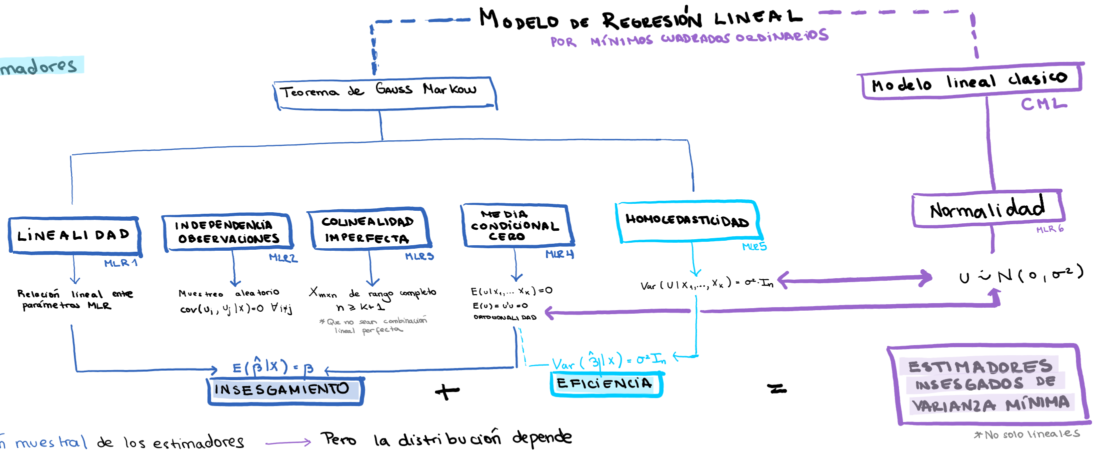
C4: Inferencia

miércoles, 8 de septiembre de 2021   0:25

1. Distribuciones muestrales de estimadores



▶ Nos hablan de momentos de la distribución muestral de los estimadores ⟶ Pero la distribución depende del término de error u

MLR 6

▶ **NORMALIDAD MLR6**
de los errores

El error poblacional u es **independiente** de los regresores $x_1, \dots, x_k$ y se distribuye en forma normal con **media cero** y **varianza σ^2**

$$u \sim N(0, \sigma^2)$$

- $E(u \mid x_1, \dots, x_k) = E(u) = 0$ RLM4
- $Var(u \mid x_1, \dots, x_k) = Var(u) = \sigma^2$ RLM5

→ Modelo lineal Clásico (CLM)
- MLR 1 : MLR 5 + MLR6
  Gauss Markow + $\underbrace{\text{Normalidad}}_{\text{f.d.p}}$

$$y \mid x_1, \dots, x_k = y \mid X \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k, \sigma^2) \rightarrow \hat{\beta}_j \mid X \sim Normal(\beta_j, Var(\hat{\beta}_j \mid X))$$

estandarizando

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{sd(\hat{\beta}_j)} \mid X = N(0,1)$$

- MCO son estimadores insesgados de mínima varianza (no es necesario que sean lineales en y_j)

Problemas
- Variables que no distribuyen normal { Ingresos, N° libros, N° educacional
  Pero en análisis asintótico se soluciona (Muestras grandes)

Demostración

$$\hat{\beta}_j = \beta_j + \underbrace{\overbrace{\sum \frac{\hat{u}_{ij}}{\sum \hat{u}_{ij}^2}}^{\text{Constante}}}_{\text{independiente de X}} \cdot u_i$$

$\hat{\beta}_j = \beta_j + c \cdot u_i \Rightarrow \hat{\beta}_j$ es combinación lineal de errores μ_i

→ MLR6 + (y MLR2), los errores son V.A iid Normal $(0, \sigma^2)$

→ La suma de V.A iid ~ Normal, también se distribuye normal

→ $\hat{\beta} \mid X$ también distribuye normal con media β_j y $Var(\beta_j \mid x)$

2. Prueba de hipótesis

- Nunca sabemos los valores exactos de β_j ⟶ PRUEBAS DE HIPÓTESIS
  - T-student (único parámetro)
  - F (múltiples parámetros)

T STUDENT – ÚNICO PARÁMETRO

- $$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \mid X \sim t_{n-k-1} = t_{gl}$$
  se: σ^2 desconocido, $\hat{\sigma}^2$ muestral

test dos colas con $H_0: \beta_j = 0$

$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)}$$

$\hat{\beta}_j$ → coeficientes STATA
$se(\hat{\beta}_j)$ → std. error en STATA

- $H_0: \beta_j = 0$
  $H_1: \beta_j \neq 0$
  } El efecto parcial de x_j sobre y, después de controlar por el resto de X

→ Hipótesis es acerca de $\boxed{\text{parámetros poblacionales}}$

$|t_{\hat{\beta}}|$ muy grande
- LEFT TAILED (muy negativas)
- RIGHT TAILED (muy positivas)

t_c = en el percentil $\underbrace{1-\alpha}_{\text{NIVEL SIG}}$ en $\underbrace{n-k-1}_{\text{GL}}$

$t_{\hat{\beta}}$ compara t_c ⟶ zona de rechazo a un nivel de confianza

- **p-value**

$$P(|T| > |t|)$$

- Fuerza o debilidad de evidencia empírica sobre H_0
- p-value se compara nivel de confianza (mínimo)
  - altamente significativa 0.01
  - significativa 0.05
  - marginalmente significativa 0.1

STATA
1. reg
2. eststo reg
3. esstab

- **Intervalos de confianza**

$$\hat{\beta}_j \pm t_c \cdot se(\hat{\beta})$$

} En sucesivas muestras aleatorias, computando $\underline{\hat{\beta}_j} \cdot \bar{\hat{\beta}}_j$, el valor poblacional β_j se encontraría en el intervalo $(\underline{\hat{\beta}}, \bar{\hat{\beta}})$ en un 95% muestras

STATA

- t_c = percentil 97.5 en distribución t_{n-k-1}
- Con un 95% confianza sabemos si el estimador puntual está en el intervalo

ECONÓMICAMENTE → $\frac{\log}{\log}$ = ELASTICIDADES → log(wage) : (como %)

PRUEBA F

- Prueba para un grupo de variables (q) que pertenecen a K

Modelo no restringido
$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_K x_K + u$$

Modelo restringido
$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{K-q} x_{K-q} + u$$

HIPÓTESIS

- Probaremos que q de estas K variables **no** tienen un efecto parcial en y

$$H_0 : \beta_{K-q+1} = 0, \dots, \beta_K = 0$$

H_1 : que H_0 no es verdadero

q restricciones de exclusión → restricción es más mejor que 6.

STATA
test var1 var2 var3

- $SSR_{NR} \leq SSR_R$

En MCO, al agregar más variables ↑ R^2 (o ↓ SSR)

¿Es estadísticamente significativa la diferencia?

$$F \equiv \frac{SSR_r - SSR_{NR}}{SSR_{NR}/(n-k-1)}$$

- Rechazamos H_0

$F_{obs} > F_{teorico}$

Parámetros
- q
- $gl = n-k-1$
- IC

→ q (en conjunto) son estadísticamente significativas sobre y

- Contextos de uso de F
  - Alta correlación de predictores
    - Si x_1 e x_2 ↑ correlación, ↑ $sd(\beta)$, ↓ t.
    - Ej: x_1 educación padre, x_2 educación madre, y = rendimiento académico

  Variables que comparten varianza conjunta para explicar y

- Chequear corr entre variables
- Multicolinealidad es menos relevante en pruebas conjuntas (F)
- F útil para pruebas de exclusión conjunta

Relación F con $t_{student}$

Para un solo parámetro

t^2_{n-k-1} tiene una distribución $F_{(1,n-k-1)}$

OJO F no se utiliza siempre
- t + flexible para pruebas de un parámetro
- F (−) poder para determinar H_0.
  Rechazar H_0 cuando es falsa --> Poder = 1 − P(Error tipo II | H_0)
  ↓ rechazo pequeña
  error de no rechazar H_0 cuando H_0 es falsa
  * Lo contrario a nivel de significancia
- F nos habla de conjuntos. Algunos parámetros pueden no ser sig. individualmente, pero sí en conjunto

RELACIÓN ENTRE R y F

$$SST = \sum_{t=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \qquad SSE = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \qquad SSR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y} - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 \qquad R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - SSR$$

$$SSR_r = SST(1 - R^2_r) \qquad SSR_{NR} = SST(1 - R^2_{nr})$$

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_{nr})/SST}{SSR_r/SST} \times \frac{(n-k-1)}{q} \rightarrow \frac{(R^2_{NR} - R^2_R)}{(1 - R^2_R)} \times \frac{(n-k-1)}{q}$$

F-ESTADÍSTICO GLOBAL

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_K = 0$$

- Modelo r: $y = \beta_0 + u$
- $R^2 = 0$ → nada de la variación de y es explicada pues no tenemos predictores

$$F = \frac{R^2_{NR}}{(1 - R^2_{NR})} \times \frac{(n-k-1)}{(K)}$$

* Notar que no es q.

SIGNIFICANCIA CONJUNTA DE TODOS LOS REGRESORES

EN STATA

$$H_0 : \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0$$

STATA
```
reg var1 var2 var3
test var2 var3 (los no significativos)
test var = 1 (Ho)
```
test (var1=1) (var2=0) (var3=0)
Si F pequeño, para no rechazar H_0

3. INFERENCIA EN TÉRMINOS MATRICIALES

- Testear múltiples hipótesis acerca de parámetros

1. $H_0 : R\beta = r$ vs $H_1 : R\beta \neq r$

R matriz $q \times (k+1)$

r vector $q \times 1$ con $q \leq k+1$ restricciones lineales

2.
$$\begin{bmatrix} r_{1,0} & \cdots & r_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{q,0} & \cdots & r_{q,K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_q \end{bmatrix}$$

- Hipótesis simple $H_0 : \beta_1 = 1$
  $R = [0 \ 1 \ 0 \cdots 0]$, $r = 1$
- Hipótesis igualdad $H_0 : \beta_1 = \beta_2$ $\quad \beta_1 - \beta_2 = 0$
  $R = [0 \ 1 \ -1 \cdots 0]$ $\quad r = 0$
- Hipótesis conjunta $H_0 : \beta_0 = 2, \ \beta_1 = 1 - \beta_2$ $\quad \beta_1 + \beta_2 = 1.$
  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $\quad r = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. TEST F

$$\hat{F} = (R\hat{\beta} - r)'(\hat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1}R')^{-1}(R\hat{\beta} - r)/q \sim F(q, n-k-1)$$

DEMOSTRACIÓN

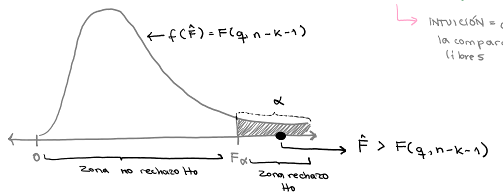
E.2 - E.4

- Por MLR6 sabemos que la normalidad de errores, condicional en X, implica
$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$$

3. TEST F

$$\hat{F} = (R\hat{\beta} - r)' (\hat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1} R')^{-1} (R\hat{\beta} - r)/q \sim F(q, n-k-1)$$

INTUICIÓN = ¿ $\hat{\beta}$? es el que nos da la comparación con parámetros libres



DEMOSTRACIÓN

E.2 - E.4

- Por MLR6 sabemos que la normalidad de errores, condicional en X, implica

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1})$$

Entonces

$$R\hat{\beta} \sim N(R\beta, \sigma^2 R (X'X)^{-1} R')$$

$$(R\hat{\beta} - R\beta) \sim N(0, \sigma^2 R (X'X)^{-1} R')$$

Bajo Ho podemos demostrar que

$$(R\hat{\beta} - r)' [\sigma^2 R (X'X)^{-1} R']^{-1} (R\hat{\beta} - r) \sim X^2(q)$$

Como σ^2 es desconocido, usamos su estimador y se obtiene (1) con distribución F de Fisher.

B. T-STUDENT

Recordemos que $t^2_{n-k-1} \sim F_{(1, n-k-1)}$ 1 parámetro

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2}{se(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)} = \frac{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2}{\sqrt{V(\hat{\beta}_1) + V(\hat{\beta}_2) - 2C(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}} \sim t_{n-k-1}$$

H_0: $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2$ o $\boxed{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 = 0}$