HOJA N°

FECHA

Primer Parcial AM1

Funciones

Valor Absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades

9_ $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$ → Propiedad completa

10_ $|x| > b \iff x \leq -b \wedge x \geq b$

Entorno: $E(a,d)$ siendo $a =$ centro $\wedge$ $d =$ radio

Entorno reducido: $E'(a, \delta)$ $\left(\frac{a+b}{2}\right) =$ punto medio

Intervalos abiertos

Paridad

función par: $f(x) = f(-x)$ [simetria con respecto al eje y]

función Impar: $f(-x) = -f(x)$ [simetria respecto al origen]

Definición de función

$f: A \to B / y = f(x)$

Dominio: Todo valor que puede tomas "x", y que haga que la regla esté definida.

Imagen Todo valor que puede tomas "y" en función de "x"

Una función se puede representas de forma
- Verbal
- Númerica
- Visual
- Algebraica

Formas de las funciones (ver hoja de funciones)

NOTA

Operaciones con funciones (Álgebra de funciones)

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\quad$ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\quad$ $D_f \cap D_g$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ $\quad$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,;\ g(x) \neq 0$ $\quad$ *para todas las operaciones*

Función compuesta

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ *Tener en cuenta que $R_g \subseteq D_f$* [Si no se cumple hacer restricción]

Función Inversa

$f: A \to B \Rightarrow f^{-1}: B \to A$! (Para que una función admita inversa, debe ser biyectiva)*

Para calcularla, despejamos x de $f(x)$ y reemplazamos x por y

Para ser biyectiva, tiene que haber un solo valor de x para cada valor de y*

Caso particular de composición

Ej.- $2x+1 = f^{-1}(x) \to 2y+1 = x$

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

$f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = x$

$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}[f(x)] = x$

Se debe cumplir la relación "uno a uno"

Límite

Definición

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

Límites Laterales

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

si $a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

si $a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

NOTA

HOJA N°

FECHA

Para que el límite exista: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$

Teoremas

1- $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] \rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [c f(x)] \rightarrow c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] \rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ *si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$*

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n \rightarrow \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ *Siendo n Entero positivo*

7. $\lim_{x \to a} c = c$ 8. $\lim_{x \to a} x = a$ 9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

Propiedad de sustitución directa

Sólo si f(x) es un polinomio o función racional y $a \in D_f$

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Operaciones con Infinitos

* $\frac{K}{\infty} = 0$; * $\frac{K}{0} = \infty$; * $K^{\infty} = 0$ $(0 < K < 1)$; * $K^{-\infty} = 0$ $(K > 1)$

* $\infty^K = \infty$ $(K > 0)$; * $\infty^K = 0$ $(K < 0)$

NOTA

Casos de Indeterminación

1er caso $\left[\frac{0}{0}\right]$ → Casos de factoreo, racionalización, propiedades trigonométricas

2do caso $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ → Se divide a los dos polinomios por la variable de mayor grado

Límite de funciones trigonométricas → Limites Notables

① $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ ② $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ ③ $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

④ $\lim_{x\to 0} \frac{e^{kx}-1}{x} = k$ ⑤ $\lim_{x\to 0} \frac{a^{kx}-1}{x} = k.\ln a$ ⑥ $\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = 1$

⑦ $\lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} = e$ ⑧ $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1$ ⑨ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

[Reciproca → $\frac{\text{sen } x}{x} = \frac{x}{\text{sen } x}$]

Asintotas

- Asintota vertical → $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

La recta $x = A$ es A.V

- Asintota horizontal → $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

La recta $y = L$ es A.H

- Asintota Oblicua → Cuando el grado del numerador es > grado del denominador por 1 unidad

* Pendiente → $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ * Ordenada → $\lim_{x\to\infty} f(x) - mx$

La recta $y = ax + b$ es A.O

HOJA N°

FECHA

Continuidad de una función en un punto $\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$

$$f \text{ es continua} \iff \left.\begin{array}{l} 1°)\ \exists\, f(a) \\ 2°)\ \lim_{x \to a} f(x) = \exists \\ 3°)\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \end{array}\right\} \text{Obligatoriamente}^{*}$$

Tipos de discontinuidad

* Discontinuidad evitable: $\exists$ límite

* Discontinuidad esencial: $\nexists$ límite

  - $f(a) = \nexists$; $\lim_{x \to a^-} f(x) = \exists \wedge \lim_{x \to a^+} f(x) = \exists \left(\lim_{x \to a^-} \neq \lim_{x \to a^+}\right) \rightarrow$ SALTO AL INFINITO

  - $f(a) = \exists$; $\lim_{x \to a^-} \neq \lim_{x \to a^+} \longrightarrow$ SALTO FINITO

Límites al infinito $\left(\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}\right)$

- Si Grado $P(x) >$ Grado $Q(x) = \infty$
- Si Grado $P(x) <$ Grado $Q(x) = 0$
- Si Grado $P(x) =$ Grado $Q(x) = \frac{a}{b}$

Límite Irracional

- Si hay raíz única $\left(\frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}\right) \rightarrow$ multiplicar num. y denom. por la raíz

- Si hay binomio $\left(\frac{\sqrt{P(x)} - \sqrt{a}}{Q(x)}\right) \rightarrow$ racionalizar

NOTA

Continuidad de una función en:

* Intervalo abierto → f es continua en $(a,b) \Leftrightarrow$ es continua en todo punto dentro del Intervalo

* Intervalo cerrado → f es continua en $[a,b] \Leftrightarrow$ es continua en (a,b) y $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Identidades Trigonométricas (fundamentales)

① $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ ② $tg^2 x + 1 = \sec^2 x$

Casos de Factoreo

Factor Común → $a^2 + ba + cba = a.(a + b + cb)$

Trinomio cuadrado perfecto → $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
→ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Diferencia de cuadrados → $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$

Trinomio simple perfecto → $a^2 + 2a - 15 = (a+5)(a-3)$

Binomio cubo perfecto → $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
→ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Derivadas

Definición de derivada → $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
→ $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Recta tangente (pendiente) → $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $\left(m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \,/\, y = m(x - x_1) + y_1 \right)$

Forma de la recta tangente: $y = mx + b$

NOTA

HOJA N°

FECHA

Caracteristicas de funciones NO derivables

- Todas aquellas funciones que terminan en punta no son derivables en la punta
- Toda aquella función discontinua no es derivable EN EL PUNTO DISCONTINUO

[La continuidad no me garantiza la derivabilidad, pero la derivabilidad me garantiza que sea continua]

Derivadas Laterales

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to \text{Por derecha}$$

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \longrightarrow \text{Por izquierda}$$

Si $f'(a^+) = f'(a^-) \wedge$ son finitos $\Rightarrow \exists f'(a)$

Puntos

Si en el punto la recta tg = ∞ (vertical) ∧ el signo de la pendiente por izq = por derecha
↓ entonces
Punto de Inflexión

Si el punto que indetermina la función derivada me cambia el signo de la pendiente
↓
Punto Cuspidal

Si el punto pertenece a la función original pero me anula la derivada 1ra
↓
Punto Singular

NOTA

Aproximación Lineal → Cuanto se puede aproximar recta tg a $f(x)$

↳ $\boxed{f(x) \cong f'(a).(x-a) + f(a)}$

Ecuación de la recta tangente → $y = f(a) + f'(a).(x-a)$

Linealización

$L(x) = f(a) + f'(a).(x-a)$

Incremento

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

Diferencial

$dy = f'(x).\,dx$ o $dy = f'(x).\Delta x$

Polinomio de Taylor

$$P_n(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

$2! = 2.1$
$3! = 3.2.1$

Polinomio de Maclaurin

$$P_n(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}.x^3 + \ldots + \frac{f^{n}(0)}{n!}.x^n$$