1. Consumo en dos periodos

(a) El agente i tiene dos restricciones, una por cada periodo.

En el periodo 1 tiene un ingreso y_1 y se gasta este ingreso en consumo c_1 y ahorro s. Por lo tanto su restricción presupuestal es

$$c_1 + s = y_1$$

En el periodo 2 el agente tiene dos fuentes de ingreso, la realizacion de y_2 y el ahorro que viene del periodo uno y que genera una rentabilidad exógena r. Como el agente solo vive dos periodos es óptimo consumir t odo su ingreso en este periodo. Así pues, la restricción presupuestal está dado por:

$$c_2 = (1+r)\,s + y_2$$

Para solucionar el problema más fácilmente es conveniente combinar ambas restricciones presupuestales en una sola reemplazando el valor del ahorro ($s = y_1 - c_1$). Esta nueva restricción se llama restricción presupuestal intertemporal y está dada por:

$$\begin{aligned}
c_2 &= (1+r)\,(y_1 - c_1) + y_2 \\
c_2 - y_2 &= (1+r)\,(y_1 - c_1) \\
\frac{c_2}{1+r} - \frac{y_2}{1+r} &= y_1 - c_1 \\
c_1 + \frac{c_2}{1+r} &= y_1 + \frac{y_2}{1+r}
\end{aligned}$$

Así pues, para el agente i el problema de maximización es el siguiente:

$$\begin{array}{cc}
\max\limits_{c_1, c_2} & U_i(c_1) + \beta \mathbb{E}\left[U_i(c_2)\right] \\
s.a & c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}
\end{array}$$

Para solucionar este problema se hace uso del siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = U_i(c_1) + \beta \mathbb{E}\left[U_i(c_2)\right] + \lambda \left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned}
&[c_1] U_i'(c_1) - \lambda = 0 \\
&[c_2] \beta \mathbb{E}\left[U_i'(c_2)\right] - \frac{\lambda}{1+r} = 0
\end{aligned}$$

Reemplazando el valor de $\lambda = U_i'(c_1)$ de la primera condición de primer orden en la segunda obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \beta \mathbb{E}\left[U_i'(c_2)\right] - \frac{U_i'(c_1)}{1+r} \\
\frac{U_i'(c_1)}{1+r} &= \beta \mathbb{E}\left[U_i'(c_2)\right] \\
U_i'(c_1) &= \beta (1+r)\, \mathbb{E}\left[U_i'(c_2)\right]
\end{aligned}$$

(b) Un perfil de *sub-ahorro* indica que el valor del ahorro en el periodo 1 es menor al óptimo, en otras palabras, el consumo del periodo 1 es muy alto. Sea $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ un perfil de consumo consistente con el *sub-ahorro*, para este perfil de consumo se cumple que:

$$U_i'(\tilde{c}_1) < \beta (1+r)\, \mathbb{E}\left[U_i'(\tilde{c}_2)\right]$$

Despejando:

$$\beta (1+r)\, \mathbb{E}\left[U_i'(\tilde{c}_2)\right] - U_i'(\tilde{c}_1) > 0$$

Consideremos el diferencial de la utilidad ante un aumento del ahorro:

$$\frac{dU_i}{ds} = U_i'(\tilde{c}_1) \frac{dc_1}{d_s} + \beta \mathbb{E}\left[U_i'(\tilde{c}_2)\right] \frac{dc_2}{d_s}$$

De las restricciones presupuestales tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{dc_1}{ds} &= -1 \\
\frac{dc_2}{ds} &= 1 + r
\end{aligned}$$

Remmplazando en el diferencial de la utilidad tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dU_i}{ds} &= -U_i'(\tilde{c}_1) + \beta \mathbb{E}\left[U_i'(\tilde{c}_2)\right](1+r) \\ \frac{dU_i}{ds} &= \beta(1+r)\mathbb{E}\left[U_i'(\tilde{c}_2)\right] - U_i'(\tilde{c}_1) \qquad > 0\end{aligned}$$

(c) El coeficiente absoluto de aversion al riesgo (ρ_A) y el coeficiente absoluto de prudencia (ρ_P) para el agente i estan dados por:

$$\begin{aligned}\rho_A &= -\frac{U_i''(c_i)}{U_i'(c_i)} \\ \rho_P &= -\frac{U_i'''(c_i)}{U_i''(c_i)}\end{aligned}$$

Para el caso del agente A tenemos:

$$\begin{aligned}U_A' &= -2(c-\alpha) \\ U_A'' &= -2 \\ U_A''' &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto para este agente, los coeficientes son los siguientes:

$$\begin{aligned}\rho_A &= -\frac{-2}{-2(c-\alpha)} &&= -\frac{1}{c-\alpha} \\ \rho_P &= -\frac{0}{-2} &&= 0\end{aligned}$$

Para el caso del agente B tenemos:

$$\begin{aligned}U_B' &= \alpha e^{-\alpha c} \\ U_B'' &= -\alpha^2 e^{-\alpha c} \\ U_B''' &= \alpha^3 e^{-\alpha c}\end{aligned}$$

Por lo tanto para este agente, los coeficientes son los siguientes:

$$\begin{aligned}\rho_A &= -\frac{-\alpha^2 e^{-\alpha c}}{\alpha e^{-\alpha c}} &&= \alpha \\ \rho_P &= -\frac{\alpha^3 e^{-\alpha c}}{-\alpha^2 e^{-\alpha c}} &&= \alpha\end{aligned}$$

(d) La ecuación de Euler del agente A es:

$$-2(c_1-\alpha) = \beta(1+r)\mathbb{E}\left[-2(c_2-\alpha)\right]$$

Reemplazando las restricciones presupuestales y cancelando términos semejantes tenemos:

$$y_1 - S - \alpha = \beta(1+r)\mathbb{E}\left[y_2 + (1+r)S - \alpha\right]$$

Despejando S:

$$-\left(1+\beta(1+r)^2\right)S = (1-\beta(1+r))\alpha - y_1 + \beta(1+r)\mathbb{E}\left[y_2\right]$$

Sustituyendo $R = 1+r$ y tomando el valor esperado de $y_2 = \bar{Y}$ obtenemos:

$$\left(1+\beta R^2\right)S = -(1-\beta R)\alpha + y_1 - \beta R\bar{Y}$$

Por lo tanto, despejando para Sy acomodando términos tenemos:

$$S = \frac{y_1 - \beta R\bar{Y}}{1+\beta R^2} - \frac{1-\beta R}{1+\beta R^2}\alpha$$

(e) Al igual que en el punto anterior, partimos de la ecuación de Euler para el agente B:

$$\alpha e^{-\alpha c_1} = \beta R\mathbb{E}\left[\alpha e^{-\alpha c_2}\right]$$

Reemplazando las restricciones presupuestales y cancelando términos semejantes tenemos:

$$e^{-\alpha(y_1-S)} = \beta R\mathbb{E}\left[e^{-\alpha(y_2+RS)}\right]$$

Por propiedades de los exponenciales tenemos:

$$e^{-\alpha y_1} e^{\alpha S} = \beta R e^{-\alpha R S} \mathbb{E}\left[e^{-\alpha y_2}\right]$$

Tomando el valor esperado de $e^{-\alpha y_2}$:

$$e^{-\alpha y_1} e^{(1+R)\alpha S} = \beta R e^{-\alpha \bar{Y} + \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}}$$

Tomando logaritmo natural a ambos lados:

$$\ln\left(e^{-\alpha y_1} e^{(1+R)\alpha S}\right) = \ln\left(\beta R e^{-\alpha \bar{Y} + \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}}\right)$$

Por propiedades de los logaritmos:

$$-\alpha y_1 + (1+R)\,\alpha S = \ln(\beta R) - \alpha \bar{Y} + \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}$$

Resolviendo para S tenemos:

$$S = \frac{y_1 - \bar{Y} + \alpha \frac{\sigma^2}{2}}{1+R} + \frac{\ln(\beta R)}{(1+R)\,\alpha}$$