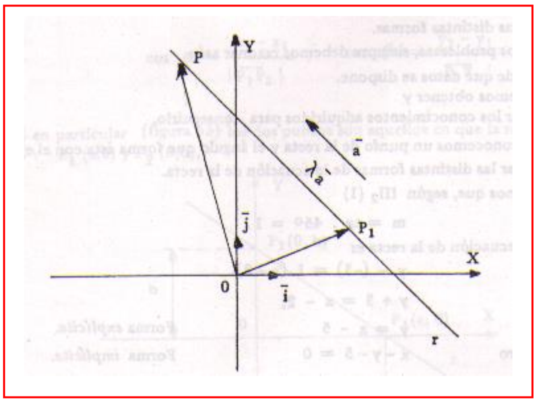
ECUACIÓN VECTORIAL Y CARTESIANA DE UNA RECTA EN $\Re^2$

a) Determinada por un punto y su dirección.



Consideramos la recta **r** en el plano, de la cual conocemos el punto P_1 y su dirección dada por el vector $\bar{a}$. Un punto genérico P puede obtenerse como la suma vectorial de $\overline{OP_1}$ más $\lambda\bar{a}$, o sea:

$$\overline{OP} = \overline{OP_1} + \lambda\bar{a}$$ Ecuación Vectorial Paramétrica de la Recta

Fijando una base en R^2 y expresando los vectores en coordenadas cartesianas:

$$\overline{OP} = x\bar{i} + y\bar{j}$$
$$\overline{OP_1} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$$
$$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j}$$

$$x\bar{i} + y\bar{j} = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j}) + \lambda(a_1\bar{i} + a_2\bar{j})$$

$$\boxed{x\bar{i} + y\bar{j} = (x_1 + \lambda a_1)\bar{i} + (y_1 + \lambda a_2)\bar{j}}$$

Ecuación vectorial paramétrica.

Si dos vectores son iguales sus componentes también lo son, entonces:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda a_1 \\ y = y_1 + \lambda a_2 \end{array}}$$

Ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta que pasa por un punto y tiene una dirección $\bar{a}$.

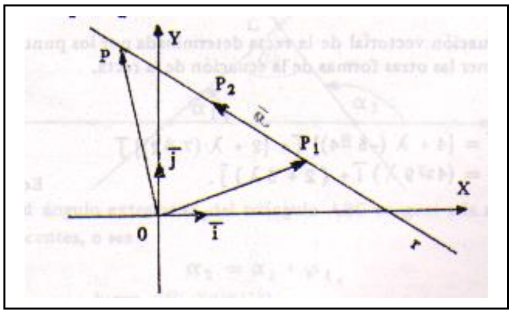
Despejando λ:

$$\lambda = \frac{x - x_1}{a_1} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{y - y_1}{a_2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2}}$$

Ecuación simétrica de la recta

b) Determinada por dos puntos:



$$\overline{OP} = \overline{OP_1} + \lambda \overline{P_1P_2}$$ Ecuación Vectorial

$$\overline{OP} = x\bar{i} + y\bar{j}$$
$$\overline{OP_1} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$$
$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}$$

$$x\bar{i} + y\bar{j} = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j}) + \lambda[(x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j})]$$

$$\boxed{x\bar{i} + y\bar{j} = [x_1 + \lambda(x_2 - x_1)]\bar{i} + [y_1 + \lambda(y_2 - y_1)]\bar{j}}$$

Ecuación vectorial

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}}$$

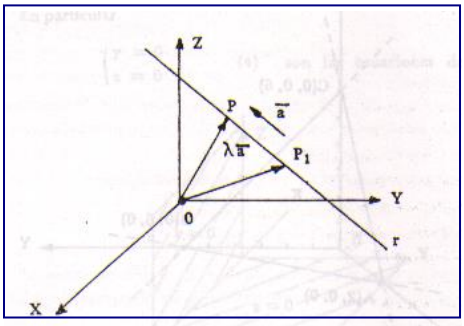
Ecuaciones cartesianas paramétricas

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Ecuación simétrica de la recta determinada por dos puntos.

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA EN EL ESPACIO.

a) Determinada por un punto y su dirección:



Se quiere encontrar la ecuación de la recta r_1 en el espacio.
Para hacerlo necesito dos datos: 1 punto y en vector "$\vec{a}$" paralelo a la dirección de la recta.

Datos: $\begin{cases} P_1(x_1, y_1, z_1) \\ \bar{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3) \end{cases}$

El vector $\vec{a}$ descompuesto en sus bases canónicas es:

$$\bar{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \quad \text{(expresión cartesiana del vector)}$$

El punto conocido es P_1 cuyas coordenadas son (x_1 , y_1 , z_1) y consideramos un punto genérico $P(x, y, z)$. Entonces, vectorialmente decimos que:

$$\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{P_1P}$$

Ahora vamos a expresar esta ecuación en función de las componentes cartesianas de los vectores:

$$\overline{OP_1} = (x_1 - 0)\,\hat{i} + (y_1 - 0)\,\hat{j} + (z_1 - 0)\,\hat{k} = x_1\,\hat{i} + y_1\,\hat{j} + z_1\,\hat{k}$$

$$\overline{P_1P} = \lambda.a = \lambda(a_1\,\hat{i} + a_2\,\hat{j} + a_3\,\hat{k})$$

λ es un escalar que no conozco.
El vector $\bar{a}$ es un vector libre que traslado a $\overline{P_1P}$ y que multiplico por λ para que coincida con el segmento $\overline{P_1P}$.

$$\overline{OP} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

Reemplazando en la 1º ecuación:

$$x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k} = x_1 + y_1\,\hat{j} + z_1\,\hat{k} + \lambda(a_1\,\hat{i} + a_2\,\hat{j} + a_3\,\hat{k})$$

Sumando las componentes homólogas:

$$\boxed{\underbrace{x\,\hat{i}}_{\text{Componente en el eje x}} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k} = \underbrace{(x_1 + \lambda a_1)}_{\text{Componente en el eje x}}\,i + (y_1 + a_2)\,\hat{j} + (z_1 + a_3)\,\hat{k}}$$

Ecuación vectorial paramétrica.

Vamos a hacer algo más:

$$\underbrace{x\bar{\mathbf{i}}}_{\substack{\text{Proyección sobre}\\ \text{el eje "x".}\\ \text{Magnitud}\\ \text{vectorial}}} = x_1\bar{\mathbf{i}} + \lambda a_1\bar{\mathbf{i}} = \underbrace{(x_1 + \lambda a_1)}_{\text{Magnitudvectorial}}\bar{\mathbf{i}}$$

$$\underbrace{y\bar{\mathbf{j}}}_{\substack{\text{Proyección sobre}\\ \text{el eje "y".}\\ \text{Magnitud}\\ \text{vectorial}}} = y_1\bar{\mathbf{j}} + \lambda a_2\bar{\mathbf{j}} = \underbrace{\left(y_1 + \lambda a_2\right)}_{\text{Magnitud vectorial}}\ \bar{\mathbf{j}}$$

$$\underbrace{z\bar{\mathbf{k}}}_{\substack{\text{Proyección sobre}\\ \text{el eje "z".}\\ \text{Magnitud}\\ \text{vectorial}}} = z_1\bar{\mathbf{k}} + \lambda a_3\bar{\mathbf{k}} = \underbrace{\left(z_1 + \lambda a_3\right)}_{\text{Magnitud vectorial}}\ \bar{\mathbf{k}}$$

Si dos vectores son iguales sus componentes (módulo de las proyecciones) también lo son. Entonces:

$$\boxed{x = x_1 + \lambda\, a_1 \quad , \quad y = y_1 + \lambda\, a_2 \quad , \quad z = z_1 + \lambda\, a_3}$$

Ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta en el espacio.

Con cualquier valor de λ, se va a obtener un punto de coordenada (x, y, z) perteneciente a la recta .

Las ecuaciones cartesianas paramétricas están dadas en función de un parámetro, en este caso λ. Si de las ecuaciones despejamos λ se obtiene:

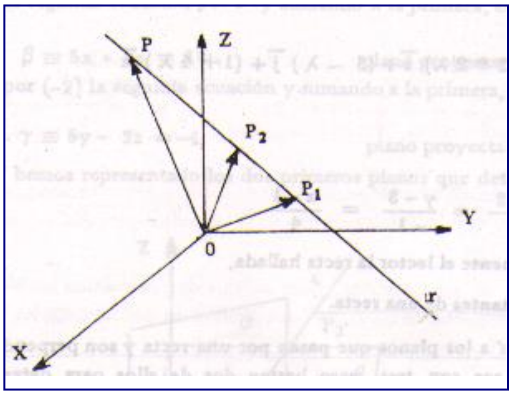
$$\lambda = \boxed{\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}}$$

Ecuación simétrica de la recta.

$$a_1, a_2, a_3 = N^{o}\ \textit{Directores de la recta}$$

b) Determinada por dos puntos:

Ahora, si tenemos como dato dos puntos, P_1 y P_2 , se hace el mismo análisis vectorial y la ecuación de la recta está dada por:



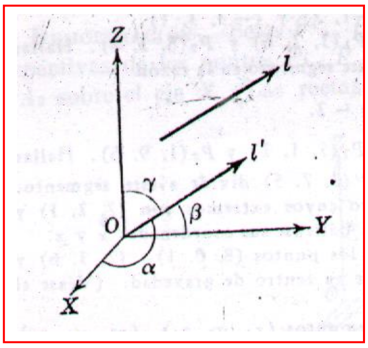
$$\boxed{\underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}_{A} = \underbrace{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}_{B} = \underbrace{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}_{C}}$$

N° Directores de la recta.

Ahora bien, qué son los números directores? ¿Cómo se obtienen? ¿Es la única manera de indicar la dirección de una recta en el espacio?
A continuación trataremos de dar respuesta a estas preguntas.

COSENOS DIRECTORES

La dirección de una recta cualquiera en el espacio se determina por los ángulos que forma con los ejes coordenados.
Sea l una recta que no pasa por "O" y l' una recta que pasando por O sea // a l y del mismo sentido.
Entonces los ángulos α, β y γ formados por las partes positivas de los ejes *x*, *y* y *z* y la recta l' se llaman ***ángulos directores*** de la recta dirigida l.



Un ángulo director puede tener cualquier valor entre 0º y 180º.
Si la recta l es de sentido contrario, sus ángulos directos son ángulos suplementarios respectivos.
Para resolver problemas es más conveniente utilizar los cosenos de los ángulos directores en lugar de los ángulos directores. A estos cosenos se los llama ***cosenos directores*** de la recta dirigida l .

Como *cos* (π-θ) = - *cos* θ, si l es de sentido opuesto sus cosenos directores serán:
– *cos* α, –*cos* β y – *cos* γ. Por lo tanto ***cualquier recta en el espacio no dirigida, tiene dos sistemas de cosenos directores, iguales en valor absoluto pero de signo contrario.***

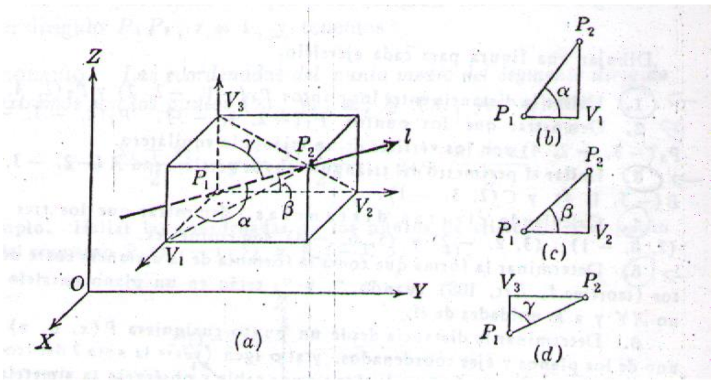


Fig. 9

Vamos a trabajar con la figura 9 para deducir los cosenos directores.

$$\overline{P_1V_1} = x_2 - x_1$$
$$\overline{P_1V_2} = y_2 - y_1$$
$$\overline{P_1V_3} = z_2 - z_1$$
$$\overline{P_1P_2} = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} \quad ; \qquad x_2 - x_1 = d\cdot\cos\alpha \qquad \text{(i)}$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d} = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} \quad ; \qquad y_2 - y_1 = d\cdot\cos\beta \qquad \text{(ii)}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d} = \frac{(z_2 - z_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} \quad ; \qquad z_2 - z_1 = d\cdot\cos\gamma \qquad \text{(iii)}$$

Observar: que "d" es un número siempre positivo y que el signo de cada coseno se determina por el signo del numerador que es la proyección de $\overline{P_1P_2}$ (segmento dirigido) sobre el correspondiente eje coordenado.

Las ecuaciones (i), (ii) y (iii) nos permiten ver que los lados del paralelogramo son directamente proporcionales a los cosenos directores. Entonces, en vez de trabajar con los cosenos directores trabajamos con $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ y con $z_2 - z_1$ que es más sencillo. A estos números se les da el nombre de *números directores*, que de manera general se los indica como $[a, b, c]$.

Los números directores no son únicos, porque puedo trabajar con P_1, con P_2 o con cualquier otro que esté sobre l, por lo tanto tenemos infinitas ternas que indican la misma dirección, pero todos son ***proporcionales.***

Por ejemplo, la dirección de la recta l puede estar indicada por $[2, 3, -5]$ o por $[4, 6, -10]$ o por $[-2, -3, 5]$, etc. Todos son proporcionales.

Los números directores pueden ser cero uno o dos a la vez, pero no los tres simultáneamente. Es decir l no puede tener por números directores la terna $[0, 0, 0]$ porque significa (teniendo presente la figura del paralelogramo) que estamos uniendo el origen con sí mismo. Es un punto, y por un punto pasan infinitas rectas, entonces es indeterminado.