UNIDAD I - MATRICES

Definición

Una matriz A de *mxn* es un arreglo de elementos dispuestos en *m* filas y *n* columnas. Cada elemento ocupa una posición, indicada por la fila *i y* la columna *j.* La cantidad de filas y de columnas se denomina **orden o dimensión** de la matriz y se indica *mxn*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Siendo A una matriz de orden 2x3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Identificamos por ejemplo a_{11}=2, a_{13} = 7 y a_{23}=3. ¿Qué puede decir del elemento a_{32}?

Ejemplo 2

Escribe una matriz A de orden 5x4 con “1” en las posiciones a_{13}, a_{23}, a_{55}, a_{42}, a_{33}, y a_{52}. Coloca “0” en las demás posiciones.

Tipos de Matrices

Matriz Fila o Vector Fila: es una matriz de dimensión *1xn*, es decir, solo tiene una fila.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz Columna o Vector Columna: es una matriz de dimensión *mx1,* es decir, solo tiene una columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Cuadrada: matriz donde *m=n*, es decir tiene el mismo número de filas y de columnas. En caso contrario la matriz es **rectangular**. Una matriz cuadrada tiene dos diagonales, la principal(rojo) y la secundaria (azul):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz Nula: Matriz *mxn* en la que todos sus elementos son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Identidad: matriz cuadrada que contiene todos 1 en la diagonal principal y 0 en las demás posiciones. Se indica I.

$$\mathrm{I}^{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad **I** es para la multiplicación matricial lo que el número 1 es para la multiplicación de los números reales; es decir, dadas A^{nxn} e $\mathbf{I}^{nxn}$, entonces

$$A.\mathbf{I} = \mathbf{I}.A = A$$

Matriz Transpuesta: sea A una matriz ***mxn,*** la transpuesta de A, que se indica A^T, es una matriz ***nxm*** en la que las columnas de A se convierten en las filas de A^T, y las filas de A en las columnas de A^T.

Ejemplo

$$\boldsymbol{A^{3x2}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 9 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A^{T\,2x3}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la Transpuesta

1. $(A^T)^T=A$
2. $(A.B)^T= B^T.A^T$
3. $(A+B)^T=A^T + B^T$
4. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$, donde α es un número real.

Matriz Simétrica: matriz cuadrada en la que $A^T=A$. Es decir, las columnas de A son también las filas de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = B$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} = C$$

Matriz Triangular Superior: matriz que contiene ceros por debajo de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior: matriz que contiene ceros por encima de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Operaciones con Matrices

- **Suma**

  Para sumar dos matrices, estas deben ser del mismo orden. Se suman entre si los elementos que ocupan la misma posición en la matriz.

En forma genérica, dadas dos matrices A y B de orden *mxn*, se define la suma A+B=C como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} = a_{11} + b_{11} & \dots & c_{1n} = a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} = a_{m1} + b_{m1} & \dots & c_{mn} = a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

La nueva matriz C también es de orden *mxn.*

Ejemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la Suma

1. (A+B)+C = A+(B+C) (Asociativa)
2. A + $\bar{0}$ = $\bar{0}$ + A (Elemento Neutro)
3. A + (-A) = (-A) + A = $\bar{0}$ (Inverso Aditivo)
4. A + B = B + A (Conmutativa)

- **Producto de un escalar α por una matriz**

  Sea A una matriz *mxn* y **α** un escalar, se define el producto entre ambos como:

$$\alpha A = \alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha = -2} \quad \boldsymbol{\alpha A = -2.}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -22 & -8 \end{pmatrix}$$

Propiedades del Producto de un escalar por una matriz

1. (α+β).A = α.A + β.A (Distributiva respecto a la suma de escalares)
2. α(A+B) = α.A + α.B (Distributiva respecto a la suma de matrices)
3. α.(β.A) = (α.β).A (Asociativa)

- **Producto matricial**

El producto entre dos matrices A y B es posible si A^{mxp} y B^{pxn} (es decir la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B).

Dadas las matrices A^{mxp} y B^{pxn} se llama producto A.B a la matriz C^{mxn} en la que el elemento c_{ij} se obtiene al sumar los productos de todos los elementos de la fila i de A por todos los elementos de la columna j de B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots . + a_{ip}b_{pj} = \sum_{h=1}^{p} a_{ih}b_{hj}$$

Ejemplo

$$A^{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B^{3x3} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

El producto está definido porque la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B.

La matriz que resulte del producto será de orden 2x3 porque toma la cantidad de filas de A y la cantidad de columnas de B. Se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 4 & 5 & 0 \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 0 & -2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 7 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ -1 & 0 & 3 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{array}$$

c_{11}= 2x4 + 4x1 + 7x0 =12 c_{12}= 2x5 + 4x2 + 7x(-2) = 4 c_{13}= 2x0 + 4x1 + 7x3 = 25
c_{21}= -1x4 + 0x1 + 3x0 = -4 c_{22}= -1x4 + 0x2 + 3x(-2) = -11 c_{23}= -1x0 + 0x1 + 3x3 = 9

Entonces $C = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 25 \\ -4 & -11 & 9 \end{pmatrix}$

Visualiza el video sobre Multiplicación matricial para despejar dudas.

Propiedades del producto entre matrices

1. $(A.B).C = A.(B.C)$ Asociativa
2. $C.(A+B) = C.A + C.B$ Distributiva a izquierda
3. $(A+B).C = A.C + B.C$ Distributiva a derecha
4. $A.I = I.A = A,$ donde I es la matriz Identidad, que es el Elemento Neutro del Producto matricial
5. $A.B \neq B.A$, en general el producto matricial **no es conmutativo.**
6. $A.\overline{0} = \overline{0}.A = \overline{0}$
7. Existen matrices no nulas $A \neq \overline{0}\ y\ B \neq \overline{0}$ tal que $A.B = \overline{0}$.

(A diferencia de los números reales, donde para que un producto dé cero uno de los factores debe ser cero)

Matriz Escalonada

Se denomina así a la matriz donde:

1. El primer elemento no nulo de una fila es un 1, y se denomina pivote.
2. Las filas, si las hubiese, que tienen todos sus elementos nulos se agrupan en la parte inferior de la matriz.
3. En dos filas consecutivas, el 1 principal o pivote de la fila inferior aparece más hacia la derecha del primer 1 de la fila superior.

   El nombre "escalonada" proviene de que la matriz parece tener una escalera construida sobre ceros.

Matriz Escalonada Reducida

Es una Matriz Escalonada que en las columnas donde aparece el 1 principal posee 0 en las demás posiciones.

Ejemplos

Dadas las siguientes matrices identificar cuales están en forma escalonada o escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales

Las operaciones elementales se realizan sobre una matriz con el objetivo de llevarla a la forma escalonada o escalonada reducida.

Se definen tres operaciones elementales sobre las matrices:

1. Intercambiar el orden de las filas.
2. Multiplicar una fila por cualquier escalar no nulo.
3. Sumar a una fila otra fila cualquiera previamente multiplicada por un escalar no nulo.

Eliminación de Gauss Jordán

El método de eliminación o reducción de Gauss Jordan agiliza el uso de operaciones elementales para escalonar o reducir matrices.

Ejemplo

Dada la matriz A llevarla a la forma escalonada reducida aplicando el método de Gauss Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Visualiza el video "Reducir una matriz mediante Gauss Jordan" para comprender mejor este tema

Rango de una matriz: denominamos rango de una matriz a la cantidad de filas no nulas que quedan luego de reducirla con Gauss Jordan (más adelante introduciremos un concepto más específico de rango)

Matriz Inversa

Para algunas matrices cuadradas se puede encontrar otra matriz denominada inversa (representada por A^{-1}), tal que se cumpla:

$$\mathbf{A.A^{-1} = A^{-1}. A = I}$$

Donde $\mathbf{I}$ es la matriz Identidad.

La inversa es similar al reciproco en el álgebra de los números reales. Multiplicar un numero b por su reciproco $1/b$ da como resultado 1. En el algebra matricial, multiplicar una matriz por su inversa da como resultado la **matriz identidad**.

Observaciones importantes acerca de la inversa:

1. Para que una matriz tenga inversa ésta debe ser cuadrada. Pero no todas las matrices cuadradas tienen una inversa.
2. La inversa de A también será cuadrada y tendrá la misma dimensión que A.
3. Si A y B tienen inversa entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}. A^{-1}$

4. Si A es invertible, entonces A^T es invertible y $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$, (es decir la inversa de la transpuesta es igual a la transpuesta de la inversa).
5. $(A^{-1})^{-1} = A$, es decir, la inversa de la matriz inversa es A.
6. Si k es un número, $(k.A)^{-1} = k^{-1}. A^{-1} = \frac{1}{k}. A^{-1}$

Cálculo de la inversa de A

Un método para encontrar A^{-1} se basa en el procedimiento de reducción de Gauss Jordan visto anteriormente:

1. Aumentar la matriz A^{nxn} con una matriz identidad $\mathbf{I}^{nxn}$ dando como resultado

$$A \mid \mathbf{I}$$

2. Aplicar Gauss Jordan para trasformar A en una matriz Identidad, quedando A^{-1} a la derecha de la línea vertical

$$\mathbf{I} \mid A^{-1}$$

Si la matriz A es singular (es decir, no tiene inversa), no será posible trasformar A en una matriz identidad.

Visualiza el video "Calcular la inversa de una matriz usando Gauss Jordan" para comprender mejor este tema

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$