INSTITUTO DE ECONOMÍA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
Y ADMINISTRATIVAS

Curso : Teoría Macroeconómica I-EAE320B-1
Profesor : Alexandre Janiak
Ayudantes: Bianca Hincapié y Pablo Vega
Fecha : 26 de marzo de 2022
Estudiante : Valentina Andrade
Mail : vandrade@uc.cl

Seguimiento III

1. Presentación

Considere ahora la siguiente función de utilidad del agente

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, & \text{si } \sigma \neq 1 \\ ln(c), & \sigma = 1 \end{cases}$$

Primero, bajo un contexto de **incertidumbre** el problema que define la utilidad marginal que quiere maximizar el gente se define por

$$V(S) = \max_{c_t, S} \left[\sum_{t=}^{2} \beta^t u(c_t) \right]$$

Podemos reescribir el problema de la siguiente manera

$$V(S) = \max_{c_{t-1} c_t, S} u(c_{t-1}) + \beta u(c_t) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} s.t = S &\geq y_{t-1} - c_{t-1} \\ y_{t-1} + \frac{y_t}{1+r} &\geq c_{t-1} + \frac{c_t}{1+r} \\ c_t &\geq 0 \end{aligned}$$

Además tenemos información respecto a los valores que toman alguno de los parámetros presentados

$$\beta = 0{,}96, \sigma = 1, r = 0{,}03, y_1 = 5, y_2 = 7$$

Para solucionar el problema tenemos que notar dos puntos. El primero es que se deben cumplir las condiciones INADA, es decir,

La utilidad del consumo $u(c)$ es creciente $u'(c) > 0$, cóncava $(u''(c) < 0$, diferenciable y el $\lim_{c \longrightarrow 0} u'(c) = \infty$. El enunciado nos permite notificar que dado que $\sigma = 1$ estaremos en el segundo caso de la función. En conclusión

$$u(c) = ln(c) \wedge u'(c) = \frac{1}{c} \tag{2}$$

Sumado a ello, las restricciones estarán activas. Esto quiere decir que daremos solución a ellas en igualdad. Además, por INADA la restricción de no negaticidad de c_t será omitida.

1.1. (a) Considere primero el caso de dos periodos. Plantee el problema y obtenga las soluciones analíticas de c_1 , c_2 y S.

Para poder solucionar un problema en dos o más periodos los pasos son los siguientes:

1. Presentar el problema en dos periodos, iniciando por el último periodo T y el penúltimo T-1
2. Calcular la condición de optimalidad, obteniendo la ecuación de Euler
3. Calcular la **función política**: obtener los valores óptimos de las variables de control en función de las variables de estado
4. Calcular la **función valor**: obtener el valor de la función de utilidad objetivo de las variables de estado

A.1 Presentar el problema en dos periodos, iniciando por el último periodo 2 y el primero 1. En este problema no consideraremos incertidumbre

Tomamos la ecuación 1 y las restricciones 1, y

$$V(S) = \max_{c_1 c_2, S} u(c_1) + \beta u(c_2) \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
s.t = c_1 \geq y_1 - S \\
c_2 \geq y_2 + S(1+r) \\
y_1 + \frac{y_2}{1+r} \geq c_1 + \frac{c_2}{1+r} \\
c_t \geq 0
\end{aligned}
$$

Donde la última restricción se construye uniendo las restricciones (1) y (2)

A.2 Calcular la condición de optimalidad, obteniendo la ecuación de Euler

A partir de la ecuación 3 y las restricciones 1.1, el lagrangiano queda expresado como:

$$
\mathcal{L} = u(c_1) + \beta \cdot u(c_2) + \lambda \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right] \tag{4}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = u'(c_1) - \lambda = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = \beta u'(c_2) - \frac{\lambda}{1+r} = 0
$$

Si igualamos λ obtenemos la Ecuación de Euler 9

$$
u'(c_1) = \beta \cdot (1+r) u'(c_2) \tag{5}
$$

Esta condición de optimalidad es informativa sobre las definiciones de consumo que hace el agente, esto es, la decisión de consumo en t=1 y/o en t=2. Por el lado izquierdo de la ecuación puede ser interpretado como el **costo marginal** y el lado derecho el **retorno marginal** de haber ahorrado una unidad de S en t = 1. Además $\beta(1+r)$ permite no solo hacer comparable las utilidades entre el periodo 2 y 1, sino que muestra la fuerza de dos factores en los que piensa el agente: (1) el ahorro permite tener más bienes en t=2 y (2) la impaciencia de querer consumir en t=1.

A.3 Calcular la función política: obtener los valores óptimos de las variables de control en función de las variables de estado

Primero reemplazamos $u(c_t)$ por $u'(c_t) = \frac{1}{c}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c_1} = \beta \cdot (1+r) \frac{1}{c_2} \\
c_2 = \beta \cdot (1+r) \cdot c_1
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad c_1 = \frac{c_2}{\beta \cdot (1+r)} \qquad c_2 = \beta \cdot (1+r) \cdot c_1
$$

Para encontrar S aplicamos **sustitución** de los c_t a partir de las restricciones. Luego,

$$y_2 + S(1+r) = \beta \cdot (1+r) \cdot (y_1 - S)$$

Reordenando términos

$$\begin{aligned}
S(1+r) &= \beta \cdot (1+r) \cdot y_1 - \beta \cdot (1+r) \cdot S - y_2 \\
S(1+r) + S \cdot \beta \cdot (1+r) &= \beta \cdot (1+r) \cdot y_1 - y_2 \\
S((1+r) + \beta \cdot (1+r)) &= \beta \cdot (1+r) \cdot y_1 - y_2 \\
S &= \frac{\beta \cdot (1+r) \cdot y_1 - y_2}{(1+r) + \beta \cdot (1+r)}
\end{aligned}$$

Ahora recordando que $\beta = 0{,}96, r = 0{,}03, y_1 = 5, y_2 = 7$

$$S = \frac{0{,}96 \cdot (1+0{,}03) \cdot 5 - 7}{(1+0{,}03) + 0{,}96 \cdot (1+0{,}03)} = \frac{-2{,}056}{2{,}0188} = -1{,}018 \tag{6}$$

Así,

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{c_2}{0{,}96 \cdot (1+0{,}03)} = \frac{y_2 + (1+r)S}{0{,}988} = \frac{7 + (1+0{,}03) * (-1{,}018)}{0{,}988} = 6{,}018 \\
c_2 &= 0{,}96 \cdot (1+0{,}03) \cdot c_1 = (y_1 - S) \cdot 0{,}988 = (5 - (-1{,}018) \cdot 0{,}988 = 6{,}086
\end{aligned}$$

Esto es consistente con la idea de que el agente **suaviza consumo** dado que mantiene niveles de consumo parecidos en ambos periodos. Notaremos por la concavidad de la función que

$$Si \quad S \uparrow \begin{cases} \Rightarrow c_1 \downarrow & \Rightarrow u'(c_1) \uparrow \\ \Rightarrow c_2, & \Rightarrow \beta(1+r)u'(c_2) \end{cases}$$

1.2. (b)Resuelva numéricamente el problema del agente sin incertidumbre. Compare la respuesta num´erica con la obtenida en el inciso anterior.

1.3. (c) Calcule los coeficientes relativos de aversión al riesgo y de prudencia e indique si va a haber ahorro precautorio

1.3.1. Aversión al riesgo

La **aversión al riesgo** permite dar cuenta de como un agente pondera la **utilidad esperada** en t=1 y t=2, sumada a la incertidumbre asociada a los retornos en cada escenario. La concavidad de la función aquí juega un rol clave, dado que permite mostrar mostrar que si bien las ganancias adicionales no aumentan más utiles, **las pérdidas si van a impactar más a los agentes, y por eso se será más averso al riesgo**.

Es por ello que la **medición** de esta condición es medida a través de la utilidad marginal según cuanto va a cambiar lo que se gana y pierde. El coeficiente que nos da este valor es el de **Arrow-Pratt** (ρ)

$$\textit{Aversión absoluta al riesgo}$$
$$\rho_a \equiv -\frac{u''(c)}{u'(c)} = \frac{-c^-2}{c^-1} = \frac{1}{c}$$
$$\textit{Aversión relativa al riesgo}$$
$$\rho_r \equiv -\frac{u''(c)}{u'(c)} \cdot c = \frac{-1}{c} \cdot c = 1$$

Por lo tanto, dado los valores negativos pues que $c_t > 0$, decimos que hay un .ªversión por el riesgo"(risk aversion). Dado que este coeficiente mide la variación del grado de aversión al riesgo en relación a variaciones proporcionales en la riqueza se habla de .ªversión al riesgo decreciente"(Arrow, 1970)

1.3.2. Prudencia

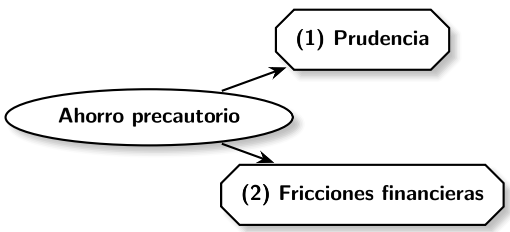
La prudencia permite dar cuenta cómo el agente decide entre el consumo en t=1 y t=2 considerando la **variación de la utilidad esperada**. Así, no solo será importante la concavidad de la función de utilidad (aversión al riesgo), sino que la convexidad de la función de utilidad marginal (prudencia).

Esto asegura que si $u'''(c) > 0$, luego $u'(c)$ es una función convexa en c. En ese caso si c_t y $E[c_{t+1}]$ son iguales, la $E[u'(c_{t+1})]$ es mayor a $u'(c_t)$, y así **la reducción marginal de c_t aumenta la utilidad esperada** (Leland,1968)

$$Prudencia \equiv u'''(c) = \frac{2}{c^3}$$

1.3.3. Ahorro precautorio

El ahorro precautorio se puede producir por dos causas, como se ve en la siguiente figura. Analizaremos la primera dado que en este ejemplo no tenemos fricciones financieras.



En el caso de la prudencia, la **convexidad** de la función de $u'(c)$ hace que al subir la varianza entre la utilidad esperada de dos posibles resultados de la utilidad, el agente por ser prudente decide ahorrar. Matemáticamente se ve en que si la $E[u'(c_2)]$ va a aumentar, por estar en igualdad, la $u'(c_1)$ también está aumentando, y por tanto, el c_1 está cayendo y el ahorro S subiendo.

$\therefore$ se va a producir ahorro precautorio en un contexto de agentes prudentes.

1.4. Consumo en dos periodos con ingreso variable

Considere ahora que el valor de y_2 es incierto. En particular puede tomar 3 valores: 10, 4 y 1 con probabilidades 0.6, 0.2 y 0.2 respectivamente.

- Resuelva numéricamente el problema del agente. ¿Cuál es el valor del consumo en cada realización de y_2?
- ¿Cu´al es el valor del ahorro y del consumo en el primer periodo?
- ¿Existe ahorro precautorio?

Consideraremos ahora que $E[y_2] = y_2{*} = 10 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}2$. Resolveremos el problema ahora con este ingreso

$$V(S) = \max_{c_1 c_2, S} u(c_1) + \beta E[u(c_2)] \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
s.t = c_1 &\geq y_1 - S \\
c_2 &\geq y_2 + S(1+r) \\
y_1 + \frac{y_2}{1+r} \geq c_1 &+ \frac{c_2}{1+r} \\
c_t &\geq 0
\end{aligned}
$$

A.2 Calcular la condición de optimalidad, obteniendo la ecuación de Euler

A partir de la ecuación 7 y las restricciones 1.4, el lagrangiano queda expresado como:

$$
\mathcal{L} = u(c_1) + \beta \cdot E \cdot u(c_2) + \lambda \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right] \tag{8}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = u'(c_1) - \lambda = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = \beta \cdot E[u'(c_2)] - \frac{\lambda}{1+r} = 0
$$

Si igualamos λ obtenemos la Ecuación de Euler 9

$$
u'(c_1) = \beta \cdot (1+r) E[u'(c_2)] \tag{9}
$$

Para obtener valores numéricos tenemos que reemplazamos $u(c_t)$ por $u'(c_t) = \frac{1}{c}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c_1} &= \beta \cdot (1+r) \frac{1}{E[c_2]} \\
c_2 &= \beta \cdot (1+r) \cdot c_1
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad c_1 = \frac{E[c_2]}{\beta \cdot (1+r)} \qquad c_2 = \beta \cdot (1+r) \cdot c_1
$$

Para encontrar S aplicamos **sustitución** de los c_t a partir de las restricciones. Luego,

$$
E[y_2 + S(1+r)] = \beta \cdot (1+r) \cdot (y_1 - S)
$$

Reordenando términos, y dado que solo y_2 es variable

$$
\begin{aligned}
S(1+r) &= \beta \cdot (1+r) \cdot y_1 - \beta \cdot (1+r) \cdot S - E[y_2] \\
S(1+r) + S \cdot \beta \cdot (1+r) &= \beta \cdot (1+r) \cdot y_1 - E[y_2] \\
S((1+r) + \beta \cdot (1+r)) &= \beta \cdot (1+r) \cdot y_1 - E[y_2] \\
S &= \frac{\beta \cdot (1+r) \cdot y_1 - E[y_2]}{(1+r) + \beta \cdot (1+r)}
\end{aligned}
$$

Ahora recordando que $\beta = 0{,}96, r = 0{,}03, y_1 = 5, E[y_2] = y_2^* = 10 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}2$

$$
S = \frac{0{,}96 \cdot (1+0{,}03) \cdot 5 - (10 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}2)}{(1+0{,}03) + 0{,}96 \cdot (1+0{,}03)} = \frac{-2{,}056}{2{,}0188} = (-1{,}018) \tag{10}
$$

Y del mismo modo que antes

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{c_2}{0{,}96 \cdot (1+0{,}03)} = \frac{y_2 + (1+r)S}{0{,}988} = \frac{7 + (1+0{,}03) * (-1{,}018)}{0{,}988} = 6{,}018 \\
c_2 = 0{,}96 \cdot (1+0{,}03) \cdot c_1 &= (y_1 - S) \cdot 0{,}988 = (5 - (-1{,}018) \cdot 0{,}988 = 6{,}086
\end{aligned}
$$

Eso implica que la variación del ingreso no afecta a la decisión de ahorro del agente

Queda demostrado que el problema se sigue resolviendo igual

Respecto al ahorro precautorio, este se seguirá cumpliendo dado que la forma de la función de utilidad del consumo no cambiará. Por ello, si esto se mantiene el agente sigue siendo averso al riesgo ($u''(c) < 0$) y prudente ($u'''(c) > 0$)

2. Referencias

- Arrow, Kenneth J.: Essays in the Theory of Risk-Bearing Amsterdam, 1970, ISBN 072043047X.