TRABAJO PRACTICO RA 2

En este RA, se pretende comprender los espacios y subespacios vectoriales, y su aplicación en el estudio de las transformaciones lineales de $\Re^n \to \Re^m$. Finalmente, consideraremos transformaciones de $\Re^n \to \Re^n$ para aplicar la diagonalización de matrices.

En la planificación de la cátedra encontrarás la sección “Recomendaciones de estudio”. Resaltamos algunos aspectos importantes:

- Sé constante, lo ideal es todos los días dedicarle tiempo al estudio.
- Lee el material y mira los videos recomendados por los docentes con tiempo de anticipación a la clase presencial. En el aula virtual tendrás toda la información importante y bibliografía para ayudarte en tu aprendizaje.
- Practica desarrollar en hojas los ejercicios con su correspondiente justificación teórica.
- Practica el uso de software e intenta siempre interpretar los resultados que muestra.

Espacios Vectoriales

1) En los problemas siguientes determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. Si no lo es, de una lista de los axiomas que no se cumplen.

a) $\{(x,y): y \leq 0; x, y\ reales\}$ con la suma de vectores y multiplicación por un escalar.

b) El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ de la forma (x, x, x).

2) En los problemas siguientes determine si el subconjunto dado $"S"$ del espacio

vectorial V es un subespacio de V.

a) $V = \Re^2,\ S = \{(x,y): y \geq 0\}$
b) $V = \Re^2,\ S = \{(x,y): y = 0\}$
c) $V = \Re^2,\ S = \{(x,y): y = 3x + 1\}$

3) ¿Es el vector (10,10) combinación lineal de los vectores (2,3) y (4,1)? Comprueba de manera gráfica.

4) ¿Cuáles de los siguientes vectores son combinaciones lineales de $\mathbf{u} = (0,\ -2,\ 2)$ y $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$? Expresa la combinación lineal cuando sea posible. Comprueba con GeoGebra.

a) $(2, 2, 2)$ b) $(3, 1, 5)$ c) $(0, 4, 5)$ d) $(0, 0, 0)$

5) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son Linealmente Dependientes (LD)? ¿Cuáles Linealmente Independientes (LI)?

a) $\{(8,-1,3),(4,0,1)\}$

b) $\{(-2,0,1),(3,2,5),(6,-1,1),(7,0,-2)\}$

c) $\{(3,8,7,-3),(1,5,3,-1),(2,-1,2,6),(1,4,0,3)\}$

d) $\{(0,0,2,2),(3,3,0,0),(1,1,0,-1)\}$

6) En cada inciso, determinar qué espacio o subespacio generan los conjuntos dados:

a) $\{(2,2,2),(0,0,3),(0,1,1)\}$.

b) $\{(2,-1,3),(4,1,2),(8,-1,8)\}$

c) $\{(2,3),(8,12),(1,4)\}$

d) $\{(2,3),(8,12)\}$

e) $\{(3,1,4),(2,-3,5),(5,-2,9),(1,4,-1)\}$

7) a) Demostrar que los vectores $\mathbf{v}_1=(0,3,1,-1)$, $\mathbf{v}_2=(0,6,2,-2)$ y $\mathbf{v}_3=(1,-7,1,3)$ forman un conjunto L.D. en $\Re^4$.

b) Expresar cada vector como una combinación lineal de los otros dos.

8) Para cada conjunto de vectores dado:

a) Encontrar la dimensión y una base del subespacio *S* de $\Re^3$
b) Con los vectores de la base hallada, encuentra la ecuación del subespacio generado
c) Comprueba con GeoGebra

- $\{(-1,3,2),(3,-1,0),(2,-2,-1)\}$
- $\{(1,2,3),(-1,2,3),(5,2,3)\}$
- $\{(1,1),(2,2),(5,5)\}$
- $\{(1,0,1),(1,2,-1),(2,0,2)\}$

<u>*Recordemos:*</u> $Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ significa "***el espacio generado por los vectores*** $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$" y el espacio generado por dichos vectores *es el conjunto de todas las combinaciones lineales* de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

$Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ también se denota como $S.G\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ donde $S.G$ se lee "Sistema Generador".

9) ¿Está $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$?

10) Sean $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, y $S = \{\mathbf{w}\}$. ¿Es cierto o falso lo siguiente?

a) $\mathbf{v}$ está en S.
b) $\mathbf{w}$ está en S.
c) $\mathbf{v}$ está en $Gen(S)$
d) $\mathbf{w}$ está en $Gen(S)$.

Transformaciones Lineales

11) Dadas las siguientes Transformaciones Lineales verificar aplicando propiedades, si es transformación es lineal

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + 4x_3, 5x_1 - 8x_2 + x_3)$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1x_2 - x_2, x_1 + 3x_1x_2, x_1 + x_2)$

c) $f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 7x_3, 2x_1 - 4x_2 - x_3)$

12) Sea $\mathrm{F}: \Re^3 \to \Re^2$ la transformación expresada por $F(x, y, z) = (x - y + z, x + y - z)$.

a) ¿A qué espacio pertenece el dominio de F? ¿Y la $I(f)$?

b) ¿Cuál(es) de los vectores $(1, -2, 3)$, $(1, 2, -3)$ y $(1, 0, 5)$ tienen la misma imagen bajo *F*?

13) Dadas las siguientes transformaciones lineales determine:

a) n y m (la dimensión del dominio de la Transformación y la dimensión de la Imagen)
b) la matriz asociada a la transformación
c) El núcleo de la transformación lineal. Una base y su dimensión o Nulidad.
d) La imagen de la transformación lineal. Una base y su dimensión o Rango.

e) Ecuación y Gráfico de los subespacios obtenidos en los ítems c y d, cuando sea posible
f) Validar con GeoGebra

I) $F(x,y,z)=(x+2y-z\ ,y+z\ ,x+y-2z)$

II) $F(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3\ ,x_2-x_3)$

III) $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2-x_3+x_4,0)$

IV) $F(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3\ ,\ x_2+x_3)$

V) $F(x_1,x_2)=(x_1+x_2\ ,\ x_1-x_2\ ,\ x_1+2x_2)$

VI) $F(x,y,z)=(x+y\ \ ,y+z)$

VII) $F(x,y,z,s,t)=(x+2y+z-3s+4t\ ,2x+5y+4z-5s+5t\ ,x+4y+5z-s-2t)$

VIII) $T(x,y,z)=\begin{pmatrix} x-y+z \\ -2x+2y-2z \end{pmatrix}$

IX) $T(x,y,z)=(x-y+2z\ ,3x+y+4z\ ,5x-y+8z)$

X) $T(x,y,z,w)=(x-y+2z+3w\ ,y+4z+3w\ ,x+6z+6w)$

XI) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-2y \\ 2x+2y-2z \end{pmatrix}$

XII) $T(x,y,z)=(2x+y+z\ ,y-3z)$

14) En los ejercicios a), b) y c) encuentre una base para $\mathrm{I}(F)=Col(A)$ y una base para el $N(F)$

a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\qquad F(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

b) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2;\qquad F(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

c) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \qquad F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

15) Determine una base para el espacio nulo de A y una base para el espacio columna de A. ¿Cuál es la nulidad de A?¿Cuál es la dimensión del espacio columna?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

16) Obtenga una base para el espacio columna de A y su dimensión, una base para el espacio nulo de A y su dimensión. Grafique cuando sea posible.

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

17) Haga un esquema del espacio columna de A para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

18) Haga un esquema del espacio columna de A y $\nu(A)$ para $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

19) Encontrar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales:

a) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$

b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$

c) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$

d) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

Diagonalización de Matrices

En el caso particular de una transformación lineal del tipo $f: V \to V$ (endomorfismo $V = W$), la matriz asociada a la transformación permite, bajo algunas condiciones que estudiaremos, obtener una matriz P invertible y una matriz D, tal que $P^{-1}AP = D$, siendo D la matriz Diagonal de A

20) Dada la Transformación lineal $f(x, y) = (7y, 5x + 2y)$ obtenga la matriz A asociada a la transformación, el polinomio característico, los autovalores y autovectores y la multiplicidad geométrica de cada autovalor.

21) Para las matrices de los ejercicios I y II, determine lo siguiente:

(a) La Transformación lineal que representa la matriz dada
(b) El polinomio característico.
(c) Los autovalores.
(d) Los autovectores.
(e) La multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor.

I) a) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

II) a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

22) Sabiendo que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ y sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Demuestre que $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ son los autovectores de A. ¿Cuáles son los autovalores correspondientes?

23) Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Demuestre que $\mathbf{u}$ es un autovector de A. ¿Cuál es el autovalor correspondiente?

c) Demuestre que $\mathbf{v}$ es un autovector de A. ¿Cuál es el autovalor correspondiente?

24) Suponga que una matriz A de 3×3 tiene los autovalores 3, 0, -7. ¿A es diagonalizable? ¿Por qué si o por qué no?

25) En los ejercicios i) a v) diagonalice la matriz A si ésta es diagonalizable; es decir, si es posible encontrar P invertible y a D diagonal tales que $P^{-1}AP = D$.

i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ii) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ v) $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

26) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Indique que tipo de matrices son A y B.

b) Determine sus autovalores y autovectores.
c) Indique si A y B son matrices diagonalizables. Justifique su respuesta.

27) En los ejercicios a) y b) compruebe que S es un conjunto LI de autovectores de A. Diagonalice A usando S. Aclaración: Tomar los vectores de S como vectores columna.

a) $S = \{(10, 0), (6, 5)\}$ y $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) $S = \{(0, 2, 0), (1, 0, 2), (1, 0, -2)\}$ y $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

28) En los ejercicios a) y b) compruebe que S es un conjunto LI de autovectores de A, y E es el conjunto de los autovalores de A. Determine A. (Tomar los vectores de S como vectores columna)

a) $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $E = (1, 2, 3)$

b) $S=\{(1,1,1),(-3,0,1),(-2,1,0)\}$ y $E=(6,0,0)$

29) Demuestre que A es diagonalizable. $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\2&3&4\\2&3&4\end{bmatrix}$

30) Demuestre que A no es diagonalizable $A=\begin{bmatrix}5&1&0\\0&5&1\\0&0&5\end{bmatrix}$

Ejercicios complementarios

1) En los problemas siguientes determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. Si no lo es, de una lista de los axiomas que no se cumplen.

a) El conjunto de matrices diagonales 2x2 bajo la suma de matrices y multiplicación por un escalar.

d) El conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix}1&\alpha\\\beta&1\end{pmatrix}$ con las operaciones de matrices de suma y multiplicación por un escalar.

2) Expresar cada uno de los siguientes vectores como combinaciones lineales de $\mathbf{u}=(2,1,4)$, $\mathbf{v}=(1,-1,3)$ y $\mathbf{w}=(3,2,5)$.

a) $(-9,-7,-15)$ b) $(6,11,6)$ c) $(0,0,0)$ d) $(7,8,9)$

3) Para los ejercicios sean

$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$ $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$ $\mathbf{d}=\begin{bmatrix}-3\\9\end{bmatrix}$

a) ¿$\mathbf{c}$ está en el $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$?

b) ¿$\mathbf{d}$ está en el $Gen\{\mathbf{a}\}$?

c) ¿Es cierto que el $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}=\mathbb{R}^2$?

d) ¿Es cierto que el $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{c}\} = Gen\{\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?

e) ¿Cuál es el $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?

4) En los ejercicios que se dan a continuación, determine si las columnas de la matriz dada de $m \times n$ generan a $\mathbb{R}^m$.

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} a & e & i \\ b & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{bmatrix}$

5) En los ejercicios que se dan a continuación determine si los vectores son linealmente independientes.

a) $\left[(1,-2,0),(1,1,1),(0,-1,1)\right]$ b) $\left[(a.1),(10a,100)\right]$ para $a \neq 0$

c) $\left[(a,a,1),(b,b,1),(1,0,0)\right]$ para $a \neq b$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 20 & 0 \\ 25 & 0 \end{bmatrix}$

6) ¿Para qué valores de a es linealmente dependiente el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a+2 \\ a \end{bmatrix} \right\}$?

7) En los siguientes incisos determine si el conjunto de vectores dados genera el espacio vectorial indicado o si generan un subespacio:

a) En $\Re^2$ $\{(1,2),(3,4)\}$

b) En $\Re^2$ $\{(1,1),(2,1),(2,2)\}$

c) En $\Re^3$ $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

d) En $M_{2\times 2}$ $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 3\\0 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 0\\4 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 5\\0 & 5\end{bmatrix}\right\}$

e) En $\Re^4$ $\{(1, -2, 1, 1), (3, 0, 2, -2), (0, 4, -1, 1), (5, 0, 3, -1)\}$

8) Demostrar que el conjunto de vectores $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, donde $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (2,-1,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,1,1)$ y $\mathbf{v}_4 = (3,0,-1,1)$ forma una base de R^4.

9) Determinar en los problemas siguientes si cada conjunto de vectores constituye una base del espacio vectorial dado. Si no lo es, indicar la dimensión y una base del subespacio generado.

a) En $\Re^3$ $\{(1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)\}$

b) En $\Re^4$ $\{(1,1,1,1), (1,2,3,2), (2,5,6,4), (2,6,8,5)\}$

c) En $\Re^{2x2}$ $\left\{\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5 & 1\\0 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -7\end{pmatrix}\right\}$

10) Determine el núcleo, la nulidad y el rango del $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-z\\y+z\end{pmatrix}$$

11) Calcule las bases para el núcleo y la $I(T)$ y determine la nulidad y el rango de

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(x, y, z, w) = (x+3z, y-2z, w)$$