FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE REAL

1) Dada las siguientes ecuaciones paramétricas. Dibuje la curva asignando valores al parámetro *t*, y obtenga la ecuación de la curva eliminando el parámetro *t*.

a) $x = 2t$ $\quad y = 3t$ $\quad$ t en $\Re$

b) $x = t - 4$ $\quad y = \sqrt{t}$ $\quad 0 \leq t \leq 4$

2) Una partícula se mueve por la recta que pasa por los puntos $P_1(2,3,0) \wedge P_2(0,8,8)$. Hallar una función vectorial para su trayectoria.

3) Supongamos que la temperatura en un punto *xyz* del espacio está dado por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Una partícula se mueve de modo que el instante *t,* su posición está dada por el punto $(x, y, z) = (t, t^2, t^3)$. Encuentre la temperatura de la partícula en $t = 1/2$.

4) Determine la ecuación paramétrica en los siguientes casos.

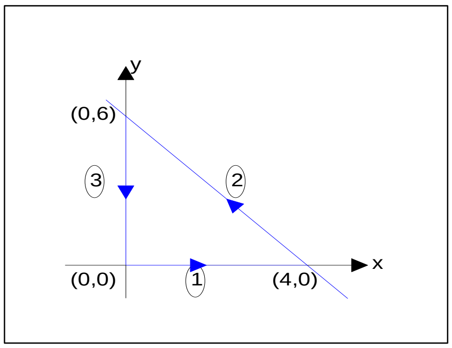
a) $y = 4 - x$

b) $x^2 + y^2 = 25$

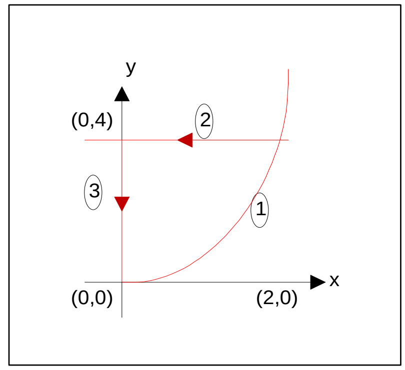
c) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

5) Hallar las funciones vectoriales que representen la trayectoria indicada en cada figura.

a)



b)



6) Indicar la imagen de $g(t)$ sin graficar.

a) $g(t)=(t^2,-t^3)$

b) $g(t)=(t^2,t^2)$

c) $g(t)=(t,t)$

d) $g(t)=(sen(t),\ sen(t))$

7) Analice la continuidad de las siguientes funciones.

a) $\lim\limits_{t\to 2}\left(t\vec{i}+\dfrac{t^2}{t^2-2}\vec{j}+\dfrac{1}{2}\vec{k}\right)$

b) $\lim\limits_{t\to 0}\left(e^t\vec{i}+\dfrac{sent}{t}\vec{j}+e^{-t}\vec{k}\right)$

c) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}(\cos t\ ,\ sent\ ,\ t)$

d) $\lim\limits_{t\to 2}\left(\dfrac{t-2}{t^2-4}\ ,\ \dfrac{t^2+t-6}{t-2}\right)$

e) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t},t+1\right)$

Vector Velocidad y Aceleración

8) La posición de una partícula en el plano *"xy"* está dada por la trayectoria que describe $g(t)$.

a) Encuentre la ecuación cartesiana que la representa.

b) Determine además los vectores velocidad y aceleración en un tiempo t.

c) Calcule la velocidad y aceleración instantánea, indique la dirección del movimiento.

8.1) $g(t)=(t+1,t^2-1)$ $\quad t=1$

8.2) $g(t)=\left(e^t,\frac{2}{9}e^{2t}\right)$ $\quad t=\ln 3$

8.3) $g(t)=(\cos t, sent)$ $\quad t=\frac{\pi}{4}$

9) $g(t)$ describe la trayectoria de una partícula en el espacio en un tiempo t. Encuentre los vectores velocidad y aceleración de la partícula.

a) $g(t)=(t+1)\vec{i}+(t^2-1)\vec{j}+2t\vec{k}$ $\quad t=1$

b) $g(t)=(\cos^2 t\ ,3t-t^3,\ t)$ $\quad t=0$

10) Dibuje la curva δ descripta por $g(t)$ y trace el vector tangente $g'(t)$ para el valor de t indicado.

a) $g(t)=(2\cos t, 6\,sent)$ $\quad t_0=\frac{\pi}{6}$

b) $g(t)=\left(2\ ,t\ ,\ \frac{4}{1+t^2}\right)$ $\quad t_0=1$

c) $g(t)=(e^t,t)$ $\quad t_0=1$

Recta Tangente

11) Dada las siguientes trayectorias, determine la ecuación en forma paramétrica y cartesiana de la recta tangente.

a) $g(t)=(\cos(t),sen(t))$ $\quad t_0=\frac{\pi}{4}$

b) $g(t)=(t,t,t^2)$ $\quad t_0=1$

c) $g(t)=(e^t,t)$ $\quad t_0=1$

d) $g(t)=(\cos^2(t),3t-t^3,t)$ $\qquad t_0=0$

Aceleración Normal y Tangencial

12) Dada las siguientes trayectorias, determine en forma escalar y vectorial la componente tangencial de la aceleración, calcule además en forma escalar la aceleración normal. En todos los casos evaluarlo para t=1.

a) $g(t)=\left(1,t,t^2\right)$

b) $g(t)=\left(t^2,\left(t^2-1\right),2t^2\right)$

c) $g(t)=\left(2t,t^2\right)$

d) $g(t)=\left(5\cos t,5sent\right)$

e) $g(t)=\left(e^{-t},e^{-t},e^{-t}\right)$

Longitud de curva

13) Determine la longitud de la curva entre los valores de *t* indicados.

a) $g(t)=\left(t^3+1,t^3\right)$ $\qquad t_0=0 \quad\wedge\quad t_1=1$

b) $g(t)=\left(t+1,2t+2\right)$ $\qquad t_0=1 \quad\wedge\quad t_1=2$

c) $g(t)=\left(t^2,\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}t\right)$ $\qquad 0\le t\le 2$

d) $g(t)=\left(\cos t,sent,t\right)$ $\qquad t_0=0 \quad\wedge\quad t_1=2\pi$

14) Dada la función paramétrica $g(t)=(3t;cost;sent)$ para qué valores de t el largo de la curva a partir de punto de coordenadas $(\frac{3}{2}\pi;0;1)$ es igual a 4

15) Suponga que una partícula sigue la trayectoria $g(t)=(t,t^2)$ hasta que sale por la tangente en $t_0=2$. ¿Dónde estará en $t=3$? Grafique

16) Supóngase que una partícula sigue la trayectoria $g(t)=\left(e^t,e^{-t},\cos t\right)$ hasta que sale por la tangente en $t=1$. ¿Dónde estará en $t=3$?

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1) Dada las siguientes ecuaciones paramétricas. Dibuje la curva asignado valores al parámetro *t*, y obtenga la ecuación de la curva eliminando el parámetro *t*.

a) $x = t^2$; $y = t^3$ $-1 \le t \le 2$

b) $x = 3sent$; $y = 5\cos t$ $0 \le t \le 2\pi$

2) Dibuje las curvas definidas paramétricamente por las siguientes funciones.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $-\infty < t < \infty$

b) $f(t) = (2t, t)$ $-1 \le t \le 1$

c) $f(t) = (t, t^2)$ $-\infty < t < \infty$

3) Encuentre el límite de las siguientes funciones.

a) $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t},\ t+1 \right)$

b) $\lim\limits_{t \to 3} \left(\dfrac{1}{t},\ t+1 \right)$

c) $\lim\limits_{t \to 0} \left(e^{-t}, sen(t), 1+e^{-t} \right)$

d) $\lim\limits_{t \to -2} \left(1+2t, \dfrac{t+2}{t^2-4}, \dfrac{1}{t} \right)$

4) $g(t)$ describe la trayectoria de una partícula en el espacio en un tiempo *t*.
Encuentre los vectores velocidad y aceleración de la partícula, la velocidad y aceleración instantánea y la dirección del movimiento.

a) $g(t) = (2\cos t,\ 3sent, 4t)$ $t = \dfrac{\pi}{2}$

b) $g(t) = \left(sen3t\ ,\ \cos 3t\ ,\ 2t^{\frac{3}{2}} \right)$ $t = 0$

c) $g(t)=\left(\cos^2 t\ ,3t-t^3,\ t\right)$ $\qquad t=0$

d) $g(t)=(0\ ,\ 0\ ,\ t)$ $\qquad t=1$

e) $g(t)=(\cos t\ ,\ sent\ ,\ t)$ $\qquad t=\dfrac{\pi}{2}$

5) Dibuje la curva δ descripta por $g(t)$ y trace el vector tangente $g'(t)$ para el valor de t indicado.

a) $g(t)=(\cos t\,, sent)$ $\qquad t_0=\pi/4$

b) $g(t)=\left(t\,,t\,,t^2\right)$ $\qquad t_0=1$

c) $g(t)=\left(t\,,t^2\,,t\right)$ $\qquad t_0=0$

6) Determine la longitud de la curva entre los valores de t indicados.

a) $g(t)=(a\cos t\,,a\,sent\,,c\,t)$ $\qquad 0\le t\le 2\pi$

b) $g(t)=\left(e^t\cos 2t\ ,\ e^t sen2t\ ,\ e^t\right)$ $\qquad 0\le t\le 3\pi$

c) $g(t)=\left(2\cos t\,,2sent\,,\sqrt{5}\ t\right)$ $\qquad 0\le t\le 2\pi$

d) $g(t)=\left(t\,,0,\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)$ $\qquad 0\le t\le 8$

e) $g(t)=\left(0,\cos^3 t\,,sen^3 t\right)$ $\qquad 0\le t\le \pi/2$

RESPUESTAS TRABAJO PRACTICO N° 7

1) a) $y=\frac{3}{2}x$ b) $y=\sqrt{x+4}$

2) $g(t)=(-2t+2,\ 5t+3,\ 8t)$

3) $T\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{64}^{\circ}$

4) a) $g(t)=(t,\ 4-t)$ b) $g(t)=(5\cos(t),5sen(t))$ c) $g(t)=(5\cos(t),4sen(t))$

5)

a) $\left.\begin{array}{ll} g_1(t)=(t,0) & 0\le t\le 4 \\ g_2(t)=\left(t,-\frac{3}{2}t+6\right) & 0\le t\le 4 \\ g_3(t)=(0,t) & 0\le t\le 6 \end{array}\right]$

b) $\left.\begin{array}{ll} g_1(t)=(t,t^2) & 0\le t\le 2 \\ g_2(t)=(t,4) & 0\le t\le 2 \\ g_3(t)=(0,t) & 0\le t\le 4 \end{array}\right]$

6)

a) $Ig=(-\infty,0]$ b) $Ig=[0,\infty)$ c) $Ig=(-\infty,\infty)$ d) $Ig=[-1,1]$

7)

a) Continua en $t=2$
b) Discontinuidad evitable en $t=0$
c) Continua en $\frac{\pi}{4}$
d) Discontinuidad evitable en $t=2$
e) Discontinuidad esencial en $t=0$

8)

8.1)

a) $y=x(x-2)$
b) $\bar{v}(1)=(1,2)$; $\bar{a}(1)=(0,2)$
c) $v(1)=\sqrt{5}$; $a(1)=2$; $\hat{\zeta}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

8.2)

a) $y=\frac{2}{9}x^2$

b) $\bar{v}(\ln 3)=(3,4)$; $\bar{a}(\ln 3)=(3,8)$

c) $v(\ln 3)=5$ $a(\ln 3)=\sqrt{73}$; $\hat{\zeta}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

8.3)

a) $x^2+y^2=1$

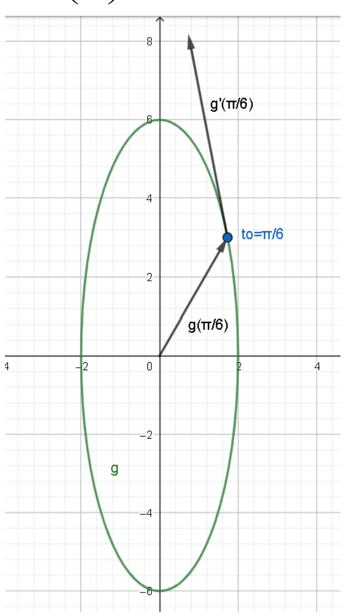
b) $\bar{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\bar{a}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $v\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$; $a\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$; $\hat{\zeta}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

9) a) $\bar{v}(1)=(1,2,2)$; $\bar{a}(1)=(0,2,0)$ b) $\bar{v}(0)=(0,3,1)$; $\bar{a}(0)=(-2,0,0)$

10)

a) $\bar{v}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(-1,3\sqrt{3}\right)$



b) $\bar{v}(1)=\left(0,1,-2\right)$ c) $\bar{v}(1)=\left(e,1\right)$

11)

a) Ecuación vectorial paramétrica: $r(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t;\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$

Ecuación cartesiana: $g=-x+\sqrt{2}$

b) Ecuación vectorial paramétrica: $r(t)=(1+t,1+t,1+2t)$

Ecuación cartesiana simétrica de la recta tangente: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$

c) Ecuación vectorial paramétrica: $r(t)=(e+et,1+t)$

Ecuación cartesiana: $y=\frac{1}{e}x$

d) Ecuación vectorial paramétrica de la recta tangente: $r(t)=(1,3t,t)$

Ecuación cartesiana simétrica: $x=1; \frac{y}{3}=\frac{z}{1}$

12)

a) $a_T=\frac{4}{\sqrt{5}}$; $\bar{a}_T=\left(0,\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$; $a_N=\frac{2}{\sqrt{5}}$

b) $a_T=2\sqrt{6}$; $\bar{a}_T=(2,2,4)$; $a_N=0$

c) $a_T=\frac{2}{\sqrt{2}}$; $\bar{a}_T=(1,1)$; $a_N=\frac{2}{\sqrt{2}}$

d) $a_T=0$; $a_N=5$

e) $a_T=-\frac{1}{e}\sqrt{3}$; $\bar{a}_T=\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$; $a_N=0$

13) a) $\ell_c=\sqrt{2}$ b) $\ell_c=\sqrt{5}$ c) $\ell_c=\frac{19}{3}$ d) $\ell_c=2\sqrt{2}\pi$

14) $t=2,836$

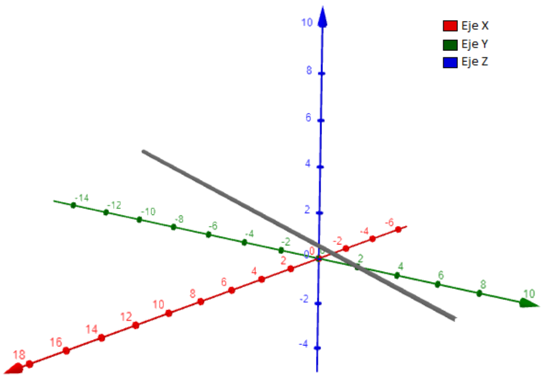
15) En $t=3$ estará en el punto $(5,16)$

16) En $t=3$ estará en $\left(4e,-\frac{2}{e},-1.98\right)$

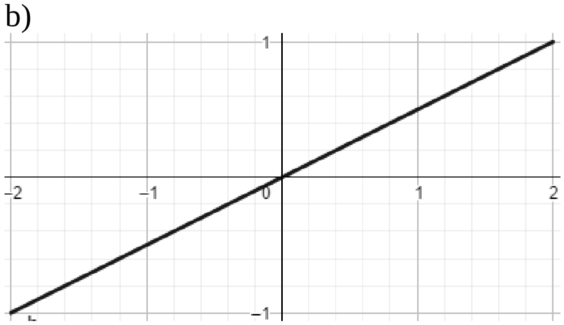
EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1) a) $y=x^{3/2}$; b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

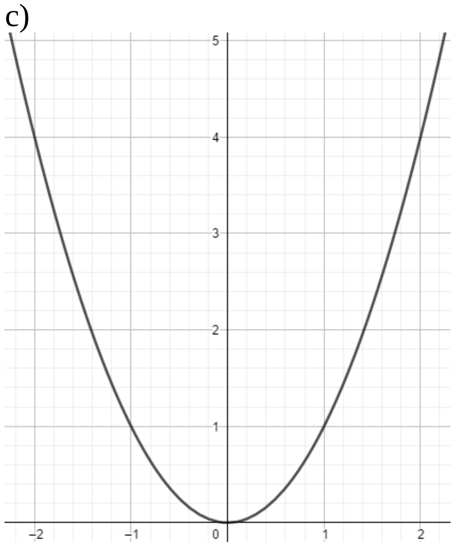
2)
a)



b)



c)



3) a) $\nexists L$; b) $L=\left(\frac{1}{3},4\right)$; c) $L=(1,0,2)$; d) $L=\left(-3,-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$

4)

a)

$\bar{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-2,0,4)$; $\bar{a}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,-3,0)$

Velocidad instantánea = $v\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{20}$; Aceleración instantánea: $a\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$

Dirección del movimiento en $t=\frac{\pi}{2}$, $\hat{\zeta}=\left(\frac{-2}{\sqrt{20}},0,\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

b)

$\bar{v}(0)=(3,0,3)$; $\bar{a}(0)=(0,-9,0)$

Velocidad instantánea = $v(0)=\sqrt{18}$; Aceleración instantánea: $a(0)=9$

Dirección del movimiento en $t=0$, $\hat{\zeta}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c)

$\bar{v}(0)=(0,3,1)$; $\bar{a}(0)=(2,0,0)$

Velocidad instantánea = $v(0)=\sqrt{10}$; Aceleración instantánea: $a(0)=2$

Dirección del movimiento en $t=0$, $\hat{\zeta}=\left(0,\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

d)

$\bar{v}(1)=(0,0,1)$; $\bar{a}(1)=(0,0,0)$

Velocidad instantánea = $v(1)=1$; Aceleración instantánea: $a(1)=0$

Dirección del movimiento en $t=1$, $\hat{\zeta}=(0,0,1)$

e)

$\bar{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1,0,1)$; $\bar{a}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,-1,0)$

Velocidad instantánea = $v\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$; Aceleración instantánea: $a\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

Dirección del movimiento en $t=\frac{\pi}{2}$, $\hat{\zeta}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

5) A cargo del alumno

6) a) $\ell_c = 2\pi\sqrt{a^2 + c^2}$ b) $\ell_c = \sqrt{6}(e^{3\pi} - 1)$ c) $\ell_c = 6\pi$

d) $\ell_c = \dfrac{52}{3}$ e) $\ell_c = \dfrac{3}{2}$