VALORES EXTREMOS - MAXIMOS Y MINIMOS

Realice el marco teórico que justifique la resolución de los ejercicios

1) Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=xy(3-x-y)$ b) $f(x,y)=\left(6x-x^2\right)\left(2y-y^2\right)$

2) Hallar extremos locales y puntos de ensilladura, si existen, para:

a) $f(x,y)=8y^3-12xy+x^3$ b) $f(x,y)=x^3+\dfrac{48}{x}+y^2+4y$

c) $f(x,y)=xy+\dfrac{8}{y}+\dfrac{27}{x}$ d) $f(x,y)=x^3+3x^2+4xy+y^2$

3) En los ejercicios siguientes identificar los extremos de las funciones a través de su gráfica. Comprobar los resultados usando las derivadas parciales para localizar los puntos críticos y analizando si hay en ellos extremos relativos. Representar la función e indicar todos sus extremos.

a) $g(x,y)=(x-1)^2+(y-3)^2$ b) $g(x,y)=9-(x-3)^2-(y+2)^2$

Valores extremos condicionados

4) Hallar los máximos y mínimos condicionados de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=xy$ $G_1=x+y=1$

b) $f(x,y)=e^x+e^y$ siendo $x+y=2$

5) Hallar tres números positivos x, y, z tales que $x^2y^4z^6$ sea máximo siendo $x+y+z=1$.

6) Hallar tres números positivos x, y, z tales que xy^2z^3 sea máximo siendo $x+y+z=18$.

7) Determinar la distancia mínima del origen de coordenadas a la recta $y=-2x+5$

8) Encontrar el o los puntos sobre la elipse $5x^2-6xy+5y^2=8$ que se encuentren mas cercanos al origen de coordenadas

9) Maximizar y minimizar $f(x,y)=xy$ en la circunferencia $x^2+y^2=1$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1) Hallar los puntos críticos para:

a) $f(x,y)=x^3+x^2y+y^2+2y$

b) $f(x,y)=xy^3-x^2y^2+xy^2$

c) $f(x,y)=x^2y^2+x^2-xy+5x-7$

2) Hallar extremos locales y puntos de ensilladura, si existen, para:

a) $f(x,y)=2x^3+16y^3-9xy$

b) $f(x,y)=3axy-x^3-y^3$

c) $f(x,y)=y^3+3yx^2-15y-12x$

d) $f(x,y)=x^3+y^2-3x$

e) $f(x,y)=y^3+3x^2y-3x^2-3y^2+2$

f) $f(x,y)=x^2+3y^4-4y^3-12y^2$

3) En los ejercicios siguientes identificar los extremos de las funciones a través de su gráfica. Comprobar los resultados usando las derivadas parciales para localizar los puntos críticos y analizando si hay en ellos extremos relativos. Representar la función e indicar todos sus extremos.

a) $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2+1}$

b) $f(x,y)=\ x^2+y^2+2x-6y+6$

Valores extremos condicionados

4) Hallar el máximo absoluto de $f(x,y,z)=x-2y+2z$ sobre la superficie $S=\left\{\left(x,y,z\right)/\,x^2+y^2+z^2=9\right\}$

5) Hallar las dimensiones de paralelepípedo rectangular de área total S y cuyo volumen sea máximo.

RESPUESTAS

1) a) $PC_1=(0,3)$ $PC_2=(1,1)$ $PC_3=(0,0)$ $PC_4=(3,0)$

b) $PC_1=(0,0)$ $PC_2=(6,0)$ $PC_3=(0,2)$ $PC_4=(6,2)$ $PC_5=(3,1)$

2) a) Punto silla en $(0,0,0)$; Mínimo local en $(2,1,-8)$

b) Mínimo local en $(2,-2,28)$; Punto silla en $(-2,-2,-36)$

c) Mínimo local en $\left(\frac{9}{2},\frac{4}{3},18\right)$

d) Punto silla en $(0,0,f(0,0))$; Mínimo local en $\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{27}\right)$

3) a) En $(1,3,0)$ existe un mínimo b) En $(3,-2,9)$ existe un máximo

4) a) Máximo en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ b) Mínimo en $(1,1,2e)$

5) $x=\frac{1}{6}$; $y=\frac{1}{3}$; $z=\frac{1}{2}$; $P\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

6) $x=3$; $y=6$; $z=9$; $P\left(3,6,9\right)$

7) Punto sobre la recta más cercano al origen $P(2,1)$. Distancia mínima: $\sqrt{5}$

8) $PC\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ y\ PC\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

9) Máximo en $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Mínimo en $P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

RESPUESTAS EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1) a) Mínimo en $\left(1,-\frac{3}{2}, f\left(1,-\frac{3}{2}\right)\right)$; Punto silla en $(0,-1, f(0,-1))$ y $(2,-3, f(2,-3))$

b) $PC\left(\frac{1}{2},0\right)$, $PC\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$, $PC(0,-1)$, $PC(0,0)$

c) $PC\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{5}\right)$, $PC(0,5)$

2) a) Punto silla en $(0,0,0)$; Mínimo en $(\frac{3}{4},\frac{3}{8},-\frac{27}{32})$

b) Punto silla en $(0,0,0)$

Máximo local en $(a,a, f(a,a))$

c) Mínimo local en $(1,2, f(1,2))$; Máximo local en $(-1,-2, f(-1,-2))$;

Punto silla en $(2,1, f(2,1))$; Punto silla en $(-2,-1, f(-2,-1))$

d) Mínimo local en $(1,0,-2)$; Punto silla en $(-1,0,2)$

e) Punto silla en $(1,1, f(1,1))$; Punto silla en $(-1,1, f(-1,1))$

Máximo local en $(0,0, f(0,0))$; Mínimo local en $(0,2, f(0,2))$

f) Punto silla en $(0,0, f(0,0))$; Mínimo local en $(0,-1, f(0,-1))$;

Mínimo local en $(0,2, f(0,2))$

3) a) Mínimo local en $(0,0,1)$

b) Mínimo local $(-1,3-4)$

4) Máximo en $(1,-2,2)$

5) $x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$