Error de medición

Tabla Resumen

Propiedad	Dependiente	Independiente
Insesgamiento	⊕ sesgo ↑ ⊖ sesgo ↓	ATENUACIÓN $\frac{Var(x)}{Var(x)+Var(e_0)} = \frac{Var(x)}{Var(x^*)}$
Consistencia	Depende de $Corr(e_0, x) = 0$ *	Si $Var(x^*) \geq Var(x)$ → INCONSISTENCIA peq; Si $Var(x^*) < Var(x)$ → INCONSISTENCIA grand
Eficiencia	Ineficiente $\sigma_v^2 = \sigma_u^2 + \sigma_{e_0}^2$	Por ECV $\sigma_{e_0}^2$

Notación

y^* = real y = observada

x^* = real x = observada

e_0 = error de medición → positivo, negativo o cero

Variable Dependiente

$e_0 = y - y^*$

Modelo original

$y^* = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_K x_K + u$

- $E(u) = 0$
- $Var(u \mid x) = \sigma^2$

Modelo estimado

$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_K x_K + \underbrace{u + e_0}_{v}$

INSESGAMIENTO y CONSISTENCIA $\hat{\beta}$

$E(v) = E(u + e_0) = E(u) + \underbrace{E(e_0)}_{\text{si es } 0} = 0$

$Var(v \mid x) = Var(u + e_0 \mid x) = Var(u \mid x) + Var(e_0 \mid x) + 2Cov(u, e_0 \mid x)$

$Corr(u, e_0) \neq 0$: >0 SESGO hacia ↑ $\hat{\beta}$; <0 SESGO hacia ↓ $\hat{\beta}$

Si $Corr(u, e_0) = 0$ → $Var(u \mid x) + \boxed{Var(e_0 \mid x)}$ → SESGO $\hat{\beta}$

RLM6

$\underbrace{\sigma_u^2 + \sigma_{e_0}^2}_{\text{CONSISTENCIA } \beta} = \boxed{\sigma_v^2 > \sigma^2}$

Pero con varianza mayor de $\hat{\beta}$

INEFICIENTE $\hat{\beta}$

Variable Independiente

$X = X^* + e_0$ → $e_0 = x - x^*$

* MCO propiedades dependen de supuestos de e_0

Modelo original

$y = \beta_0 + \beta X_1^* + \dots + \beta_K x_K + u$

$E(u) = 0 \wedge E(e) = 0$

Modelo estimado

$y = \beta_0 + \beta X_1 + \dots + \beta_K x_K + u + e_0$

* SUPUESTO ECV

Hay uno menos común / posible $Cov(e_0, x) = 0$ → $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + (u - \beta_1 e_0)$

✓ Consistente ✓ Insesgado

[1] $Cov(x_1^*, e_0) = 0$

El error de medición no se debe a una cuestión relacionada a la variable real (contra ejemplo: consumo de marihuana y reporte)

obtenemos $x_1 = x_1^* + e_0$

[2] $Cov(x_1, e_0) = \sigma_{e_0}^2$ VARIANZA DEL ERROR DE MEDICIÓN

Por [1]

$Cov(x_1, e_0) = E(x_1 \cdot e_0) - E(x_1)\cancel{E(e_0)} = E(x_1 e_0) = E[(x_1^* + e_0)e_0] = E[x_1^* e_0 + e_0^2] = \cancel{E(x_1^* e_0)} + E(e_0^2) = \sigma_{e_0}^2$

[3] $Cov(x_1, y) = -\beta_1 \sigma_{e_0}^2$ (asintóticamente)

$Cov(x_1, u - \beta_1 e_0) = -\beta_1 \underbrace{Cov(x, e_0)}_{\text{Por [2]}} = -\beta_1 \sigma_{e_0}^2$

SESGO DE ATENUACIÓN

$Var(X) = Var(x^*) + Var(e_0)$ → $plim(\hat{\beta}) = \hat{\beta}\left(\frac{Var(x^*)}{Var(X)}\right)$ → $\frac{\text{señal}}{\text{ruido}}$

definido su tamaño por el error

- Si $Var(x^*) \geq Var(x)$ → INCONSISTENCIA es más pequeña
- Si $Var(x^*) < Var(x)$ → INCONSISTENCIA es más grande

$\boxed{Var(x^*) = Var(x) + Var(e_0)}$

Subestimación valores de $\hat{\beta}$

Demostración

$$plim(\hat{\beta}_1) = plim\left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\left(\frac{1}{n}\right)\sum(x_i - x)^2}\right) = \frac{plim\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}\right)}{plim\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}\right)} \xrightarrow{a} \frac{Cov(x, y)}{Var(x)}$$

$$\frac{Cov(x, y^* + e_0)}{Var(x)} = \underbrace{\frac{Cov(x, y^*)}{Var(x)}}_{\text{por def } \beta_1} + \frac{Cov(x, e_0)}{Var(x)} = \beta_1 + \frac{Cov(x, e_0)}{Var(x)}$$

$$\frac{Cov(x, y^*)}{Var(x)} = \frac{Cov(x, \beta_0 + \beta_1 x + u)}{Var(x)} = \frac{\overset{0}{Cov(x, \beta_0)} + Cov(x, \beta_1 x) + \overset{0 \text{ RLM4}}{Cov(x, u)}}{Var(x)} = \frac{\beta_1 Cov(x, x)}{Var(x)} = \beta_1$$

Notemos que si $Cov(x, e_0) = 0$ hay insesgamiento

bilinealidad de cov

ERROR MEDICIÓN NO RELACIONADO A Y.

$$\frac{Cov(x^* + e^0, y)}{Var(x^* + e^0)} = \frac{Cov(x^*, y) + \cancel{Cov(e^0, y)}}{Var(x^*) + Var(e^0) + \cancel{Cov(x^*, e^0)}} = \frac{Cov(x^*, u + \beta_0 + \beta_1 x^*)}{Var(x^*) + Var(e_0)} = \frac{\beta_1 Var(x^*)}{Var(x^*) + Var(e_0)}$$

0 ECV[1]

$\underset{0 \text{ RLM4}}{Cov(x^* u)} + \underset{\text{constante}}{Cov(x^* \beta_0)} + Cov(x^* \beta_1 x^*)$ → $\beta_1 Cov(x^*, x^*)$

→ que $var(e_0)$ pesa mucho.