COMBINACIONES

PERMUTACIONES

CONTEO

VALENTINA BONILLA BEDOYA

Código: 1087561428

INTRODUCCIÓN A LA INFORMÁTICA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

LA VIRGINIA/RISARALDA

Tabla De Contenido

1. INTRODUCCIÓN

Normalmente usamos la palabra "combinación" descuidadamente, sin pensar en si el orden de las cosas es importante. En otras palabras: "Mi ensalada de frutas es una combinación de manzanas, uvas y bananas": no importa en qué orden pusimos las frutas, podría ser "bananas, uvas y manzanas" o "uvas, manzanas y bananas", es la misma ensalada. "La combinación de la cerradura es 472": ahora sí importa el orden. "724" no funcionaría, ni "247". Tiene que ser exactamente 4-7-2. Así que en matemáticas usamos un lenguaje más preciso: Si el orden no importa, es una combinación. Si el orden sí importa es una permutación.

Algunas situaciones de probabilidad implican múltiples eventos. Cuando uno de los eventos afecta a otros, se llaman eventos dependientes. Por ejemplo, cuando objetos son escogidos de una lista o grupo y no son devueltos, la primera elección reduce las opciones para futuras elecciones.

Existen dos maneras de ordenar o combinar resultados de eventos dependientes. Las permutaciones son agrupaciones en las que importa el orden de los objetos. Las combinaciones son agrupaciones en las que el contenido importa pero el orden no.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo General

- Conocer los conceptos claros y precisos sobre que son las permutaciones, que son las combinaciones y el concepto de conteo.

2.2.Objetivos Específicos:

- Entender la diferencia entre combinaciones y permutaciones.
- Poner en práctica los conceptos aprendidos.
- Prepararnos para el examen final.
- Aprender a investigar y recolectar información necesaria.
- Usar el Principio Fundamental de Conteo para calcular permutaciones y combinaciones.

3. COMBINACIONES

Una combinación es un arreglo donde el orden NO es importante. La notación para las combinaciones es C(n,r) que es la cantidad de combinaciones de “n” elementos seleccionados, “r” a la vez. Es igual a la cantidad de permutaciones de “n” elementos tomados “r” a la vez dividido por “r” factorial. Esto sería P(n,r)/r! en notación matemática.

Ejemplo: Si se seleccionan cinco cartas de un grupo de nueve, ¿cuantas combinaciones de cinco cartas habría?

La cantidad de combinaciones posibles sería: P(9,5)/5! = (9*8*7*6*5)/(5*4*3*2*1) = 126 combinaciones posibles.

La combinatoria es una rama de la matemática perteneciente al área de matemáticas discretas que estudia la enumeración, construcción y existencia de propiedades de configuraciones que satisfacen ciertas condiciones establecidas. Además, estudia las ordenaciones o agrupaciones de un determinado número de elementos.

Los aspectos de la combinatoria incluyen contar las estructuras de un tipo y tamaño dado (combinatorias enumerativas), decidir cuándo pueden cumplirse ciertos criterios y construir y analizar objetos que cumplan los criterios encontrar objetos "más grandes", "más pequeños" u "óptimos" (combinatoria extrema y optimización combinatoria), estudiar estructuras combinatorias surgidas en un contexto algebraico, o aplicar técnicas algebraicas a problemas combinatorios (combinatoria algebraica).

Los problemas combinatorios surgen en muchas áreas de la matemática pura, especialmente en álgebra, teoría de probabilidades, topología y geometría, y la combinatoria también tiene muchas aplicaciones en la optimización matemática.

Muchas cuestiones combinatoriales han sido históricamente consideradas aisladamente, dando una solución adecuada a un problema que surge en algún contexto matemático. A finales del siglo XX, sin embargo, se desarrollaron métodos teóricos poderosos y generales, convirtiendo la combinatoria en una rama independiente de las matemáticas por derecho propio. Una de las partes más antiguas y accesibles de la combinatoria es la teoría de grafos, que también tiene numerosas conexiones naturales a otras áreas. La combinatoria se utiliza con frecuencia en informática para obtener fórmulas y estimaciones en el análisis de algoritmos.

- Combinaciones Sin Repetición

Dado un conjunto de n elementos distinguibles, se llama combinación sin repetición de p elementos, con p < n, elegidos entre los n, a cualquier subconjunto de p elementos distintos del conjunto.

El número de combinaciones sin repetición de p elementos elegidos entre los n se nota habitualmente

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ejemplo

Un estudiante debe responder a seis de las diez preguntas de las que consta un examen, ¿entre cuántos grupos de preguntas distintas puede elegir?

Se trata de determinar el número de grupos distintos de seis preguntas escogidas del conjunto de las diez, sabiendo que dos grupos con las mismas preguntas, aún en distinto orden, coinciden. En este caso, el número de grupos de preguntas distintos entre los que se puede elegir es

$$C_{10}^6 = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!4!} = 210$$

- Combinaciones Con Repetición

Dado un conjunto de n elementos distinguibles, se llama combinación con repetición de p elementos escogidos entre los n a cualquier colección de p elementos del conjunto, con repeticiones eventuales de algunos de ellos.

El número de combinaciones con repetición de p elementos elegidos entre los n se nota habitualmente

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Ejemplo

¿De cuántas formas pueden elegirse simultáneamente tres bolas de una urna en la que hay al menos tres bolas blancas y tres negras indistinguibles?

Cada grupo es una disposición no ordenada de tres colores formada por los colores blanco y negro con repetición de alguno de ellos. Por tanto, se trata de determinar el número de grupos de tres elementos no ordenados. En este caso, el número de formas distintas de elegir simultáneamente tres bolas del conjunto es

$$CR_2^3 = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

4. PERMUTACIONES

Una permutación es una combinación en donde el orden es importante. La notación para permutaciones es P(n,r) que es la cantidad de permutaciones de “n” elementos si solamente se seleccionan “r”.

Ejemplo: Si nueve estudiantes toman un examen y todos obtienen diferente calificación, cualquier alumno podría alcanzar la calificación más alta. La segunda calificación más alta podría ser obtenida por uno de los 8 restantes. La tercera calificación podría ser obtenida por uno de los 7 restantes.

La cantidad de permutaciones posibles sería: P(9,3) = 9*8*7 = 504 combinaciones posibles de las tres calificaciones más altas.

Hay dos tipos de permutaciones:

- Se permite repetir: como la cerradura de arriba, podría ser "333".
- Sin repetición: por ejemplo los tres primeros en una carrera. No puedes quedar primero y segundo a la vez.

1. Permutaciones con repetición

Son las más fáciles de calcular. Si tienes n cosas para elegir y eliges r de ellas, las permutaciones posibles son:

$n \times n \times ...$ (r veces) $= n^r$

(Porque hay n posibilidades para la primera elección, DESPUÉS hay n posibilidades para la segunda elección, y así.)

Por ejemplo en la cerradura de arriba, hay 10 números para elegir (0,1,...,9) y eliges 3 de ellos:

$10 \times 10 \times ...$ (3 veces) $= 10^3 = 1000$ permutaciones

Así que la fórmula es simplemente:

n^r, donde n es el número de cosas que puedes elegir, y eliges r de ellas (Se puede repetir, el orden importa).

2. Permutaciones sin repetición

En este caso, se reduce el número de opciones en cada paso.

Por ejemplo, ¿cómo podrías ordenar 16 bolas de billar?

Después de elegir por ejemplo la "14" no puedes elegirla otra vez.

Así que tu primera elección tiene 16 posibilidades, y tu siguiente elección tiene 15 posibilidades, después 14, 13, etc. Y el total de permutaciones sería:

$16 \times 15 \times 14 \times 13... = 20.922,789,888,000$

Pero a lo mejor no quieres elegirlas todas, sólo 3 de ellas, así que sería solamente:

$16 \times 15 \times 14 = 3360$

Es decir, hay 3,360 maneras diferentes de elegir 3 bolas de billar de entre 16.

¿Pero cómo lo escribimos matemáticamente? Respuesta: usamos la "función factorial"

La función factorial (símbolo: !) significa que se multiplican números descendentes. Ejemplos:

- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$
- $1! = 1$

Nota: en general se está de acuerdo en que $0! = 1$. Puede que parezca curioso que no multiplicar ningún número dé 1, pero ayuda a simplificar muchas ecuaciones.

Así que si quieres elegir todas las bolas de billar las permutaciones serían:

$16! = 20,922,789,888,000$

Pero si sólo quieres elegir 3, tienes que dejar de multiplicar después de 14. ¿Cómo lo escribimos? Hay un buen truco... dividimos entre 13!...

$$16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \ldots \quad = 16 \times 15 \times 14 = 3360$$

13 × 12 ...

¿Lo ves? 16! / 13! = 16 × 15 × 14

La fórmula se escribe:

$\frac{n!}{(n-r)!}$ Donde n es el número de cosas que puedes elegir, y eliges r de ellas (No se puede repetir, el orden importa)

Ejemplos:

Nuestro "ejemplo de elegir en orden 3 bolas de 16" sería:

$$\frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{20,922,789,888,000}{6,227,020,800} = 3360$$

¿De cuántas maneras se pueden dar primer y segundo premio entre 10 personas?

$$\frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{3,628,800}{40,320} = 90$$

(que es lo mismo que: 10 × 9 = 90)

Notación

En lugar de escribir toda la fórmula, la gente usa otras notaciones como:

$$P(n,r) = {}^nP_r = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

5. CONTEO

Muchos problemas propuestos en olimpiadas matemáticas se pueden resolver contando las formas posibles de realizar una determinada acción, o, utilizando el camino inverso, interpretar una fórmula que nos dé el enunciado como el cardinal de un conjunto. Por ejemplo, si los dos miembros de una identidad que nos piden verificar son distintas formas de contar una misma cosa, es evidente que la identidad se cumple.

Hay muchas herramientas para contar. La combinatoria nos ofrece numerosas fórmulas para contar las distintas posibilidades para ordenar objetos, y la mayoría están recogidas en casi todos los libros de cálculo ó de matemática discreta ([4], [5]).

También es útil conocer los números combinatorios, y algunas de las relaciones que satisfacen. Enumeraremos algunas de ellas, por ejemplo:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{\prod_{n-m+1}^{m} i}{n!}, \quad m,n \in N$$

$$\binom{m}{n} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \cdot \binom{m-j}{n-i}$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

Que se pueden probar fácilmente por inducción. Demostraremos la última fórmula ya que se puede dar una prueba bastante curiosa:

Sabemos que por el binomio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$. Sustituyendo ahora por $a = b = 1$ obtenemos precisamente $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

Otra herramienta muy conocida para contar es el Principio de las Casillas o Principio de Dirichlet, también conocido como el Principio del Palomar y The Box Principle. El enunciado de este principio es muy sencillo, una primera versión podría ser: "Tenemos cinco flores y cuatro jarrones. Si colocamos las flores en cuatro jarrones, entonces en al menos un jarrón habrá al menos dos flores". Como se puede ver por el enunciado, es un principio bastante intuitivo.

Una versión más general sería: "Si tenemos n objetos, y m cajas en las que distribuirlos, al menos en una de ellas habrá $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ objetos", donde $\lceil x \rceil$ denota el menor número entero $n / n \geq x$.

Un ejemplo de utilización de este principio en un problema nada trivial sería:

Se consideran cuatro números reales y distintos del intervalo (0,1).

Demostrar que siempre se pueden elegir dos de ellos, *a* y *b*, tales que:

$$\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)} > \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - ab - \frac{1}{8ab}$$

Todos los números del intervalo (0,1) son de la forma $\cos\alpha$, con $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dividiendo en tres partes dicho intervalo: $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, por el principio del palomar tenemos que al menos dos de los cuatro números considerados, $a = \cos\alpha$ y $b = \cos\beta$ verifican: $0 < |\alpha - \beta| < \frac{\pi}{6}$.

Entonces, como la función coseno es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, suponiendo sin pérdida de generalidad que $a < b$, tenemos que $\cos(\alpha - \beta) > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que

$\cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta > \frac{\sqrt{3}}{2}$, desigualdad que con a y b queda:

$a\,b + \sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, que es a su vez equivalente a

$$2\,a\,b\,\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)} > a^2 + b^2 - 2\,a^2\,b^2 - \frac{1}{4}$$

Finalmente, para obtener la desigualdad del enunciado, dividimos por $2\,a\,b$ esta última expresión.

Terminamos esta subsección refiriéndonos a las ecuaciones de recurrencias, que son relaciones que nos permiten expresar una propiedad en un instante determinado en función del valor de la propiedad en una serie de instantes anteriores, y que son herramientas útiles para hallar cardinales de conjuntos en casos en que no se pueden utilizar las técnicas anteriores.

6. CONCLUSIONES

- Combinación es una palabra que se refiere al acto y consecuencia de combinar algo de combinarse, es decir, unir cosas diversas para lograr un compuesto.
- En las combinaciones no importa el orden.
- Permutación es un procedimiento y el resultado de permutar.
- En las permutaciones sí importa el orden.

7. BIBLIOGRAFÍA

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U12_L2_T3_text_final_es.html

www.disfrutalasmatematicas.com

https://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/node/101