Econometría

Diplomado Banco Central de Honduras

Instituto de Economía

Pontificia Universidad Católica de Chile

Juan Ignacio Urquiza – Junio 2022

Repaso de Matrices

- Definiciones Básicas:
  - Matriz Cuadrada, Diagonal, Identidad, *etc.*
- Operaciones Básicas:
  - Suma, Multiplicación
  - Transpuesta
  - Inversa
- Independencia Lineal
- Vectores aleatorios

Apéndice D – Wooldridge

Definiciones Básicas

- Definición de Matriz:
  - Es un arreglo rectangular de números.
  - Una matriz de orden *m* x *n* tiene *m* filas y *n* columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Suelen representarse mediante letras mayúsculas.

Definiciones Básicas

- Definición de Matriz Cuadrada:
  - Es una matriz que tiene el mismo número de filas y columnas.
  - Es decir, una matriz donde $m = n$.
  - Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Definiciones Básicas

- Definición de Vector:
  - Conjunto ordenado de números, dispuestos en una fila o una columna.
  - *Vector fila*: matriz de dimensión 1 x *m*.
    - Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

  - *Vector columna*: matriz de dimensión *n* x 1.
    - Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Definiciones Básicas

- Definición de Matriz Diagonal:
  - Es una matriz cuadrada cuyos elementos fuera de la diagonal son iguales a cero.
  - Es decir, $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.
  - Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Definiciones Básicas

- Definición de Matriz Identidad ($\boldsymbol{I}_n$):
  - Es una matriz diagonal donde sus elementos no nulos son iguales a 1.
  - Es decir, $a_{ij} = 1$ para todo $i = j$.
  - Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Operaciones Básicas

- Suma de Matrices:
  - La suma de dos matrices ***A*** y ***B***, de dimensión *m* x *n*, es una matriz **C** de igual dimensión.
  - La suma se lleva a cabo elemento por elemento.
  - Más precisamente: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$
  - Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}_{3\times 3} + \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Operaciones Básicas

- <u>Multiplicación de una Matriz por un escalar</u>:
  - Consiste en la suma de una matriz con si misma *k* veces.
  - Más precisamente:

$$\mathbf{C} = k\mathbf{A} = [ka_{ij}]$$

  - Ejemplo:

$$k\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}_{3\times3}$$

Operaciones Básicas

- <u>Multiplicación de Matrices</u>:
  - Para multiplicar la matriz ***A*** por la matriz ***B***, la cantidad de columnas de la matriz ***A*** debe ser igual al número de filas de la matriz ***B*** (números en azul deben coincidir).
  - Luego de multiplicar, la matriz resultante tendrá la misma cantidad de filas que **A** y la misma cantidad de columnas que **B** (ver números en rojo y verde).
  - Ejemplo: (AB = C)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} m & n & o \\ p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Operaciones Básicas

- Proceso de multiplicación: (**AB = C**)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

donde:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{jk}$$

Multiplicación de Matrices

- Propiedades:
  - $(\alpha+\beta)\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{A}$ *(distributiva de escalar)*
  - $\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \alpha\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{B}$ *(distributiva de matriz)*
  - $\alpha(\boldsymbol{AB}) = (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$ *(asociativa)*
  - $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$
  - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$
  - $\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$ *(elemento neutro)*
  - $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$

Operaciones Básicas

- Matriz Transpuesta:
  - La transpuesta de una matriz ***A*** se obtiene de intercambiar sus filas por sus columnas.
  - Es decir, ***A'*** = $[a_{ji}]$
  - Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz Transpuesta

- <u>Propiedades</u>:
  - $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$
  - $(\alpha \boldsymbol{A})' = \alpha \boldsymbol{A}'$
  - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$
  - $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$

- <u>Matriz Simétrica</u>:
  - Una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ es simétrica si y sólo si $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$.

Traza

- La traza de una matriz cuadrada ***A*** es igual a la suma de los elementos de su diagonal.
- Formalmente:

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \Sigma\, a_{ii}$$

- Ejemplo:

$$tr(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}) = a + e + i$$

Traza

- Propiedades:
  - $\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_n) = n$
  - $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}') = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$
  - $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$
  - $\mathrm{tr}(\alpha\boldsymbol{A}) = \alpha\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$
  - $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$

Inversa

- La inversa de una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ se denota $\boldsymbol{A}^{-1}$, y viene dada por:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}_n \quad \text{o} \quad \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$$

- En este caso, decimos que la matriz $\boldsymbol{A}$ es *invertible* o *no singular*.
- Propiedades:
  - $(\alpha \boldsymbol{A})^{-1} = (1/\alpha)\boldsymbol{A}^{-1}$
  - $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
  - $(\boldsymbol{A}')^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})'$

Independencia Lineal

- Sea $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ un conjunto de vectores n x 1.
- Decimos que los vectores son linealmente independientes si y sólo si la única solución a:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_r\mathbf{x}_r = 0$$

es $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$.

- Intuitivamente, decir que son linealmente dependientes implica que al menos un vector puede escribirse como una combinación lineal de los otros vectores.

Rango

- Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz n x m, entonces el rango de $\boldsymbol{A}$ es el máximo número de columnas linealmente independientes.
- Si $\boldsymbol{A}$ tiene dimensión n x m, y su rango es igual a m, entonces decimos que $\boldsymbol{A}$ es de *rango completo*.
- Propiedades:
  - rank($\boldsymbol{A}'$) = rank($\boldsymbol{A}$)
  - Si $\boldsymbol{A}$ es n x k, entonces rank($\boldsymbol{A}$) $\leq$ min(n,k)
  - Si $\boldsymbol{A}$ es k x k, y rank($\boldsymbol{A}$)=k, entones $\boldsymbol{A}$ es invertible

Formas Cuadráticas

- Sea ***A*** una matriz simétrica.
- La forma cuadrática asociada a la matriz ***A*** viene dada por la siguiente función definida para todo vector ***x***:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x'Ax} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

- Ejemplo (calcular forma cuadrática asociada a ***A***):

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Formas Cuadráticas

- Para visualizar mejor, escribimos lo siguiente:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\
\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- De esta manera obtenemos:

$$q(x, y, z) = ax^2 + ey^2 + iz^2 + xy(b + d) + xz(c + g) + yz(f + h)$$

Formas Cuadráticas

- ***Matriz semi-definida positiva/negativa*:**
  - Método 1:
    - Decimos que ***A*** es definida positiva si:

$$\mathbf{x'Ax} > 0 \text{ para todo vector } \mathbf{x} \text{ excepto } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

    - Decimos que ***A*** es semi-definida positiva si:

$$\mathbf{x'Ax} \geq 0 \text{ para todo vector } \mathbf{x}$$

Formas Cuadráticas

- Método 2 (análogo):
  - Calculamos *eigenvalues* (autovalores):
    - Buscamos todos los λ que satisfagan:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

  - Si todos los valores de λ son mayores o iguales a cero, la matriz A es semi-definida positiva.
  - Si todos los valores de λ son menores o iguales a cero, la matriz A es semi-definida negativa.

Formas Cuadráticas

- Propiedades:
  - Si $\boldsymbol{A}$ es definida positiva, entonces la suma de los elementos de su diagonal es estrictamente positiva, mientras que si $\boldsymbol{A}$ es semi-definida positiva dicha suma es no negativa.
  - Si $\boldsymbol{A}$ es definida positiva, entonces $\boldsymbol{A}^{-1}$ existe y es también definida positiva.
  - Si $\boldsymbol{X}$ es n x k, entonces $\boldsymbol{X'X}$ y $\boldsymbol{XX'}$ son semi-definidas positivas.
  - Si $\boldsymbol{X}$ es n x k, y rank($\boldsymbol{X}$)=k, entonces $\boldsymbol{X'X}$ es definida positiva y, por tanto, no singular.

Matriz Idempotente

- $\boldsymbol{A}$ es una matriz idempotente si y sólo si:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

- <u>Propiedades</u>:

  Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica e idempotente, entonces:

  - rank($\boldsymbol{A}$)=tr($\boldsymbol{A}$)
  - $\boldsymbol{A}$ es semi-definida positiva

Vectores Aleatorios

- Valor esperado:
  - Si $\boldsymbol{y}$ es un vector *n* x 1 aleatorio, su valor esperado es el vector de los valores esperados:

$$E(\boldsymbol{y}) = [E(y_1), E(y_2), \dots, E(y_n)]'$$

  - Si $\boldsymbol{Z}$ es una matriz aleatoria de *n* x *m*, $E(\boldsymbol{Z})$ es la matriz *n* x *m* de valores esperados:

$$E(\boldsymbol{Z}) = \left[E(z_{ij})\right]$$

  - Propiedad:
    - Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz y $\boldsymbol{b}$ un vector ambos no aleatorios, entonces $E(\boldsymbol{Ay} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{b}$.

Vectores Aleatorios

- <u>Matriz varianza-covarianza</u>:
  - Si $\boldsymbol{y}$ es un vector n x 1 aleatorio, su matriz varianza-covarianza Var($\boldsymbol{y}$) se define como:

$$Var(\boldsymbol{y}) = \left[\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & & \sigma_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}\right]$$

  donde $\sigma_j^2 = Var(y_j)$ y $\sigma_{ij} = Cov(y_i, y_j)$.

  - Es decir, contiene las varianzas de cada elemento en la diagonal, con las covarianzas fuera de la diagonal.

Vectores Aleatorios

- Matriz varianza-covarianza:
  - Propiedades:
    - $Var(\boldsymbol{y}) = E[(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})']$, donde $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{y})$.
    - Si ***a*** es un vector no aleatorio de *n* x 1, entonces $Var(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a}'Var(\boldsymbol{y})\boldsymbol{a} \geq 0$.
    - Si ***A*** es una matriz y ***b*** un vector ambos no aleatorios, entonces $Var(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{A}[Var(\boldsymbol{y})]\boldsymbol{A}'$.