SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Introducción

En el desarrollo de ésta asignatura nos ocuparemos de problemas "Lineales" es decir que al duplicar, triplicar, etc. la causa, acontece que se duplica, triplica etc. el efecto. Si por ejemplo, la causa la representamos con **x** e **y** el efecto será por ejemplo **α = 3x - 3y** es decir α depende linealmente de **x** e **y** . Si le asignamos valores a **x** e **y** encontramos **α ,** ahora si conocemos **α** , debemos determinar **x** e **y**, esto es lo que hacemos resolviendo un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x - 2y = \alpha \\ 4x + 5y = \beta \end{cases}$$

Calculando los valores de **x** e **y** que son incógnitas, nos conducen a los valores de **α** y **β** que son datos.

Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Siendo a_{11} ...... los coeficientes de las incógnitas
x_1 , x_2 .... las incógnitas, b_1 , b_2 ....son los términos independientes

1. Cada una de estas ecuaciones son ecuaciones de una línea recta.
2. Una solución al sistema es un par de números (x, y).
3. Discutir un sistema de ecuaciones lineales es analizar si éste tiene soluciones y en caso de tenerla, cuantas soluciones tienen.

<u>Ejemplo</u> Resuelve los siguientes sistemas 2x2 usando el método de sustitución ó igualación)

1) $\begin{cases} x - y = \mathbf{7} \\ x + y = \mathbf{5} \end{cases}$ Solución Única

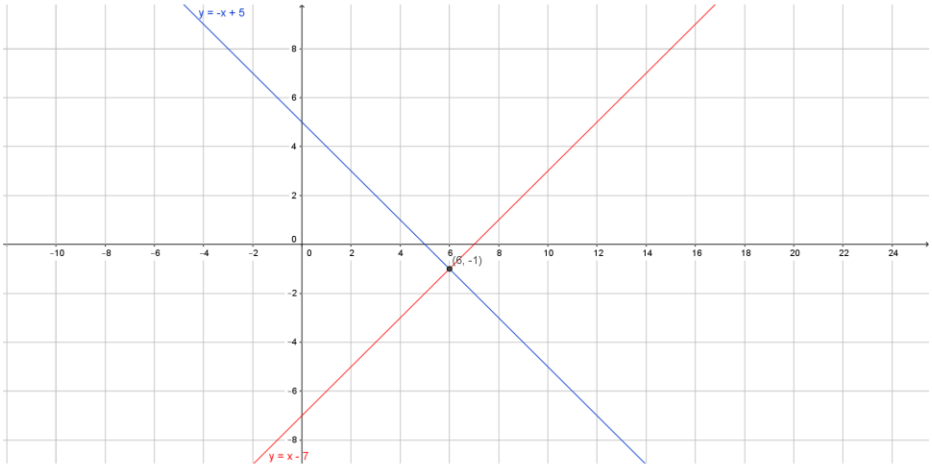
2) $\begin{cases} x - y = \mathbf{7} \\ \mathbf{2}x - \mathbf{2}y = \mathbf{14} \end{cases}$ Solución Infinitas

3) $\begin{cases} x - y = \mathbf{7} \\ \mathbf{2}x - \mathbf{2}y = \mathbf{13} \end{cases}$ No tiene Solución

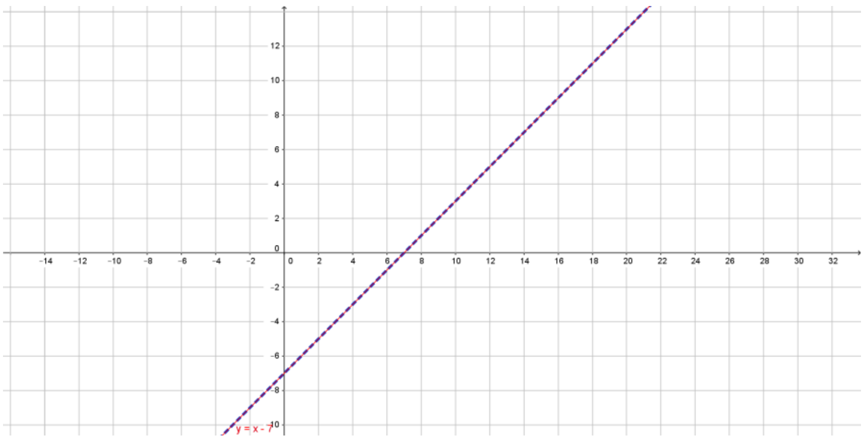
La Geometría del Sistema

En un sistema 2x2 (2 ecuaciones con 2 incógnitas), cada ecuación representa una línea recta. Al resolver el sistema se analiza el comportamiento de las dos rectas juntas:

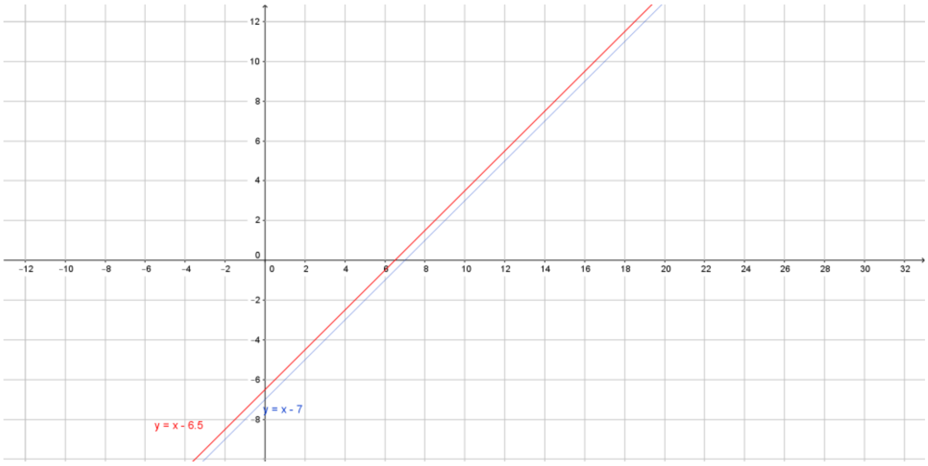
- ✓ Si las rectas se intersectan en un solo punto, decimos que el sistema tiene una UNICA SOUCIÓN.



- ✓ Si las rectas son coincidentes, decimos que el sistema tiene un número INFINITOS DE SOLUCIONES.



- ✓ Si las rectas resultan paralelas, decimos que el sistema NO TIENE SOLUCIÓN.



Sistemas lineales de "m" ecuaciones con "n" incógnitas

Sistemas de Ecuaciones Lineales: NO HOMÓGENEOS $B \neq \vec{0}$

No homogéneos significa que en la columna de los términos independientes, existe al menos un b_i distinto de cero.

De esta manera se representa en forma genérica un sistema de ecuaciones, donde se dice que tiene m ecuaciones con n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ..a_{ij}x_j .. + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 ..a_{mj}x_j + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Otra forma de expresar un sistema de ecuaciones es en forma matricial:

$$A \cdot X = \vec{B}$$

Donde A es la matriz de los coeficientes (es decir los números que acompañan a las incógnitas)

X es la matriz columna de las incógnitas. $(x_1 \quad x_2 \quad . \quad . \quad x_n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1j} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2j} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{ij} & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mj} & . & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_i \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_i \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de los Coeficientes M. de las Incógnitas Tér min os Independientes

De aquí surge la definición de **<u>Matriz Ampliada</u> (A')** que es aquella formada por la matriz de los coeficientes y la matriz columna de los términos independientes.

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline & \end{array}$$

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de ecuaciones, se reduce la matriz ampliada, aplicando Gauss-Jordan, hasta encontrar una matriz *A* reducida por filas, luego se analiza por el Teorema de Roche-Frobenius

Teorema de Rouche Frobenius

El análisis del tipo de solución de un sistema de ecuaciones se efectúa a través del teorema de Rouche Frobenius, para esto es necesario introducir el concepto de *rango*, diciendo que *rango es la cantidad de filas no nulas que nos queda después de escalonar la matriz.*

Definimos:

ρ(A)= rango de la matriz de los coeficientes A

ρ(A')= rango de la matriz ampliada (A⁝B)

n= cantidad de incógnitas

El Teorema de Rouche Frobenius enuncia lo siguiente:

- ✓ Si ρ(A)=ρ(A'), el sistema es COMPATIBLE (es decir, que tiene solución)
    - Si ρ(A)=ρ(A')=n , el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (solución única)
    - Si ρ(A)=ρ(A')<n , el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones, grado de indeterminación h = n- ρ(A))
- ✓ Si ρ(A)<ρ(A'), el sistema es INCOMPATIBLE (es decir, que NO tiene solución)

Sistemas equivalentes

Un sistema de ecuaciones lineales con varias ecuaciones y varias variables (incógnitas) es complejo para resolverlo por métodos tradicionales, entonces lo que hacemos es aplicar Gauss Jordan donde nos reduce la matriz, y luego lo multiplicamos por sus variables y lo transformamos en un sistema equivalente.
Decimos que es equivalente porque ambos tienen la misma solución.

Visualiza los videos de SEL y resuelve los siguientes sistemas. no homogéneos. Puedes compartir tus dudas y/o resultados en el foro de intercambio – SEL:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 5x + 11y - 21z = -22 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$$
$(x, y, z) = (2, -1, 1)$

$$\begin{cases} x + y - 2z + 4t = 5 \\ 2x + 2y - 3z + t = 3 \\ 3x + 3y - 4z - 2t = 1 \end{cases}$$
Compatible In det .

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 2 \\ 2x + 5y - 2z + t = 1 \\ 5x + 12y - 7z + 6t = 7 \end{cases}$$
Incompatible

Sistemas de Ecuaciones Lineales: HOMÓGENEOS $B = \vec{\mathbf{0}}$

De esta manera se representa en forma genérica un sistema de ecuaciones lineales *m x n* **homogéneo;** se sabe que es homogéneo porque la columna de los términos independientes son todos iguales a cero.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = \mathbf{0} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = \mathbf{0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots a_{ij}x_j .. + a_{in}x_n = \mathbf{0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 .. a_{mj}x_j + a_{mn}x_n = \mathbf{0} \end{cases}$$

Solución de un sistema lineal homogéneo

Este grupo de sistemas ***siempre tienen solución***, porque ρ(A) siempre coincide con ρ(A'), El análisis para saber qué tipo de solución tiene se procede de la misma manera que en el caso anterior:

- ✓ Se reduce la matriz por Gauss Jordan.
- ✓ Se analiza por el teorema de Roche Frobenius.
- ✓ Luego armamos el sistema equivalente.
- ✓ Y se obtiene la solución

Teorema de Rouche Frobenius

Recordemos:

ρ(A)= rango de la matriz de los coeficientes A
ρ(A')= rango de la matriz ampliada (A:B)
n= cantidad de incógnitas

Entonces:

- ✓ Si ρ(A)=ρ(A'), el sistema es COMPATIBLE (es decir, que tiene solución)
  - Si ρ(A)=ρ(A')=n , el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (en este caso la única solución posible será la nula, llamada también **solución trivial**)
  - Si ρ(A)=ρ(A')<n , el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones, grado de indeterminación h = n- ρ(A))

Resuelve los siguientes sistemas Homogéneos. Puedes compartir tus dudas y/o resultados en el foro de intercambio – SEL:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 13x_3 + 4x_4 - 16x_5 = 0 \end{cases}$$