INSTITUTO DE ECONOMÍA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
Y ADMINISTRATIVAS

Curso : Teoría Macroeconómica I-EAE320B-1
Profesor : Alexandre Janiak
Ayudantes: Pablo Vega y Bianca Hincapie
Fecha : 12 de junio de 2022
Estudiante : Valentina Andrade
Mail : vandrade@uc.cl

Agentes heterogéneos e incertidumbre.

Las implicancias de los impuestos en equilibrio parcial y general

Tarea N°3

Resumen

En la siguiente tarea tiene como propósito reconstruir el equilibrio parcial y general con agentes heterogéneos en niveles de productividad, en un contexto de incertidumbre y sin posibilidad de endeudamiento. Para ello, resolveremos el problema dinámico en tiempo infinito del agente en donde este decide su nivel de consumo actual y su tenencia de activos en el siguiente periodo. Para formalizar el problema utilizaremos ecuaciones de Bellman, que describen la decisión óptima del agente respecto a estas variables. La resolución numérica se basa en un algoritmo de iteración sobre la función de valor, partiendo de un *guess* de este. Sin pérdida de generalidad, uno de los supuestos importantes que seguiremos a lo largo del informe es el cumplimiento de esquema no Ponzi, funciones de utilidad CRRA y mercados con competencia perfecta.

En términos sustantivos, el centro del informe está en discutir las **implicancias de la incertidumbre respecto a la volatilidad del ingreso** en las decisiones óptimas de los distintos agentes en un contexto con y sin impuestos. Dentro de los **resultados principales** se destaca (1) el notable comportamiento de los agentes dada su aversión al riesgo, (2) como los impuestos funcionan como un "seguro.ªnte posibles shocks negativos en la productividad, beneficiando a quiénes están bajo el promedio de la productividad, (3) eliminar el impuesto al trabajo aumenta la producción por la vía del incremento de la acumulación de capital.

El desarrollo de la tarea también se encuentra en el repositorio en GitHub https://github.com/valentinaandrade/macroeconomics-theory/tree/main/tareas/tarea3

Palabras claves: programación dinámica, incertidumbre, productividad, impuestos

Introducción

Típicamente los estudios en macroeconomía que abordan los efectos de los cambios en los impuestos toman como supuesto el agente representativo. Ahora bien, esto puede llegar a ser poco realista, dado que los individuos de la economía difieren en muchas características, e.g edad, salud, riqueza, educación o su nivel de productividad. Es por ello que nos centraremos en un análisis de equilibrio parcial y general con **agentes heterogéneos**, donde los agentes difieren en su nivel de productividad que están sujetos a *shocks idiosincráticos*. Modelos con estas carcaterísticas han sido trabajados ampliamente (véase Castañeda et.al (1998); Heer y Trede (2003); Lehmus (2011)), con la única diferencia que en nuestro caso la oferta laboral es exógena.

El modelo

El modelo está basado en un modelo neoclásico estocástico de crecimiento bajo horizonte finito.

Los hogares

Los hogares viven infinitamente, y estos maximizan el valor esperado de la suma de sus flujos de utilidad por consumo, descontándolos por un factor β. La siguiente ecuación de Bellman resume su problema

$$V\left(a,\epsilon\right)=\text{máx}_{c,a'}\;u\left(c\right)+\beta\,E_{\epsilon'|\epsilon}\,V\left(a',\epsilon'\right) \tag{1}$$

$$s.\,a$$

$$a'+c=\left(1+r\right)a+\omega e\left(1-\tau\right)+T \tag{2}$$

$$a'\geq-b\;,\quad c\geq0 \tag{3}$$

Donde a son los activos del agente, c consumo, ω salario, ϵ su producción, r las tasas de interés a la cual puede ahorrar, b monto máximo de la deuda que puede tomar el agente en cada periodo, τ un impuesto al trabajo y T transferencias del gobierno.

La función de utilidad que se ha utilizado es una CRRA, que de hecho Castañeda et. al (1998,2003) justifican empiricamente:

$$u\left(c\right)=\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Los hogares difieren de acuerdo a su productividad, que en este caso tenemos 5 estados posibles de productividad ϵ, y estos siguen un proceso AR$\left(1\right)$definido de la siguiente forma

$$\log\ (\epsilon_t) = \alpha + \rho \log(\epsilon_{t-1}) + \mu_t \qquad \text{donde } \mu\ N(0, \sigma_\mu)$$

Donde ρ es la persistencia, μ_t es la volatilidad

Propiamente tal la productividad sigue un estado de primer orden finito de cadenas de Markov con probabilidades de transición dadas por $\pi(\varepsilon'|\varepsilon) = Pr(\varepsilon_{t+1} = \varepsilon'|\varepsilon_t|\varepsilon)$. La implementación de esto está contenida en la función discAR que recibe como *inputs* la cantidad de puntos n_ϵ la persistencia ρ y la volatilidad σ_μ y entrega como outputs un vector de estados ϵ y su respectiva matriz de transición. $\prod_{\epsilon'|\epsilon}$

Para esta primera parte consideraremos una economía sin impuestos ni transferencias. Consideraremos el problema en equilibrio parcial, la resolución numérica de un agente representativo y asumiremos que $r = 0.03$ y $\omega = 1$. Además, dado que el agente no tiene acceso a deuda se utiliza una grilla de activos de $A[0, 30]_{1x1001}$

1. Parte 1. Ausencia de gobierno

a. Problema del agente con incertidumbre y sin endeudamiento

En este problema, la resolución del problema del agente se basa en una iteración de la función de valor con horizonte infinito, aplicando la técnica de *Guess and Verify* donde la convergencia de la función de valor ocurre si y solo sí la función de valor del guess es la misma que resuelve Ecuación de Bellman. En ese sentido, la función creada *bellman.m* contiene una aproximación numérica de la decisión óptima que hace el agente respecto al consumo, activos y la función de valor. En este caso el agente no tiene posibilidad de endeudamiento pues la grilla de activos parte desde 0, es decir, no hay activos negativos. A su vez, el problema considera la incertidumbre toda vez que los retornos del trabajo dependen de distintos estados de productividad los cuales tienen una probabilidad condicional de ocurrencia dado un valor de persistencia (ρ) y varianza de la volatilidad σ_μ

b. Policy functions según nivel de productividad

En la figura 1 podemos ver la policy function del consumo y activos, junto con la value function para distintos niveles de productividad. Como podemos notar, para un mismo nivel de activos, **las personas con mayores niveles de productividad tienen una trayectoria óptima de consumo superior en nivel que las personas con productividad inferior.** Eso quiere decir que en promedio, el nivel de consumo es más alto en personas con niveles de productividad. De este modo, la función de valor de los agentes con mayores niveles de productividad en promedio son más altas que quienes tienen un nivel de productividad más bajo. En la trayectoria de activos, si bien no se evidencia tanto por los niveles del eje de las ordenadas, esto mismo se cumple para los activos, esto es, que las personas con mayores niveles de productividad tienen mayor cantidad de activos, lo que lógicamente se desprende de que estos agentes tienen más posibilidad de tener stock de ahorros

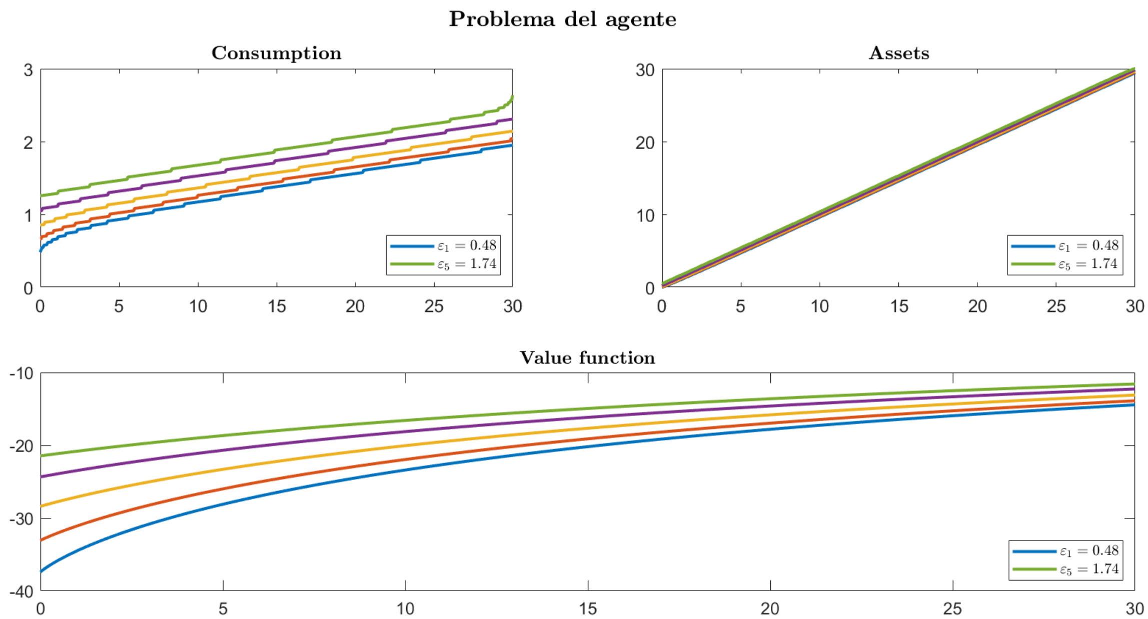


Figura 1. Policy functions y value functions

La razón de porqué los agentes suavizan el consumo con igual pendiente es que el nivel de varianza que podrían enfrentar los agentes está dado por la volatilidad de su estado de productividad. Este componente, como veremos a lo largo del informe, es muy relevante para entender la aversión al riesgo del agente, y con ello, sus decisiones óptimas respecto al consumo y ahorro. Ahora bien, este componente es constante entre los niveles de productividad por lo que el componente de varianza que podemos comparar en este caso no es posible aún. Lo mismo ocurre con la persistencia, la que nos a información sobre el *valor esperado* del agente respecto a sus niveles de productividad, por lo que este parámetro tendrá un componente importante en la estructura general de las trayectorias de consumo. En síntesis, podemos notar que en esencia estaremos problematizando constantemente respecto a las consecuencias de la incertidumbre a partir de un marco de la teoría de la renta permanente, donde analizaremos suavizamiento del consumo, aversión al riesgo y prudencia.

c. Panel y distribución del stock de activos y del consumo

En el siguiente apartado se realizó un procedimiento para obtener trayectorias de **shocks** de productividad $\epsilon_{n,t}$ para un total de 10000 individuos en la economía, durante 2000 periodos.

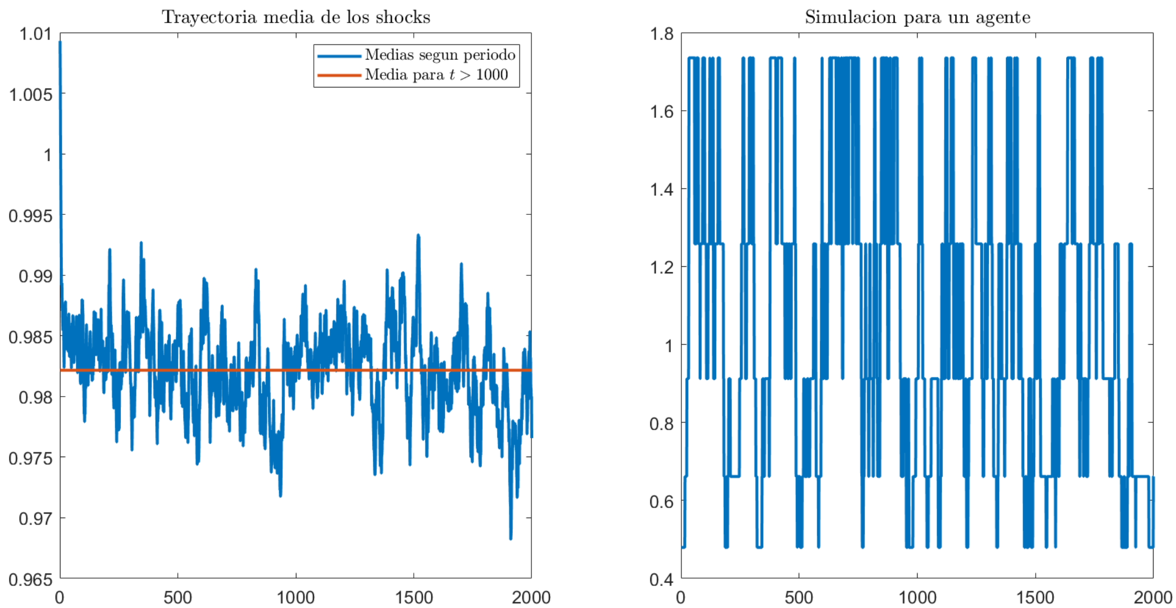


Figura 2. Simulaciones de niveles de productividad para la economía y la trayectoria de un agente

Como se puede ver en la figura 2 tenemos al lado derecho la distribución de los shocks de productividad de toda la economía, y la media de los shocks de productividad. Al lado derecho tenemos la distribución de los shocks para un agente. Respecto a estas figuras podemos notar que:

1. A nivel general de la economía, la media de los shocks se alcanza rápidamente en los primeros periodos y que este resultado se mantiene hasta $T = 2000$. Por ello, será importante notar que no es necesario ocupar todos los periodos de tiempo para poder obtener una distribución lo suficientemente uniforme durante los distintos periodos.
2. A nivel individual podemos ver que los shocks siguen una distribución totalmente aleatoria y estacionaria, no tienen tendencia.

d. Simulación de trayectorias de los shocks de productividad, consumo y activos

Si bien se indicó que se realizara con $T_1 = 2000$, se descargaron los primeros 1000 periodos pues con ellos ya se puede evidenciar que la solución estacionaria para las trayectorias de activos y consumo convergen en $T = 1000$. Esta solución será demostrada en los anexos del trabajo. Respecto a la figura 3, tenemos la distribución de stock de activos y consumo. Como podemos ver la distribución del stock de activos es monotónica, con una media cercana a 5, un 50 % de la distribución está concentrada al menos en 3.48, y de varianza cercana a 24.4. Mientras que el consumo evidencia una distribución sin una forma totalmente definida en apariencia tiene una distribución normal, pero en la cola inferior presenta una concentración de niveles de consumo. Esto se puede deber, probablemente, a situaciones donde el consumo de los agentes es cercano a cero.

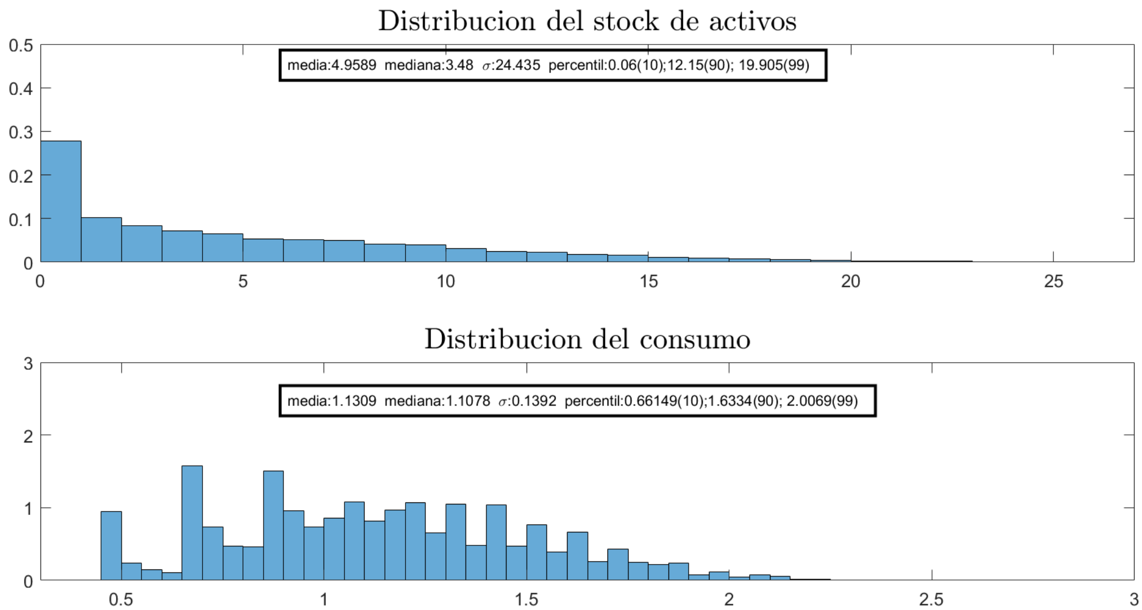


Figura 3. Histogramas de panel de consumo y stock de activos

e. Efecto de la volatilidad del ingreso sobre el consumo y tenencia de activos

Para este análisis partiremos utilizaremos un vector de varianzas del ingreso que van desde 0.1 a 0.19, de modo de ver qué pasa en las transiciones de cada uno de los niveles de volatilidad. A modo general podemos notar que a menores niveles de volatilidad, el consumo llega a niveles mayores respecto de los otros casos. Si bien ya anticipábamos en la trayectoria no es monotónica, si podemos evidenciar una conclusión importante, y es que a mayor incertidumbre respecto al ingreso del siguiente periodo, el consumo de igual manera se irá ajustando, reduciéndose. Evidentemente este efecto no es total pues, como discutimos inicialmente, las trayectorias de consumo también dependen de la trayectoria de consumo también depende del ingreso permanente (Friendman, 1957). Podemos pulir más aún este argumento viendo la figura que desagregada la distribución del consumo para cada nivel de volatilidad del ingreso. Podemos notar que a medida que aumenta la varianza del ingreso, la distribución del consumo se va haciendo más platicúrtica, o en otras palabras, con una curtosis menor por lo que la varianza de la varianza del consumo se va acotando cada vez más. Económicamente esto nos dice que en el agregado de la economía, cuando la varianza del ingreso aumenta no solo los niveles de consumo disminuyen por la **aversión al riesgo,** sino que quienes tenían ya niveles bajos de consumo van a decidir dejar de consumir aunque sea un ε para hacer frente a la incertidumbre de las dotaciones de mañana. Esto se infiere, estadísticamente, pues la distribución de los agentes cambia a una mayor concentración de ellos consumiento poco.

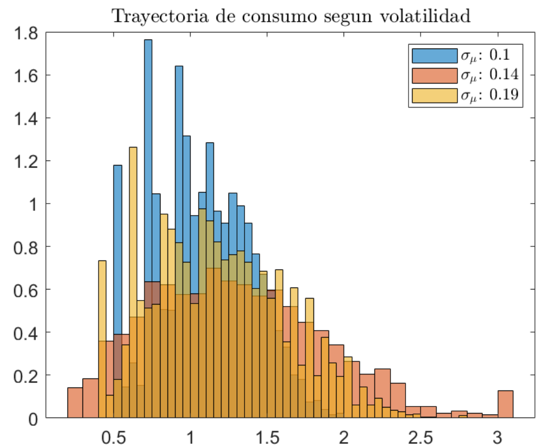


Figura 4. Densidad de consumo para distintos niveles de σ_μ

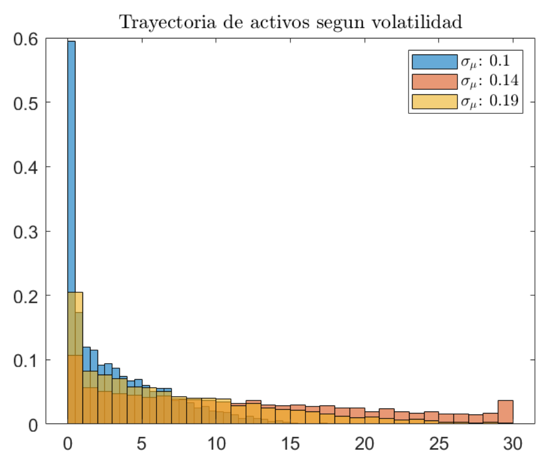


Figura 5. Densidad de stock de capital para distintos niveles de σ_μ

Respecto a la figura 5 que contiene la trayectoria del stock de activos, podemos notar que en general, parte importante de los agentes tienen ahorro cero (concentración de ellos en el 0), pero de igual modo hay un ahorro precautorio menor donde los agentes no consumen todo en el primer periodo. Lo más interesante está en que la figura en donde se desagregan los efectos ante distintos niveles de volatilidad es que por motivo de suavizamiento del consumo, ante un aumento en la volatilidad de los ingresos, los agentes decidirán diversificar más su uso de los activos, cada vez haciendo esta trayectoria monotónica más uniforme. Al igual que el consumo, esto permite inferir que ante un contexto de mayor varianza los agentes tendrán un **motivo de ahorro precautorio** asociado a este posible riesgo, que como ve Carroll (2001) esto es factible cuando los agentes tienen en su mente la ausencia de ingreso salarial (en el articulo hablan de *zero lower income).*

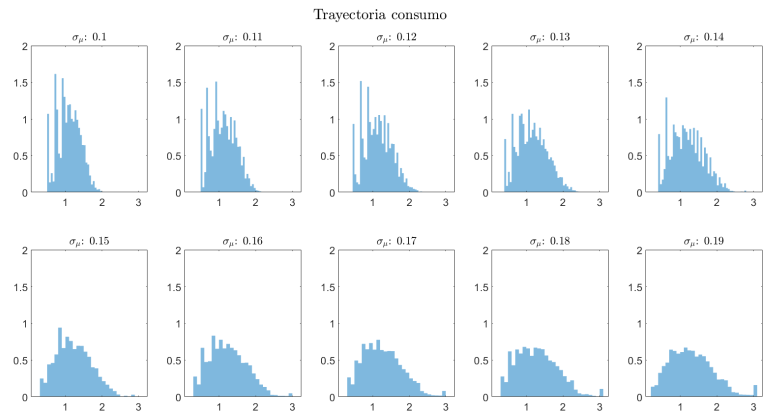


Figura 6. Densidad de consumo para cada nivel de σ_μ

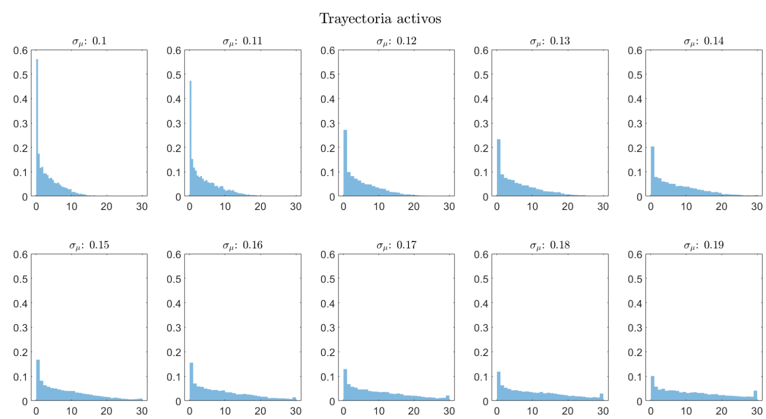


Figura 7. Densidad de stock de capital para cada nivel de σ_μ

Podemos mirar estos resultados también en la tabla 1, donde se desagregan los principales estadísticos descriptivos para la trayectoria de consumo y stock de activos, según cada nivel de varianza.

	Panel activos			Panel consumo		
σ_μ	*media*	*mediana*	*varianza*	*media*	*mediana*	*varianza*
0.1	3.33	2.01	13.4399	1.0842	1.0759	0.0959
0.11	4.3225	2.91	20.159	1.118	1.1082	0.1166
0.12	5.2479	3.72	27.5445	1.1382	1.1114	0.1427
0.13	6.2802	4.5	36.9351	1.1685	1.1459	0.1699
0.14	7.2148	5.34	45.3306	1.1898	1.1498	0.1935
0.15	8.3297	6.54	54.1623	1.2227	1.1864	0.2236
0.16	9.3609	7.56	63.4354	1.2494	1.2124	0.2532
0.17	10.2558	8.385	71.185	1.276	1.2361	0.2905
0.18	10.8385	9.15	73.7477	1.2823	1.2319	0.3099
0.19	11.5455	9.99	77.7475	1.2982	1.2395	0.3326

Cuadro 1: Estadísticos descriptivos de la trayectoria de consumo y capital según σ_μ

f. Efecto de la persistencia en los niveles de productividad sobre el consumo y tenencia de activos

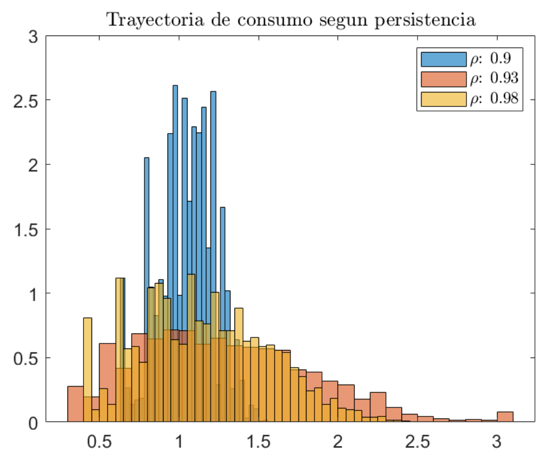


Figura 8. Densidad de consumo para distintos niveles de ρ

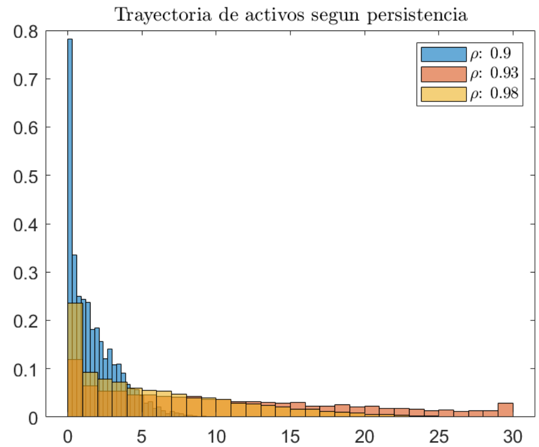


Figura 9. Densidad de stock de capital para distintos niveles de ρ

Antes de mirar el cuadro 2, en el caso de la persistencia hay que tener una precisión econométrica, de modo de confundir los resultados. En un proceso AR(1), cuando la persistencia es cada vez mayor esto tendrá consecuencias sobre la varianza del proceso en general, evidentemente aumentándola. El argumento es que si tenemos un *shock permanente,* este shock lleva tiempo (o estados, mejor chico) en que se revierta, por lo que si hay mayor persistencia, la varianza también se verá afectada (de hecho, matemáticamente recordemos que las entradas de una matriz de transición no son independientes). Esa es la razón por la cuál la varianza y la persistencia van covariando positivamente, y por lo mismo, para parcializar su efecto es necesario más que un análisis descriptivo. Ahora bien, procederemos a analizar qué pasa en el caso de la persistencia cuando esta va aumentando. Lo que podemos ver es un efecto similar al de la varianza pero con la diferencia de que el efecto es mucho más inmediato de 0.9 a 0.91, en la cual se puede notificar que la distribución de los individuos se va haciendo más platicúrtica. Evidetemente, en este caso la interpretación no tiene que ver con la aversión al riesgo, sino con que si los individuos esperan que sus bajos niveles de productividad se mantengan, entonces en promedio su trayectoria de consumo va a disminuir. Socioeconómicamente podemos decir que en estos contextos los agentes que tienen niveles de productividad más bajo tendrán menos chances de poder revertir su situación de menor bienestar. Con ello, en caso de basarnos en la teoría de la renta permanente, podremos notar que en valor esperado estos agentes tendrán menos niveles de productividad por lo que su nivel de consumo en todo el horizonte de tiempo estará definido por este.

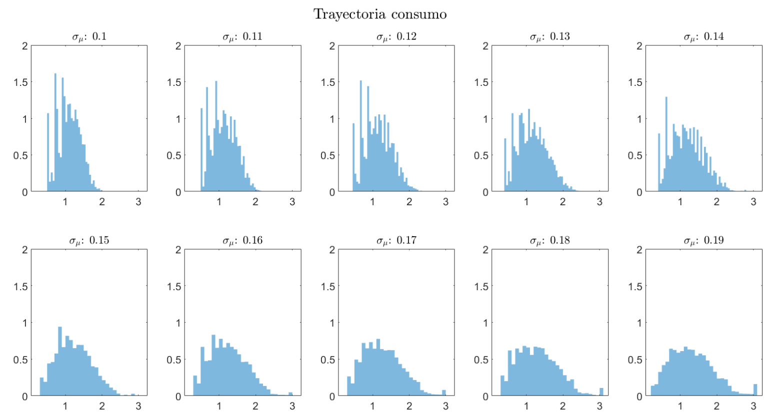


Figura 10. Densidad de consumo para cada nivel de ρ

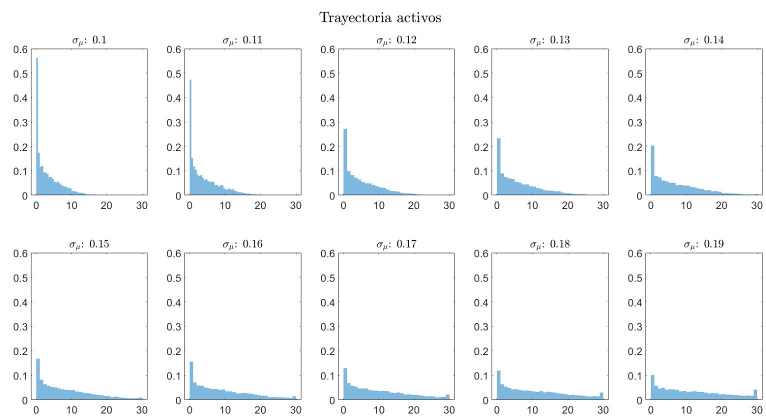


Figura 11. Densidad de stock de capital para cada nivel de ρ

	Panel activos			**Panel consumo**		
ρ	*media*	*mediana*	*varianza*	*media*	*mediana*	*varianza*
0.9	1.7365	1.26	2.9447	1.0434	1.0651	0.0318
0.91	4.3225	2.91	20.159	1.118	1.1082	0.1166
0.92	5.2479	3.72	27.5445	1.1382	1.1114	0.1427
0.93	6.2802	4.5	36.9351	1.1685	1.1459	0.1699
0.94	7.2148	5.34	45.3306	1.1898	1.1498	0.1935
0.95	8.3297	6.54	54.1623	1.2227	1.1864	0.2236
0.96	9.3609	7.56	63.4354	1.2494	1.2124	0.2532
0.97	10.2558	8.385	71.185	1.276	1.2361	0.2905
0.98	10.8385	9.15	73.7477	1.2823	1.2319	0.3099

Cuadro 2: Estadísticos descriptivos de la trayectoria de consumo y capital según ρ

g. Efecto en el bienestar ante aumentos en la volatilidad

Para computar el efecto de la volatilidad sobre el bienestar de los agentes conseguiremos la siguiente medida, que es una función cuyo valor nos da la distancia entre las funciones de valor del estado de volatilidad más alto y más bajo.

$$g\,(\alpha, \epsilon) = \left\{ \frac{V_1(a, \epsilon)}{V_o\,(\alpha, \epsilon)} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma}} - 1$$

Resolviendo el problema matemáticamente tenemos que

$$V\,(\alpha, \varepsilon) = \text{máx}_{c,\alpha\prime} \;\; \tfrac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta\; E\; V\,(\alpha', \varepsilon')$$

En el óptimo para el nivel más bajo de volatilidad de ingreso

$$V_o = \tfrac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta\; E\; V_o{}'$$

$$(1-\sigma)\,V_o = c_o^{1-\sigma} + \beta E\;\;(1-\sigma\;)\,V_o{}'$$

$$(1-\sigma)\,[V_o - \beta \mathrm{E} V_o{}'] = c_o^{1-\sigma}$$

$$\iff\; c_o = [(1-\sigma)\,(V_o - \beta\; E\; V_o{}') + 1]^{\frac{1}{1-\sigma}} \qquad (5)$$

Ahora bien, podemos ver esto análogamente para un nivel $\bar{V_o} = V_1$ que corresponderá a la función valor cuanto estamos en el nivel más alto de volatilidad de ingreso. Si repetimos el mismo procedimiento notaremos que se da la misma forma funcional, pero $\bar{V_o}$ crece a una tasa $1+g$ respecto de V_o. En consecuencia,

$$\Rightarrow (1+g)\,c_0 = \left[(1-\sigma)\left(\bar{V_0} - \beta\; E\;\; \bar{V_0}'\right) + 1\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (6)$$

Podemos juntar (5) con (6) para poder saber en cuanto crece. Matemáticamente corresponde a despejar g

$$[(1-\sigma)\,(V_o - \beta\; E\; V_o{}') + 1]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \left[(1-\sigma)\left(\bar{V_0} - \beta\; E\;\; \bar{V_0}'\right) + 1\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \cdot (1+g)^{-1}$$

$$(1+g)\;\; [(1-\sigma)\,(V_o - \beta\; E\; V_o{}') + 1]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \left[(1-\sigma)\left(\bar{V_0} - \beta\; E\;\; \bar{V_0}'\right)\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$(1+g) = \left\{ \tfrac{(1-\sigma)\left(\bar{V_0} - \beta\; E\;\; \bar{V_0}'\right)}{(1-\sigma)(V_o - \beta\; E\; V_o{}') + 1} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$g = \left\{ \tfrac{(1-\sigma)\left(\bar{V_0} - \beta\; E\;\; \bar{V_0}'\right)}{(1-\sigma)(V_o - \beta\; E\; V_o{}')} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma}} - 1$$

$$g = \left\{ \tfrac{(1-\sigma)(V_1 - \beta\; E\;\; V_1{}')}{(1-\sigma)(V_o - \beta\; E\; V_o{}')} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma}} - 1$$

Simplificando $(1-\sigma)$ *y* llevando la expresión *a* valores presentes donde calculamos $V = \sum_{i=0}^{\infty} (1+g)^{1-\sigma}\beta$

$$g = \left\{ \tfrac{(V_1)}{(V_o)} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma}} - 1$$

Ahora bien, notemos que los estados de productividad ε difieren desde un nivel de volatilidad más bajo a uno más alto. En el caso de la volatilidad más baja, los estado de productividad posibles son más, que en nuestro caso son 5 estados posibles n_ε. Mientras que en el caso de la volatilidad más alta los estados posibles son menos. Como el a está dado, los ε nos dan las condiciones para poder relacionar ambos estados, en este caso a través de la interpolación. Como resultado obtenemos la siguiente figura

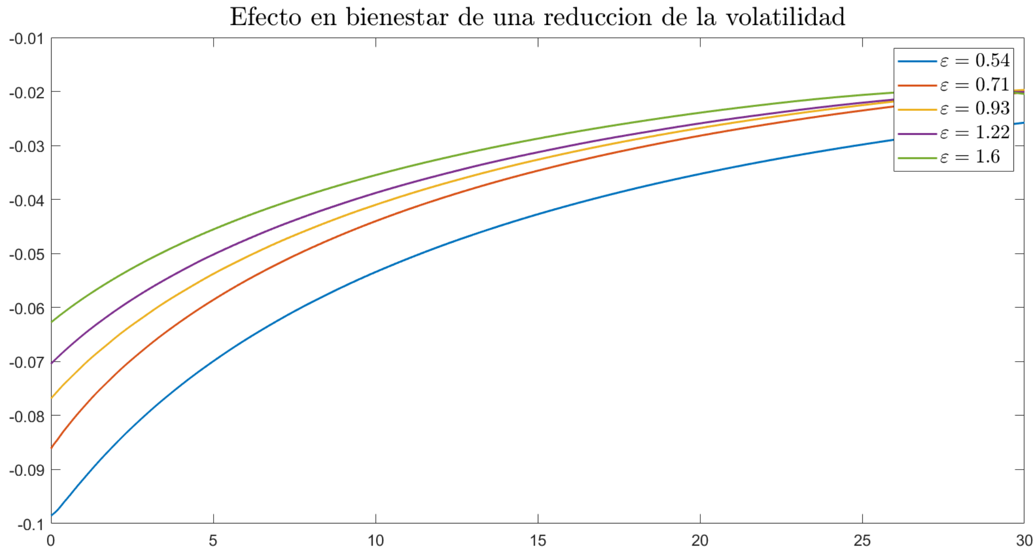


Figura 12. Efecto en el bienestar ante cambios en la volatilidad, para cada ε de productividad

Como podemos ver, el nivel de bienestar disminuye con una mayor volatilidad del ingreso σ_μ, lo que tiene mucho sentido cuando pensamos que en un contexto de más varianza los agentes que serán más aversos al riesgo. Si esto es así, su consumo disminuirá para tratar de amortiguar posibles shocks en su productividad, tratando de ahorrar precautoriamente. Lo interesante de este ejercicio es que si bien matemáticamente la concavidad de la función de utilidad nos da este importante resultado, ahora estamos viendo sus implicancias en concreto ante contextos de incertidumbre. Otro punto relevante, y que nos permitirá conectar con las preguntas sobre equilibrio, es que en la medida en que los agentes tienen menos capital, mayor será esta pérdida de bienestar pues estos tendrán menos posibilidad de acceder a ellos para el consumo. Pensemos, por ejemplo, en un individuo con activos en 0 y sin posibilidad de endeudamiento. Este agente consumirá solo lo que obtiene de sus ingresos, y ante un shock su bienestar será mucho más sensible que para los agentes con mayores niveles de productividad (con mayores salarios) o quienes tengan mayores niveles de activos ahorrados. De todas formas, incluso en esos contextos, los agentes tratarán de autoimponerse una cuota de ahorro, sobre todo en contextos de alta volatilidad del ingreso.

2. Parte 2. Ausencia de gobierno en equilibrio general

Producción

Los hogares son dueños de las firmas que maximizan sus beneficios respecto al capital y trabajo.

Sabemos que la función de producción es $F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, p el precio del bien que las empresas vende

$$\Pi(p, w, r, \delta) = \text{máx}_{K,L} \quad p \cdot F(K, L) - (\omega \cdot L$$

$$\text{PMG}_k \equiv \frac{\partial}{\partial K}\Pi = \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} - (r + \delta) = 0 \implies r = \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} - \delta$$
$$\text{PMG}_L \equiv \frac{\partial}{\partial L}\Pi = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} - \omega = 0 \implies \omega = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

Despejando PMG_k obtenemos que

$$\alpha \left(\frac{L}{K^*}\right)^{1-\alpha} = (r+\delta) \leftrightarrow (K^*)^{1-\alpha} = \alpha\, (L)^{1-\alpha} \cdot (r+\delta) \leftrightarrow K^* = L \cdot \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
$$\Rightarrow K^* = L \cdot \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Tomemos K^* y ingresémoslo a la condición de optimalidad del trabajo

$$(1-\alpha) \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = \omega \leftrightarrow (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K^*}{L}\right) = \omega \leftrightarrow \omega = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{L \cdot \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{L}\right)^{\alpha}$$

Simplifcando llegaremos a que

$$\Rightarrow \omega = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

h. Equilibrio general del mercado de capitales

En este apartado se ha calculado la oferta agregada de activos A y demanda agregada de capital K en función de la tasa de interés, con niveles de persistencia $\rho = 0.96$ *y* varianza $\sigma_{\mu} = 0.12$. Como podemos en la figura que representa la oferta y demanda agregada de activos y capital, respectivamente. No es sorpresivo notar que a una mayor tasa de interés, la oferta de activos aumenta pues los mercados financieros se ven beneficiados en términos de retornos por el aumento del precio de los activos (por ejemplo, bonos). Mientras que por el lado de la demanda, esta tiene una pendiente negativa en relación a un aumento de la tasa de interés. Como se puede ver, donde se intersectan ambos mercados corresponde al punto donde al precio al que se venden los activos, es igual al precio al que se compran todos los activos. Podemos ver que este tramo está entre 2,6 % a 3 % aproximadamente

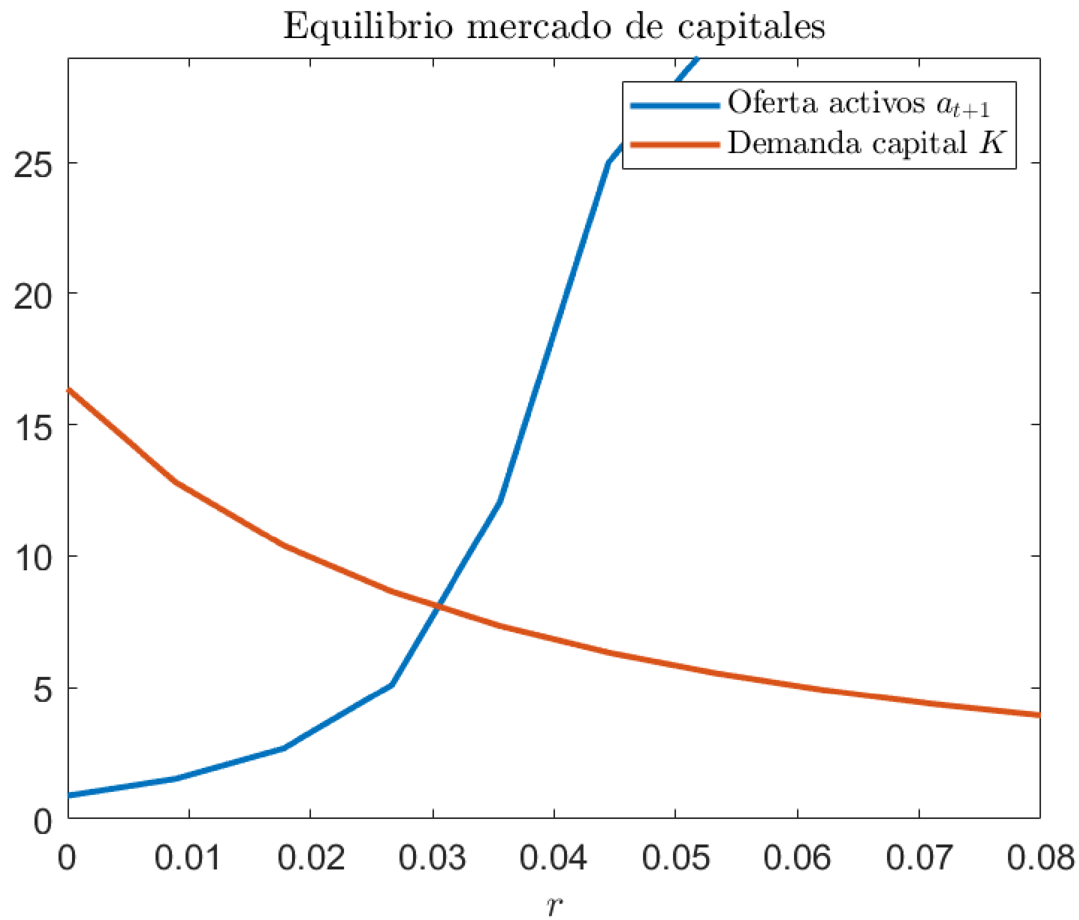


Figura 13. Equilibrio en el mercado de capitales

Ahora bien, es importante recordar que estamos en un contexto de incertidumbre respecto a los niveles de productividad. La razón de porqué esto no se refleja en el análisis es que los agregados se calculan como una suma ponderada (o promedio) de la economía, por lo que no tenemos distintos niveles de productividad, sino que únicas curvas que reflejan el equilibrio de mercado. De todas formas, estos distintos niveles de productividad si pueden tener un efecto sobre la oferta y demanda agregada de capitales, evidentemente por sus consecuencias a nivel de las firmas y agentes respecto a los retornos que pueden producir para la economía. En algunos puntos más adelantes, evaluaremos este punto veremos cómo se ve afectada la tasa de interés de equilibrio cuando cambia la volatilidad .

i. Tasa de interés de equilibrio del mercado de capitales

Una nota técnica sobre el cálculo. Para poder encontrar una aproximación puntual a esa tasa de equilibrio ocuparemos el algoritmo de bisección para aproximar la solución. Este método consiste en comparar los signos de la función objetivo en el intervalo inferior y la función objetivo evaluada en el intervalo medio, y si son de signo igual se redefine el intervalo inferior en términos del intervalo medio. Con ese método obtuvimos una tasa cercana a 3,1 %, pero que notamos que era muy sensible al intervalo de elección, por lo que nos hace pensar que el algoritmo no es muy consistente. Existe otro algoritmo que implementa un número entero de 100 iteraciones, además de restringir la solución sí y solo sí la función multiplicada por la función objetivo evaluada en el punto intermedio es negativa, pues en caso contrario no se puede asegurar la solución. Como resultado, el algortimo nos dará el punto intermedio del n-ésimo intervalo computado por el método. Comentamos esto pues el algoritmo es una aproximación, y que la segunda forma del algoritmo muestra ser más robusta pero más ineficiente (da un valor de tasa del 2,77 %), por lo que se ha decidido optar por el código más eficiente dada la cantidad de grillas que envuelven la tarea.

Como se puede ver en la Figura 14, la intersección obtenida es un valor que envuelve el intervalo 2,77 % a 3,1 % que habíamos comentado antes, es decir, esta corresponde a la tasa de interés de equilibrio del mercado de capitales. Económicamente tiene sentido pensar que la tasa de equilibrio es la situación donde los oferentes de activos (ej. bancos, agentes intermediarios) prestan todos los activos disponibles y los agentes demandantes (ej. hogares) piden todos esos activos pues el precio de los activos maximiza la utilidad para ambos agentes.

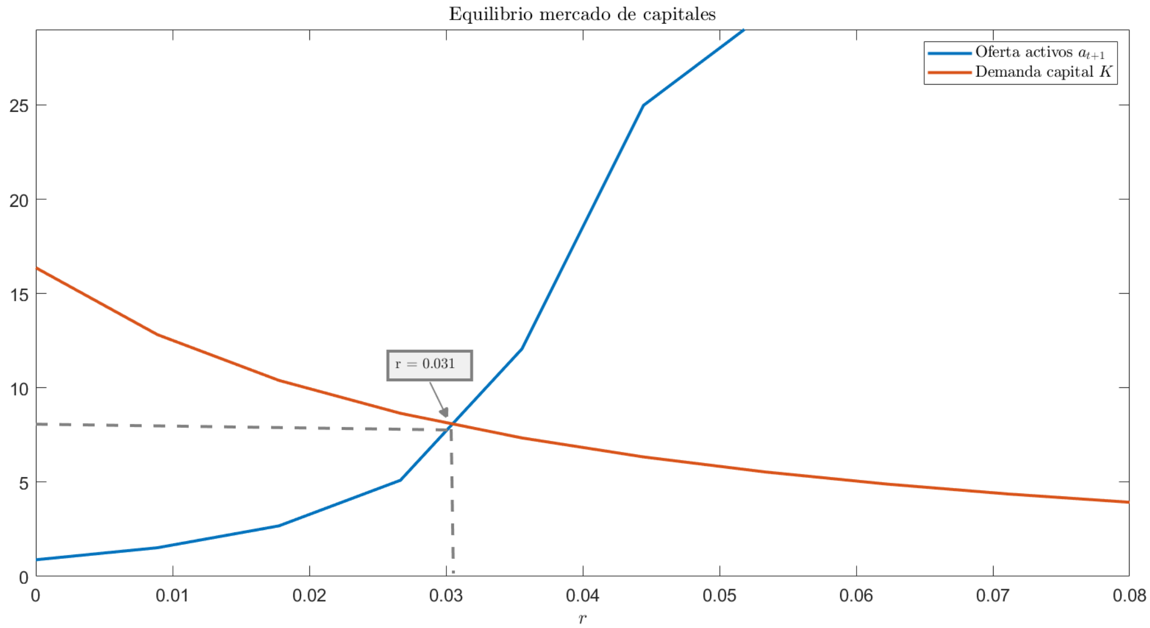


Figura 14. Equilibrio en el mercado de capitales

j. Efecto de la volatilidad en la tasa de interés de equilibrio

Para este análisis se ha empleado una iteración sobre el algoritmo de bisección, para poder conocer el impacto que tiene un aumento de la volatilidad respecto al ingreso sobre la tasa de interés de equilibrio, agregados de consumo, producción y trayectoria de activos. En general, como veremos enseguida, la volatilidad tiene un impacto importante sobre el **ahorro precautorio.**

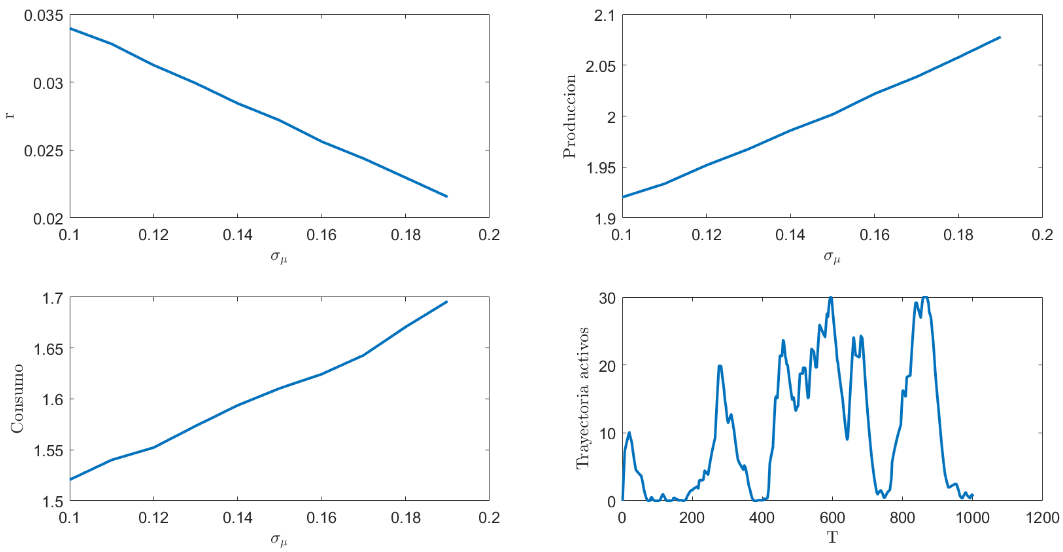


Figura 14.2 Efecto de σ_μ en agregados económicos

- Como podemos ver en la primera figura de la izquierda, un aumento en la volatilidad del ingreso disminuye la tasa de interés de equilibrio del mercado de capitales. La intuición detrás de esto es que al aumentar la incertidumbre respecto del ingreso futuro, los agentes de la economía al ser aversos al riesgo ahorrarán precautoriamente. Al aumentar el ahorro, aumenta el stock de activos para ser prestados en la economía, y por tanto la oferta agregada de activos aumenta. Si la demanda por activos se mantiene constante, entonces el precio de equilibrio de los activos se reduce en un contexto con mayor volatilidad.
- Como consecuencia de una disminución de la tasa de interés de equilibrio, nosotros sabemos que eso corresponde al precio del capital. Si el precio del capital disminuye esto incentiva la producción, y ante un mayor nivel de producción los agentes tendrán mayores ingresos, y por tanto, mayores dotaciones para aumentar el consumo. En síntesis, esto también trae consecuencias sobre el aumento de la producción de la economía y el consumo promedio de los agentes.

En la última figura de la derecha tenemos la trayectoria de activos. Si bien en esta pregunta no es relevante (si lo será para el caso de los impuestos), podemos notar que los agentes ante una mayor volatilidad sus trayectoria de consumo mostrará ser flexible respecto a los niveles de ahorro y des-ahorro para suavizar consumo ante un *posible shock de productividad*.

Parte 3. Impuestos y gobierno

Considere ahora que existe un gobierno que mantiene un presupuesto equilibrado en cada periodo, esto es, las transferencias del gobierno satisfacen:

$$T = \tau \cdot L$$

Nuevamente, para obtener L consideraremos un promedio simple del nivel de productividad de los agentes en el estado estacionario computado previamente, y por tanto, en este caso no hay análisis sobre oferta laboral pues es totalmente exógena. Este supuesto es muy importante pues si no, en el caso de que los agentes con mayor productividad se vieran seriamente afectados por los impuestos podrían decidir salir del mercado laboral (tal como ocurría en el paper de Conesa y Krueger (1999) con agentes productivos jóvenes). Entonces, en el siguiente análisis nos centraremos en ver qué consecuencias existen sobre los impuestos para el equilibrio parcial y general, con una oferta laboral cómo exógena.

Se han dejado en los anexos varias figuras complementarias de análisis

k. Equilibrio parcial con gobierno

En función del enunciado podemos notar que tenemos que ocupar la segunda restricción de la ecuación de Bellman de la siguiente forma

$$a' + c = (1 + r)\, a + \omega e\, (1 - \tau) + \tau \cdot L \tag{2}$$

La consecuencia de lo anterior en nuestra programación es que, cuando hacemos el algoritmo de iteración en la función de valor, la restricción que define el nivel de consumo posible para cada periodo incluye el impuesto a la productividad y la transferencia por empleo. Ahora bien, desde un inicio hemos incluido esto en nuestra función *bellman.m,* solo que hasta antes, $\tau = 0$.

Ahora pasaremos a comparar cada uno de los resultados presentados cuando no habían impuestos. En general llegaremos a la conclusión que en un contexto con impuestos quiénes estaban bajo los niveles promedios de productividad, el impuestos mejorarán su situación general. Mientras que en el caso de los agentes con niveles de productividad altos, el impuesto no los beneficiará, controlando por la persistencia y volatilidad que puedan tener en sus niveles de productividad. Con ello, es evidente que la varianza de la situación general que tienen los agentes irá disminuyendo. En la resolución matemática se ve más claramente. Sea Ω el salario promedio, diremos que ahora este está definido por

$$\overbrace{\underbrace{\omega e\,(1-\tau)}_{\text{Idiosincrático}} \quad + \quad \underbrace{\tau \cdot L}_{\text{Estado}}}^{\Omega}$$

Entonces, si el componente idiosincrático del salario en ausencia de impuesto es alto, de este se va a descontar una proporción τ. Mientras que si $\omega \cdot e$ es bajo, entonces esa recaudación será menor. El componente que proviene del Estado es igual para todos, por lo que si en promedio se está bajo de los niveles de productividad (recordemos como se calcula L), entonces esa tranferencia en fracción de τ lo beneficiará.

- Policy's function

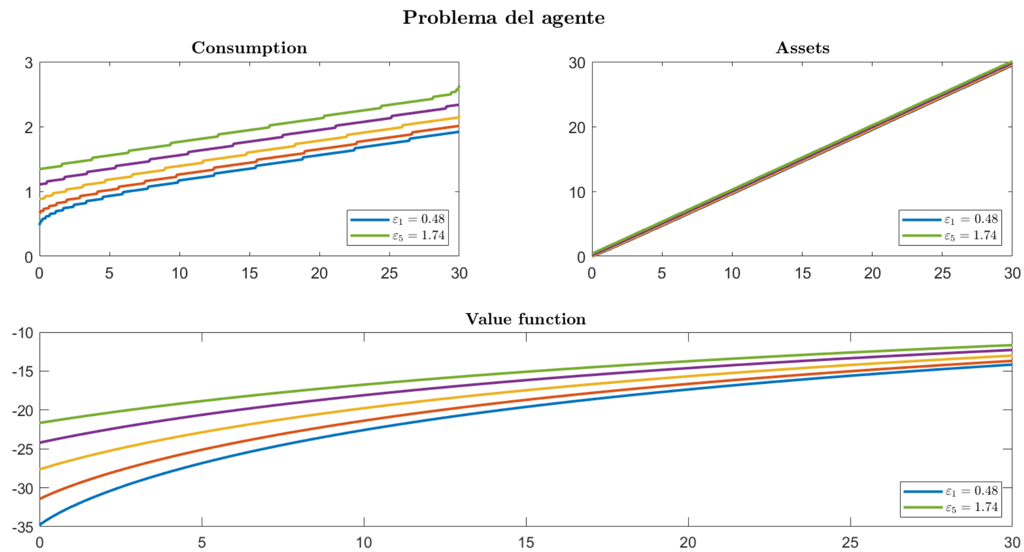


Figura 15. Policy function y value function en contexto con gobierno

Frente a la incertidumbre del ingreso futuro, en un contexto donde se pagan impuestos, el mayor ahorro funciona como un *buffer* frente a esta incertidumbre (es como un seguro), y por ello, la trayectoria óptima del ahorro con gobierno es menor que en el caso con gobierno. Si bien en la figura proporcionada no se ven mucho las diferencias pues la tasa del impuesto es relativamente baja $\tau = 0.1$, si uno extrema los resultados a un $\tau = 2$ podremos notar que la función de valor disminuye aún más su varianza, consecuencia importante para el análisis de bienestar que haremos a posterior.

- Paneles de consumo y activos

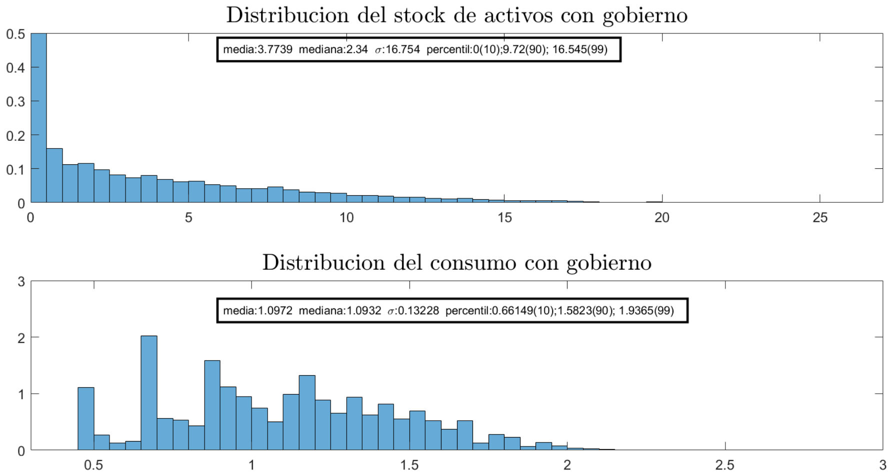


Figura 16. Paneles de consumo y stock de activos con gobierno

Ahora que obtuvimos los paneles de consumo y activos en un contexto con impuestos podemos notar que en promedio el consumo es menor en un contexto con gobierno. Lo mismo ocurre con el nivel de activos. Tal como adelantábamos, el impuesto funciona por un lado como un seguro que evita que las personas tengan mucho que ahorrar ante la incertidumbre, pues ante alguna eventualidad existe este "subsidio.ª su bajo nivel de producción ante un shock. Además, pese a que se pudiese esperar que eso hace que los niveles de consumo suben, esto realmente no ocurre. La razón es que si bien los niveles bajos de productividad aumentan su consumo promedio, los niveles más altos de productividad se ven castigados ante el impuesto. Lo que si ocurre, y es importante destacar, es que a diferencia del escensario sin gobierno, la varianza en las trayectorias de consumo y activos disminuye en la economía (comparándo con la Figura 3 del informe).

- Efecto de la volatilidad

Probablemente el análisis sobre la volatilidad del ingreso sea el más relevante para entender el impacto del impuesto. Como discutimos en el primer punto de esta tarea, en un escenario sin transferencias del Estado, los agentes con mayores niveles de volatilidad por aversión al riesgo, van a ajustar sus niveles de consumo, ahorrando precautoriamente ante un probable *shock negativo* en el ingreso. Ahora bien, la alta varianza se ve *amortiguada por el impuesto*, funcionando como *ün seguro"*. Este *"seguro"*puede llegar a ser un monto importante para agentes con bajos ingresos, mientras que no así para quienes no. Por lo mismo, en ningún caso este impuesto logra *netear* toda la volatilidad de la productividad, sino que incluso sigue funcionando como un mecanismo *buffer,* tal como estudia Carroll (2001).

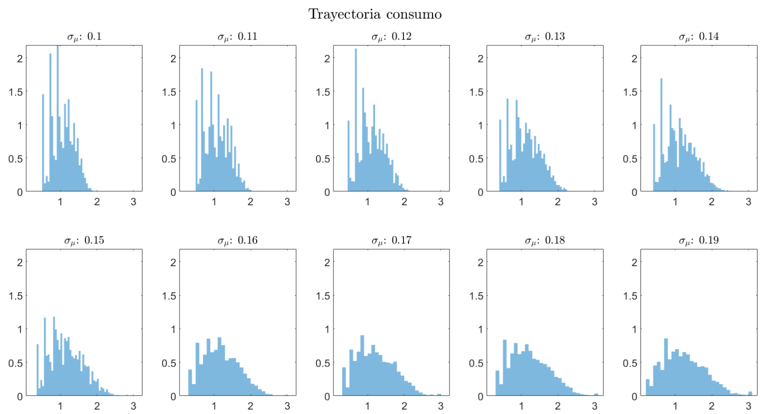


Figura 19. Densidad de consumo para cada nivel de σ_μ

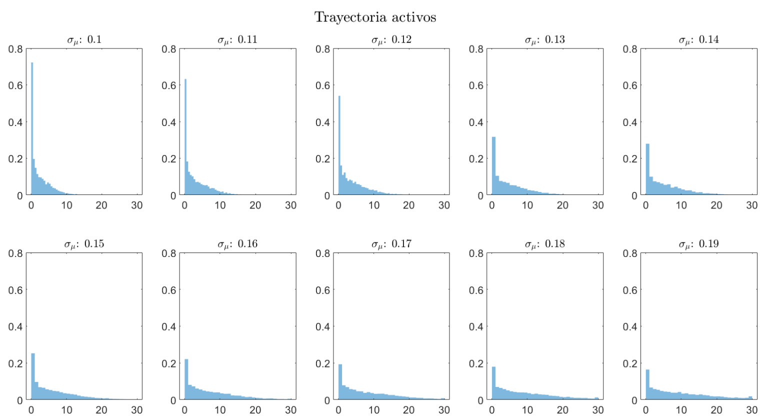


Figura 20. Densidad de stock de capital para cada nivel de σ_μ

	Panel activos			**Panel consumo**		
σ_μ	*media*	*mediana*	*varianza*	*media*	*mediana*	*varianza*
0.1	2.543	1.44	8.5228	1.065	1.0549	0.0943
0.11	3.174	1.8	13.0274	1.08	1.0588	0.1118
0.12	3.925	2.52	17.7478	1.097	1.0956	0.1321
0.13	4.828	3.27	25.1115	1.125	1.108	0.161
0.14	5.66	3.93	32.7611	1.145	1.1248	0.1854
0.15	6.519	4.65	41.0646	1.166	1.1287	0.2083
0.16	7.373	5.46	48.5659	1.186	1.1451	0.2347
0.17	8.313	6.48	55.4089	1.22	1.1749	0.2613
0.18	8.938	6.855	63.0715	1.229	1.1709	0.2958
0.19	9.63	7.68	67.9246	1.242	1.1849	0.3205

Cuadro 3: Estadísticos descriptivos de la trayectoria de consumo y capital según σ_μ con impuestos

- Efecto de persistencia

Ahora veamos qué pasa con los cambios en la persistencia en un escensario con impuestos. Como podemos ver en las figuras, a medida que aumenta la persistencia la trayectoria de activos es mucho más uniforme que en el caso sin gobierno. Respecto al consumo, sigue la misma función de distribución que en el caso del gobierno, pero el primer momento de esa distribución es inferior que en el caso sin gobierno. Esto nos dice que los resultado se mantienen, solo que en niveles de activos y consumos estos disminuyen de manera mucho más evidente, rápida y permanente que en el caso de volatilidad. La razón es evidente y es que en caso de la persistencia esto cambia la estructura del consumo, pues como indicamos al inicio la persistencia se relaciona a la noción de renta permanente. Si en un contexto de gobierno se incorpora un impuesto, entonces el valor esperado del ingreso se obtiene del valor esperado sin el gobierno menos el valor esperado de la relación entre la tasa impositiva y el salario (toda vez que la esperanza es un operador lineal por lo que los efectos serán lineales).

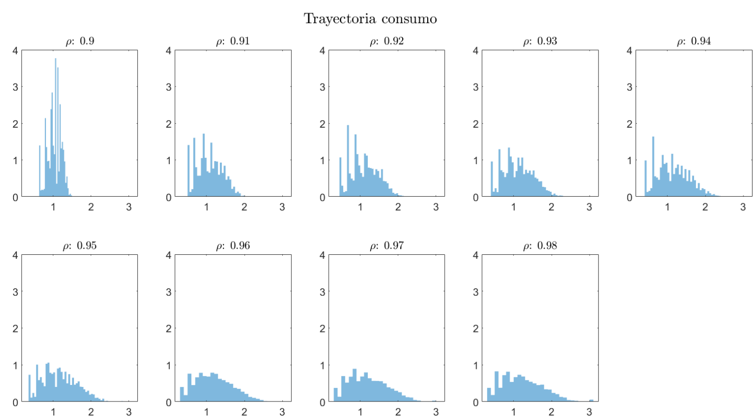


Figura 21. Densidad de consumo para cada nivel de ρ

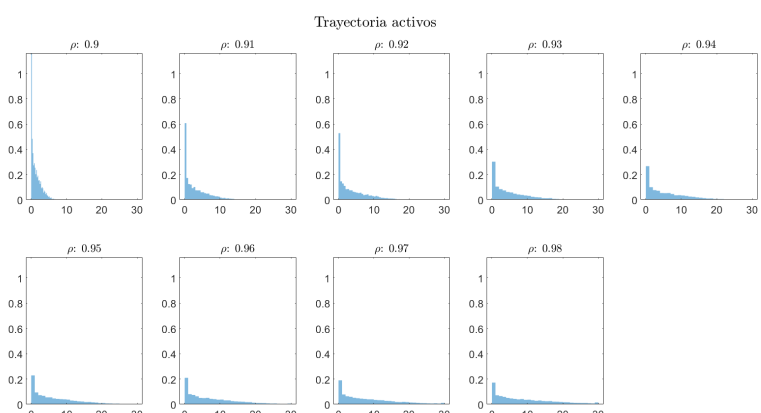


Figura 21. Densidad de stock de capital para cada nivel de ρ

	Panel activos			Panel consumo		
ρ	*media*	*mediana*	*varianza*	*media*	*mediana*	*varianza*
0.9	1.376	0.93	1.9813	1.031	1.0588	0.0334
0.91	3.174	1.8	13.0274	1.08	1.0588	0.1118
0.92	3.925	2.52	17.7478	1.097	1.0956	0.1321
0.93	4.828	3.27	25.1115	1.125	1.108	0.161
0.94	5.66	3.93	32.7611	1.145	1.1248	0.1854
0.95	6.519	4.65	41.0646	1.166	1.1287	0.2083
0.96	7.373	5.46	48.5659	1.186	1.1451	0.2347
0.97	8.313	6.48	55.4089	1.22	1.1749	0.2613
0.98	8.938	6.855	63.0715	1.229	1.1709	0.2958

Cuadro 4: Estadísticos descriptivos de la trayectoria de consumo y capital según ρ con gobierno

- Efecto en el bienestar

Si comparamos el efecto del bienestar ante una reducción de volatilidad en un contexto con gobierno y sin gobierno notaremos que si bien se sigue cumpliendo la regla general de que las personas con mayores niveles de productividad tienen mayores niveles de bienestar cuando se reduce su volatilidad, pero de la Figura 25 podemos notar diferencias importantes con la Figura 12. Primero, la brecha de bienestar entre los niveles más bajos y más altos disminuye, hecho evidente de los tramos de los cuáles se mueven las curvas (véase eje y). Segundo, los niveles de productividad más bajos aumentan su nivel de productividad sustantivamente (se mueven de un intercepto de -0.1 a -0.08), mientras que los niveles de productividad más altos se ven beneficiados en menor escala que los primeros agentes mencionados (se mueven de -0.06 a -0.05), y es por ello que efectivamente la distancia entre estos niveles se ve disminuida.

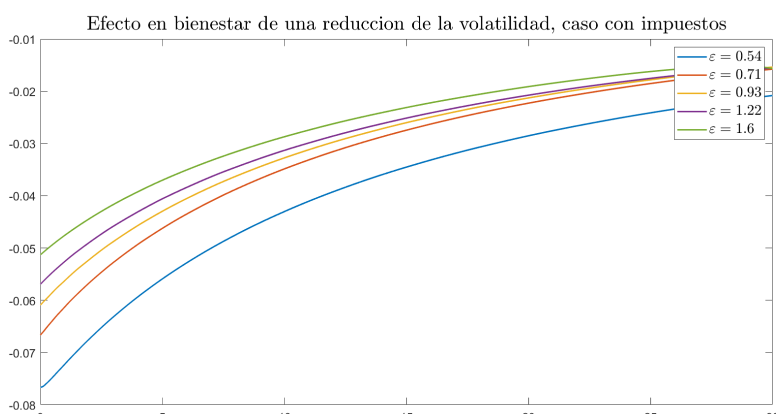


Figura 25. Efecto en el bienestar cuando sube σ_μ

l. Efectos en el bienestar de tasas impositivas $\tau_1 = 0.12$ y $\tau_0 = 0.04$.

En la figura 26 tenemos el efecto en el bienestar que se calculó de la siguiente forma

$$g_i = \left\{ \frac{(V(a, \varepsilon; \tau = i))}{\left(\bar{V}(a, \varepsilon)\right)} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma}} - 1 \qquad\qquad i = \{0.12; 0.04\}$$

Donde $\bar{V}\ (a, \varepsilon)$ corresponde a la función de valor en un contexto sin impuestos, y $V(a, \varepsilon)$a la función de valor con impuestos. Para poder hacer un análisis sobre el efecto parcial de las tasas impositivas, el resto de los parámetros se han mantenido constantes ($\rho = 0.96\ y\ \sigma_\mu = 0.12$). En la siguiente figura hemos encontrado evidencia de los siguientes puntos

- Pasar de un sistema sin impuestos a uno con impuestos aumenta el bienestar de los agentes en la economía, y por lo mismo, los niveles de bienestar son positivos. A medida que aumentan los impuestos, los niveles de bienestar aumentan.
- El bienestar aumenta para los agentes que tienen bajos niveles de productivdad, cuando los impuestos aumentan. Esto se puede notar en que los niveles de productividad más baja (de la curva azul hacia la amarilla) tienen efectos en el bienestar mayores, mientras que incluso en contextos con un impuesto mayor como $\tau = 0.12$ los agentes con más alta productividad ven afectado negativamente su nivel de bienestar.
- Mientras menor sea el nivel de capital disponible por los agentes, el efecto en el bienestar de una mayor tributación aumenta. La intuición detrás de esto es que en agentes que tenían poco capital disponible (y sin posibilidad de endeudamiento) su suavizamiento del consumo era mucho más difícil de cumplir. Ahora, estos con un ε adicional que le transfiere el gobierno, pueden suavizar consumo y por tanto sus niveles de bienestar aumentan de manera importante.

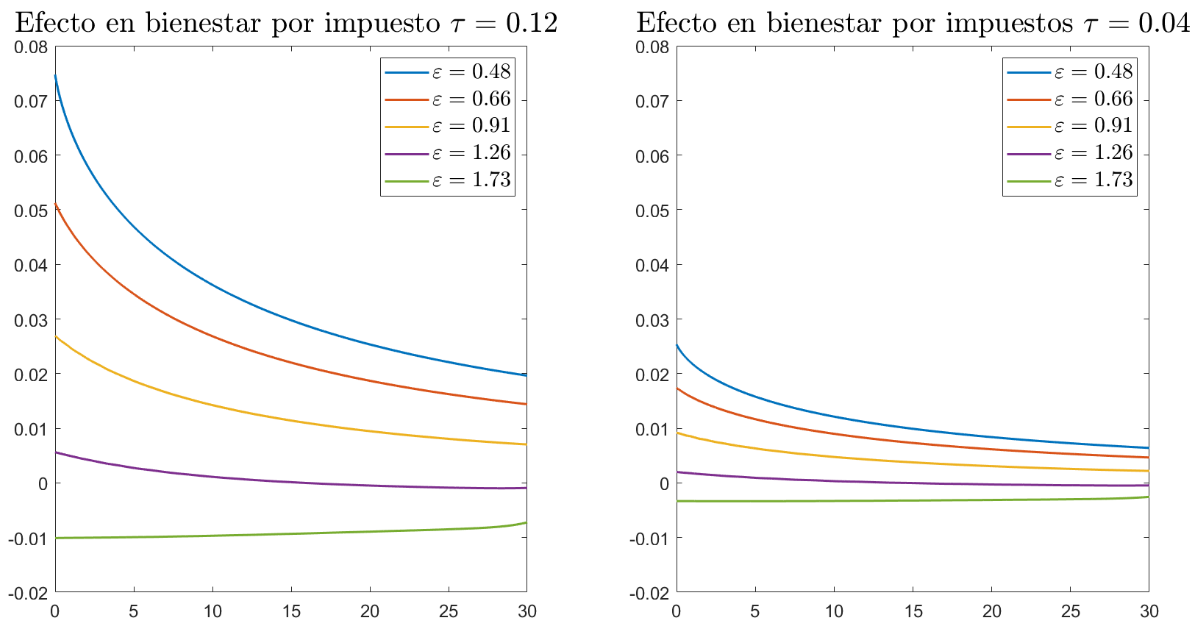


Figura 26. Efecto en el bienestar con impuestos

En síntesis, existe un efecto positivo del paso de un sistema sin impuestos a uno con impuestos en el bienestar promedio de los agentes, controlando por el resto de los parámetros de la decisión de los agentes. Ahora bien, este efecto no es lineal, y podemos ver que existe un efecto de interacción con los niveles de activos que tienen los agentes y sus niveles de productividad. En el primer caso, la interacción es decreciente (mayores niveles de capital, el cambio es menor), mientras que en el segundo caso también (entre mayores niveles de productividad, el efecto en el bienestar es menor incluso alcanzando una parte negativa).

m. Equilibrio general para una tasa impositiva de $\tau = 0.075$.

En la siguiente figura mostramos el equilibrio del mercado de capitales, en un contexto con impuestos. Gráficamente podemos notar que la tasa de interés de equilibrio ha aumentado en un contexto con impuestos, y comparativamente, la curva de la oferta agregada de activos es levemente más plana que en el contexto sin gobierno, producto del efecto que tienen las tasas impositivas sobre las trayectorias óptimas de consumo y activos. Económicamente podemos decir que los impuestos impactan disminuyendo el stock de activos disponibles para ser prestados en los mercados de capitales, y como consecuencia de ello, el precio del capital sube. Estos resultados se condicen con los mostrados por Heer y Trede (2003) y Lehmus(2011)

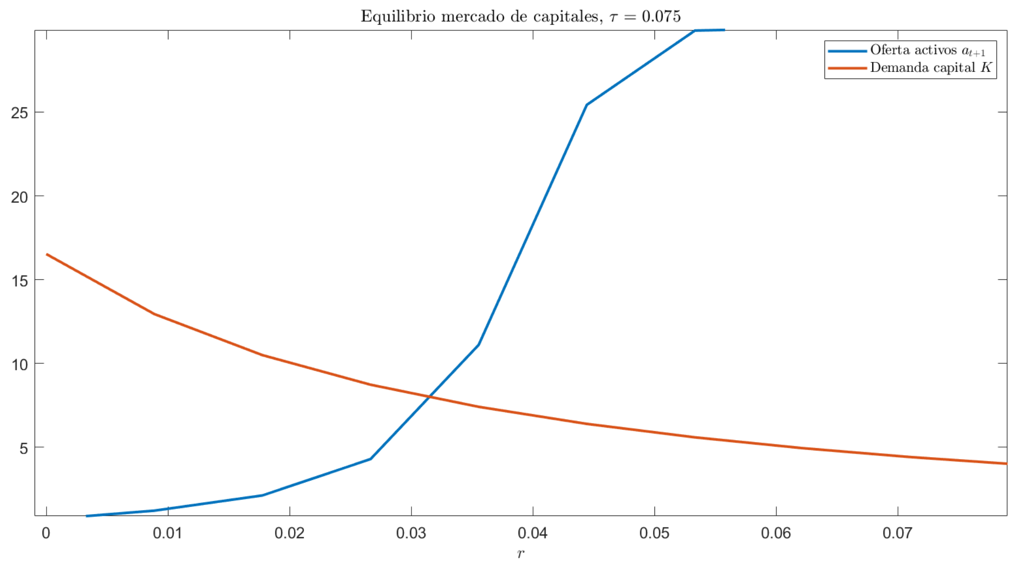


Figura 28. Equilibrio en contexto con gobierno

A partir del algoritmo de bisección (que recordemos no es exacto) podemos dar evidencia a favor de dicha conclusión dado que la tasa de interés con impuestos es de 3,2656 %, esto es cerca de **0.13 % mayor la tasa de interés de equilibrio con gobierno que sin gobierno**. Nuevamente, si volvemos al equilibrio parcial y vemos como se decide la posición óptima de los activos, entonces notaremos que el impuesto tiene una implicancia directa sobre el nivel de consumo, y por tanto también sobre la trayectoria de activos en la economía. De manera concreta, el nivel de consumo agregado en la economía será levemente menor en un contexto con gobierno que sin gobierno, y una producción también menor (Lehmus, 2011; Castañeda et al. 1998).

n. Cambios en la tasa impositiva sobre el equilibrio general

En el siguiente apartado analizaremos el impacto que tiene un aumento en la tasa impositiva sobre agregados de la economía: la tasa de interés de equilibrio, producción, consumo agregado y oferta agregada de activos, demanda agregada de activos. Para ello se ha implementado una iteración sobre el algoritmo de bisección con una grilla de impuestos que van desde 0 hasta 0.15 ($\tau = [0 : 0.15]_{1x5}$). Para los primeros tres agregados resumimos sus resultados en la siguiente figura:

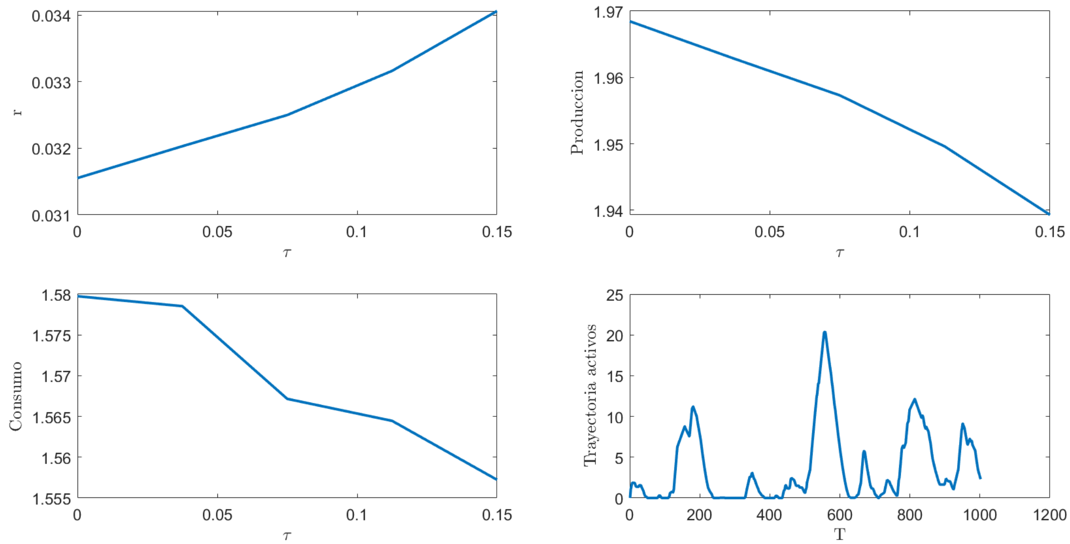


Figura 29. Efecto en agregados de la economía con cambios de τ

- Un aumento de la tasa impositiva, aumenta el precio de equilibrio en el mercado de capitales, manteniendo todo el resto como constante. Aparentemente esta relación se ve lineal, pero su crecimiento es mucho más rápido entre más cerca de 0.15 esté el impuesto, por lo que es probable que a medida que suban los impuestos sea cada vez más difícil tener disponibilidad de capital para la producción.
- Si conectamos esta última idea respecto al *costo del capital* en equilibrio, es evidente el resultado sobre la producción agregada. A medida que aumentan los impuestos, el capital tendrá cada vez más un precio mayor pues el stock de capital para ser prestado es decreciente a mayores impuestos.
- En equilibrio parcial, probablemente el canal de impacto más directo que tienen los impuestos es sobre el consumo. Ahora bien, en equilibrio general podemos extender este análisis. Esto quiere decir que pese a que los impuestos significan una transferencia para quiénes tienen niveles de productividad más baja, amortiguando la desigualdad de consumo entre los individuos de la economía, podemos notar que este impuesto no es inocuo. A mayor tasa impositiva, menor es el consumo, ceteris paribus.Lo interesante de indagar es esta estructura escalonada, donde probablemente existan bandas de impuestos que significan un cambio (o no) de trayectorias agregadas de consumo.
- Por último, hemos incorporado adicionalmente una gráfica con las trayectorias de activos a modo de comparar con la situación sin impuestos. Como podemos notar, el stock máximo de activos que se puede acceder de manera agregada en la economía disminuye hasta máximo 25. Junto a ello, el ahorro y consumo del ahorro muestra una trayectoria mucho más deprimida que en el caso del gobierno, lo que evidentemente tiene consecuencias en los motivos de suavizamiento del consumo.

Sabemos con este último punto que es esperable que la oferta de capital en equilibrio sea decreciente a un aumento en los impuestos. Ahora bien, también es evidente esperar que la demanda agregada de capital sea decreciente a mayores tasas de impuestos.Estos resultados se resumen en la siguiente tabla

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
Demanda de capital en equilibrio	*7.9981*	*7.9073*	*7.8071*	*7.7198*
Oferta de capital en equilibrio	7.9553	7.8288	7.8674	7.7387

Cuadro 5: Agregados mercado de capitales

Por último, se ha agregado adicionalmente un análisis respecto al efecto del bienestar con impuestos versus sin impuestos **en el equilibrio**. Como podemos notar, nuestros resultados son robustos pues podemos extender las conclusiones en equilibrio. En esta última figura podemos notar que el resultado respecto a que los agentes con niveles más baja productividad se ven beneficiados por la política de introducir impuestos. Ahora bien, en equilibrio la *interacción entre impuestos y nivel de capital de los agentes* se vuelve menos notorio, o en otras palabras, ese gran efecto que veíamos en el punto **(l)** donde agentes con muy bajos niveles de capital se ven beneficiados aún más por los impuestos, modera sus efectos. La razón es que un análisis que incluye el equilibrio de mercado de capitales es mucho más justo con el precio del capital al que se transa el activo, dado que ha subido la tasa impositiva.

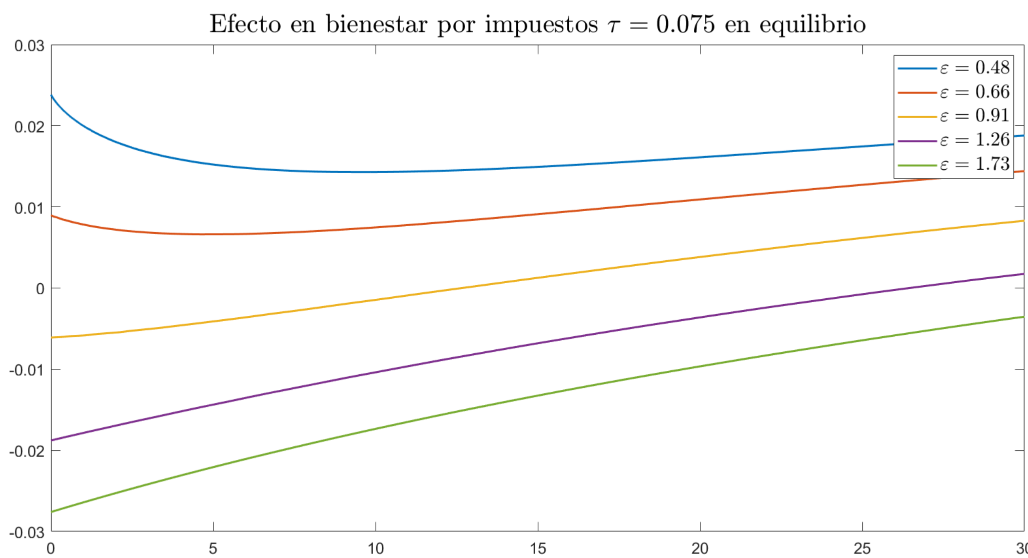


Figura 30. Efecto bienestar

Referencias

Castaneda, A., Diaz-Gimenez, J., Rios-Rull, J. V. (2003). Accounting for the US earnings and wealth inequality. Journal of political economy, 111(4), 818-857

Castaneda, A., Díaz-Giménez, J., Ríos-Rull, J. V. (1998). Earnings and Wealth Inequality and Income Taxation: Quantifying the Trade-Offs of Switching to a Proportional Income Tax in the US Ohio.

Carroll, C. D. (2001). A theory of the consumption function, with and without liquidity constraints. Journal of Economic perspectives, 15(3), 23-45.

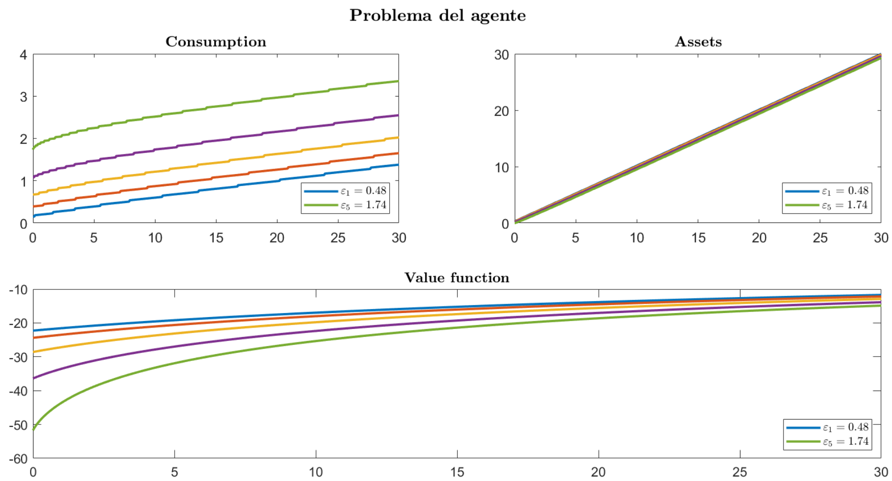
Friedman, M. (1957). The permanent income hypothesis. In *A theory of the consumption function* (pp. 20-37). Princeton University Press.

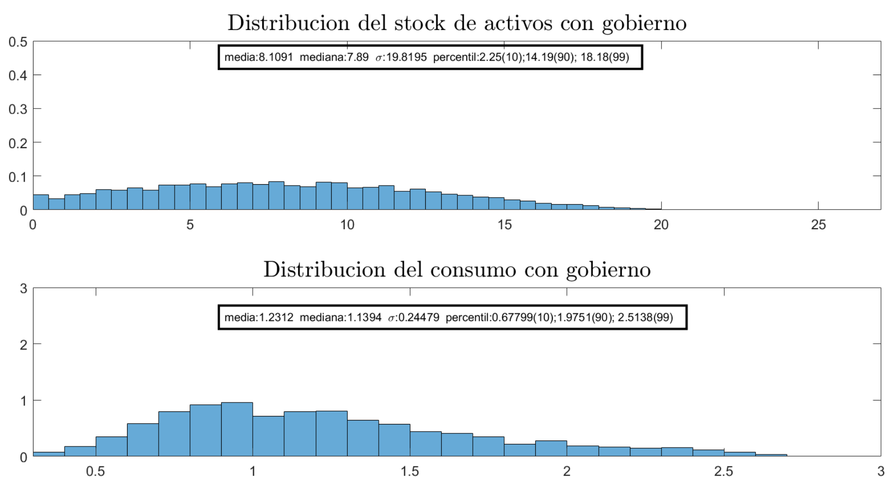
Heer, B., Trede, M. (2003). Efficiency and distribution effects of a revenue-neutral income tax reform. Journal of Macroeconomics, 25(1), 87-107.

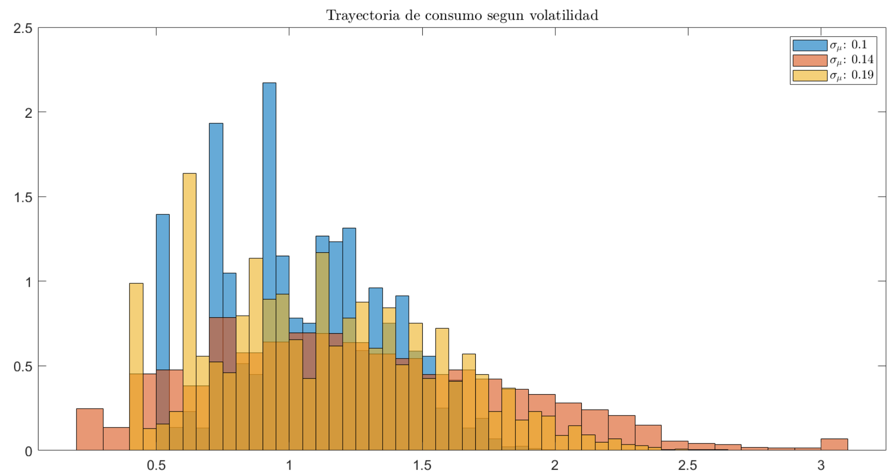
Lehmus, M. (2011). Labor or consumption taxes? An application with a dynamic general equilibrium model with heterogeneous agents. Economic Modelling, 28(4), 1984-1992.

2.a. Anexos parte 3

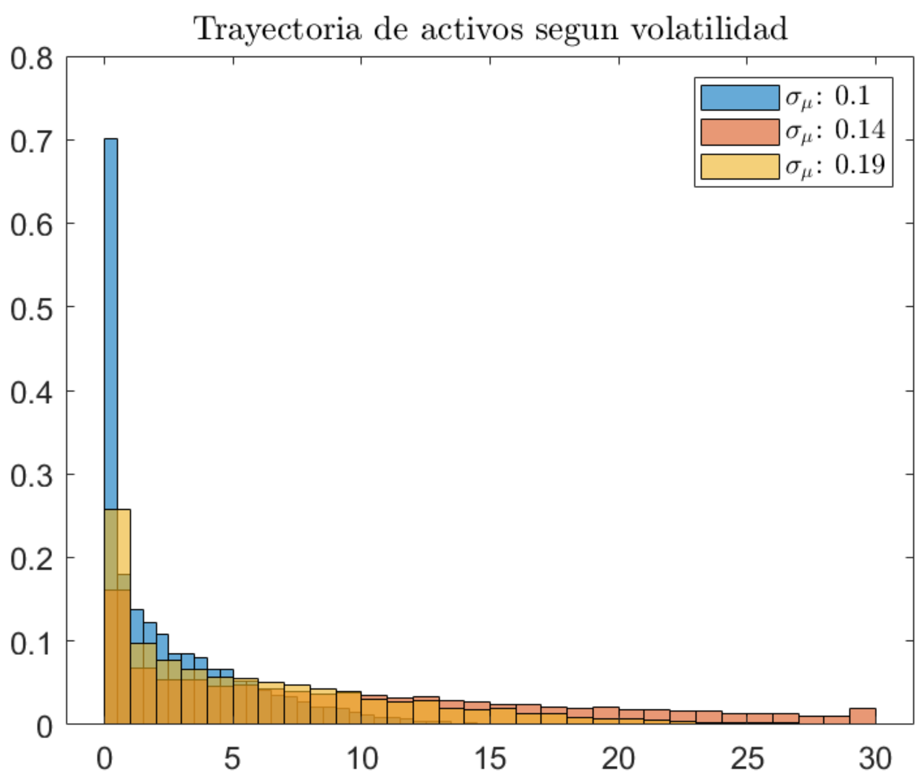
Estas figuras fueron calculadas con tasas más altas de impuestos



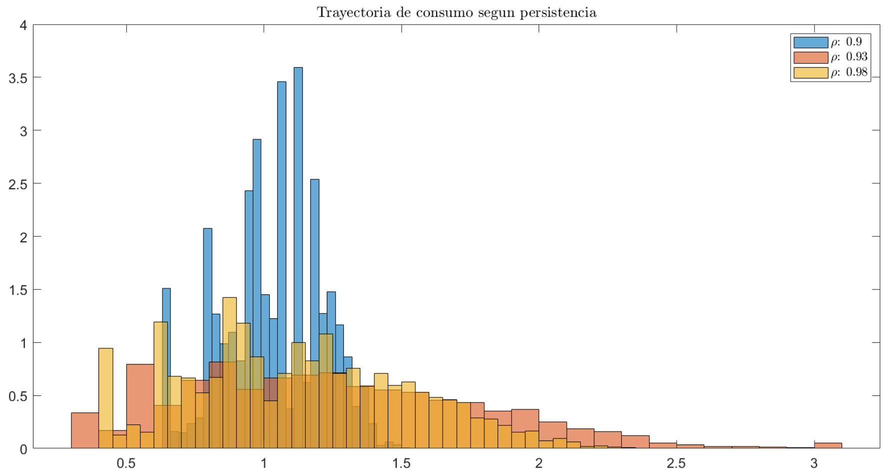


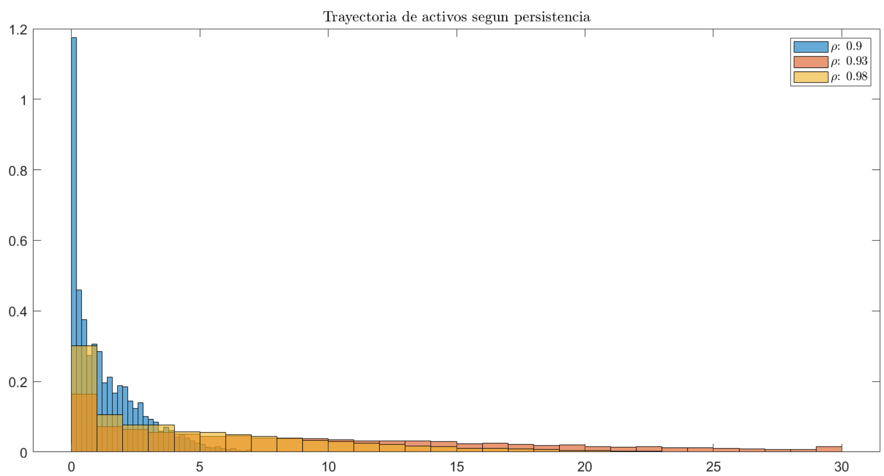


Trayectoria de consumo segun volatilidad
σ_μ: 0.1
σ_μ: 0.14
σ_μ: 0.19



Trayectoria de activos segun volatilidad
σ_μ: 0.1
σ_μ: 0.14
σ_μ: 0.19


Trayectoria de consumo segun persistencia
ρ: 0.9
ρ: 0.93
ρ: 0.98
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


Trayectoria de activos segun persistencia
ρ: 0.9
ρ: 0.93
ρ: 0.98
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
20
25
30