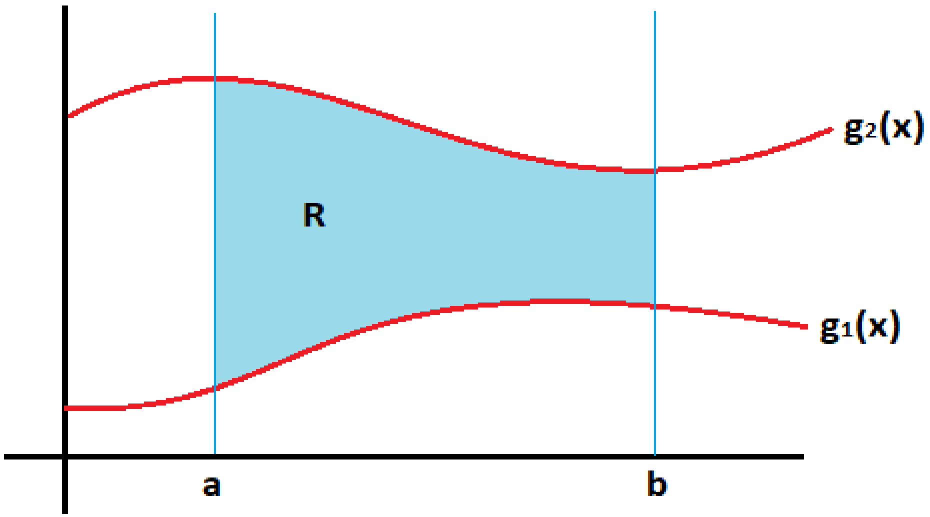
# INTEGRALES DOBLES
## Regiones rectangulares

- Ejemplo

Calcula el Volumen del sólido formado por la superficie $f(x,y) = 1 - 6x^2y$, sobre la región del plano $R: 0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 1$

# INTEGRALES DOBLES
## Regiones VS

- Teorema de Fubini para Regiones No rectangulares




R es una Región Verticalmente Simple

$$R = \{(x,y) \in R^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \rightarrow$$

$$V = \iint f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

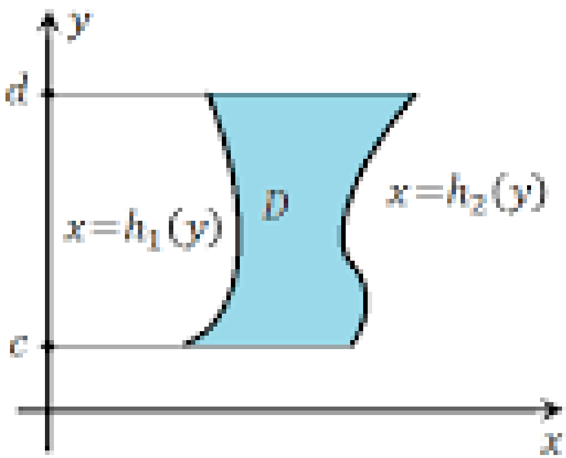
# INTEGRALES DOBLES
## Regiones VS

- Ejemplo

Evalúa $\iint (x + 2y)dA$ donde R es la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$

# INTEGRALES DOBLES
## Regiones HS

- Teorema de Fubini para Regiones No rectangulares




R es una Región Horizontalmente simple

$$R = \{(x, y) \in R^2 : h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d)\} \rightarrow$$

$$V = \iint f(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy$$

# INTEGRALES DOBLES
## Regiones HS

- Ejemplo

Evalúa la integral doble de $f(x, y) = 1 + x + y$ donde R es la región limitada por las rectas

$$y_1 = -x$$
$$y_2 = x$$
$$y_3 = 2$$

# INTEGRALES DOBLES
## Cálculo de Área

Podemos hacer uso de la integral doble para el cálculo de Áreas, para esto consideramos a la función $f(x, y) = 1$ recuerden que la función nos da la altura de cada prisma y si lo consideramos = 1 el valor calculado por la integral nos representa el área de la región R.

$$A = \iint dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx$$

Si R es Verticalmente simple

$$A = \iint dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dxdy$$

Si R es Horizontalmente simple