UNIDAD II – FUNCION DETERMINANTE

Llamamos función Determinante a la función que se aplica sobre **matrices cuadradas** de modo que la imagen sea un número real; éste se obtiene formando todos los productos posibles de n elementos elegidos entre los nxn de la matriz dada, siempre que en cada producto haya un factor de cada fila y un factor de cada columna. (El signo más o menos de cada producto está relacionado a una permutación par o impar de los subíndices, tema que escapa a los contenidos del curso).

Así dada la matriz A^{2x2}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

el determinante de A, que indicaremos $|A|$, es

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

(Es decir que se resuelve multiplicando los elementos de la diagonal principal, y al resultado le restamos el producto de los elementos de la diagonal secundaria)

Observemos la diferencia entre Determinante y Matriz: mientras el determinante es un número determinado por la imagen de una matriz, la matriz no tiene un valor numérico sino que está caracterizada por sus elementos y la posición que éstos ocupan en un cuadro de valores. **Los elementos de una matriz se encierran entre paréntesis "( )", mientras que al indicar un determinante los encerramos entre barras "| |".**

¿Cómo procedemos si la matriz es de orden 3x3?

Es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

el determinante de A es

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Este método para calcular determinantes se denomina **Método de Sarrus. (Sugerimos ver video)**

Ejemplo

Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, para aplicar el Método de Sarrus repetimos las dos primeras filas en la parte inferior de la matriz A y calculamos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = [(3x2x4) + (4x2x2) + (-1x5x3)] - [(-1x2x2) + (3x2x3) + (4x5x4)] =$$

$$= [24 + 16 - 15] - [-4 + 18 + 80] = -69$$

Cuando la matriz es de orden 4x4 o superior **el método anterior no puede aplicarse**. En estos casos usaremos el método de Laplace o el método de Chío.

Método de Laplace

El método de Laplace hace uso de cofactores para calcular el valor del determinante. Se usa para matrices 3x3 en adelante

Cofactor de un elemento a_{ij}: es el determinante que queda al suprimir la fila i y la columna j, multiplicado por su signo de posición $(-1)^{i+j}$. Al multiplicar el cofactor por el signo de posición lo que hacemos es:

- ✓ cambiar el signo del cofactor si la posición es impar (porque -1 elevado a una potencia impar es -1)
- ✓ mantener el signo del cofactor si la posición es par (porque -1 elevado a una potencia par es 1)

Es decir, dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$Cof(a_{11}) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad Cof(a_{12}) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Luego, el Método de Laplace calcula el determinante sumando los productos entre los elementos de una línea cualquiera (fila o columna) por su correspondiente cofactor:

Supongamos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

si elegimos la fila 1 entonces

$$|A| = a_{11}\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \ a_{11}[a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}] - a_{12}[a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}] + a_{13}[a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}]$$

(Sugerimos ver video sobre Método de Laplace)

Ejemplo

Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Si elegimos la fila 2 por ejemplo

$$Cof(a_{21}) = \ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad Cof(a_{22}) = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \qquad Cof(a_{23}) = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Entonces, lo que resta ahora para calcular el determinante de A es multiplicar cada elemento de la fila elegida por su correspondiente cofactor, y sumar:

$$|A| = 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -4(20-4) + 2\big(12-(-2)\big) - 3(6-(-5))$$

$$= -4x16 + 2x14 - 3x11$$

$$= -69$$

Observación: **para simplificar cálculos al usar Laplace, conviene elegir una fila o columna con 0** (ceros), si existen, ya que algunos términos se eliminan. En el ejemplo anterior es lo mismo elegir cualquier fila o columna ya que ningún elemento es cero.

Regla de Chío

Este método hace uso de la eliminación de Gauss Jordan para reducir el orden de los determinantes. Se usa para matrices 3x3 3n adelante). El procedimiento consiste en tomar un elemento no nulo como pivote, extraerlo como factor común de la fila, junto con su signo de posición. Luego se obtiene un determinante de orden menor aplicando Gauss Jordan para cambiar aquellos elementos que quedan fuera de la fila y columna del pivote.

(Sugerimos ver video sobre Método de Chío)

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si elegimos el elemento de la fila 1 y columna 1

$$\rightarrow |A| = 3.(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Observe que el determinante queda multiplicado por el elemento que uso para generar el pivote, afectado por su signo de posición. Si aplicamos Gauss Jordan sobre los 4 elementos que quedan fuera de la fila y columna del pivote obtenemos un determinante 2x2 que se resuelve directo:

$$\rightarrow |A| = 3.(-1)^2 \begin{vmatrix} -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \end{vmatrix} = 3.\left[\left(-\frac{14}{3}.\frac{14}{3}\right) - \left(\frac{11}{3}.\frac{1}{3}\right)\right] = -69$$

Propiedades de los Determinantes

1) $|A| = |A^T|$; el Determinante de A es igual al determinante de su transpuesta. Esta propiedad es relevante ya que significa que toda propiedad que se demuestra para una fila se cumple también para una columna, o viceversa. Por esta razón, en las propiedades siguientes hablaremos de línea (fila o columna).
2) Si una matriz A tiene una línea de ceros, su determinante es nulo.
3) Si en la matriz A se intercambian dos líneas, su determinante cambia de signo.
4) Si la matriz A tiene dos líneas iguales, su determinante es cero.
5) Si una línea de A es múltiplo de otra, su determinante es cero.
6) Si A y B son cuadradas y existe el producto A.B, entonces $|A.B| = |A|.|B|$
7) Si A es una matriz invertible, entonces $|A^{-1}| = |A|^{-1}$. Es decir, el determinante de la inversa es igual a la inversa del determinante.
8) Si k es un numero, entonces $|A^k| = |A|^k$
9) Si k es un numero, entonces $|k.A| = k^n|A|$, donde n es el orden de la matriz A

Matriz Adjunta

Sea A una matriz nxn y sea C la matriz de sus cofactores, la adjunta de A es la transpuesta de C:

$$Adj(A) = C^T, donde\ C\ es\ la\ matriz\ de\ los\ cofactores\ de\ A$$

Sea A una matriz nxn, $A\ es\ invertible\ \leftrightarrow det\ (A) \neq 0.$

Entonces, si $det(A) \neq 0$ podemos calcular la inversa de A como:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . Adj(A)}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$Cof(a_{11}) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12 \qquad Cof(a_{12}) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3 \qquad (a_{13}) = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$Cof(a_{21}) = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -13 \qquad Cof(a_{22}) = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \qquad (a_{23}) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$Cof(a_{31}) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 \qquad Cof(a_{32}) = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad (a_{33}) = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

La matriz de los cofactores de A quedaría

$$\rightarrow Cof(A) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y la matriz adjunta es

$$\rightarrow Adj(A) = (Cof(A))^T = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Usando alguno de los métodos conocidos, puedo determinar el valor del determinante de A: $|A| = 3$

Y finalmente calculamos la inversa de A como:

$$\boxed{\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.Adj(A)}}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}12 & -13 & -7\\ -3 & 5 & 2\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3}\\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3}\\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$