Seguimiento N°6

Nombre: Valentina Andrade de la Horra Profesor: Alexandre Janiak

Ayudantes: Pablo Vega y Bianca Hincapié

Considere un agente dotado de una riqueza inicial x_0 que vive infinitos periodos. Suponga que este agente no tiene acceso a mercados financieros y que su riqueza evoluciona de acuerdo a $x_{t+1} = (x_t - c_t)^\alpha$ donde $\alpha \, \epsilon \, (0,1]$ y c_t denota el consumo del periodo t. Este agente obtiene un flujo de utilidad $u(c)$ por consumo y descuenta el futuro a un factor $\beta < 1$

(a) Obtenga la ecuación de Bellman que resume el problema del agente

$$\begin{aligned}
&V(x_t)_{\{C_t, X_{t+1}\}} = u(c_t) + \beta V(x_{t+1}) \\
&\text{st.}\, x_{t+1} = (x_t - c_t)^\alpha \\
&\quad c_t \,, x_{t+1} \geq 0 \\
&\quad x_0 \text{ dado}
\end{aligned}$$

(b) Obtener la ecuación de Euler asociada al problema del agente

Para resolver esto ocuparemos la situción de las variables de control del problema, de modo tal de expresar el problema en términos de solo una de ellas (x_{t+1}). Por consiguiente tenemos que

$$c_t = x_t - (x_{t+1})^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
&V(x_t)_{\{X_{t+1}\}} = u\left(x_t - (x_{t+1})^{\frac{1}{\alpha}}\right) + \beta V(x_{t+1}) \\
&\tfrac{\partial V(x_t)}{\partial x_{t+1}} = -\tfrac{\partial u(c_t)}{\partial\, c_t} \cdot \tfrac{1}{\alpha} \cdot (x_{t+1})^{\frac{1}{\alpha}-1} + \tfrac{\beta \partial V(x_{t+1})}{\partial\, x_{t+1}} = 0 \\
&\qquad \tfrac{\partial u(c_t)}{\partial\, c_t} \cdot \tfrac{1}{\alpha} \cdot (x_{t+1})^{\frac{1}{\alpha}-1} = \tfrac{\beta \partial V(x_{t+1})}{\partial\, x_{t+1}}
\end{aligned}$$

Por teorema de la envolvente

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial V(x_t)}{\partial\, x_t} &= \tfrac{\partial\, u(c_t)}{\partial\, c_t} \\
\tfrac{\partial V(x_{t+1})}{\partial\, x_{t+1}} &= \tfrac{\partial u(c_{t+1})}{\partial\, c_{t+1}}
\end{aligned}$$

Reemplanzando

$$\frac{\partial\, u\,(c_t)}{\partial\, c_t}\; {x_{t+1}}^{\frac{1}{\alpha}-1} = \alpha\, \beta$$

$$\frac{\partial u\,(c_{t+1})}{\partial\, c_{t+1}}$$

(c) Sea $u\,(c) = \log\ c\ , \beta = 0.96, \alpha = 0.4, x_0 = 10$, grafique la trayectoria de consumo para $c_0 = [1.5\ \ 3\ \ 4.5\ \ 6]\,$, considere un horizonte $T = 10$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{c_t}\; x^{\frac{1}{\alpha}-1} = \alpha\, \beta\, \tfrac{1}{c_{t+1}} \\
&x_t = \left(\tfrac{\alpha\beta\cdot c_t}{c_{t+1}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
&c_{t+1} = \alpha\beta c_t \cdot {x_{t+1}}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad (1) \\
&c_t = x_t - (x_{t+1})^{\frac{1}{\alpha}} \quad\quad (2)
\end{aligned}$$

Entonces con (1) y (2) tenemos un sistema de ecuaciones en diferencia, con el que resolveremos la trayectoria del consumo

```
clear; clc; close;
beta =0.96;
alpha=0.4;
x(1)=10;
c= 1.5:1.5:6; %desde 1.5 a 6 con espaciado 1.5
T = 10;

c1(1) =1.5
```

```
c1 = 1.5000
```

```
for t = 1:T
x(t+1)= (x(t) - c1(t))^alpha;
c1(t+1)= alpha*beta*c1(t)*x(t+1)^((alpha-1)/alpha);
end

c2(1) =c(2)
```

```
c2 = 3
```

```
for t = 1:T
x(t+1)= (x(t) - c1(t))^alpha;
c2(t+1)= alpha*beta*c2(t)*x(t+1)^((alpha-1)/alpha);
end

c3(1) =c(3)
```

```
c3 = 4.5000
```

```
for t = 1:T
x(t+1)= (x(t) - c3(t))^alpha;
c3(t+1)= alpha*beta*c3(t)*x(t+1)^((alpha-1)/alpha);
end

c4(1) =c(4)
```

```
c4 = 6
```

```
for t = 1:T
x(t+1)= (x(t) - c4(t))^alpha;
c4(t+1)= alpha*beta*c4(t)*x(t+1)^((alpha-1)/alpha);
end
```

Grafico

```
figure
plot(c1, '-blue')
hold on
plot(c2, '-red')
hold on
plot(c3, '-black')
hold on
plot(c4, '-yellow')
title('Trayectorias de consumo');
xlabel('T');
ylabel('Consumo');
grid on
legend ('c0=1.5', 'c0=3','c0=4.5','c0=6',"Location","best")
```

```
hold off
```