18

1) Dada la siguiente curva $g(T) = (T+2, T^2-1, 2T)$

a) halla la ecuación paramétrica y cartesiana de la recta tangente a la curva en el punto $P(3,0,2)$

b) Define recta tangente

a) $g(T) = (T+2, \; T^2-1, \; 2T)$

Ecuación paramétrica de la función

$$\left.\begin{aligned} x &= T+2 \\ y &= T^2-1 \\ z &= 2T \end{aligned}\right\} \text{Cartesiana}$$

Buscamos el valor de T $\quad g(T) = P$

$T+2 = 3 \qquad T^2-1=0 \qquad 2T = 2$

$T = 3-2 \qquad T = \sqrt{1} \qquad T = \frac{2}{2}$

$T = 1 \qquad T = \pm 1 \qquad T = 1$

La recta tangente a una trayectoria es la recta que contiene el vector tangente

$r = g(T_0) + T(g'T)$ Ec paramétrica

$g(T_0) = (1+2, \; 1^2-1, \; 2.1) = 3, 0, 2)$

$g'(T) = (1, \; 2T, \; 2)$

$g'(T_0) = (1, 2, 2)$

Escaneado con CamScanner

$r = (3, 0, 2) + T(1, 2, 2)$

$r = (3 + T, 2T, 2 + 2T)$ Ec de la recta tangente paramétrica

$x = 3 + T$ $\quad y = 2T$ $\quad z = 2 + 2T$

$x - 3 = T$ $\quad \frac{y}{2} = T$ $\quad \frac{z - 2}{2} = T$

$x - 3, \frac{y}{2}, \frac{z - 2}{2}$ Ec simétrica de la recta tangente

Pide la cartesiana.

(2) El movimiento de una particula esta dado por
$g(t) = (5t, 6 - 4t^2)$.

a) Encuentre ec cartesiana y realize la grafica
b) calcula y grafica vector posición, velocidad y aceleración $t = 1$

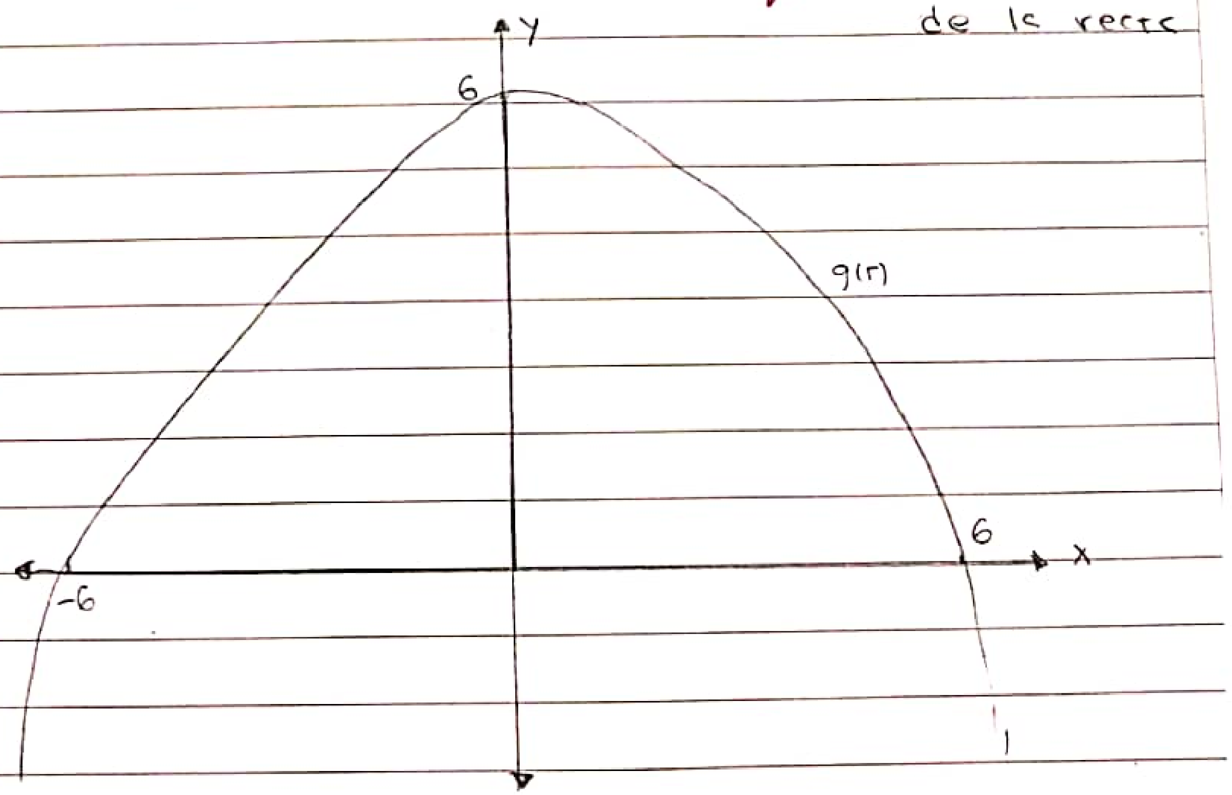
a) $g(t) = (5t, 6 - 4t^2)$

Para hallar la ecuación cartesiana igualo la componente en x de la función y despejo T. Lo mismo para la componente y

$x = 5t$ $\quad$ $y = 6 - 4t^2$

$\boxed{\frac{x}{5} = t}$ $\quad$ $y = 6 - 4\left(\frac{x}{5}\right)^2$

Reemplazo el valor para despejar y $\quad$ $\boxed{y = 6 - \frac{4x^2}{25}}$ Ecuación cartesiana de la recta



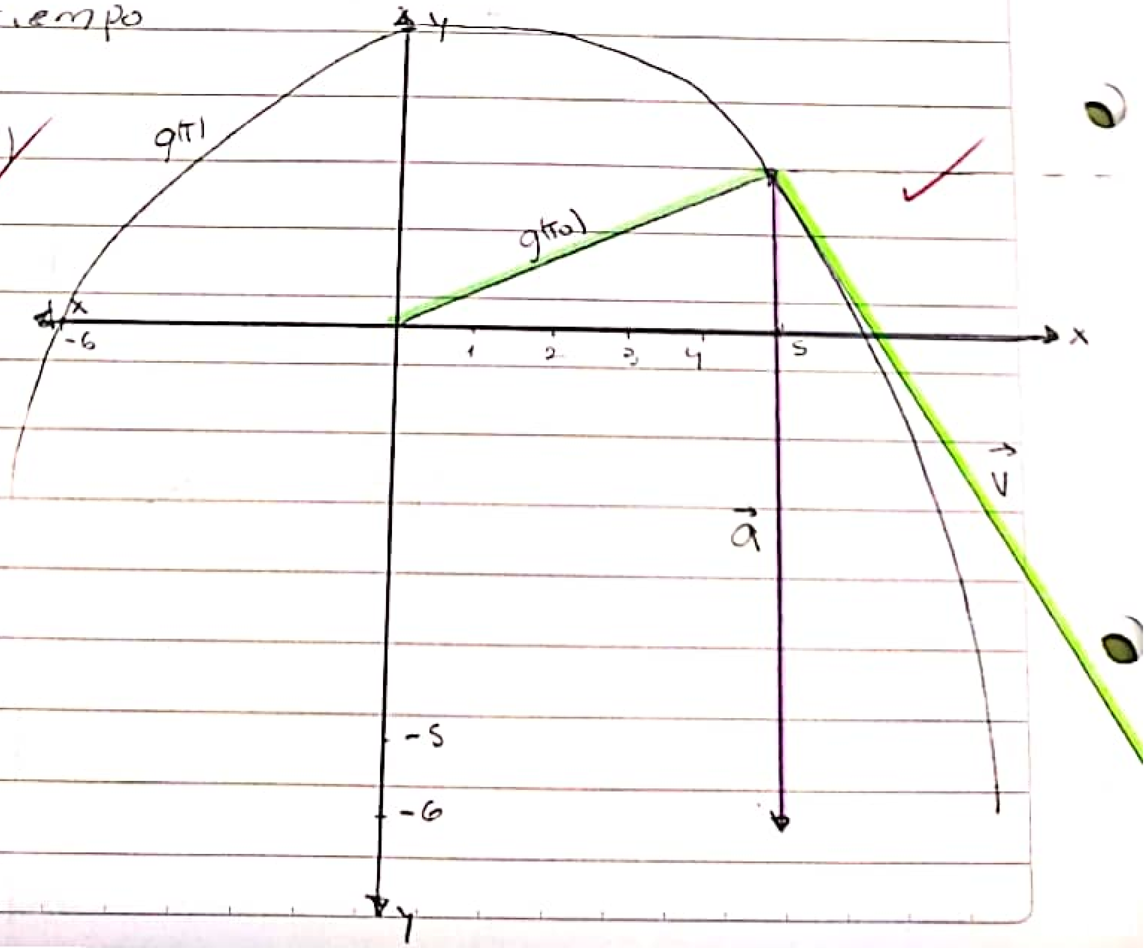
b) $g(T) = (5T,\ 6-4T^2)$ $T = 1$

El vector velocidad o vector tangente es el que nos indica el cambio o variación de posición con respecto a un tiempo. Es la derivada de la función

$\vec{V} = g'(T)$
$\vec{V} = (5, -8T)$
$\vec{V}(T_0) = (5, -8)$

El vector posición es la función evaluada en el punto. Es el vector que le da el origen a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$
$g(T_0) = 5.(1),\ 6-4(1)^2$
$g(T_0) = (5, 2)$

El vector aceleración es la doble derivada de la función ya que es el cambio o variación de la velocidad con respecto al tiempo
$\vec{a} = g''(T)$
$\vec{a} = (0, -8)$



158

(3) $g(T) = (5T,\ 6-4T^2)$ calcula la componente escalar y vectorial de la aceleración tangencial $T=1$

Componente escalar de aceleración tangencial es la variación o cambio de la rapidez con respecto al tiempo

$$a_T = |g'(T)|'$$

$g'(T) = (5, -8T) \rightarrow g'(T_0) = (5, -8)$

$|g'(T)| = \sqrt{5^2 + (-8T)^2} \rightarrow |g'T_0|' = \sqrt{89}$

$|g'(T)|' = \dfrac{64T}{\sqrt{25+64x^2}} = \dfrac{64\sqrt{89}}{89} \approx 6{,}78$

$$\boxed{a_T = \frac{64\sqrt{89}}{89}}$$

$\hat{\tau} = \dfrac{1}{|g'T|} \cdot g'T$ Tao es el versor que le dara dirección a el vector $\vec{a_T}$ Es la dirección del movimiento

$\hat{\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{89}} \cdot (5, -8)$

$\hat{\tau} = \left(\dfrac{5\sqrt{89}}{89}, \dfrac{-8\sqrt{89}}{89}\right)$

$\vec{a_T} = \dfrac{64\sqrt{89}}{89} \cdot \left(\dfrac{5\sqrt{89}}{89}, \dfrac{-8\sqrt{89}}{89}\right)$

$$\boxed{\vec{a_T} = \left(\frac{320}{89}, \frac{-512}{89}\right)}$$

Triunfante

IDP

④ Halla la longitud de la curva definida por $g(t)$:

$g(t) = (3t - t^3 \ , \ 3t^2)$ $P(0,0)$ $P(-2,12)$

La longitud de curva se calcula siempre que sea lisa (que no contenga picos), o sea continua en todo el intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b |g'(t)| \, dt$$

Encontremos los valores de t

$3t - t^3 = 0$

$3t = \frac{t^3}{t}$

$3 = t^2$

$t = \sqrt{3}$

$3t^2 = 0$

$t^2 = 0$

$\boxed{t = 0} = a$

$3t - t^3 = -2$

$3t + 2 = t^3$

$3 + 2 = \frac{t^{3\,2}}{t}$

$\sqrt{5} = t$

$3t^2 = 12$

$t = \sqrt{12} = \pm 2.$

$\boxed{t = 2} = b$ → ¿Por qué $+2$ y no -2?

Compruebo el valor de $t = 2$

$g(t) = (3 \cdot 2 - 2^3 \ , \ 3 \cdot 2^2) = (-2 \ , \ 12)$

$g'(t) = (3 - 3t^2 \ , \ 6t)$

$|g'(t)| = \sqrt{(3 - 3t^2)^2 + (6t)^2} = 3 + 3t^2$

$$\int_0^2 3 + 3t^2 \, dt$$

$$\int_0^2 3 \, dt + \int_0^2 3t^2 \, dt$$

$3t + t^3 \Big|_0^2$

$= 3 \cdot 2 + 2^3 - 3 \cdot 0 + 0^3$

$\boxed{= 14}$

$\boxed{Lc = 14}$