INSTITUTO DE ECONOMÍA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
Y ADMINISTRATIVAS

Curso : Teoría Macroeconómica I-EAE320B-1
Profesor : Alexandre Janiak
Ayudantes: Pablo Vega y Bianca Hincapie
Fecha : 18 de mayo de 2022
Estudiante : Valentina Andrade y Camilo Pérez
Mail : vandrade@uc.cl y ciperez12@uc.cl

Ciclos de vida del pescador

Tarea N°2

Resumen

En la siguiente tarea tiene como propósito reconstruir el equilibrio parcial y general de un agente representativo (un pescador) en tiempo finito. Para ello, resolveremos el problema dinámico del agente en donde este decide su nivel de consumo actual, su tenencia de activos en el siguiente periodo y su nivel de ocio. Para formalizar el problema utilizaremos ecuaciones de Bellman, que describen la decisión óptima del agente respecto a estas variables. A su vez, el enfoque que sigue el ejercicio permite abordar estas decisiones manteniendo las otras exógenas (como es el caso del salario al inicio) o haciendo inactiva las restricciones de deuda. Dicho esto, es evidente que al final de este informe tratamos de dar luces de un problema más complejo: el agente decide su nivel de consumo y ocio, sujeto a las restricciones de liquidez, presupustarias y temporales. A su vez, resolveremos este problema en equilibrio general, encontrado las tasas de interés de equilibrio y la trayectoria de la oferta laboral. Sin pérdida de generalidad, uno de los supuestos importantes que seguiremos a lo largo del informe es el cumplimiento de esquema no Ponzi, funciones de utilidad CRRA y mercados con competencia perfecta.

Uno de los principales resultados es que, las restricciones financieras tienen un efecto importante sobre las decisiones óptimas de trabajo y consumo. Discutiremos en este contexto, la compresión del efecto sustitución e ingreso, para entender la decisión óptima del agente.

El desarrollo de la tarea también se encuentra en el repositorio en GitHub https://github.com/valentinaandrade/macroeconomics-theory/tree/main/tareas/tarea2

Palabras claves: programación dinámica, restricciones financieras, consumo, trabajo.

1. Equilibrio Parcial

a. Variables de control y de estado

Para entender un problema de optimización en distintos periodos, se debe tener en cuenta que el agente toma decisiones para el periodo actual, pero también para el futuro. Así, las variables de decisión (control) podrán ir pasando a ser variables de estado para el periodo siguiente. Ahora bien, miraremos el problema de maximización en un tiempo *t,* de modo de esclarecer las variables de control y estado para el problema de maximización que inicia en *t.*

Las variables de control son aquellas que el agente **decide** de manera óptima, de modo de maximizar su utilidad en cada periodo. Evidentemente, como la utilidad depende del consumo, esta será una variable de control en cada periodo (c_t). A su vez, el agente mira su decisión de consumo hoy, mirando su consumo futuro. Por ello, al decidir cuanto consume hoy, también **decide** cuánto ahorra este para el consumo en el periodo siguiente. En consecuencia los activos en a_{t+1} también son una variable de decisión.

Las variables de estado son aquellas que, para el agente en el periodo t vienen dadas de decisiones pasadas de este. Por ejemplo, la decisión del ahorro del periodo anterior para el consumo hoy (a_t) es una variable de estado. Esta esta sujeta a la deuda máxima posible $-h$, pero que en este caso no es activa por lo que no tiene ninguna implicancia en el problema.

Por último, en el problema de equilibrio parcial tenemos dos variables que podrían ser de estado pero que para este caso se plantean como exógenas. Una de ellas es el salario dado que el agente podría decidir en cada periodo cuánto de la riqueza se ocupa para consumir o cuanto trabajo realizar para lograr ese nivel de consumo (entendiendo que el retorno salarial proviene de la derivada parcial de la producción respecto al trabajo. Lo mismo ocurre con la tasa de interés. En este caso está dada, pero esta podría ser planteada como una variable endógena de la economía, que el agente 'recibe' en cada t, de la decisión anterior de t. Nuevamente, por ahora este no es el caso, por lo que solo corresponderán a parámetros del problema (igual que la impaciencia β y la elasticidad intertemporal de sustitución σ.)

b. Ecuación de Euler del problema

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \;\; & V(a_t) = u(c_t) + \beta V_{t+1}(a_{t+1}) \\
s.a \;\; & a_{t+1} = a_t(1+r) + w_t - c_t \\
& a_{t+1} \geq -h \\
& c_t \geq 0 \\
& a_1 = 0 \; ;
\end{aligned}
$$

Trabajaremos con solución interior y sin restricciones de liquidez, por lo que las restricciones con desigualdad no estarán activas. Luego calcularemos las condiciones de primer orden, utilizando sustitución y teorema de la envolvente.

Condiciones Necesarias de Primer Orden

$$\frac{\partial}{\partial c_t} V(a_t) = \frac{\partial}{\partial c_t} u(c_t) = \beta \, \frac{\partial}{\partial c_t} V(a_{t+1})$$
$$\frac{\partial}{\partial a_{t+1}} V(a_t) = \beta \, \frac{\partial}{\partial a_{t+1}} V(a_{t+1})$$

Por teorema de la envolvente

$$\frac{\partial}{\partial a_{t+1}} V(a_{t+1}) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial a_t} V(a_t) = \beta \, \frac{\partial}{\partial a_{t+1}} V(a_{t+1}) \, \cdot \, (1+r)$$
$$\frac{\partial}{\partial a_t} V(a_t) = \frac{\partial}{\partial c_t} u(c_t)(1+r)$$
$$\frac{\partial}{\partial a_{t+1}} V(a_{t+1}) = \frac{\partial}{\partial c_{t+1}} u(c_{t+1}) \, \cdot \, (1+r)$$

Reemplazando por lo obtenido

$$\to \frac{\partial}{\partial c_t} u(c_t) = \beta \, (1+r) \, \frac{\partial}{\partial c_{t+1}} u(c_{t+1})$$
$$c_t^{-\sigma} = \beta \, \cdot \, (1+r) \, \cdot \, c^{-\sigma}{}_{t+1} \qquad / \, ()^{-\frac{1}{\sigma}}$$
$$c_t = c_{t+1} \, \cdot \, (\beta \, \cdot \, (1+r))^{-\frac{1}{\sigma}} \qquad (2)$$

Si tomamos la ecuación (2) notaremos que el costo marginal de consumir hoy respecto al retorno marginal de consumir mañana, está descontado por la impaciencia del consumo actual y los retornos que otorga la tasa de interés. Además, si bien tenemos una tasa de sustitución intertemporal $-\sigma$ (que nos da una medida de la capacidad de respuesta de la tasa de crecimiento del consumo a la tasa de interés real, es decir, cómo cambia el consumo presente ante cambios en el futuro), podemos notar que esta es igual para las utilidades marginales. Ahora bien, esta **elasticidad** tiene implicancias para el βR. Por ejemplo, si suben los tipos reales, el consumo futuro puede aumentar debido a la mayor rentabilidad de los ahorros, pero el consumo futuro tambien puede disminuir a medida que el 'ahorrador' decide consumir menos teniendo en cuenta que puede conseguir un mayor retorno de lo que ahorra (es decir, consume). El efecto neto de esta relación sobre el futuro es capturado por este $-\frac{1}{\sigma}$ que es la elasticidad de sustitución intertemporal. Ahora bien, despejando esos elementos que ya conocíamos, podemos notar que aparece un elemento relevante en este análisis del trade off que expresa la ecuación de Euler.

c. Primera aproximación a las trayectorias de ciclo de vida del agente

Resolveremos el problema numericamente asumiendo una tasa de interés complementaria a la impaciencia $r = \frac{1-\beta}{\beta}$

Para ello abriremos el codigo *parte1.m*, el cuál está debidamente comentado paso a paso. Además, dentro de este codigo se ejecutan tres funciones creadas, éstas son:

- crra: función CRRA para utilidad de consumo
- lifefetime: función que calcula el ciclo de vida economico de agente. Para tener más información sobre la función poner en la consola *help lifetime*
- figurelifetime: función que devuelve subplots con la función de distribución del ingreso, trayectoria del consumo, trayectoria de los ahorros y de activos.

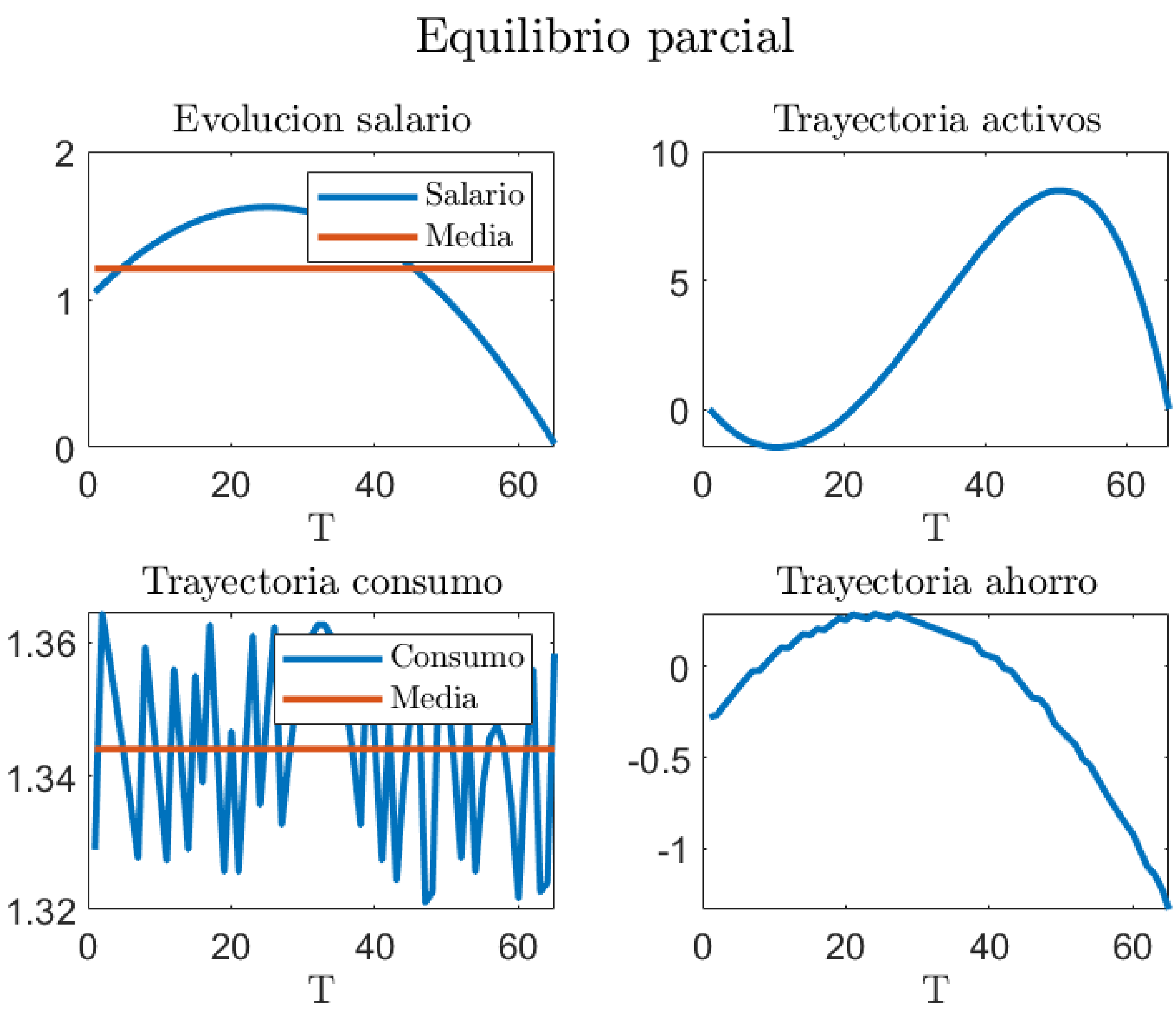
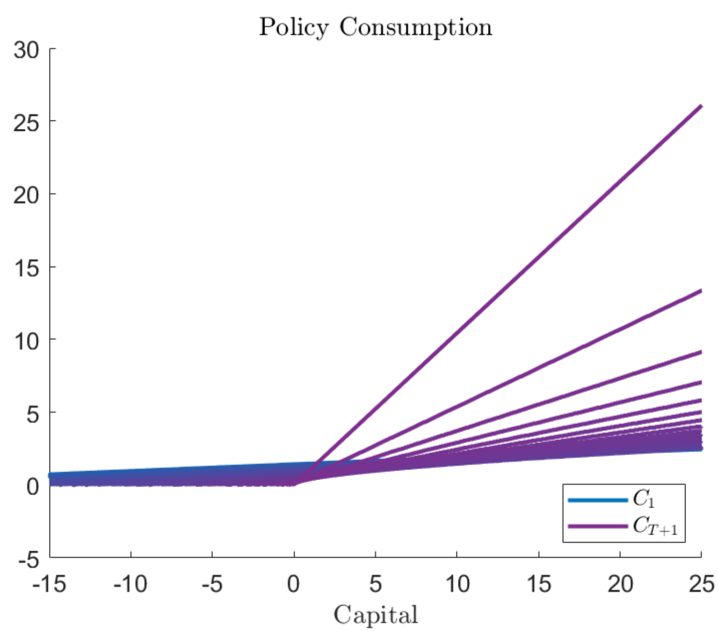


Figura A. Trayectoria del ciclo de vida del agente

A partir de la Figura A podemos decir que respecto a la trayectoria de consumo podemos notar que pese a las variaciones de un periodo a otro, no es monótona ni creciente ni decreciente. Más bien, la sustitución intertemporal de un periodo a otro es bastante similarsi en t=0 el agente consumía menos del promedio, en el siguiente periodo consumía más que el promedio, pero en el subisguiente nuevamente consumía menos. Lo que si se puede destacar es que esos vaivenes en los niveles de consumo van disminuyendo sus rangos y permanencia a medida que el agente vive más periodos. Económicamente tiene sentido: al inicio podemos notar que entre 0 y 20 se dan periodos más grandes de consumo por sobre la media, lo que se puede deber a que durante estos periodos el agente tiene más ingreso salarial posible. Como podemos ver en la trayectoria de activos, al inicio debe endeudarse un poco para consumir (hasta el periodo 10). Esto ciertamente se corresponde con los resultados de la teoría de la renta permanente, donde el agente define su consumo bajo un horizonte finito, evaluando el valor esperado de sus ingresos. Solo en una pequeña parte del inicio de este tramo, el valor esperado del ingreso (línea naranja de figura sobre evolución salarial) es más alta que la función que muestra la distribución de los salarios.

Además, tal como mostró Carrol (2001) en un contexto con mercado financiero perfecto, preferencias CRRA podemos observar que el motivo de ahorro de los jóvenes (hasta cerca del periodo 25) existe una restricción crediticia autoimpuesta donde el agente ahorra para poder suavizar consumo en los periodos que vienen ante la existencia de un ingreso salarial cero o muy bajo (como ocurre cerca ya del periodo 70). Reforzaremos este argumento viendo la policy function del consumo, capital y value function.



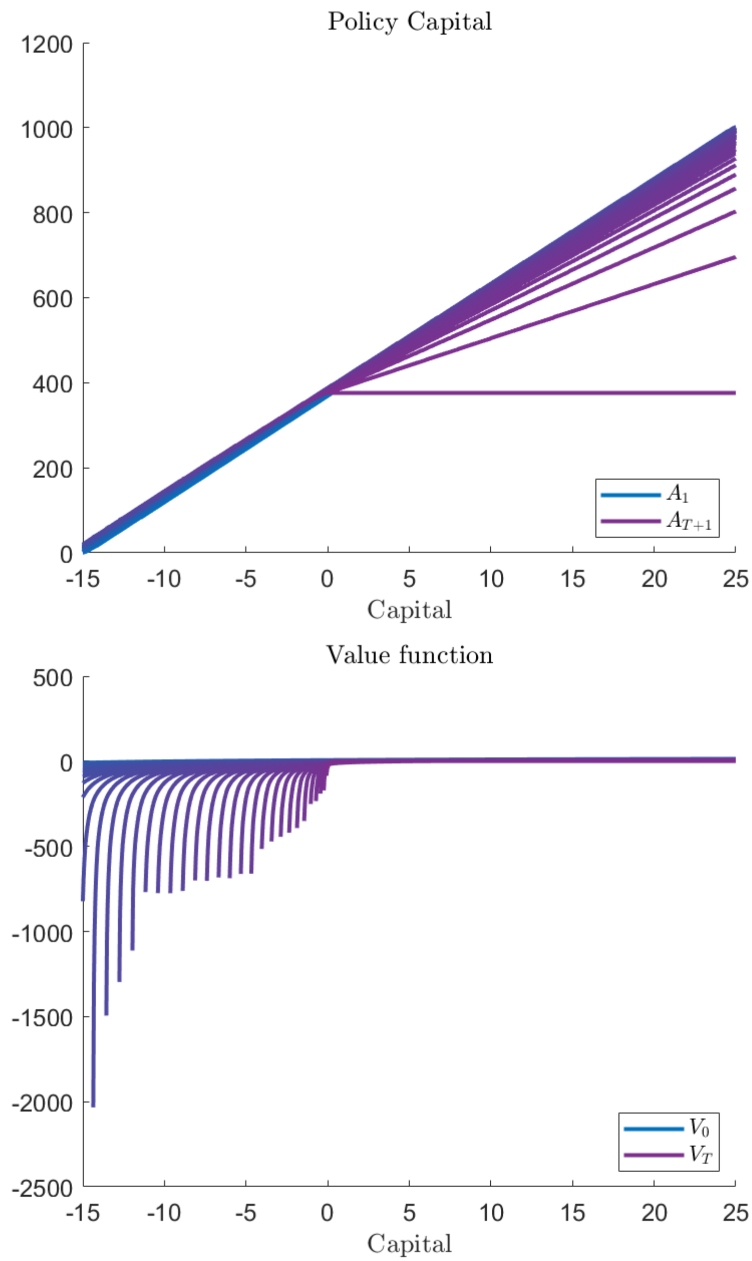


Figura B. Policy y value function del problema del agente

Primero, la figura de la policy function del consumo muestra como, sujeto a la restricción de no negatividad del consumo y las zonas factibles para el consumo, desde el periodo 0 se evidencia la decisión óptima del agente respecto a los activos dispoibles. A medida que más aumente el horizonte del agente, el agente suaviza mucho más su consumo.

d. Cambio en el nivel inicial de los salarios

La evolución salarial no depende solo de la concavidad de la función, esto es a qué velocidad crece y luego decrecen los salarios, sino que también del nivel inicial de los salarios que tienen los agentes, lo que puede ser muy relevante para decidir la trayectoria de consumo y cuánto ahorrar o endeudarse para el consumo futuro. Ésto, debido a que la edad en que los ingresos empiezan a bajar es distinta, junto con que el nivel de ingresos esperados al inicio puede dar más holgura para la liquidez si es que el nivel es mayor. Retomaremos este punto en el último problema de este informe, donde los salarios serán endógenos y la oferta laboral elástica.

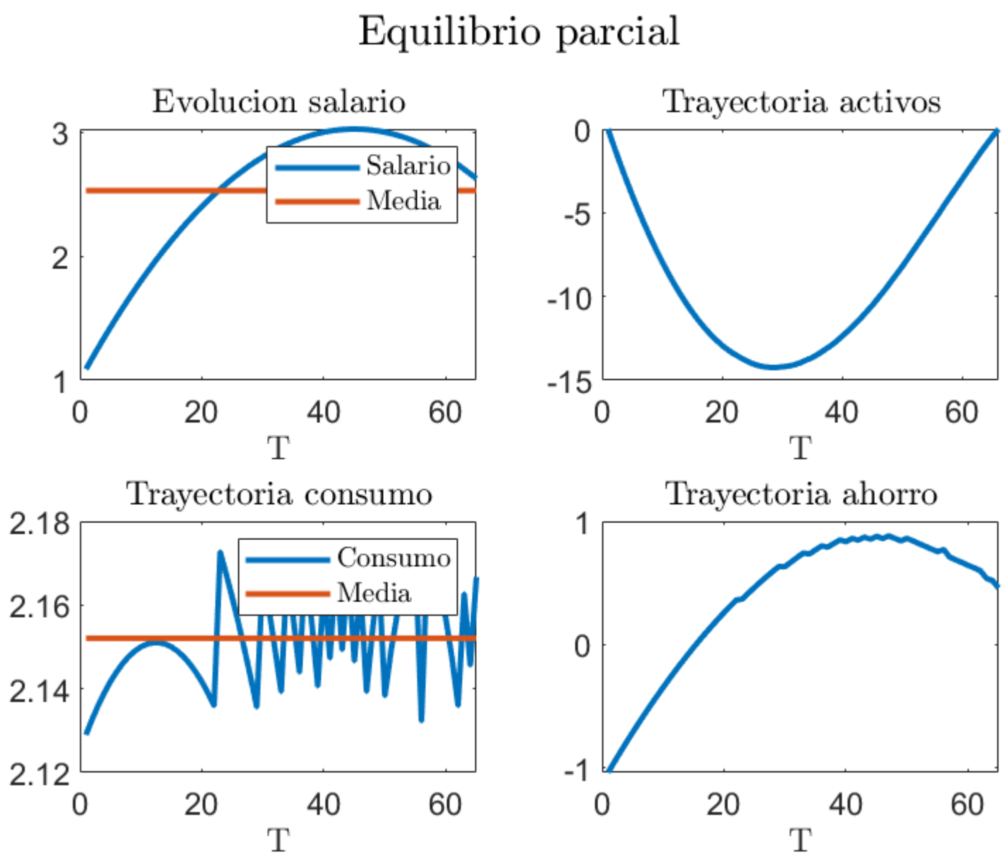


Figura C. Trayectoria de ciclo de vida del agente con trayectoria salarial w_2

Volviendo al punto inicial, gráficamente se ve en el siguiente figura donde la función que define la trayectoria laboral es $w_2 = \frac{-t^2}{10^3} + \frac{t}{10^2} \cdot 9 + 1$ en donde $\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{t^2}{1000} + \frac{9t}{100} + 1\right) = \frac{45-t}{500} \rightarrow t^* = 45$, es decir, desde el periodo 45 de su ciclo de vida el retorno de la productividad marginal del trabajo empieza a ser decreciente y su nivel máximo alcanzado es de 3,025. A su vez, el agente parte con un salario de 1 al inicio de su ciclo y muere con un salario de 2,4 en el periodo 70.

En contraste, para la trayectoria laboral $w_1 = \frac{-t^2}{10^3}+\frac{t}{10^2} \cdot 5+1$ en donde $\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{t^2}{1000}+\frac{t}{20}+1\right) = \frac{25-t}{500} \rightarrow t^* = 25$, es decir, desde el periodo 25 del ciclo de vida del agente el retorno de la productividad marginal del trabajo empieza a ser decreciente y su nivel máximo alcanzado es cercano a 1.5 . Al igual que antes, el agente parte con un salario de 1 al inicio de su ciclo y pero cerca del periodo 70 ya no recibe ingresos.

Como podemos notar, la tendencia de consumo, en general no varía mucho en su forma, solo que particularmente al inicio del ciclo de vida el agente va a consumir un poco menos (hasta el periodo 15) pero no totalmente dado que va a recurrir a deuda para poder alcanzar su nivel de consumo.

Recordemos que de la versión moderna de la teoría de la renta permanente, los agentes deciden su consumo sujeto al valor esperado de sus ingresos (pensemos salariales) y que su ahorro está sujeto a shocks de ingreso. En este caso, la primera parte del ciclo de vida evidentemente el agente está bajo el valor esperado del ingreso, por lo que su consumo será levemente más bajo. Los jovenes que ahorrán de manera autoimpuesta y hacia el final del ciclo los agentes tendrán un ingreso mayor que en los inicios de la vida laboral. De hecho, el ahorro de los agentes desde el punto de inflexión del periodo 45 comienzan a disminuir su ahorro y consumir todo lo que que tienen guardado.

e. Transformaciones afines en los salarios y cambio de parámetros sobre el trade off del consumo en t y t+1

Ahora nuevamente cambiaremos la trayectoria del salario a $w_3 = -10^{-2}t^2 + 7 \cdot 10^{-2}t + 1$ y la tasa de interés a $r = 0.05$ y la aversión al riesgo a $\sigma = 8$. Para hacer comparables los resultados, hemos resuelto el problema del agente con sus múltiples combinaciones, para ver afectivamente cuál es el peso del factor psicológico, económico y la aversión al riesgo sobre la decisión del agente. La representación gráfica de esto está en la Figura D

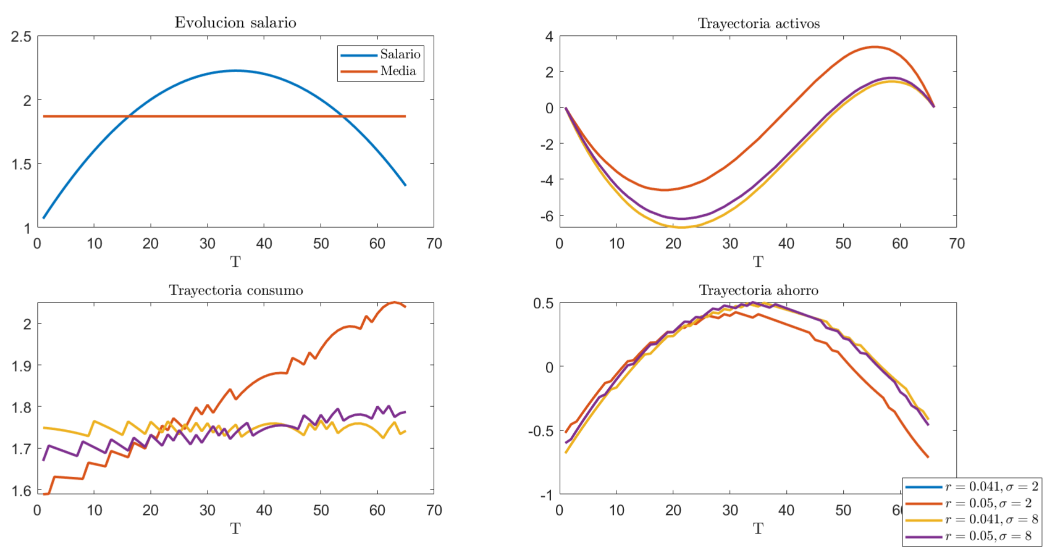


Figura D. Trayectorias del agente a un nivel salarial w_3

Respecto a la Figura D podemos notar que se reportan, para un nivel de salarios dado, tres trayectorias de consumo, ahorro y activos (curva naranja, amarilla y morada). La trayectoria azul no aparece pues, como se puede verificar en su resolución numérica (figuremultiple.m línea 15 y 17) sus valores son iguales. Comentaremos esto más adelante, dada las implicancias de una tasa $r = \frac{1-\beta}{\beta}$. Ahora bien, partamos analizando parte por parte la figura:

1. La trayectoria del consumo muestra que, tanto la trayectoria de consumo con tasa 0.041 y 0.05 suavizan consumo, con una aversión al riesgo alta. En ese sentido, controlando por el salario, notaremos que las trayectorias con menor tasa de interés pero con agentes más aversos al riesgo, se producirá que los agentes consumirán en cantidades similares hoy y mañana. Mientras que en el caso de la trayectoria naranja, notaremos que el agente valora mucho más los retornos en el futuro dado que la tasa de interés es más alta y su aversión al riesgo es mucho más baja, por lo que el agente preferirá consumir menos hoy para asegurar consumo futuro. En ese sentido, podremos notar que $r > \rho$ (ρ es tasa de descuento), por lo que el agente pondera mucho más el factor económico que el psicológico en su decisión (incertidumbre e impaciencia)
2. La trayectoria de activos es coherente con lo que hemos indicado. Notemos que a diferencia de la curva púrpura y amarilla, la trayectoria naranja se endeuda mucho menos en la primera parte de su vida, pues prefiere ahorrar para consumir más en el futuro. Pensemos, además, que la tasa de interés es el precio de los activos, por lo que a ese nivel el precio del activo es mayor que en el caso de la curva amarilla. ¿Pero qué pasa con la curva púrpura? Este agente es más averso al riesgo que el naranja, por lo que inclusive considerando el precio del capital, prefiere consumir igual hoy que mañana. Por lo mismo, su nivel de endeudamiento será mayor en su primera etapa de vida, comparado con el agente naranja.
3. Ahora bien, la trayectoria del ahorro es bastante similar. Solo en el caso del agente naranja es un poco superior en la primera parte del ciclo de vida e inferior en la segunda parte. Probablemente la razón de esa similitud se deba a que si bien al inicio el agente naranja consume menos que el agente amarillo, púrpura y azul (lo que lleva a ahorrar más al naranja), los otros agentes ahorren de igual forma por un motivo precautorio.

Una pregunta que surge evidentemente de este análisis es, ¿qué implicancias tiene $r = \frac{1-\beta}{\beta}$ sobre trayectoria de activos óptima (y sobre el ahorro)? Notamos que la curva azul y la amarrila son iguales, es decir, independiente de la aversión al riesgo los agentes tienen la misma trayectoria. Partiremos primero resolviendo la tasa de interés, y luego discutiremos sus implicancias económicas.

La derivación de $r = \frac{1-\beta}{\beta}$ parte de suponer que tenemos a un agente indiferente entre la utilidad del consumo que da $u\left(c_t\right)$ *y* $u\left(c_{t+1}\right)$, esto implica que los dos factores que determinan la trayectoria de consumo del agente, esto es, el factor psicológico β (impaciencia) y el económico R (precio de los activos), se netean ($\beta R = 1$.) Nosotros además sabemos que $\beta = \frac{1}{1+\rho}$, donde ρ es la tasa de descuento y $R = (1+r)$ donde r es la tasa de interés real. Si reemplazamos estas dos cosas obtenemos

$$\frac{1}{1+\rho} \cdot (1+r) = 1 \leftrightarrow \frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{1+r}$$

Entonces cuando $\beta R = 1$ obtenemos que $\rho = r$, en ese caso $c_1 = c_2$. Y, por lo tanto, no hay incentivo de ahorro ni de consumo.

$$1 + r = \frac{1}{\beta} \leftrightarrow r = \frac{1}{\beta} - 1 \leftrightarrow r = \frac{1-\beta}{\beta}$$

Volviendo a la gráfica notaremos que entonces, tanto el factor económico como el psicológico son igualmente ponderados por el agente. Así, a ese nivel de tasa de interés, independiente de si el agente es más o menos averso al riesgo este será indiferente entre consumir hoy o consumir mañana. Esto no significa que los agentes entonces decidan consumir todo hoy o todo mañana. Solo estamos diciendo que no existe una preferencia por un periodo u otro, pero este agente sigue teniendo por objetivo suavizar consumo (por ello la trayectoria plana entre cada t y t+1) y sigue siendo prudente (y por ello no deja de ahorrar).

2. Equilibrio general

Ahora resolveremos el problema del pescador endogenizando los precios de la economía. Para ello asumiremos que la productividad marginal del trabajo está dada por

$$\omega = \frac{\partial}{\partial L} F(K, L) = (1-\alpha) \left[\frac{K}{\bar{L}}\right]^{\alpha}$$

f. Demostración de la demanda por capital K y el salario ω están dados por:

$$K = \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \bar{L} \qquad (1)$$
$$\omega = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad (2)$$

Primero, debemos partir encontrando las condiciones de primer orden del problema de máximización de beneficios para la firma representativa (pescadores).

Sabemos que la función de producción es $F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, donde p es el precio del producto que las firmas venden, w es el costo de contratar un trabajados adicional y $r + \delta$ es el precio de contratar una unidad adicional de capital. El problema de máximización de la firma se define de la siguiente forma:

$máx_{K,L} \Pi(p, w, r, \delta) = p \cdot F(K, L) - (w \cdot L + (r + \delta)K)$

Y, las condiciones de primer orden:

$$\text{PMG}_k \equiv \frac{\partial}{\partial K}\Pi = \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} - (r+\delta) = 0$$
$$\text{PMG}_L \equiv \frac{\partial}{\partial L}\Pi = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} - \omega = 0$$

Despejando PMG_k obtenemos que

$$\alpha\left(\frac{L}{K^*}\right)^{1-\alpha} = (r+\delta) \leftrightarrow (K^*)^{1-\alpha} = \alpha\,(L)^{1-\alpha} \cdot (r+\delta) \leftrightarrow K^* = L \cdot \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
$$\Rightarrow K^* = L \cdot \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Tomemos K^* e ingresémoslo a la condición de optimalidad del trabajo:

$$(1-\alpha) \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = \omega \leftrightarrow (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K^*}{L}\right) = \omega \leftrightarrow \omega = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{L \cdot \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{L}\right)^{\alpha}$$

Simplifcando llegaremos a que:

$$\Rightarrow \omega = (1-\alpha) \ \cdot \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

g. Resolución numérica con función *fisher*

La función *fisher* entrega como output la resolución numérica del agente y recibe como inputs parámetros tales como r. En nuestro caso ω está definido dentro de la función, dado que su forma funcional no cambia de un ejercicio a otro. Para responder esta pregunta asumiremos que el salario está dado por la ecuación (2), la oferta laboral de los agentes de edad t es **inelástica** y la productividad laboral $\gamma(t)$ se distribuye normal con media $\log(32.5)$ y desviación estándar 0.4.

$$\gamma(t) = \frac{40}{0.4t\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\log(32.5)}{0.4}\right)^2\right]} + 0.4$$

Además, la oferta laboral agregada es una función de la productividad laboral y está dada por:

$$\bar{L} = \sum_{t=1}^{T} m_t \ \gamma_{t+1}$$

De manera más concreta *fisher (3)* es una función que necesita como argumento el horizonte de tiempo del agente, su aversión al riesgo, factor de impaciencia, tasa de interés y restricción de liquidez. Como resultado se obtiene la función de valor, las funciones de política del consumo y capital, las trayectorias del agente en términos del consumo, activos, ahorros y salario.

$$[\mathrm{vt}, \mathrm{Api}, \mathrm{Apf}, \mathrm{Cpf}, \mathrm{lt\_activos}, \mathrm{lt\_consumo}, \mathrm{lt\_ahorro}, \mathrm{gamma}, y] = \mathrm{fisher}\left(T, \mathrm{sigma}, \mathrm{beta}, r, h\right)$$

De manera adicional, se ha creado la función *figurepolicy* que permite obtener gráficas para la resolución numérica de los primeros tres resultados de *fisher.* En caso de dudas, para ambas funciones se puede indicar en la consola *help fisher* y aparecerá una ayuda para su uso.

h. Oferta agregada de activos *A* y demanda agregada de capital *K*

Ahora analizaremos qué pasa en la economía, a nivel agregado. Para ello definiremos la oferta agregada de activos (A) y la demanda agregada de capital (K) como: $A = \sum_{t=1}^{T} m_t \ a_{t+1}$, utilizando las siguientes ecuaciones:

$$K = \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \cdot$$

$$\bar{L} = \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \cdot \quad \sum_{t=1}^{T} m_t \; \gamma_{t+1}$$

Además, en este caso la masa de crecimiento poblacional está definida como $m_t = \frac{1}{T}$, por lo que $A = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \; a_{t+1}$:

$$K = \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \; \cdot \; \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \; \gamma_{t+1}$$

Como resultado obtenemos la figura 2.1, que contiene al lado izquierdo y derecho lo siguiente, respecitivamente:

1. La trayectoria de activos óptima para cada tasa de interés comprendida en el vector $r\,[0, 0.\,1]$.
2. La oferta agregada de activos A y la demanda agregada de capital K en función de un vector de tasa de interés $r[0, 0.\,1]_{\text{1x10}}$

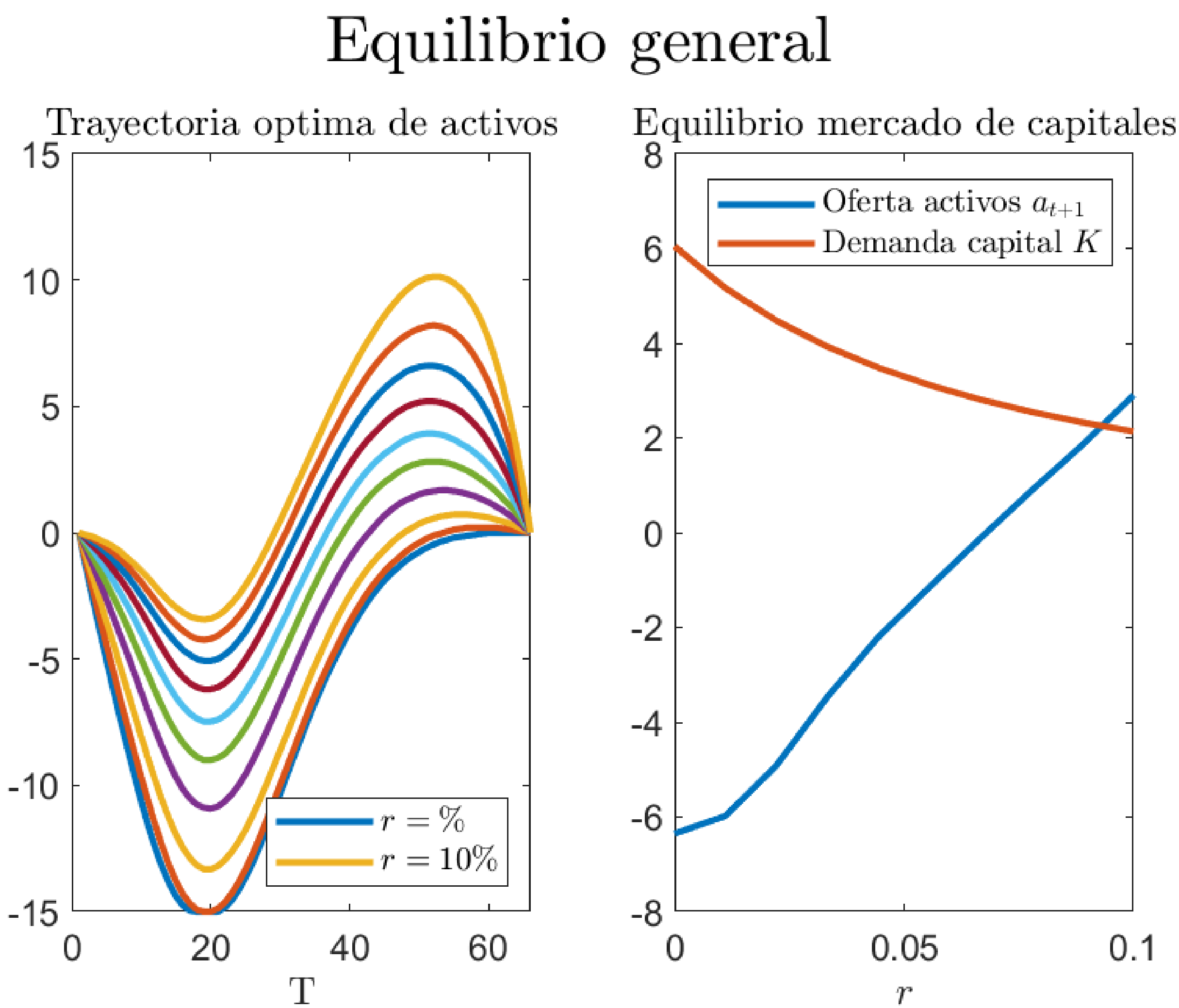


Figura E. Equilibrio general sin restricciones

En la figura de la izquierda tenemos en el eje *y el nivel de activos* y en el eje X los periodos de ciclo de vida del agente. Por ello, en general, el agente en los primeros periodos de ciclo de vida se endeuda (*nivel de activos negativos*) hasta aproximadamente el periodo 20, y luego comienza a acumular activos hasta aproximadamente el periodo 50, donde estos se vuelven a gastar hasta quedar con 0 nivel de activos en el último periodo. Como comentamos en el inciso anterior, esta trayectoria se condice con lo indicado por la teoría de la renta permanente que indica que los agentes deciden su trayectoria de consumo en base al ingreso esperado para todo el ciclo de vida. Como en los primeros periodos obtenemos un ingreso menor (figura 2.2) el agente para suavizar su consumo accederá a deuda para poder lograr dicho objetivo. Así, a medida que mejora la trayectoria salarial, la necesidad de acceso al crédito disminuye incluso llegando a poder ahorrar. Ahora bien, lo distintivo que aporta esta gráfica es que mientras menor es la tasa de interés (línea azul) mayor es la deuda a la que acceden los agentes, a diferencia de tasas que bordean el 10 % (línea amarilla), donde es más costoso endeudarse.

Este resultado es totalmente esperable toda vez que la tasa de interés corresponde al precio del crédito, por lo que su acceso para lograr el objetivo de suavizar consumo (en ausencia de restricciones financieras) es logrado de manera más holgada en contextos de baja tasa de interés. De la figura, es importante destacar las dos líneas superiores las *líneas amarillo y naranja*, pues estas contienen a la tasa de interés de equilibrio, es decir, sea que la demanda de activos es cero o bien la oferta por activos es cero.

De hecho, gráficamente lo podemos ver en la figura de la derecha que representa la oferta y demanda agregada de activos y capital, respectivamente. No es sorpresivo notar que a una mayor tasa de interés, la oferta de activos aumenta pues los mercados financieros se ven beneficiados en términos de retornos por el aumento del precio de los activos (por ejemplo, bonos). Mientras que por el lado de la demanda, esta tiene una pendiente negativa en relación a un aumento de la tasa de interés. Como se puede ver, donde se intersectan ambos mercados corresponde al punto donde el nivel de activos es cero, a una cierta tasa de interés que llamaremos la *tasa de interés de equilibrio.* Como se puede ver en la figura, este valor esta aproximadamente entre el intervalo 0.09 y 0.1.

i. Endogenizando r y ω, encuentre la tasa de equilibrio del mercado de capitales

Para poder encontrar una aproximación puntual a esa tasa de equilibrio ocuparemos el algoritmo de bisección para aproximar la solución. Al igual como sugiere el enunciado, utilizaremos como función objetivo $\frac{A-K}{K}$ el cual va comparando la distancia entre ambos mercados para obtener la solución 0. Esto implica computar un agregado adicional y luego calcular una función objetivo. Adicionalmente, se puede formular el algorítmo de bisección de manera alternativa, utilizando como función objetivo la *oferta agregada de activos* pues, como indicamos arriba, la tasa de interes de equilibrio corresponde a aquella donde la oferta se hace cero (como analizamos para la figura 2.1 de la izquierda y derecha). Además, existen dos formas de computar el algoritmo de bisección (y ambas llegan al mismo resultado). En la primera se implementa un número entero de 100 iteraciones, además de restringuir la solución sí y solo sí $\rho\ (0.041)\ \cdot \rho\ (0.1) < 0$, pues en caso contrario no se puede asegurar la solución. Como resultado, el algortimo nos dará el punto intermedio del n-ésimo intervalo computado por el método. El segundo método, corresponde a comparar los signos de la función objetivo en el intervalo inferior y la función objetivo evaluada en el intervalo medio, y si son de signo igual se redefine el intervalo inferior en términos del intervalo medio. Para el desarrollo de la tarea ocuparemos el primer método, pero también desarrollamos códigos que permiten resolver el problema con el segundo enfoque.

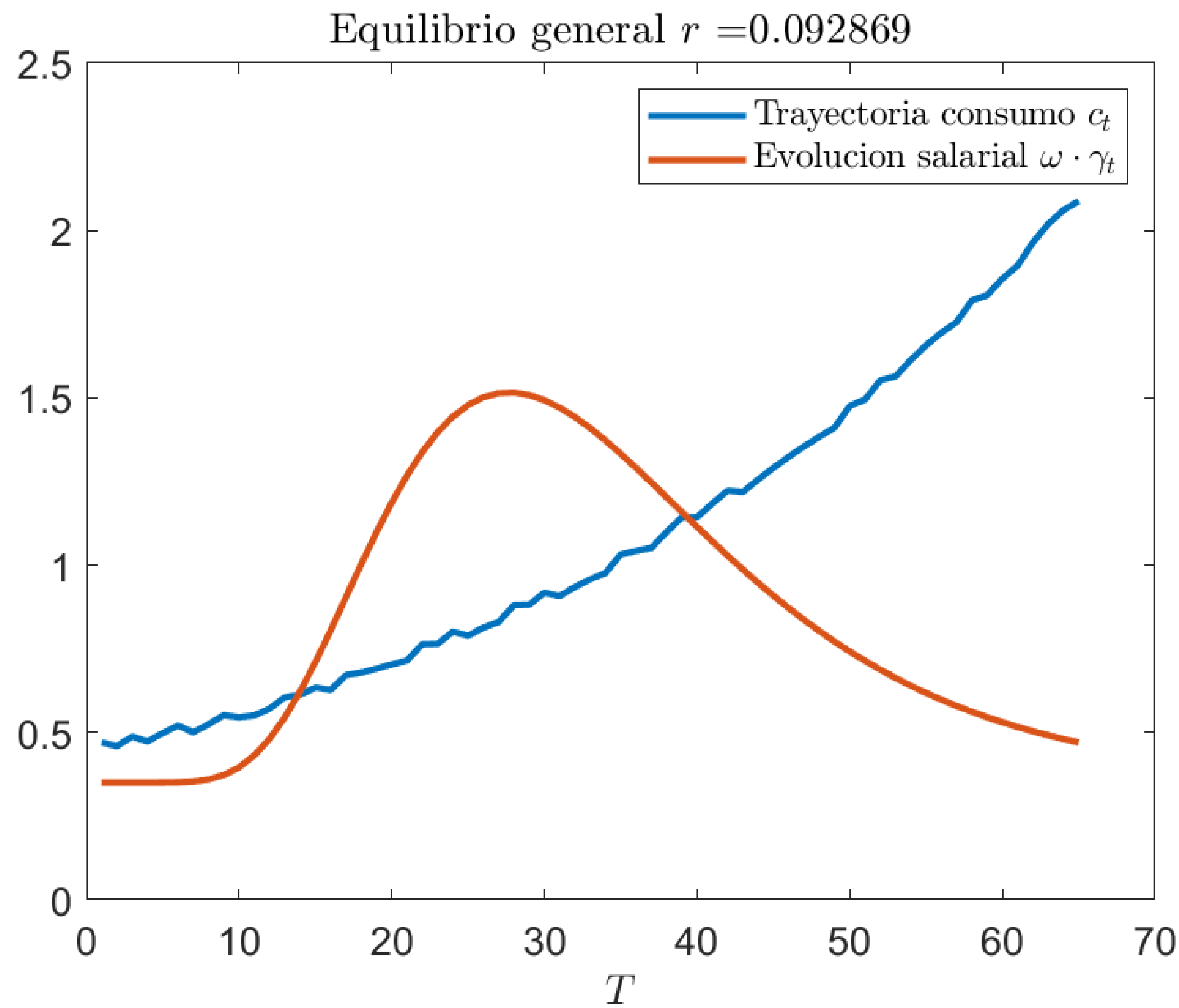


Figura F. Trayectoria salarial y del consumo en equilibrio

Entonces, como se había anticipado en el punto anterior, buscamos encontrar el equilibrio del mercado de capitales donde se iguala la oferta y demanda. Un método puede ser gráficamente, esto es, mirando donde la demanda o la oferta de activos se hacen cero, o bien se intersectan ambas rectas. Otra forma es tomar un intervalo acotado donde sabemos que está la solución, pero no ella exactamente, ir computando la diferencia de las rectas y encontrar cuando estas se hacen cero (o equivalentemente, buscar cuando una de ellas se hace cero), y si no se encuentra dicho valor, volver a acotar el intervalo de estudio. Económicamente tiene sentido pensar que esta tasa es la del equilibrio pues es la situación donde los oferentes de activos (ej. bancos, agentes intermediarios) prestan todos los activos disponibles y los agentes demandantes (ej. hogares) piden todos esos activos pues el precio de los activos maximiza la utilidad para ambos agentes.

A partir de la tasa de interés de equilibrio, presentada en la figura anterior, esta representa la trayectoria de consumo (recta azul) y salarios (curva naranja) de los agentes. Como podemos notar, en el equilibrio y en ausencia de fricciones crediticias, el agente puede cumplir su objetivo de suavizar su consumo. ¿Cómo sabemos esto? La razón es que, dado que el agente define su trayectoria de consumo en base a su ingreso esperado se podría esperar que el consumo siguiera la trayectoria del salario, esto es, una distribución normal. Pero, dado que el agente no tiene restricciones crediticias, en la primera parte de su ciclo de vida podrá acceder a deuda para financiar su consumo presente. Además, dado que estamos en un contexto de competencia perfecta, el salario es igual a la productividad marginal del trabajo, por lo que, tal como indican la economía laboral, los periodos de mayor productividad del trabajador es la edad media (Maestas, Mullen y Powell, 2016), y consecuencia de ello, en estos periodos se podrá ahorrar también para suavizar consumo cuando el salario sea cero o solo se perciban ingresos de las pensiones. La función política del consumo se nota más claramente en la Figura I.A que hemos dejado en los anexos.

j. Implicancias de las fricciones financieras sobre la trayectoria de ciclo de vida económica y equilibrio general

En el apartado anterior hicimos la precisión de que el agente logra *suavizar consumo* sujeto a que estamos en ausencia de restricciones financieras. Ahora bien, ¿podemos sostener estos mismos resultados en un contexto de fricciones financieras? Durante los años 60, distintos economistas criticaron la teoría de Friedman sobre todo respecto a los supuestos esbozados respecto a como se proponía que era la función del consumo y cómo era realmente en los datos (cf. Mayer, 1972; cf. Friend y Kravis, 1957). Parte importante de los argumentos residían en que no es posible (1) asumir la propensión marginal a consumir es constante, (2) que la propensión marginal a consumir del ingreso transitorio es cero y que (2) la propensión marginal a consumir es tan baja. Así y todo, autores como Ando, A., & Modigliani, F (1963), Hall (1978) y más recientemente, Campbell y Mankiw (1991), salieron al paso de estas críticas haciendo una modificación de la teoría suponiendo que los resultados de Friedman eran ciertos bajo un contexto de fricciones financieras.

Ante ello, el los siguientes dos apartados tomaremos estas ideas para analizar los resultados gráficos de la Figura j, de cómo cambia la (1) la trayectoria de activos óptima, (2) la tasa de interés de equilibrio, (3) la trayectoria de consumo óptima (junto al ingreso) y (4) la correlación consumo-ingreso **en función de la restricción de liquidez.**

En primer lugar, la trayectoria óptima de activos se ve severamente afectada. Por un lado, en ausencia de restricciones los agentes podrán endeudarse en los primeros periodos de su ciclo de vida (curva amarilla decreciente hasta el periodo 20), luego pagar la deuda y ahorrar (curva creciente hasta periodo 50), y luego gastar de esos ahorros para morir sin activos. Por otro lado, a medida que aumentan las restricciones financieras (la máxima expresión es la recta azul), el agente no tendrá menos posibilidades de endeudarse y ahorrar, o en otras palabras, participar del mercado de capitales. Esto es consistente con la trayectoria de consumo: antes habíamos indicado que el agente, gracias al acceso del mercado financiero iba a poder suavizar su consumo (notemos las rectas planas en la figura de la trayectoria de consumo). Ahora, el agente sigue una trayectoria de consumo consistente a su ingreso, y por ello, el resto de las trayectorias de consumo siguen una distribución normal. De modo de simplificar la gráfica, solo se muestra una trayectoria salarial pues esta al ser definida por la tasa de interés de equilibrio (y esta sensible a las restricciones de liquidez), tiene muchas trayectorias posibles pero con la misma distribución (véase la ecuación de $\omega \cdot \gamma(t)$, donde ω depende de r y $\gamma(t)\ \ N(\log(32.5), 0.4)$. Con esto último anunciamos un punto relevante, y es que, la tasa de interés de equilibrio se ve afectada por las restricciones de liquidez. A medida que aumentan restricción de liquidez o endeudamiento, la tasa de interés de equilibrio va a aumentar. La intuición es que esto opera directamente como una limitante al acceso del crédito (como analizamos en la trayectoria óptima de activos), es decir, la oferta agregada de activos se va a ver restringuida, y a un mismo nivel de demanda, los precios se los activos van a subir (figura adicional de anexos de como se contrae la oferta). En síntesis, la tasa de interés de equilibrio va a aumentar ante el nuevo equilibrio entre demanda y oferta.

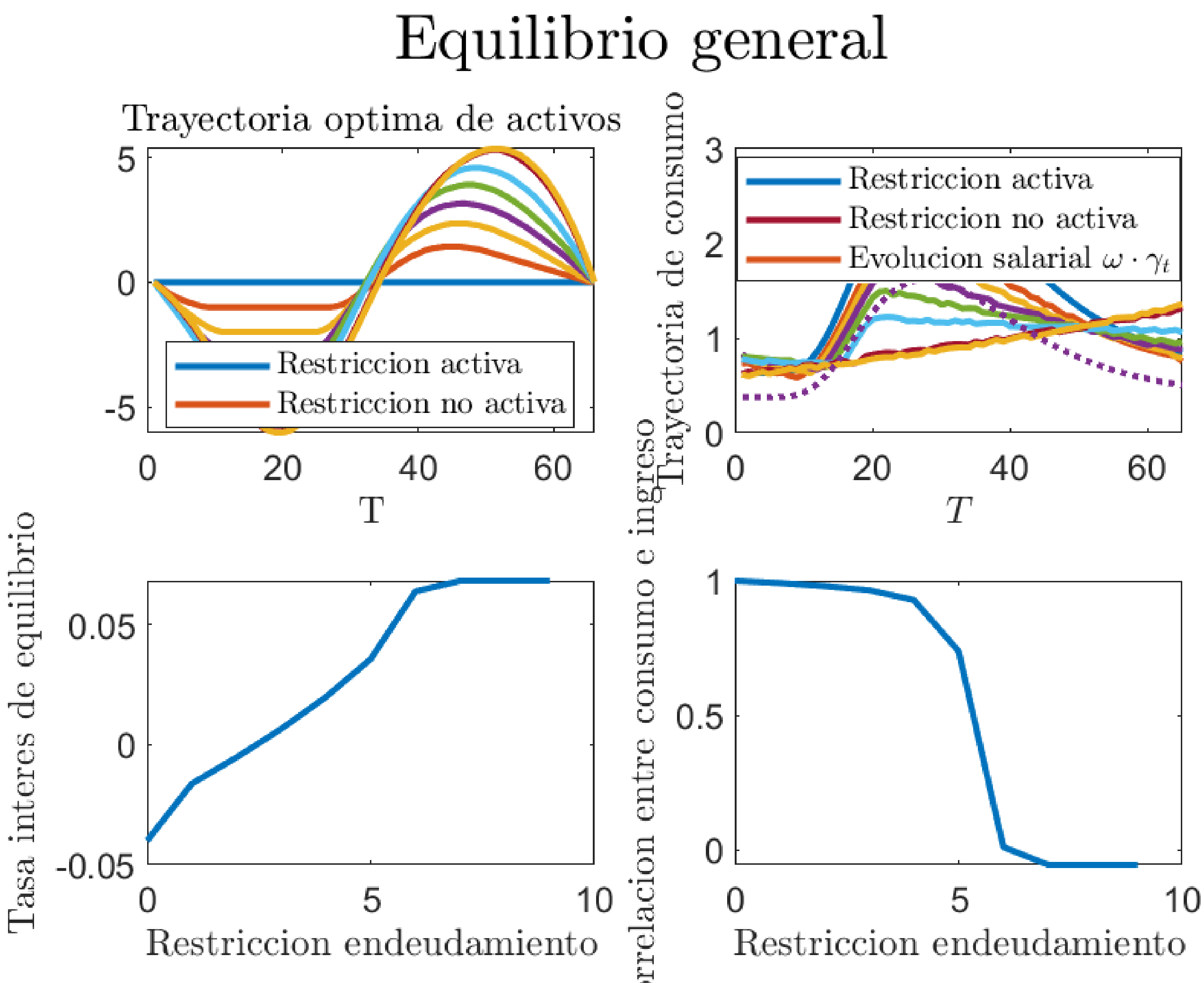


Figura G. Equilibrio general y trayectorias de ciclo de vida con restricciones

k. Relación entre consumo e ingreso

Pensemos en las fuentes de financiamiento del consumo: ingresos, ahorro o deuda. Si el agente nace sin activos, su posibilidad de consumo básicamente se define por su nivel salarial y su capacidad de endeudarse (y luego pagar esa deuda). Si el agente no puede endeudarse (restricción de liquidez en 0), entonces el consumo depende plenamente de los ingresos. A medida que la restricción de liquidez se va flexibilizando, el agente podrá acceder a creditos para suavizar consumo. Con ello, la relación entre consumo e ingresos va disminuyendo en tamaño. Esta relación es muy expresiva de cómo se da la trayectoria de consumo con posibilidad acceder a deuda y sin la posibilidad. En el último caso notaremos, en general, trayectorias de consumo que se asimilan a las del ingreso. Mientras que en contextos con posibilidad de deuda, el agente podrá endeudarse para poder suavizar consumo. Ahora bien, esto podría darse solo en la primera parte de la trayectoria del agente. ¿Por qué? La razón es que, si las preferencias del agente así lo indican (por ejemplo, podría ser que $r > \rho$), el agente podría decidir ahorrar parte de sus ingresos salariales para consumir mañana (un ahorro autoimpuesto o *buffer stock* planteado por Christopher Carrol en múltiples de sus investigaciones). Así también, podría decidir ahorrar precautoriamente de su salario ante la posibilidad de un ingreso salarial cero al final de su ciclo de vida. En síntesis, la correlación consumo e ingreso también dependerá de la forma funcional del consumo del agente, pues parte de ese consumo factible actual podría ser transferido a consumo factible futuro vía el ahorro. En este caso se da que el agente, en el equilibrio, decidiría ocupar todo de su salario para poder obtener mayor utilidad.

Si la tasa de interés *de equilibrio* fuera más baja, eso implicaría que por el lado de la oferta los mercados están más dispuestos a prestar a una menor tasa de interés, mientras que por el lado de la demanda esta es la tasa máxima a la que están dispuestos los agentes a tomar deuda. Si es que las instituciones bancarias no decidieran poner más límites en términos de restricciones (por ejemplo, requisitos de niveles de ingresos), entonces los agentes tendrán más posibilidad de acceder a crédito en el corto plazo. Pero en el largo plazo, ese bajo precio será el precio que se les paga por sus ahorros. Por lo que, suponiendo que esa baja tasa no corresponde a un shock, y es totalmente anticipada, entonces la correlación del consumo e ingreso respecto a las restricciones podría bajar en intensidad (nuevamente, manteniendo constante la restricción de liquidez, pensando en el corto plazo y a una tasa de interés esperada).

Nos gustaría cerrar este apartado aportando con el análisis de Carrol respecto a la relación entre ingresos y consumo. Como analiza Carrol (2001), a medida que la riqueza se vuelve más grande, la pendiente del consumo en tiempo infinito se vuelve cada vez más similar a la pendiente del consumo con *perfect foresight.* Esto es, como la riqueza (por ejemplo, medida en ingresos) se vuelve muy grande, la propensión marginal a consumir es la misma que en un enfoque de horizonte perfecto sin incertidumbre. La razón de porqué ocurre esto se debe a que para ciertos niveles muy grandes de riqueza (wealth approches infinity), la proporción de **consumo futuro** que debería ser financiada con fondos que serán **inciertos** hace que esa **incertidumbre sea irrelevante para la decisión del consumo.** Si bien en este caso no analizamos el efecto de la incertidumbre en la decisión, si podemos hipotetizar que si extendemos este análisis para infinitos periodos es probable que esta relación positiva y fuerte entre consumo e ingreso siga siendo robusta, independiente de todos los *peros* que pusimos a lo largo del análisis.

3. Crecimiento poblacional

Ahora, para el problema del pescador, analizaremos como afecta el crecimiento poblacional a la tasa de interés de equilibrio y a la trayectoria de activos óptima. Para esto, asumiremos que la masa de agentes m_t cambia de acuerdo a una tasa de crecimiento g. El tamaño de la población está normalizado a 1 por lo cual el tamaño de cada grupo etario está dado por:

$$m_t = \frac{(1+g)^{T-t}}{\sum_{t=1}^{T}(1+g)^{T-t}} \tag{1}$$

l. El problema del crecimiento poblacional

(k) Se solicita reportar un subplot con (i) el efecto del crecimiento poblacional sobre la tasa de interés de equilibrio (utilizando un vector $g[0, 0.01]_{[1x11]}$) y (ii) la trayectoria de activos para cada tasa de crecimiento poblacional. Interprete. Asuma que $h \to \infty$.

Primero, desarrollaremos la expresión m_t que corresponde a la masa de sujetos en cada período, esta se estima utilizando las distintas tasas de crecimiento propuestas en el ejercicio, para este caso analizaremos 11 tasas de crecimiento poblacional distintas (g), cada una de estas afectara la masa de sujetos en cada período t. Por lo tanto m_t, sera una matriz de [11x65], en cada fila la masa de agentes se ira ajustando en función de la tasa de crecimiento dada, afectando a cada período la masa. En la siguiente figura se muestra un resumen de la información contenida en m_t, lo primero que se aprecia es que cuando el crecimiento de la población es cero, entonces la masa de sujetos será constante en el tiempo ($g = 0 \implies m_t = 1/T = 0.0154$), este es el mismo caso evaluado en la pregunta anterior. Luego, a medida que aumenta el crecimiento poblacional la masa de agentes va aumentando cada vez más en los primeros 30 períodos y luego decrece la masa de agentes, respectivamente. El motivo de porque al principio la masa es mayor y luego decrece se debe a que el tamaño de la población esta normalizado a 1, por lo tanto se debe cumplir con $\sum_t m_t = 1$ para las 11 filas, es decir para las distintas tasas de crecimiento evaluadas.

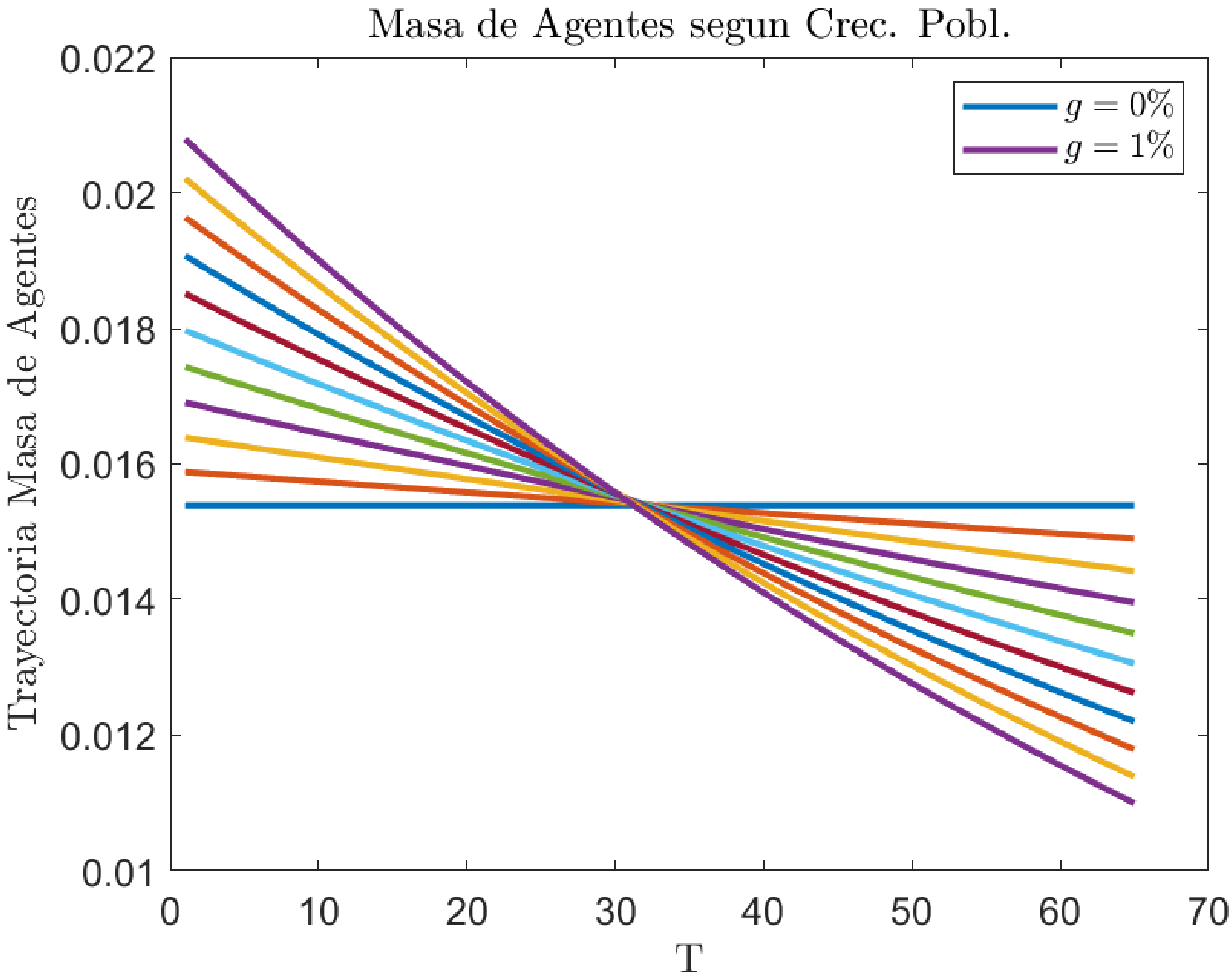


Figura L. Trayectoria de la masa de población según crecimiento poblacional g

Para estimar el efecto del crecimiento poblacional sobre la tasa de interés de equilibrio y sobre la trayectoria de activos óptima, se desarrolla la función *bisecp3k*, esta es la función de algorítmo de bisección modificada en relación a la utilizada en la pregunta anterior. La función, necesita como argumentos de entrada, la cota inferior, cota superior (tasas de interés inferior y superior) y la masa de sujetos (m_t). Cómo resultado se obtiene: la tasa de equilibrio óptima, la trayectoria de activos óptima y el error de estimación.

En la siguiente figura se muestra los dos ejercicios solicitados. La primera, muestra la relación entre el crecimiento de la población y la tasa de interés óptima obteniendo una relación positiva. Es decir, a mayor crecimiento de la población, la tasa de interés de equilibrio es mayor. Este resultado es coherente con la teoría económica, puesto que al suponer que la tasa se define de forma endógena, esta será un resultado del equilibrio entre la masa de agentes que ahorran y los que se endeudan. A medida que la masa de agentes aumenta (por mayor crecimiento poblacional), la demanda por activos será mayor, por lo tanto los precios de los activos suben y con ésto la tasa de interés de equilibrio aumenta.

La segunda figura muestra la trayectoria de los activos óptima para cada una de las tasas de crecimiento poblacional evaluadas. La interpretación es análoga a lo anterior, a medida que es menor la tasa de crecimiento de la población la tasa de interés de equilibrio será menor, por lo tanto los agentes se endeudarán en una mayor proporción durante la primera mitad de su ciclo de vida. Lo anterior, se explica porque el costo de la deuda para este caso es menor (debido a la menor tasa de equilibrio). Luego, en la segunda mitad de su ciclo de vida, estos sujetos ahorrarán en una menor proporción, ya que el beneficio de ahorrar un peso hoy llevado al futuro será menor debido a la menor tasa de interés. Analizando el otro extremo, donde la tasa de crecimiento poblacional es mayor (1 %), la tasa de interés de equilibrio será mayor, por lo tanto, para los agentes sera más costoso endeudarse y mas beneficioso ahorrar. Es así como en la primera mitad de su ciclo de vida los agentes se endeudaran menos y luego en la segunda mitad ahorraran en una mayor proporción.

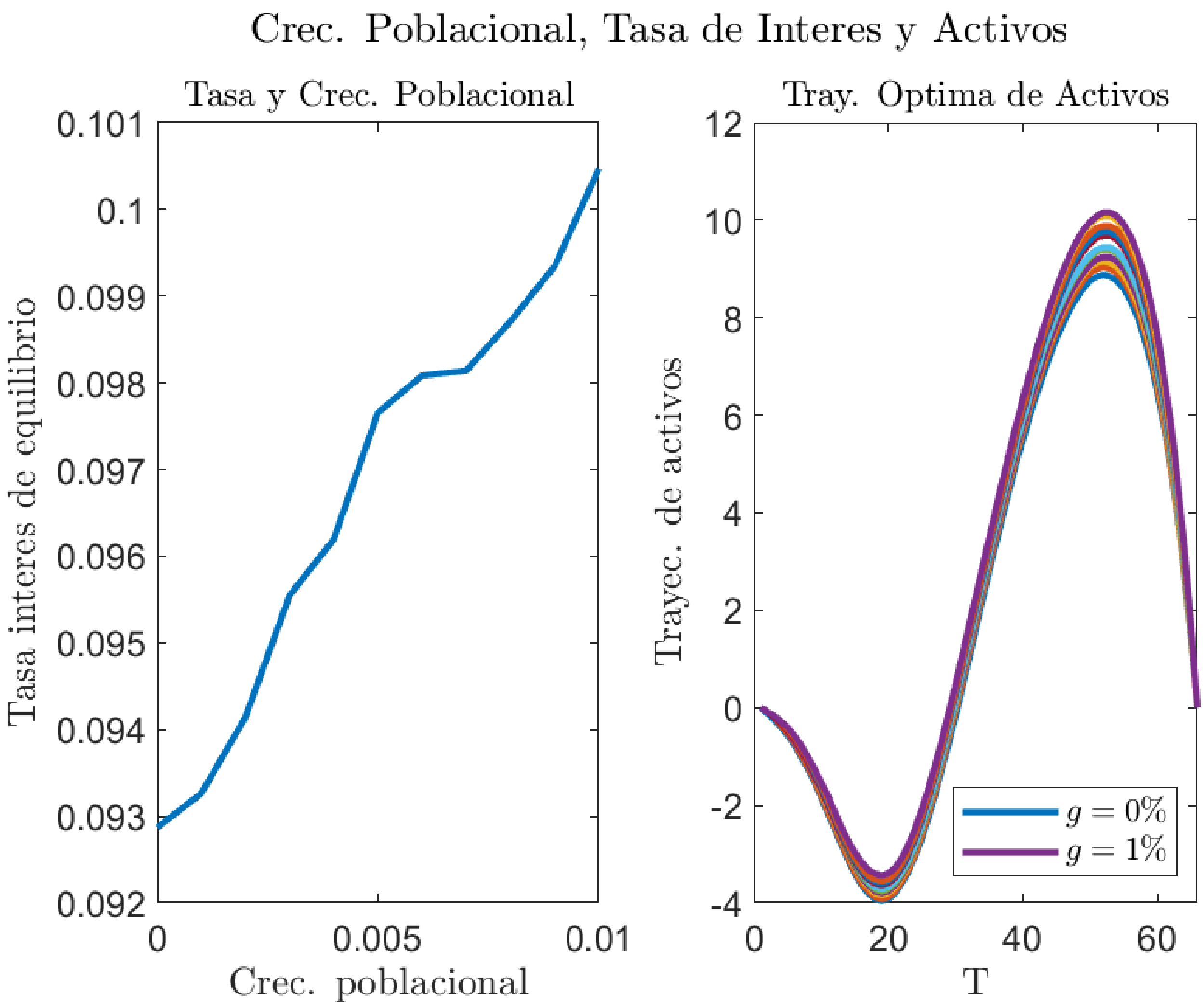


Figura L. Tasa crecimiento población, tasa de interés y activos

4. Oferta laboral

El mercardo de capitales y laboral están fuertemente relacionados (Ball, 1990). En este último apartado, abordaremos el problema del pescador desde la decisión que toma en el mercado laboral respecto al tiempo de uso en trabajar u ocio, decisión relevante que define sus niveles salariales disponibles para consumo. Cada agente decide una combinación de horas de trabajo y ocio que maximiza su nivel de satisfacción. Para los agentes que están trabajando, el costo de oportunidad de una hora adicional de ocio es el salario y la utilidad del agente es creciente a medida que destina mayor numero de horas a ocio, pero a la vez si decide no trabajar pierde salario para poder consumir por lo que disminuye su utilidad. En términos de la ecuación de Bellman podemos decir que el problema se escribe como

$$\begin{aligned}
&\max_{\{a_{t+1}\ \ c_t\ \ l_t\ \ n_t\}} V(a_t) = u(c_t) + \varphi \log(l) \ + \ \beta V_{t+1}(a_{t+1}) \\
&s.a \quad a_{t+1} = a_t(1+r) + n \cdot w_t - c_t \\
&\qquad l_t + n_t = 1 \\
&\qquad a_{t+1} \geq -h \\
&\qquad c_t \ \geq 0 \\
&\qquad 1 \geq \ l_t \ , n_t \geq 0 \\
&\qquad a_1 = 0 \ ;
\end{aligned}$$

Al igual que en el apartado 1, trabajaremos con soluciones interiores, por lo que las restricciones de no negatividad y de esquema no ponzi no se resolverán algebráicamente en este apartado, sino que solo se incluirán en la resolución numérica (para más detalle véase anexo donde se resuelve por método de KKT). Dicho esto, luego de la sustitución de la última restricción en la función de valor, obtenemos el siguiente Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \log(c_t) + \varphi \log(l) \ + \ \beta V_{t+1}(a_{t+1}) - \lambda \ (a_{t+1} - a_t(1+r) - (1-l_t) \ \cdot w_t + \ c_t)$$

Las condiciones necesarias de primer orden, respecto a las variables de control

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial c_t}\mathcal{L} &= \frac{\partial u(c_t)}{\partial\, c_t} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial}{\partial a_{t+1}}\mathcal{L} &= \beta \frac{\partial V_{t+1}(a_{t+1})}{\partial\, a_{t+1}} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial}{\partial l_t}\mathcal{L} &= \varphi \frac{\partial u(l_t)}{\partial l_t} - \lambda w_t = 0
\end{aligned}$$

Por consiguiente, las condiciones de optimalidad quedan escritas como

(1) Condición de optimalidad del consumo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial c_t}\mathcal{L} &= \frac{\partial}{\partial c_t} u(c_t) = \beta \ \frac{\partial}{\partial c_t} V(a_{t+1}) \\
\frac{\partial}{\partial a_{t+1}}\mathcal{L} &= \beta \ \frac{\partial}{\partial a_{t+1}} V(a_{t+1})
\end{aligned}$$

Por teorema de la envolvente

$$\frac{\partial}{\partial a_{t+1}} V\left(a_{t+1}\right) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial a_t} V\left(a_t\right) = \beta \frac{\partial}{\partial a_{t+1}} V\left(a_{t+1}\right) \cdot (1+r)$$
$$\frac{\partial}{\partial a_t} V\left(a_t\right) = \frac{\partial}{\partial c_t} u\left(c_t\right)(1+r)$$
$$\frac{\partial}{\partial a_{t+1}} V\left(a_{t+1}\right) = \frac{\partial}{\partial c_{t+1}} u\left(c_{t+1}\right) \cdot (1+r)$$

Reemplazando por lo obtenido

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial c_t} u\left(c_t\right) = \beta \ (1+r) \ \frac{\partial}{\partial c_{t+1}} u\left(c_{t+1}\right)$$
$$c_t^{-1} = \beta \cdot \ (1+r) \ \cdot c^{-1}{}_{t+1}$$
$$c_{t+1} = \beta (1+r) \cdot c_t$$

(2) Condición de optimalidad del trabajo

$$\varphi \frac{\partial u\left(l_t\right)}{\partial l_t} = \lambda w_t \quad , \lambda =$$
$$\frac{\partial u\left(c_t\right)}{\partial \ c_t}$$

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial \ c_t} \cdot w_t = \varphi \frac{\partial u(l_t)}{\partial l_t}$$
$$\frac{w_t}{c_t} = \frac{\varphi}{l_t}$$
$$l_t = \frac{\varphi \cdot c_t}{w_t}$$

Esta nueva condición que tenemos relaciona costo marginal de trabajar en términos del retorno marginal del ocio. Lo interesante de esta relación es que podemos a la vez ver dos efectos sobre la oferta laboral. El primero es el efecto sustitución, pues para un nivel dado de consumo si sube el salario, el precio del ocio subirá respecto al consumo, por lo que subirá el tiempo dedicado al trabajo para poder consumir más. El segundo es el efecto ingreso pues si el salario sube, se tienen más dotaciones para subir consumo y tiempo en ocio, por lo que el agente disminuirá su tiempo dedicado al trabajo. La relevancia de φ es que nos da la elasticidad del consumo respecto al salario, para entender la oferta laboral.

Esta intuición económica que hemos dado la extenderemos a un análisis donde las restricciones de liquidez están activas y discutiremos el efecto que estas tienen sobre la oferta laboral.

o. Análisis sin restricciones de liquidez

Para entender qué ocurre en el contexto con restricciones de liquidez, primero presentamos el escenario de la economía en ausencia de estas. En la Figura O presentamos la trayectoria de los agentes en un contexto de oferta laboral elástica, y donde la tasa de equilibrio es de aproximadamente 4,77 %, es decir $\beta \cdot R > 1$. Así, el ciclo de vida del agente es coherente con lo que hemos discutido hasta ahora en este informe: el factor psicológico de impaciencia es menos preponderante que el factor económico del retorno por ahorrar hoy y consumir mañana, por lo que la trayectoria de consumo será creciente de *t* a *t+1.* Para suavizar consumo, el agente primero deberá pedir prestado activos, dado que en los primero periodos su salario es más bajo que el ingreso esperado (ingreso permanente). Ahora bien, a diferencia de los apartados anteriores, el cambio en los salarios si tiene un impacto sobre la oferta laboral como habíamos comentado antes (efecto sustitución e ingreso).

El efecto total sobre la oferta laboral puede ser analizado a partir de la combinación de ambos efectos: la oferta laboral crece cuando el efecto sustitución es mayor que el efecto ingreso, mientras que decrece cuando el efecto ingreso es mayor que el efecto sustitución. Como podemos notar, el efecto sustitución domina en la primera parte de la vida del agente, esto es, que cuando aumenta el salario el agente decide aumentar sus horas de trabajo para mantener sus niveles de consumo. Ahora bien, es incorrecto pensar que la disminución de la oferta laboral se da por el efecto ingreso pues eso implicaría que el valor del ocio excede el valor del salario en el mercado laboral. Lo bueno es que tenemos la última figura de la trayectoria salarial para evidenciar que los salarios no siguen subiendo cuando la oferta cae, sino que más bien este salario también empieza a decrecer. Esta primera descripción nos detalla una de las principales diferencias entre una oferta laboral inelástica (solo definida por parámetros exógenos y que es fija) y elástica (una que varía según la decisión óptima que enfrentan los agentes).

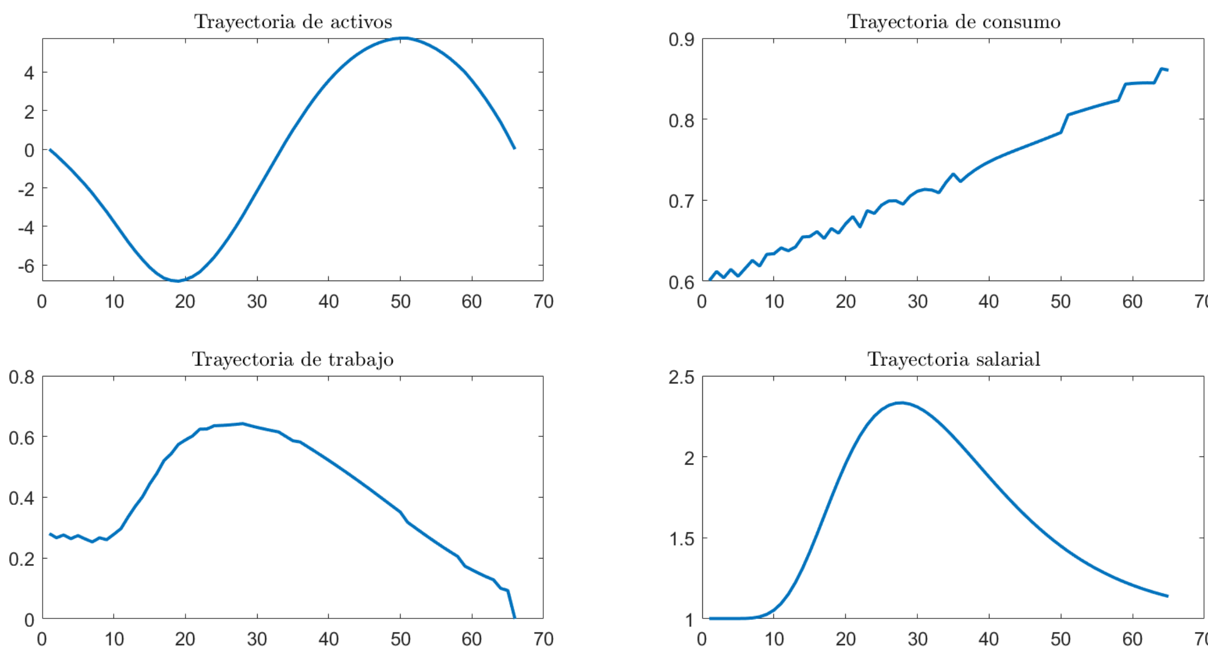


Figura O. Trayectorias del agente sin restricciones

p. Trayectorias laborales en contextos de fricciones financieras

Ahora bien, estas trayectorias pueden enfrentar escenarios más complejos de analizar en un contexto de restricciones crediticias. La razón: el consumo ya no estará *dado* pues el acceso al credito afectará la posibilidad de suavizar el consumo por esta vía. Así, un canal presupuestario que puede seguir sustentando ese objetivo primordial del agente será la decisión por *ocio* o *consumo* (*Consumption-Leisure Model Choice*). La Figura P

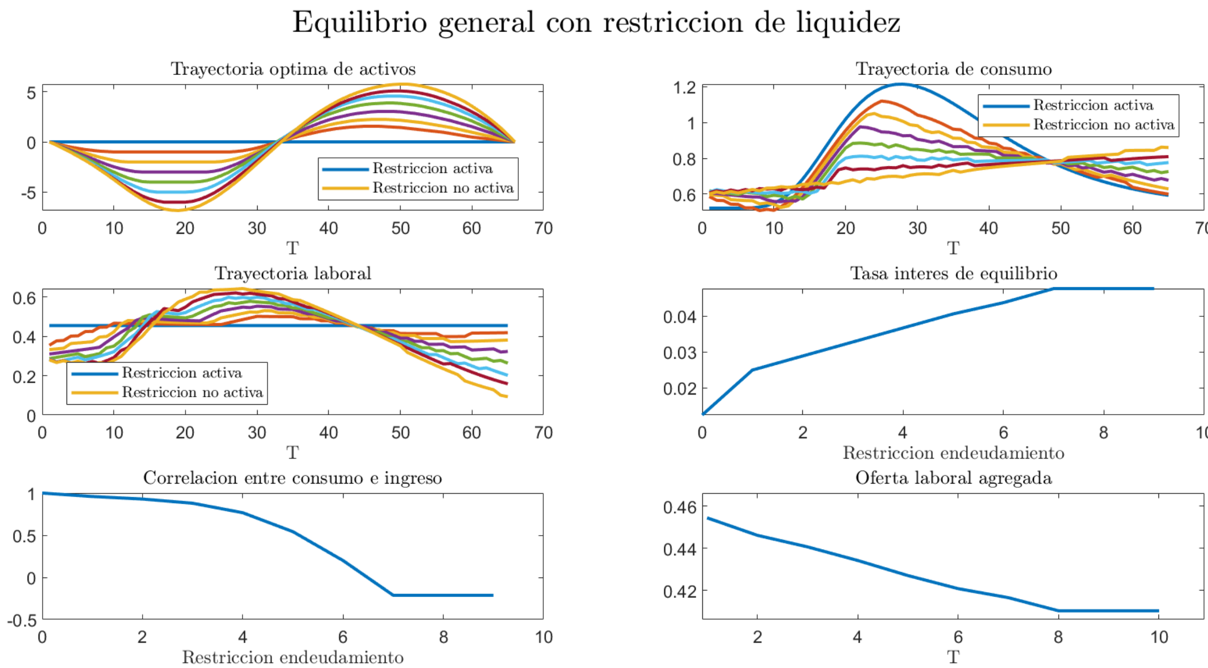


Figura P. Equilibrio general en un contexto de fricciones financieras

Recapitulemos el problema del agente. A diferencia de cuando la oferta laboral era inelástica la solución óptima del agente está sujeta no solo a la restricción presupuestaria sino que a la restricción temporal entre decidir usar tiempo en ocio o trabajo. Respecto a la primera restricción, el sujeto decide su consumo y ocio sujeto al precio del trabajo, haciendo sensible la trayectoria laboral no solo a los salarios (que en este caso además dependen de la tasa de interés r) sino que también al acceso al credito. Si el agente está limitado en acceso al crédito o bien consume menos o bien aumenta sus horas laborales. Es por ello que en la discusión sobre el suavizamiento del consumo también es un actor relevante la relación entre el trabajo y la deuda. La hipótesis en general es que la oferta laboral es fija, pero naturalmente podemos pensar que una hora adicional de trabajo puede representar una forma de soslayar la restricción crediticia y aumentar el bienestar.

Como podemos ver en la figura, en el equilibrio, el agente decide en este problema ajustar su nivel de consumo a la trayectoria salarial pero no reduciendo sus niveles, y más bien lo que hace es mantener sus niveles de horas laborales estables y *nunca decrecientes*. De este modo, se mantienen los niveles de ingreso estables para evitar efectos sobre el consumo. Ahora bien, esta intensidad en el trabajo no logra 'revetir' o 'netear' totalmente la restricción de liquidez. De ello se pueden desprender dos puntos. El primero es que, en un contexto con restricciones de liquidez y oferta laboral elástica la trayectoria del consumo se asimila a la trayectoria del salario, manteniéndose el análisis de correlación que hicimos en el segundo apartado. El segundo es que el agente en vez de aumentar aún más su tiempo dedicado en trabajo para acumular más riqueza para consumir, mantendrá sus niveles de empleo estables a lo largo de su ciclo de vida.

Respecto a este último punto entra la discusión de la segunda restricción: la temporal. El agente puede usar su tiempo en ocio o trabajo ($l_t + n_t = 1$). Si trabaja recibe salario para el consumo, que le otorga utilidad; pero si no trabaja ocupa su tiempo en ocio que también le da utilidad. Ese es el trade-off principal. Y en particular, en un contexto de restricciones crediticias el agente tendrá una barrera para tratar de seguir suavizando su consumo en el tiempo y **a la vez** seguir satisfaciendo su necesidad de ocio. Así, en algunos casos el agente recibirá sus mayores niveles de utilidad cuando dedica todo al ocio, pues el costo de oportunidad del tiempo es relativamente alto y a la vez el salario es muy bajo. Entonces el agente decidirá salir de la fuerza de trabajo, lo que refiere a una solución esquina (Borjas, 2016). Esos casos son visibles al final del ciclo laboral del agente cuando la trayectoria laboral se va a cero, sobre todo en presencia de restricciones. Matemáticamente se da que la pendiente de la curva de indiferencia de trabajar cero horas corresponde al salario mínimo que está dispuesto a recibir el agente (*reservation wage*), que es una representación teórica de cuanto el agente valora su tiempo usado en ocio. Ahora bien, en los casos en donde el agente incluso le gustaría ocupar más de su tiempo en ocio, hemos restringuido esas soluciones a no factibles, pero debemos destacar que estas si ocurrían cuando los agentes eran mucho mayores. La razón es que **los salarios tan bajos al final de su trayectoria de vida** y la **incapacidad de acceder a crédito**, hacían que el costo de consumir fuera mucho más alto que el de dejar de trabajar. Ocurre lo mismo en la primera etapa de la trayectoria de los jovenes pero sus niveles de consumo esperados son más bajos en equilibrio que en el caso de los adultos mayores.

Fuera de este ejercicio de simulación, hemos revisado evidencia que también nos guía en un resultado de este estilo (Ball, 1990, Zeldes, 1989).Una investigación actual de Rossi y Trucchi (2016) revisan la relación entre las restricciones de liquidez y la oferta laboral, y lo que encuentran es que si bien efectivamente los agentes ajustan su intensidad en el trabajo (en término de horas dedicadas), el consumo también sufre modificaciones pero son menores. Además, muestran que estas trayectorias varían según la edad y sexo de los agentes, lo que inspira a pensar que probablemente el costo de oportunidad de dejar de trabajar es mucho mayor para ciertos grupos que para otros. De hecho, un punto que destacan las autoras, y que se relaciona fielmente con lo que revisamos en Carroll (2001) tiene que ver con que para los jovenes el efecto de las restricciones financieras es significativamente menor (no se les restrigue tanto), y por ello mismo su oferta laboral no se ve tan afectada como en el caso de adultos en edad productiva o adultos mayores.

5. Referencias

Ball, L. (1990). Intertemporal substitution and constraints on labor supply: evidence from panel data. *Economic Inquiry*, *28*(4), 706-724.

Borjas, G. J., & Van Ours, J. C. (2016). *Labor economics* (p. 45). Boston: McGraw-Hill/Irwin.

Rossi, M., & Trucchi, S. (2016). Liquidity constraints and labor supply. *European Economic Review*, *87*, 176-193.

Zeldes, S. P. (1989). Consumption and liquidity constraints: an empirical investigation. *Journal of political economy*, *97*(2), 305-346.

Ando, A., & Modigliani, F. (1963). The"life cycle"hypothesis of saving: Aggregate implications and tests. *The American economic review*, *53*(1), 55-84

Campbell, J. Y., & Mankiw, N. G. (1991). The response of consumption to income: a cross-country investigation. *European economic review*, *35*(4), 723-756.

Friedman, M. (1957). The permanent income hypothesis. In *A theory of the consumption function* (pp. 20-37). Princeton University Press.

Friend, I., & Kravis, I. B. (1957). Consumption patterns and permanent income. *The American Economic Review*, *47*(2), 536-555.

Hall, R. E. (1978). Stochastic implications of the life cycle-permanent income hypothesis: theory and evidence. *Journal of political economy*, *86*(6), 971-987.

Maestas, N., Mullen, K. J., & Powell, D. (2016). *The effect of population aging on economic growth, the labor force and productivity* (No. w22452). National Bureau of Economic Research.

Mayer, T. (1972). Permanent income, wealth, and consumption. In *Permanent Income, Wealth, and Consumption.* University of California Press.

5.a. Anexos parte 4

5.a.1. Consumo y ocio final

Para poder determinar el consumo y ocio final tomaremos la restricción presupuestaria (1) y temporal del agente (2). Además, por la restricción de *no Ponzi* a_{t+1} en el último periodo T es cero.

$$a_{t+1} = a_t \ (1+r) + n \cdot \omega_t - c_t \qquad (1)$$
$$l_t + n_t = 1 \qquad (2)$$

$$\rightarrow c_t = a_t \, (1+r) + (1 - l_t) \ \cdot \omega_t$$

Además sabemos por la segunda condición de optimalidad del problema de maximización del agente que $l_t = \frac{\varphi \ \cdot \ c_t}{w_t}$

$$\begin{aligned}
c_T &= a_T \, (1+r) + \left(1 - \tfrac{\varphi \ \cdot \ c_T}{w_T}\right) \ \cdot \omega_T \\
c_T &= a_T \, (1+r) + (\omega_T - \varphi \ \cdot \ c_T) \\
c_T \ + \varphi \ \cdot \ c_T &= a_T \, (1+r) + \omega_T \\
c_T &= (a_T \, (1+r) + \omega_T) \ \cdot \ \tfrac{1}{1+\varphi}
\end{aligned}$$

Por consiguiente podemos obtener l_T (ocio en el último periodo)

$$l_T = \left((a_T \, (1+r) + \omega_T) \ \cdot \ \tfrac{1}{1+\varphi}\right) \ \cdot \ \tfrac{\varphi}{\omega_t}$$

5.a.2. Policy ocio (Lpf) y consumo (Cpf)

Como podemos ver en la función labor.m Cpf se define como

$$\begin{aligned}
c_t &= a_t \, (1+r) + (1 - l_t) \ \cdot \omega_t - a_{t+1} \\
c_t &= a_t \, (1+r) + \left(1 - \tfrac{\varphi \ \cdot \ c_t}{w_t}\right) \ \cdot \omega_t - a_{t+1} \\
c_t \ + \varphi \ \cdot \ c_t &= a_t \, (1+r) + \omega_t - a_{t+1} \\
\text{Cpf} \ \longmapsto \ c_t &= (a_T \, (1+r) + \omega_T - a_{t+1}) \ \cdot \ \tfrac{1}{1+\varphi}
\end{aligned}$$

Mientras que Lpf

$$\begin{aligned}
l_t &= \tfrac{c_t \ \cdot \ \varphi}{\omega_t} \\
l_t &= \left((a_T \, (1+r) + \omega_T - a_{t+1}) \ \cdot \ \tfrac{1}{1+\varphi}\right) \ \cdot \ \tfrac{\varphi}{\omega_t}
\end{aligned}$$

5.a.3. Restricciones con desigualdad

Este problema tenía un particular desafío respecto a cómo resolver en un contexto de restricciones con desigualdad. Para asegurar los resultados obtenidos, formalizaremos el problema del agente a partir del método de optimización de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), para luego obtener dichas condiciones y traspasarlas a códigos en la función labor.m

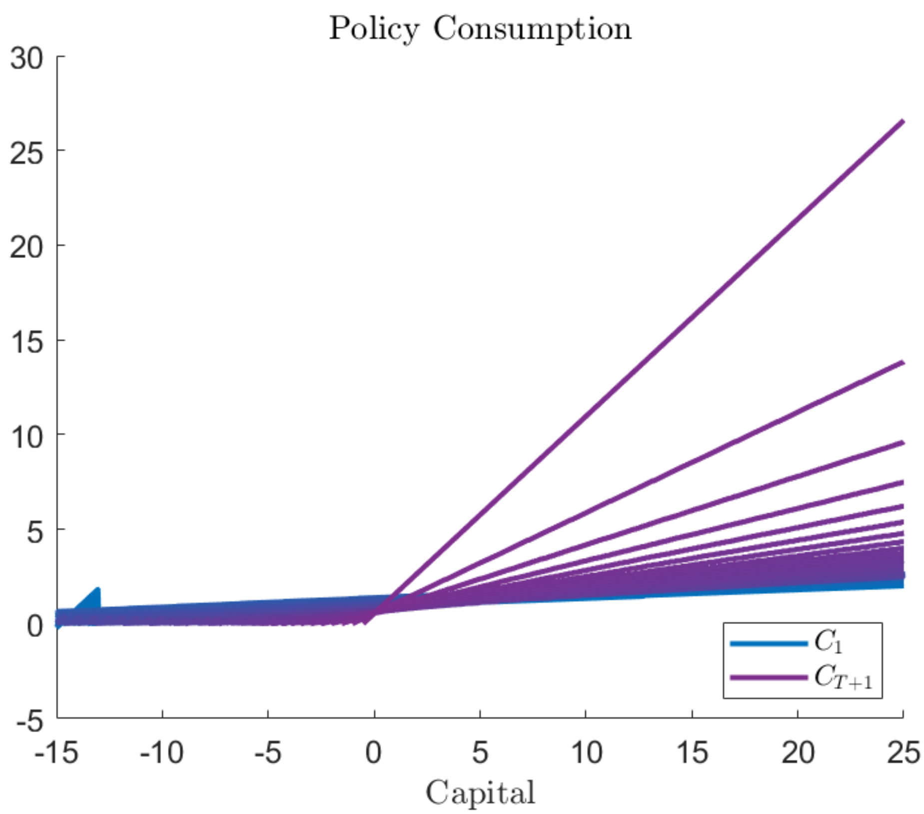
Cota inferior de la policy de activos

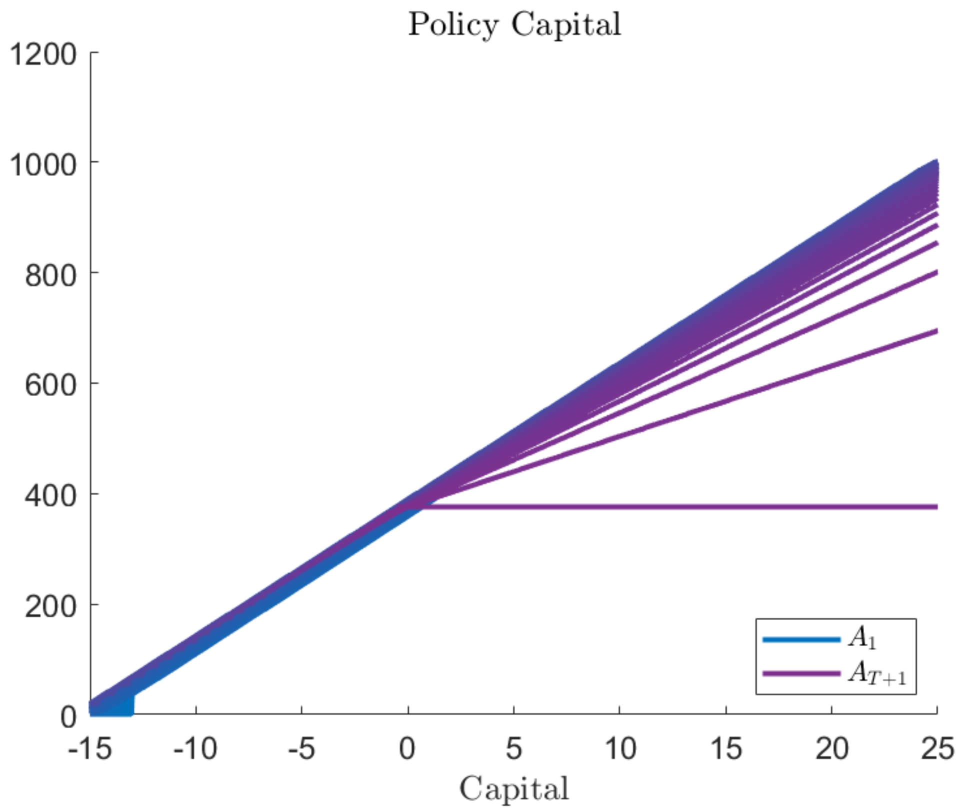
$$c_t + a_{t+1} - (1 - l_t) \cdot \omega_t = a_t (1 + r)$$
$$a_t (1 + r) = c_t + a_{t+1} - \omega_t + l_t \omega_t$$

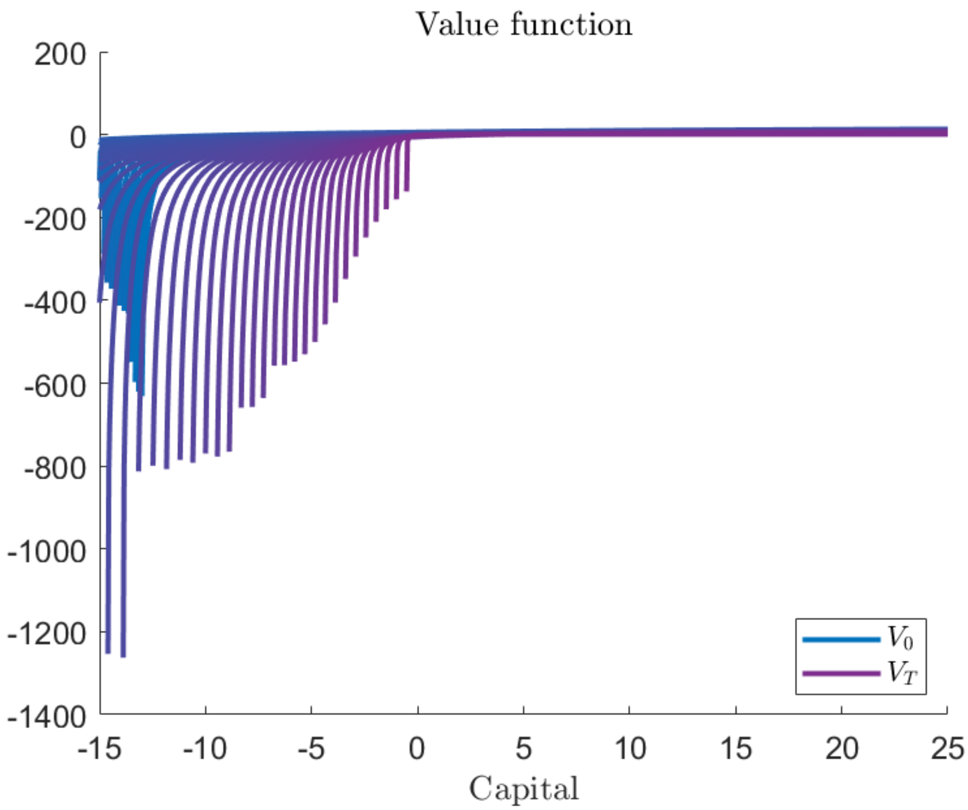
El consumo y ocio es cero

$$a_t = (a_{t+1} - \omega_t) \cdot \left(\frac{1}{(1 + r)} \right)$$

5.b. Anexos parte 2




Policy Capital
1200
1000
800
600
400
200
0
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Capital
A_1
A_{T+1}


Value function
200
0
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
-1400
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Capital
V_0
V_T