Ayudantía 5

Teoría Macroeconómica I - EAE320B
Profesor: Alexandre Janiak
Ayudantes: Jonathan Rojas y Reinaldo Salazar
(jerojas3@uc.cl rtsalazar@uc.cl)

1 Iteración de Función de Valor - La vida granjera

En esta pregunta consideraremos un modelo simple de ciclo de vida en tiempo discreto y sin incertidumbre. Suponga una isla poblada por un continuo de granjeros que viven T periodos. Cada periodo nace una nueva generación de granjeros de tamaño m_1. Supondremos inicialmente que la población no crece y tiene un tamaño normalizado a 1. Consecuentemente, en estado estacionario todos los cohortes de edad s tendrán tamaño $m_s = \frac{1}{T}$. Los granjeros descuentan el futuro a un factor β y valoran el consumo c en cada periodo de acuerdo a:

$$u(c) = \begin{cases} \log c & \text{si } \sigma = 1 \\ \dfrac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} & \text{si } \sigma \neq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Los granjeros en esta economía trabajan para la cooperativa granjera de la isla, *Paltas for Life Ltda.*, la cual requiere capital y trabajo para funcionar. Supondremos que un granjero de edad s ofrece y_s unidades de trabajo a la cooperativa, recibiendo a cambio una remuneración laboral de $y_s w$. Adicionalmente, a lo largo de su vida los granjeros tienen acceso al mercado financiero de la isla, donde se intercambian activos a a una tasa r. Supondremos además que los granjeros no pueden morir endeudados, limitando su acceso a crédito de acuerdo a la siguiente condición:

$$\underline{a}_{s+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } s = T \\ \frac{1}{1+r}\left(\underline{a}_{s+2} - y_{s+1}w\right) & \text{si } s < T \end{cases} \tag{2}$$

donde $\underline{a}_{s+1}$ denota la deuda máxima permisible para un granjero de edad s. Supondremos que los granjeros nacen sin activos y no valoran las herencias, esto es, $a_1 = 0$ y $V_{T+1}(a_{T+1}) = 0$. El problema de un granjero de edad $s \leq T$ está descrito por la siguiente ecuación de Bellman:

$$V_s(a_s) = \max_{c_s, a_{s+1}} \; u(c_s) + \beta V_{s+1}(a_{s+1}) \tag{3}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$a_{s+1} + c_s = (1+r)a_s + y_s w \tag{4}$$

$$a_{s+1} \geq \underline{a}_{s+1} \tag{5}$$

$$c_s \geq 0$$

$$a_1 \text{ dado.}$$

La cooperativa granjera de esta isla produce de acuerdo a una tecnología $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$, arrendando capital K y trabajo L a precios r y w respectivamente. Adicionalmente, la cooperativa incurre un costo de depreciación δ por unidad de capital. Supondremos esta cooperativa granjera maximiza utilidades y opera de manera competitiva. Luego, remunera sus factores productivos de acuerdo a su productividad marginal en la cooperativa:

$$r = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \delta \tag{6}$$

$$w = (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} \tag{7}$$

donde K y L denotan la demanda de capital y de trabajo por parte de la cooperativa granjera de la isla. Finalmente, supondremos que los habitantes de esta economía no han explorado más allá de los confines de su isla y por tanto no tienen acceso a mercados externos. La oferta de capitales A y de trabajo $\overline{L}$ en esta isla están entonces dada por:

$$A = \sum_{s=1}^{T} m_s a_{s+1} \tag{8}$$

$$\overline{L} = \sum_{s=1}^{T} m_s y_{s+1} \tag{9}$$

Para responder las siguientes preguntas, utilice una grilla de activos[1] $\mathcal{A}$ de 2001 puntos equidistantes en el intervalo $[-10, 15]$ y suponga que la oferta laboral de un granjero de edad s está descrita por:

$$y_s = 1 + \frac{6}{s \cdot 0.4\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\log s - \log 20)^2}{0.4^2}\right) \tag{10}$$

Considera además la siguiente especificación:

T	β	σ	a_1	α	δ
60	0.96	2	0	0.33	0.1

En primera instancia resolveremos el problema del granjero en equilibrio parcial, esto es, suponiendo la tasa de interés r y salarios w dados de manera exógena.

(a) Suponga que $r = \frac{1-\beta}{\beta}$ y $w = 1.02$. Resuelva numéricamente el problema del granjero y grafique la trayectoria ingreso, activos y consumo a lo largo de su vida. Explique económicamente estas trayectorias.

(b) Repita el inciso anterior suponiendo $r = 1.3 \cdot \frac{1-\beta}{\beta}$. Explique económicamente las diferencias a su resultado anterior.

Ahora resolveremos el problema en equilibrio general, es decir, determinando endógenamente los precios de esta economía. En equilibrio, los precios de los factores vaciarán los mercados de capital y trabajo. Notando que la oferta laboral es fija e igual a $\bar{L}$, el salario de equilibrio w^* está determinado por:

$$w^* = (1 - \alpha) K^{\alpha} \overline{L}^{-\alpha} \tag{11}$$

Sabiendo que se agota el mercado laboral de la isla, la demanda de capital por parte de la cooperativa granjera está determinada por:

$$K = \left(\frac{\alpha}{r + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \bar{L} \tag{12}$$

Luego, nuestro problema se reduce a hallar la tasa de interés que iguala la oferta de capitales a su demanda.

(c) A partir de sus respuestas anteriores, construya una función `farmer` que resuelva el problema del granjero. Dicha función debe recibir como argumentos la tasa de interés r, salario w y otros parámetros pertinentes a su problema.

(d) Grafique la oferta y demanda de capitales de esta economía en función de la tasa de interés[2]. Considere valores para la tasa de interés en el intervalo $[0, 0.1]$.

[1] Recuerde imponer la condición de endeudamiento máximo descrita en la ecuación (2) cuando corresponda.

[2] Para obtener la oferta de capitales $A(r)$, note que el salario w se encuentra determinado por la tasa de interés r mediante:

$$w = (1 - \alpha)\left(\frac{\alpha}{r + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Seguimiento V

Considere un agente dotado de una riqueza inicial x_0 que vive infinitos periodos. Suponga que este agente no tiene acceso a mercados financieros, y que su riqueza evoluciona de acuerdo a $x_{t+1} = (x_t - c_t)^\alpha$, donde $\alpha \in (0, 1]$ y c_t denota el consumo del periodo t. Este agente obtiene un flujo de utilidad $u(c)$ por consumo y descuenta el futuro a un factor $\beta < 1$.

(a) Formule la ecuación de Bellman que resume el problema del agente.

(b) Obtenga la ecuación de Euler asociada al problema del agente.