Seguimiento N°9

Modelo Neoclásico de Crecimiento

Teoría Macroeconómica I

Profesor: Alexandre Janiak   Ayudantes: Pablo Vega y Bianca Hincapié

Estudiante: Valentina Andrade de la Horra

Estado estacionario del capital

Converencia del capital en estado estacionario

En un problema dinámico en tiempo discreto, la convergencia al estado estacionario depende del valor de los valores propios del sistema de ecuaciones que define el proceso, los que deben ser menores a uno en valor absoluto. En términos econométricos, podemos evidenciar esto en el parámetro de la persistencia de un shock, que en este caso es de $\rho = 0.97$ por lo que se cumple la convergencia al estado estacionario.

El nivel de estado estacionario puede ser conocido a partir de la condición de optimalidad intertemporal expresada en la ecuación de Euler, donde cada z_i representa i niveles de productividad (TPF), con $i = \{1, 2, 3\}$

$$u'(c)\;)\;\beta \left[e^{z_i} \cdot f'(k) + (1-\delta)u'(c')\right]$$

En estado estacionario sabemos que las variables no cambian, por lo que $c' = c; f'(k') = \alpha k^{(\alpha-1)}$

$$k^* = \left[\frac{\alpha \cdot e^{z_i}}{\beta^{-1} - (1-\delta)}\right]^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}$$

Velocidad de convergencia al estado estacionario

Para conocer la velocidad a la que se llega al estado estacionario utilizaremos una aproximación de Taylor de primer orden para conocer la relación entre $Q'(k^*)$ y los k. En general diremos que si

$$\text{velocidad}\begin{cases} Q'(k^*) = 0 & k \text{ converge en el periodo siguiente} \\ Q'(k^*) = 1 & k \text{ nunca converge, pues siempre hay brecha con SS} \end{cases}$$

Para este ejercicio y el siguiente respecto a estabilidad local diremos que podemos representar el capital k_{t+1} en función de un $Q(k_t)$. En consecuencia el primer momento queda definido como

$$k_{t+1} \approx Q(k^*) + \left(k_t - k^*\right)Q'(k^*)$$

En estado estacionario se cumple que $Q(k^*) = k^*$. Por consiguiente, la expresión anterior queda escrita de la forma

$$k_{t+1} \approx k^* + \left(k_t - k^*\right)Q'(k^*)$$
$$k_{t+1} - k^* \approx \left(k_t - k^*\right)Q'(k^*)$$

Para obtener la velocidad de convergencia, despejamos $Q'(k^*)$, por lo que obtenemos

$$Q^{'}(k^*) = \frac{k_{t+1} - k^*}{k_t - k^*} = \left| \alpha k^{\alpha-1} \left[\frac{\alpha \cdot e^{z_i}}{\beta^{-1} - (1-\delta)} \right] \right|$$

Ahora, podemos resolver esto numéricamente para cada *TPF* z_i, obteniendo el nivel de capital de estado estacionario k_i^*

$$k_1^* = 20.10 \, , z_1 = 0.915$$
$$k_2^* = 22.97 \, , z_2 = 1$$
$$k_3^* = 26.23, z_3 = 1.093$$

De los valores obtenidos, donde claramente a un mayor nivel de productividad es mayor el nivel de capital en estado estacionario, podemos reemplzar en la ecuación que define la velocidad del capital $Q^{'}(k^*)$. Con ello obtenemos

$$k_1^* = 20.10 \, , z_1 = 0.915 \rightarrow Q_1 = 0.909$$
$$k_2^* = 22.97 \, , z_2 = 1 \qquad \rightarrow Q_2 = 0.908$$
$$k_3^* = 26.23, z_3 = 1.093 \;\; \rightarrow Q_3 = 0.906$$

Conectemos este resultado con lo indicado anteriormente. Antes decíamos que a mayor nivel de productividad, mayor es el stock de capital en estado estacionario. Como es una relación lineal y la velocidad se define como la derivada de esta función del capital en k_t notaremos que este mayor nivel de capital tiene consecuencias en que la velocidad de convergencia al estado estacionario es más lenta.

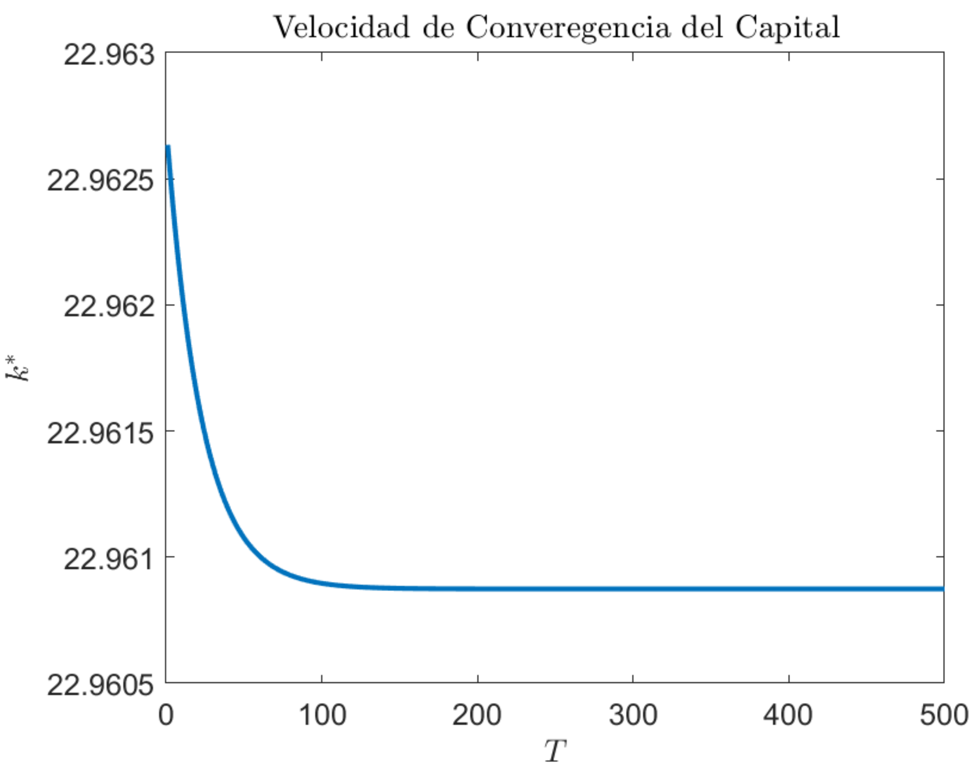

Figura 1. Velocidad de convergencia al estado estacionario

Estabilidad local del estado estacionario

Para saber si k^* es estable en el estado estacionario, podemos utilizar una aproximación local dado que globalmente el análisis es mucho más complejo. Para ello, diremos que el capital k_{t+1} en función de un $Q(k_t)$. Formalmente,

$$k_{t+1} = \left[\frac{\alpha \cdot e^{z_i}}{\beta^{-1} - (1-\delta)}\right] k_t^{\alpha} = Q(k_t)$$

Evidentemente queremos ver qué pasa con $Q(k_t)$ cuando k^* cambia marginalmente k_t. Si esta relación es menor a 1, entonces es localmente estable. Luego,

$$\frac{\partial k^*}{\partial k_t} = |Q'(k_t)| < 1$$

$$|Q'(k_t)| = \left|\alpha k^{\alpha-1}\left[\frac{\alpha \cdot e^{z_i}}{\beta^{-1} - (1-\delta)}\right]\right| < 1$$

Como z_i representa i niveles de productividad (TPF), con $i = \{1, 2, 3\}$ obtenemos el nivel de capital en el estado estacionario

$$z_1 \longrightarrow k_1^* = 20.1$$
$$z_2 \longrightarrow k_2^* = 22.97$$
$$z_3 \longrightarrow k_3^* = 26.23$$

Podemos ver esto gráficamente de la misma forma. Para poder reconocer cuáles son los distintos estados estacionarios para los niveles de productividad, debemos reconocer en qué punto $k_{t+1} = k_t$ (relación que representamos con una recta de 45°). Evidentemente la Figura 2 no aporta una precisión respecto al nivel, pero si a que esta intersección ocurre dentro entre niveles de 20 a 25.

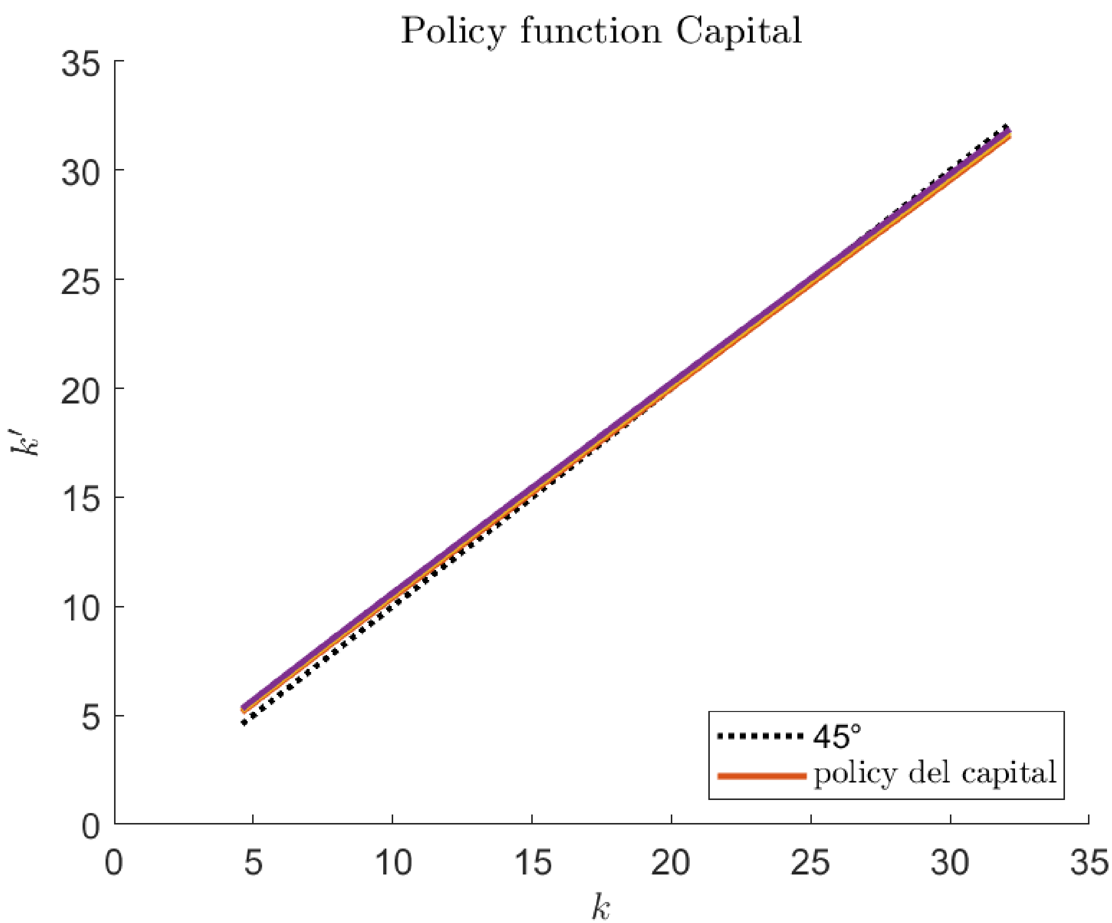

Figura 2. Trayectoria óptima de capital

Este análisis puede ser robusto si miramos qué pasa con las trayectorias de consumo. Como podemos ver en la Figura 3 a mayor TFP mayor será el nivel de la trayectoria de consumo. Esto nos dice, entonces, que la TFP afecta linealmente a la trayectoria del capital y consumo, y no es que la relación positiva entre niveles de productividad y nivel del estado estacionario se deba a algún componente de incertidumbre.

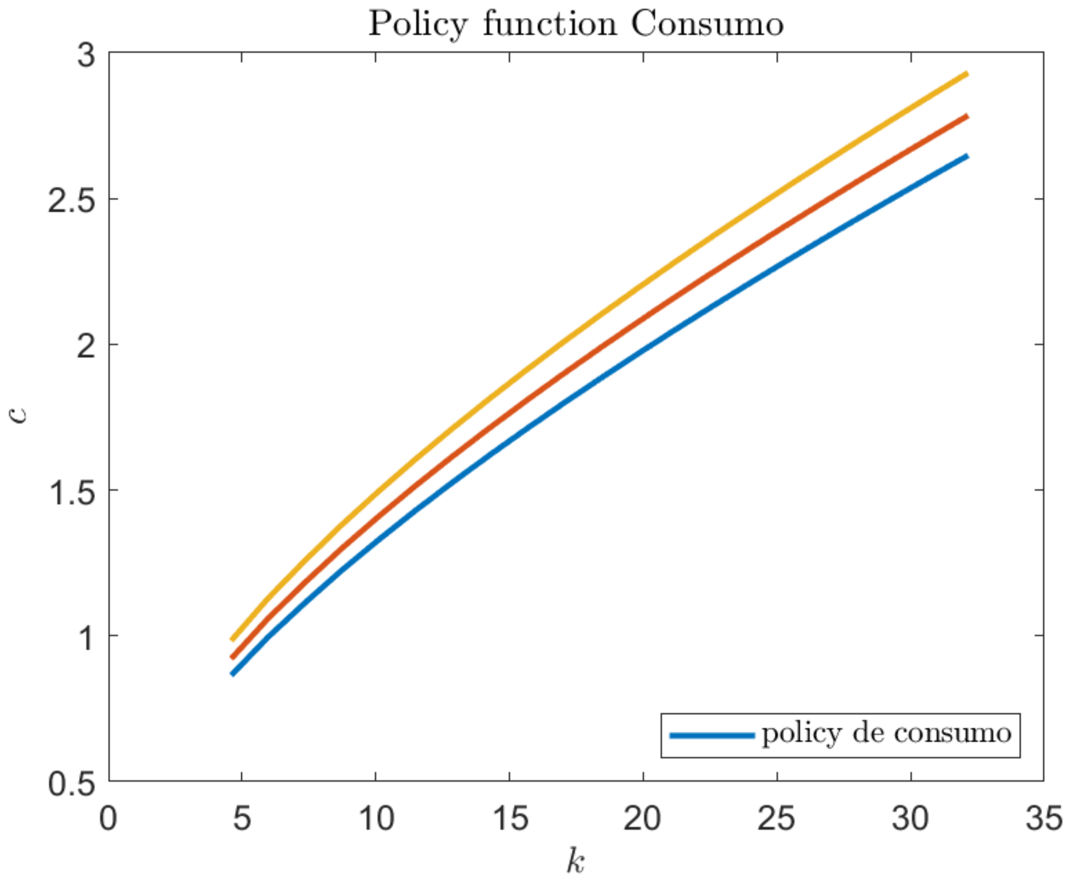

Figura 3. Trayectoria óptima de consumo

Shock positivo en el stock de capital, en 1%

En la Figura 4 representamos el efecto que tiene un shock positivo en el stock de capital, en el estado estacionario de la trayectoria de capital, consumo, inversión y output. Estas correspondes a funciones de Impulso Respuesta (IRF), que permiten ver el spread de las variables respecto de su estado estacionario.
Es importante destacar que el cálculo del nivel de estado estacionario corresponde a uno **estocástico.** En general, podemos encontrar pequeñas diferencias con lo encontrado en Ring y Revelo dado que la velocidad de respuesta en su caso era mayor y en nuestro caso la persistencia del sistema también, por lo que la productividad, capital, consumo e inversión vuelven rápidamente al estado estacionario.

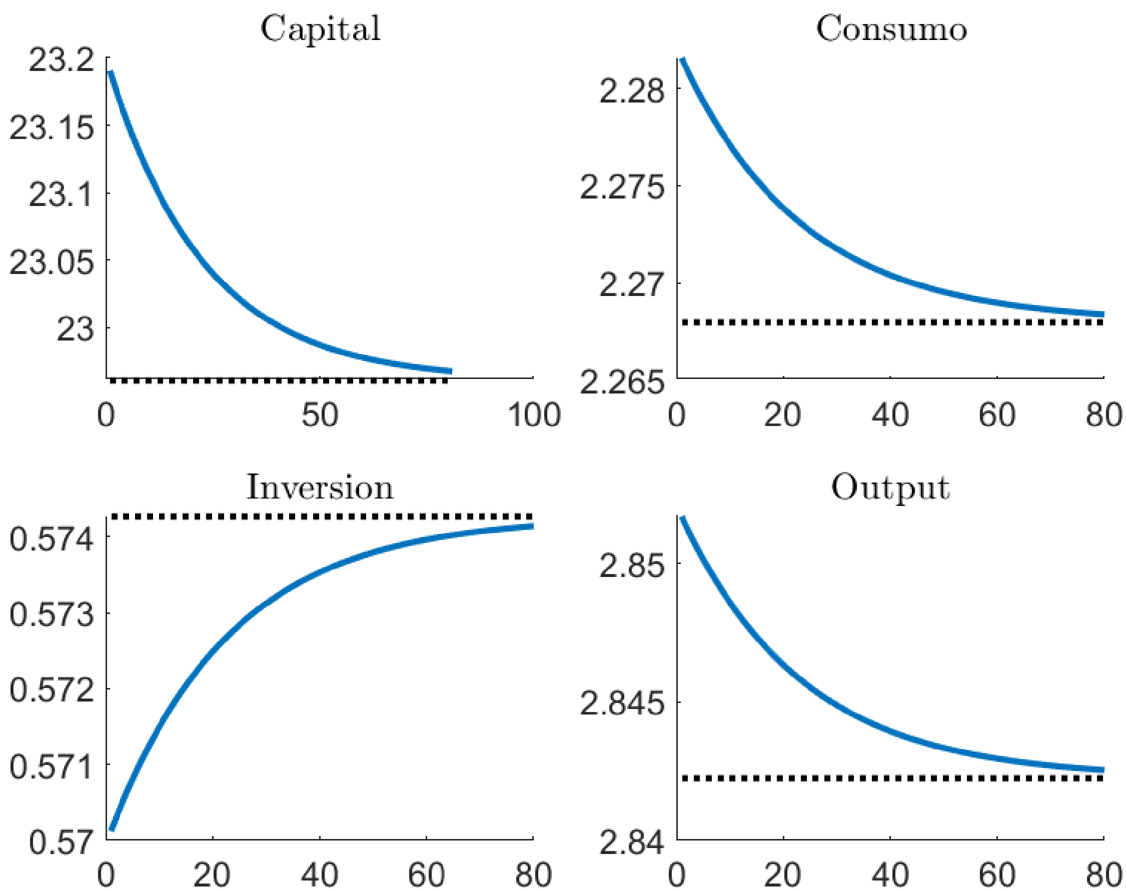

Figura 4. Función de Impulso Respuesta con shock +1%

Figura 4 - Consumo

Gracias a la teoría de la renta permanente de Friedman (1957) pidemos decir que ante un shock positivo del ingreso transitorio, aumenta el ahorro. Por ello, a diferencia de la trayectoria del capital este shock no afecta en cambios porcentuales de manera tan severa al consumo. Pese a que no tenemos una figura de salarios reales, podríamos esperar que al inicio estos se vean muy afectados pero luego se vuelva a su estado potencial. Otro punto importante de notar es que el consumo no vuelve rápidamente a su estado estacionario pues debemos recordar que el agente le interesa **suavizar consumo** por lo que de igual forma estará siempre por sobre el estado estacionario.

Figura 4 - Capital

Corresponde a la suma depreciada de las inversiones pasadas, pero a diferencia del caso de la inversión es un stock. El único problema de esta figura es que el shock afecta enseguida al capital, lo que tendería llevarnos a pensar que hay un error en la resolución dado que la inversión se integra al capital con un rezago. Matemáticamente es

$$k' = (1-\delta)k + I$$

Respecto a la figura podemos notar que, primero el capital aumenta en un 1% respecto del nivel de estado estacionario, y que luego este converge nuevamente al estado estacionario a una velocidad que depende del nivel de persistencia del shock. Esta relación es consistente con el consumo debido a que dado que el shock en productividad afecta no la trayectoria permanente de consumo, sino que el ahorro por lo que aumentan las tenencias de capital.

Figura 4 - Inversión

El orden de magnitud del cambio porcentual de la inversión puede sorprender, dado que bajo nivel. Pero no debemos olvidar que este corresponde a un flujo, por lo que no es directamente comparable con el stock de capital. Ahora bien, la inversión será la contracara del consimo pues dado que estamos en un contexto de economía cerrada, no hay gobierno ni se pagan impuestos, el ahorro será igual a la inversión. La diferencia con el paper de King y Revelo está en que en este caso la productividad marginal del capital disminuye en el primer periodo en respuesta del shock (véase figura y análisis del capital). Sumado a ello podemos ver que debido a la concavidad en la función de producción podemos evidenciar que aumenta el retorno del capital al disminuir el stock de capital. Es así como el beneficio marginal de utilizar el capital va disminiyendo, y junto con que la tasa de depreciación nos da un margen para aumentar la utilización del capital. Esto lo podemos ver en la figura de capital que se mueve de la misma manera que la de los retornos o beneficios que da este, lo que nos hace concluir que los costos de utilización son constantes.

Figura 4 - Output

La convergencia del output depende de cómo se muevan los factores productivos, dada su relación lineal con ellos. En concreto, no tenemos un análisis centrado en la oferta laboral pues esta es exógena pero si podemos notar que el *output* va a aumentar cuando tengamos más capital. Ahora bien, el output no aumenta en la misma proporción que el capital. Miremos esto matemáticamente. En este caso tenemos una función de producción *Cobb Douglas*

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot N^{(1-\alpha)}$$

Entonces, si aplicamos logaritmo tenemos que

$$\log(y) = \log A + \alpha \cdot \log K + (1-\alpha)\log \mathrm{N}$$

Donde el output vario cerca de un 3% y un 2% TFP, y por tanto, 1% los factores productivos. Por complementariedad de capital y trabajo, este 1% se distribuye de forma tal que el capital solo aporta $\frac{1}{3}$.

Shock negativo al stock de capital, en -1%

En la Figura 5, podemos ver la misma representación que en la Figura 4 pero ahora con un shock negativo. Debemos notar en los análisis que cuando las variables están en "negativo" no implica que sus niveles sean negativos, sino que están **bajo el estado estacionario.** Nuevamente, para entender las figuras debemos entender en qué consisten las funciones de impulso respuesta

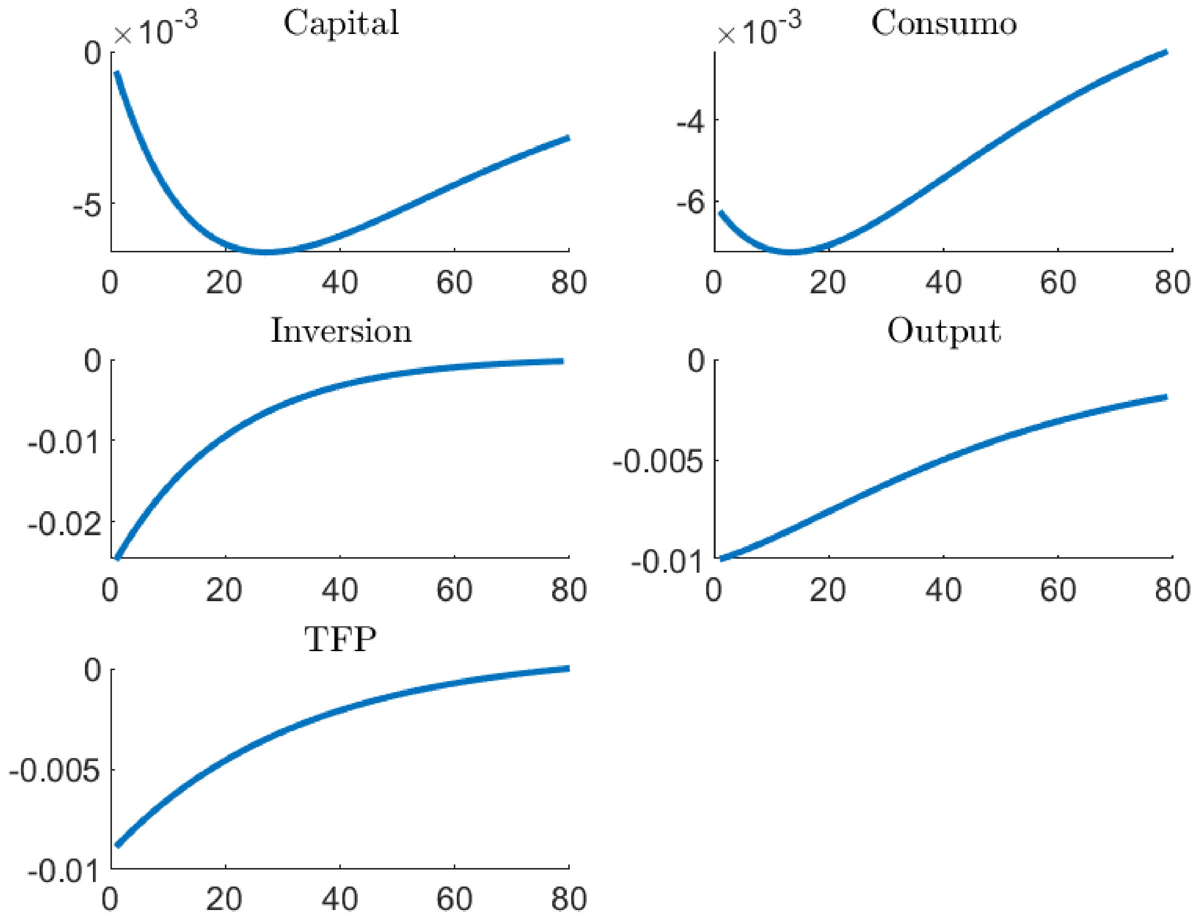

Figura 5. Función Impulso Respuesta con shock en -1%

Como podemos notar, en todas la variables de la economía un shock negativo en el capital hace que quedemos bajo los niveles del estado estacionario. En concreto, un shock negativo en -1% en la productividad tiene un impacto de un orden de $-5 \cdot 10^{3}$, lo que es un efecto bastante grande sobre el stock de capital. Como estamos en un contexto de economía cerrada, el ahorro es igual a la inversión, y por ello, evidentemente esto tiene consecuencias iniciales importantes sobre el consumo.

Figura 5 - Consumo

Con la caída de la producción disminuyen los ingresos reales de la economía, produciéndose una contracción en la demanda agregada. Es así como el consumo se va a ver seriamente afectado. Al inicio el shock afecta en un orden menor que al capital pero llega a niveles por debajo de -6. La razón de porqué al inicio sigue bajando en el periodo siguiente es que, dado el shock en el capital, el agente no tendrá tenencias de capital para suavizar consumo. Entonces, este podrá recuperarse solo lentamente a medida que el capital comience a recuperar sus niveles. Este resultado es muy interesante pues tanto el capital como el consumo no operan en plenitud hasta después de 20 periodos.

Figura 5 - Inversión

Dado que la inversión es un componente de la demanda agregada de capital, evidentemente se ve afectada. Ahora bien, el efecto no sigue la misma trayectoria que en el caso del consumo. La razón es que esto muestra un flujo, y en concreto, a menor stock de capital la producción marginal del capital aumenta, por lo que la inversión por este (dado sus mayores retornos a menores unidades), va a ir aumentando. Probablemente ese sea el componente que empuja a la economía a su recuperación, especialmente al capital que hasta el periodo 20 su distancia respecto al estado estacionario es cada vez más baja (no opera en plenitud después del shock).

Figura 5- Output y TFP

El *output* es un resultado de los aportes del equilibrio en el mercado de capitales y trabajo. Lo interesante está en notar que este no sigue cayendo después del shock (como un *crouwding out)* sino que se va recuperando y llegando al estado estacionario lentamente. Además, sigue un orden de magnitud similar al de la productividad. Esto nos lleva a penar que tanto la productividad como la inversión juegan un rol clave en la recuperación. Así, en un contexto de menores niveles de capital, dado que la PMG_k aumenta, la inversión aumenta y esto puede producir un efecto positivo en la economía, de modo que volvamos al estado estacionario (y no quedemos atrapados en espirales que llevan al producto por debajo de su potencial y desaceleran fuertemente el mercado de los bienes).