

# Seguimiento N° 2

## Teoría Macroeconómica I

**Estudiante:** Valentina Andrade de la Horra

**Fecha:** 19 de marzo 2022

**Profesor:** Alexandre Janiak **Ayudante:** Pablo Vega y Bianca Hincapié

En el siguiente seguimiento aprenderé como se aproxima una integral mediante una **cuadratura** numérica.

### Descripción del seguimiento

En general, una integral de una función univariada  $f: R \rightarrow R$  sobre un intervalo  $[a, b]$  se aproxima mediante la siguiente suma ponderada

$$\int_a^b f(z)dz \approx \sum_{i=0}^n w_i \cdot f(x_i) \quad (p)$$

Donde  $x_i$  denotan los nodos de cuadratura y  $w_i$  las ponderaciones de cada nodo. Las cuadraturas de Newton-Cotes aproximan (p) mediante la integral de un polinomio interpolante construido sobre nodos equidistantes en el intervalo  $[a, b]$ .

Las reglas abiertas no incluyen las cotas de los intervalos  $[a, b]$  como nodos de cuadratura y las reglas cerradas si los incluyen.

Considere un número **impar** de nodos  $x$  y las siguientes reglas para ponderaciones  $w_i$ :

$$\text{Trapezoide : } w_i = \begin{cases} \frac{h}{2} & i = \{1, n\} \\ h & i \neq \{1, n\} \end{cases} \quad (q_1)$$

$$\text{Simpson : } w_i = \begin{cases} \frac{h}{3} & i = 1, n \\ \frac{2h}{3} & i \text{ impar, } i \neq 1, n, n : \text{impar} \\ \frac{4h}{3} & i \text{ par, } i \neq 1, n \end{cases} \quad (q_2)$$

Donde  $n$  denota el número de nodos y  $h^2$  corresponde al largo de cada subintervalo interpolado. Note que  $q_1$  y  $q_2$  corresponden a reglas cerradas.

Se pide aproximar las siguientes integrales utilizando las reglas descritas

$$I_1 = \int_0^1 (x^4 + x^3)dx, \text{ donde } f(x_1) = x^4 + x^3$$

$$I_2 = \int_0^1 \sin |\pi x| dx, \text{ donde } f(x_2) = \sin |\pi x|$$

**(a) Aproxime las integrales  $I_1$  y  $I_2$  utilizando las reglas  $(q_1)$ ,  $(q_2)$  con  $n = 31$  nodos.**

En ambos casos podemos decir que el **step size**  $h$  es

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{31} = 0.0323$$

Entonces tendremos tantos  $f(x_n)$  para llegar desde 0 a 1 con puntos con avance en  $h$ . Eso implica que con tendremos que hacer una sumatoria de las funciones desde el límite más bajo al más alto. Utilizando el cambio de variable (A.5) indicado en el anexo concluimos que con la **regla del trapecioide podemos:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2\{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{N-1})\} + f(b)]$$

En el archivo [integracion\\_newton.m](#) he creado una forma de hacer más simple este proceso

```
f = input ('Ingresa la función: ');
N = input('Ingresa el número de nodos: ');
a = input('Ingresa el límite inferior: ');
b = input('Ingresa el límite superior: ');
h = (b-a)/N;
sum = 0; % Para hacer más eficiente el proceso

for i = 1:N-1
    sum = sum + f(a+ i*h); % Notemos que es (A.5)
end
TP = (h/2)*(f(a) + 2*sum + f(b)) ;
fprintf('El resultado usando la regla del trapecioide es que el valor de la integral es: %.6f\n', TP);
```

El resultado usando la regla del trapecioide es que el valor de la integral es: 0.450607

Si pones en tu consola `integracion_newton` pedirá cada uno de los parámetros.

```
%integracion_newton
```

```
Result using trapezoidal rule is: 0.450607
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.391356
```

Comprobemos con parámetros solicitados. Si queremos ver paso a paso calculemos:

**Para  $I_1$**

### 1.Parametrización

```
f = @(x) (x.^4 + x.^3) ;
N = 31;
a = 0;
b = 1;
h = (b-a)/N;
sum = 0;
```

## 2. Regla del Trapecio

```
for i = 1:N-1
    sum = sum + f(a+ i*h);
end
TP = (h/2)*(f(a) + 2*sum + f(b)) ;
fprintf('El resultado usando la regla del trapezoide es que el valor de la integral es: %.6f\n',
```

El resultado usando la regla del trapezoide es que el valor de la integral es: 0.450607

Notemos que el valor es muy cercano al valor teórico que es  $\frac{9}{20} \approx 0.4500$

## 3. Regla Simpson

```
sum1 = 0;
for j = 1:2:N-1
    sum1= sum1 + f(a + j*h);
end
sum2= 0 ;
for k = 2:2:N-2
    sum2 = sum2 + f(a + k*h);
end

SIM = (h/3)*(f(a) + 4*sum1 + 2*sum2 + f(b));
fprintf('Resultado usando la regla de Simpson es: %.6f\n', SIM)
```

Resultado usando la regla de Simpson es: 0.391356

Notemos que el valor también es cercano dado a 0.4500, pero este es menor a la regla del trapecio debido a que el error que se le resta a la estimación en la regla de Simpson (1° y 2°) es mayor.

```
clear
clc
```

## Para $I_2$

### 1.Parametrización

```
f = @(x) sin(abs(x * pi)) ;
N = 31;
a = 0;
b = 1;
h = (b-a)/N;
sum = 0;
```

### 2. Regla del Trapecio

```
for i = 1:N-1
    sum = sum + f(a+ i*h);
end
TP = (h/2)*(f(a) + 2*sum + f(b)) ;
```

```
fprintf('El resultado usando la regla del trapecoide es que el valor de la integral es: %.6f\n'
```

El resultado usando la regla del trapecoide es que el valor de la integral es: 0.636075

Notemos que la aproximación es bastante cercana pues se espera que esta sea de  $\frac{2}{\pi} \approx 0.63662$  y el valor obtenido con la regla del trapecio es 0.636075

### 3. Regla de Simpson

```
sum1 = 0;
for j = 1:2:N-1
    sum1= sum1 + f(a + j*h);
end
sum2= 0 ;
for k = 2:2:N-2
    sum2 = sum2 + f(a + k*h);
end

SIM = (h/3)*(f(a) + 4*sum1 + 2*sum2 + f(b));
fprintf('Resultado usando la regla de Simpson es: %.6f\n', SIM)
```

Resultado usando la regla de Simpson es: 0.633899

Notemos que la aproximación es bastante cercana pues se espera que esta sea de  $\frac{2}{\pi} \approx 0.63662$  y el valor obtenido con la regla del trapecio es 0.633899

(b) Construya las funciones TP y SIM que computen la integral de una función  $f$  de acuerdo a las reglas de  $(q_1)$  y  $(q_2)$  respectivamente. Sus funciones deben recibir como *inputs* al menos una función de  $f(x)$ , la cantidad de nodos de cuadratura  $n$  y los límites de la integral.

```
clear
clc
```

Como podemos notar en el archivo integracion\_newton.m está este proceso, aunque lo he buscado optimizar en una segunda función llamada intnewton(). Ocupemos el primer ejemplo

```
[TP, SIM] = intnewton(@(x) (x.^4 + x.^3),31, 0,1)
```

```
Result using trapezoidal rule is: 0.450607
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.391356
TP = 0.4506
SIM = 0.3914
```

(c) Grafique el error de aproximación de  $I_2$  y  $I_1$  en función de la cantidad de nodos (recuerde utilizar solo nodos en cantidades impares) y replique la figura 1.

```
%Plotting
f = @(x) x.^4 + x.^3;
N = 31;
a = 0;
```

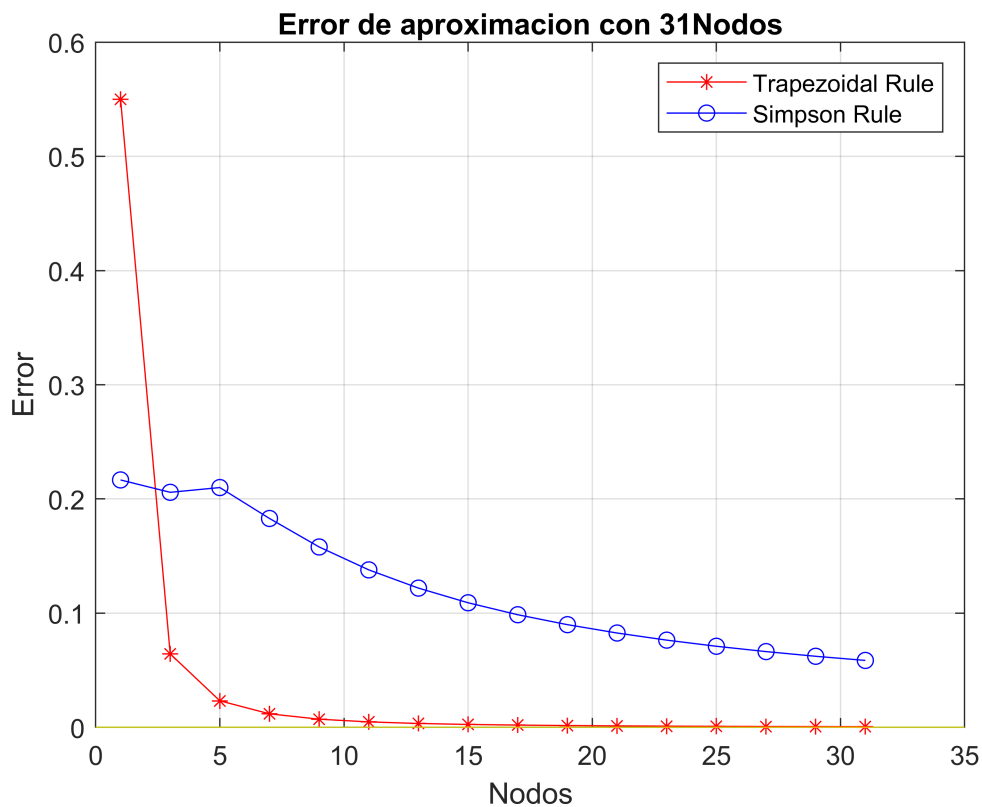
```
b = 1;
```

```
MM = fignewton(f,N,a,b);
```

```
Result using trapezoidal rule is: 1.000000
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.666667
Result using trapezoidal rule is: 0.593750
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.458333
Result using trapezoidal rule is: 0.514403
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.244170
Result using trapezoidal rule is: 0.486328
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450521
Result using trapezoidal rule is: 0.473280
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.240000
Result using trapezoidal rule is: 0.466178
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450103
Result using trapezoidal rule is: 0.461891
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.267071
Result using trapezoidal rule is: 0.459106
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450033
Result using trapezoidal rule is: 0.457197
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.292017
Result using trapezoidal rule is: 0.455830
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450013
Result using trapezoidal rule is: 0.454819
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.312087
Result using trapezoidal rule is: 0.454049
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450006
Result using trapezoidal rule is: 0.453451
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.328045
Result using trapezoidal rule is: 0.452975
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450003
Result using trapezoidal rule is: 0.452592
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.340874
Result using trapezoidal rule is: 0.452278
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450002
Result using trapezoidal rule is: 0.452018
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.351352
Result using trapezoidal rule is: 0.451800
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450001
Result using trapezoidal rule is: 0.451616
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.360044
Result using trapezoidal rule is: 0.451458
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450001
Result using trapezoidal rule is: 0.451323
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.367357
Result using trapezoidal rule is: 0.451205
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450001
Result using trapezoidal rule is: 0.451103
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.373588
Result using trapezoidal rule is: 0.451013
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450000
Result using trapezoidal rule is: 0.450933
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.378957
Result using trapezoidal rule is: 0.450863
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450000
Result using trapezoidal rule is: 0.450800
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.383629
Result using trapezoidal rule is: 0.450744
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450000
Result using trapezoidal rule is: 0.450694
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.387729
Result using trapezoidal rule is: 0.450648
Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450000
```

Result using trapezoidal rule is: 0.450607  
 Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.391356  
 Result using trapezoidal rule is: 0.450570  
 Result using 1/3rd Simpson rule is: 0.450000

```
figure(1)
plot(1:2:N,MM(1:2:N,3), '-r*')
hold on
plot(1:2:N, MM(1:2:N,4), '-bo')
yline(0, 'yellow')
title(['Error de aproximacion con ', num2str(N) 'Nodos']);
xlabel('Nodos');
ylabel('Error');
grid on
legend ('Trapezoidal Rule', 'Simpson Rule')
hold off
```



## Anexo de contenidos

Se aproxima una integral mediante una **cuadratura** numérica, que por definición son como aparece en  $(p)$ , están compuestas por puntos y pesos de casa ese punto, incluyendo un error que hace que LHS no sea igual a RHS.

El planteamiento de una cuadratura numérica incluye

1. Aproximar  $f$  por un polinomio con interpolación de Lagrange

## 2. Integrar

Según como sean los puntos de integración tendremos métodos como Newton-Cotes (puntos arbitrarios con datos experimentales) y Gauss (puntos óptimos). En el primer caso que es de nuestro interés podemos notar que

- Generalmente los puntos son equiespaciados
- Solo hay que determinar los pesos  $\{w_i\}_0^n$  y el error  $E_n$

Según como sean sus extremos tendremos cuadraturas cerradas y cuadraturas abiertas.

Según el orden de una cuadratura, diremos que si la cuadratura se obtiene integrando el polinomio interpolador  $p_n(x)$ , entonces la cuadratura es de orden  $n$  o superior.

### Formulas cerradas de Newton-Cotes

- Puntos  $\{x_i\}_0^n$  arbitrarios
- Solo hay que calcular los pesos  $(w_i)$  y el error  $E_n$

$$w_i = \int_a^b L_i(x) dx \quad (\text{A.1})$$

$$E_n = \int_a^b R_n(x) dx \quad (\text{A.2})$$

- Cuadraturas tabuladas para *puntos equiespaciados*

$$x_i = x_0 + ih = a + ih \quad (\text{A.3})$$

Donde,

$$h = \text{step size} = \frac{\text{end limit} - \text{start limit}}{\text{Number of trapeziums}} = \frac{b-a}{n} \quad (\text{A.4})$$

### Numero de puntos de datos = Numero de trapezios + 1

Podemos hacer un cambio de variable para poder hacer la sumatoria

$$x = x_0 + \alpha h \quad (\text{A.5})$$

Donde los puntos de integración  $x_i = x_0 + ih$  corresponden a  $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n$

### Regla del trapecioide

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2\{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})\} + f(b)]$$

### Regla de Simpson 1 a 3era

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4\{f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + \dots + f(x_{N-1})\} + 2\{f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + \dots + f(x_{N-2})\} + f(b)]$$

## Referencias

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Numerical analysis (9th ed.). Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning.