Tarea 1
Aplicaciones de Matlab

Teoría Macroeconómica I - EAE320B
Profesor: Alexandre Janiak
Ayudantes: Bianka Hincapie y Pablo Vega
(bhincapie@uc.cl — pavega7@uc.cl)

Instrucciones:

- Fecha de enunciado: 19 de marzo
- Fecha de entrega: 21 de abril - 23:59 hrs.
- Número de integrantes: Individual
- Formato de entrega: Cada alumno debe entregar:
  1. Un informe en formato **.pdf** con los resultados, gráficos, análisis y todo lo que considere necesario. Utilice algún editor de texto.
  2. Los archivos en formato Matlab (***.m**) debidamente comentados y explicados. Asegure que sus archivos compilan adecuadamente. Códigos que no se entiendan y/o que no compilan no recibirán puntaje. Utilice funciones con el objetivo de entregar archivos eficientes.
  3. El alumno debe subir a Canvas un archivo ***.rar** que comprima de forma **ordenada** todo lo solicitado. Se recomienda orden y estructura para distribuir adecuadamente los archivos.
- Adicionales:
  1. No se aceptan retrasos.
  2. Dada la naturaleza única de cada algoritmo, es fácil notar los plagios. Evítelos.
  3. Programe cada pregunta en *m-files* distintos.
  4. **No utilice los paquetes estadísticos de Matlab**. Desarrolle toda la tarea de forma "manual".

1 Simulación de Montecarlo

El propósito de este ejercicio es que usted sea capaz de utilizar de manera eficiente ciertos comandos[1] Matlab tales como matrices, loops, while, plot y subplot. Aplique todos sus conocimientos econométricos y desarrolle sus algoritmos de la forma más eficientes posible. Puede crear funciones cuando lo estime conveniente. El modelo de estudio está dado por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta_6 x_6 + \varepsilon \tag{1}$$

Donde $x_1 \sim U(1,8)$, $x_2 \sim N(3,4)$, $x_3 \sim \chi^2_{100}$, $x_4 \sim (t-student)_2$, $x_5 \sim$ una mixtura tal que el 50% de las veces se comporta como x_2 y el 50% de las veces como x_3, $x_6 \sim$ es un promedio de x_4 y x_5 más un error normal con media 0 y desvío 0.1, $y \sim exp(0.6)$ y finalmente $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Responda las siguientes preguntas:

(a) Genere **una muestra** de tamaño $n = 1000$ para todas las variables $x_{(1-6)}$. Realice un histograma por cada variable.

[1] Utilice los comandos que estime conveniente. No es necesario que utilice todos los nombrados en el enunciado.

(b) Genere **1000 muestras** de tamaño $n = 100$ para todas la variables $x_{(1-6)}$.

(c) Cree la función **random** que recibe como *inputs* el número de muestras y el tamaño de cada muestra. Además, debe entregar como *output* una matriz que compile todas las variables $x_{(1-6)}$ junto con entregar un subplot que indique como distribuye cada una de las variables (histograma).

(d) Compute la media, mediana, mínimo, máximo, varianza y percentiles 25 y 75 de las muestras obtenidas.

Ahora, dado que se conoce la distribución de cada una de las variables $x_{(1-6)}$ y el vector y, aplicando la metodología OLS[2], estimará los parámetros β_{1-6}.

(e) Compute el vector[3] de estimadores $\hat{\beta}_{[7x1]}$ para una muestra arbitraria.

(f) Compute una matriz que contenga los vectores de estimadores $\hat{\beta}_{ols}$ para 1000 muestras.

(g) Desarrolle un algoritmo[4] que reciba como *input* el tamaño de cada muestra y el número de muestras y que entregue como *output* un subplot donde se observe la distribución de cada estimador $\hat{\beta}_{ols}$ **para cada figura** asociada a cada tamaño de muestra. Utilice el vector $m\left[\begin{smallmatrix} 10^2 & 10^3 & 10^4 & 10^5 \end{smallmatrix}\right]$ para los distintos tamaños de muestras. Responda: ¿Cómo distribuyen los estimadores? ¿En torno a que valor están centradas las distribuciones? ¿Por qué? Interprete y explique brevemente.

A partir de esta pregunta estimaremos el vector y haciendo uso del vector $\beta_{ols}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{smallmatrix}\right]'$ y del vector de residuos[5] $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

(h) De forma similar a lo desarrollado en el ítem anterior, cree un algoritmo que entregue como *output* un subplot donde se observe la distribución de cada $\hat{\beta}_{ols}$ para cada tamaño de muestra[6] distinta. ¿En torno a que valores están centradas las distribuciones? ¿Por qué? Explique las diferencias con respecto al inciso anterior.

Utilice la figura 1 como una **referencia** de lo pedido.

2 Detrendig: Hodrick–Prescott filtering [HP]

En series de tiempo, para que el proceso sea covariance-stationary se debe cumplir que:

$$\mu_t = \mu; \quad \forall t \tag{2}$$
$$\mathbb{E}[(x_t - \mu_t)(x_{t-\tau} - \mu_{t-\tau})] = \mathbb{E}[(x_{t+s} - \mu_{t+s})(x_{t-\tau+s} - \mu_{t-\tau+s})]; \quad \forall t, s, \tau \tag{3}$$

En términos simples, las ecuaciones indican que para que una **serie de tiempo** sea **estacionaria**, la media (2) y la covarianza (3) no deben cambiar con el tiempo. Típicamente, este no es el caso, siendo común trabajar con series que contienen tendencias y ciclos, dando cuenta de procesos no estacionarios.

Para dar solución a esta problemática es necesario capturar la tendencia de la serie y separarla del ciclo. La idea general de proceso está dada por:

$$x_t = \tau_t + c_t + s_t \tag{4}$$

[2]Recuerde que el modelo poblacional está dado por $y = x\beta + \varepsilon$ y el estimador OLS está dado por $\hat{\beta}_{ols} = (X'X)^{-1}X'y$, con $X_{[n\times k+1]}$ donde k corresponde al número de regresores y n al tamaño de la muestra.

[3]Note que $\hat{\beta}_{[7x1]}$ hace referencia a las dimensiones del vector.

[4]Puede crear una función si así lo desea

[5]Para facilitar el proceso, utilice el mismo vector de shocks ε para todas las muestras.

[6]Utilice el mismo vector $m\left[\begin{smallmatrix} 10^2 & 10^3 & 10^4 & 10^5 \end{smallmatrix}\right]$

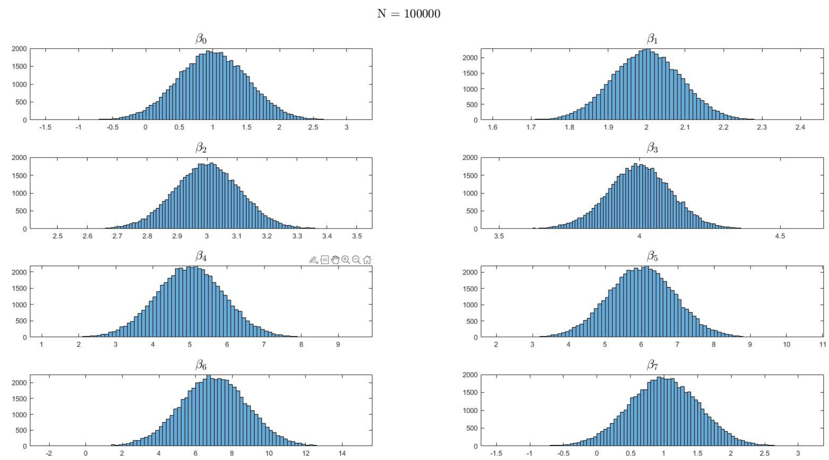

Figure 1: Subplot de una simulación con 10^5 muestras.

Donde x_t corresponde a una serie de tiempo, τ_t corresponde a la tendencia, c_t corresponde al ciclo y s_t corresponde a la estacionalidad[7] de la serie.

El objetivo de este ejercicio es utilizar el filtro de Hodrick y Prescott para separar la tendencia y el ciclo de la serie del precio del cobre. Para ello, utilice las siguientes ecuaciones[8]:

$$\boldsymbol{y}^c = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{y} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{y}^s = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} + \lambda \boldsymbol{K}'\boldsymbol{K} \tag{7}$$

Donde $\boldsymbol{I}$ denota la matriz identidad, λ el parámetro de sensibilidad de la tendencia a las fluctuaciones a corto plazo y $\boldsymbol{K}$ corresponde a la siguiente matriz tridiagonal[9]:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{[m \times n]} \tag{8}$$

Responda las siguientes preguntas:

(a) Importe las series del precio del cobre[10](cu_t) , inflación (π_t) y precio del barril de petróleo Brent (p_t) haciendo uso de comandos Matlab.

(b) Cree la función **HP** que cumpa con las siguientes características:

- *Input:* (1) serie que desea descomponer y (2) el parámetro de sensibilidad λ.
- *Output:* (1) tendencia y (2) el ciclo de la serie.

[7] Un ejemplo de estación es el caso típico del aumento de consumo en épocas navideñas. Para efectos de este ejercicio, considere $s_t = 0$

[8] http://www.columbia.edu/ mu2166/book/empirics/slides$_e$*mpirics.pdf*

[9] Note que la matriz tiene dimensiones $[m \times n]$, es decir, no es cuadrada.

[10] https://si3.bcentral.cl/siete/

(c) Grafique la serie original del precio de cobre junto a las tendencias obtenidas para un vector de sensibilidad $\lambda\,[\,6.25\ 1600\ 129.000\,]$. Interprete brevemente. La figura 2 es una buena **referencia** de lo solicitado.

(d) Estime una regresión lineal mediante OLS de los siguientes modelos:

$$M1: \quad \pi_t = \beta_0 + \beta_1 \pi_{t-1} + \beta_2 cu_t + \beta_3 cu_{t-1} + \varepsilon \tag{9}$$
$$M2: \quad \pi_t = \beta_0 + \beta_1 \pi_{t-1} + \beta_2 p_t + \beta_3 p_{t-1} + \varepsilon \tag{10}$$

Desarrolle el proceso de forma algebraica para la obtención de los estimadores, es decir, no utilice comandos econométricos en Matlab. Entregue una interpretación económica de los modelos.

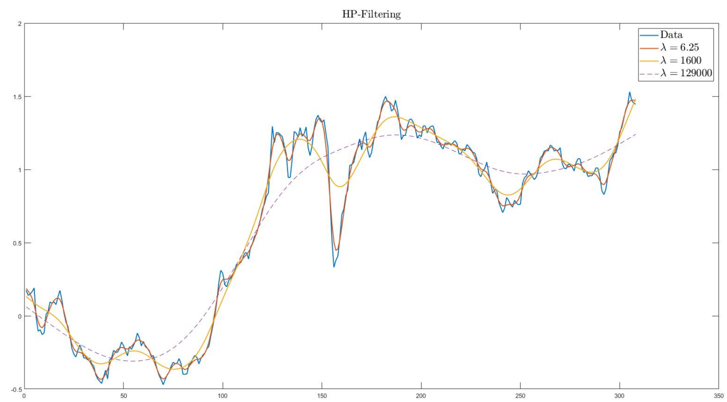

Figure 2: Tendencia de una serie de interés.

3 Raíces de una función

3.1 Entendiendo las distintas metodologías

3.1.1 Newton-Raphson

El algoritmo de Newton – Raphson permite encontrar la raíz de una función partiendo desde un punto del dominio cercano a dicha raíz. Es un método iterativo y preciso que es útil sobre polinomios de grado impar. Desde una aproximación de Taylor de primer orden es posible obtener la siguiente sucesión que define el algoritmo[11]:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \tag{11}$$

Con x_0 conocido.

La figura adjunta explica de forma gráfica el método en estudio.

[11][Hint]: Dos valores consecutivos de la sucesión serán cada vez más similares en la medida en que se aproximen a la raíz de la función.

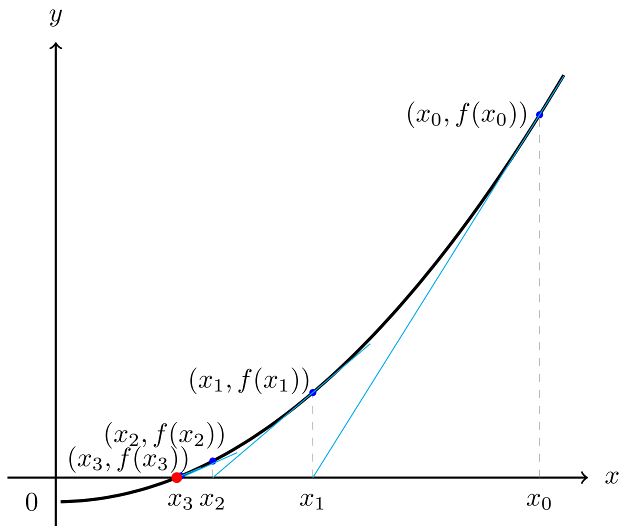

Figure 3: Descripción gráfica del método.

3.1.2 Algortimo de Bisección

Basado en el teorema de los Valores Intermedio, el algoritmo de Bisección establece: Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable C^1 donde todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$ es imagen de al menos un valor del mismo intervalo $[a, b]$. Luego, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, el teorema asegura la existencia de al menos un valor x del dominio de la función que cumple con $f(x) = 0$.

Para programar el algoritmo de Bisección siga los siguientes pasos:

1. Compute una tolerancia $\tau = 10^{-4}$ y defina un intervalo [a,b] que contenga la raíz de la función.
2. Dada una función que cumpla con las características, compute $f(a)$ y $f(b)$.
3. Compute $\bar{r} = \frac{a+b}{2}$ y luego obtenga $f(\bar{r})$. Si el signo de $f(\bar{r})$ es igual al signo de $f(a)$, entonces el nuevo intervalo definido en el dominio de la función será $[\bar{r}, b]$, de otra forma el nuevo intervalo será $[a, \bar{r}]$.
4. Compute el error de aproximación $\varepsilon = f(\bar{r})$.
5. Mientras $\varepsilon > \tau$ repita el proceso hasta que el algoritmo converja a la tolerancia deseada.

Responda las siguientes preguntas:

(a) Usando el método de Newton-Raphson, encuentre la raíz de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3 - x + 2 \tag{12}$$
$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \tag{13}$$
$$f(x) = \log(x) + \log(3x^3) \tag{14}$$

(b) Obtenga la raíz de las funciones usando el algoritmo de Bisección. ¿Obtiene los mismos resultados?.

(c) ¿Cúal algoritmo es más eficiente? Justifique brevemente.

(d) Cree las funciones **NR** y **BS** que permite encontrar las raíces de una función con las características indicadas mediante el método de Newton-Raphson y Bisección respectivamente. Utilice las funciones para computar las raíces de los incisos anteriores nuevamente.

3.2 Aplicación: Tiro vertical

En física, la notación Tiro Vertical describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, es decir, un movimiento que se caracteriza por tener aceleración constante. Este tipo de movimiento intenta estudiar la trayectoria de objetos que son lanzados verticalmente desde una cota inferior hacia una cota superior, es decir, hacia arriba. Una buena forma de comprender este movimiento es imaginar a una maquina "lanzapelotas" posicionada en 90°. La trayectoria del movimiento de la pelota puede ser explicada por las ecuaciones de un Tiro Vertical.

El propósito de este ejercicio es utilizar el algoritmo de Bisección y Newton-Raphson para hallar la solución al problema.

Contexto

Imagine que durante un día de partido de tenis, su rival no se presenta y usted decide practicar su saque con la ayuda de una máquina "lanzapelotas". Para optimizar sus movimientos y energía, desea saber el momento exacto en que la pelota alcanzará la altura máxima en su recorrido, de tal forma de poder aplicar un golpe limpio. Usted sabe que las ecuaciones[12] de Tiro Vertical son las que mejor describen el movimiento de la pelota y están dadas por:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{15}$$

Los parámetros de la ecuación están defindidos por:

- $h(t)$: Altura de la pelota en el instante t.
- h_0: Altura inicial $\longrightarrow 50(cm)$
- v_0: Velocidad incial $\longrightarrow 4.5(m/s)$
- g: Aceleración de gravedad $\longrightarrow 9.81(m/s^2)$

(a) Mediante el algoritmo de Bisección y Newton-Raphson obtenga el tiempo t^* en el cual la pelota alcanza la altura máxima.

(b) Obtenga la altura máxima que alcanza la pelota.

(c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en el instante t^*? ¿Por qué son válidos estos algoritmos para encontrar la solución al problema? Explique brevemente.

(d) Imagine que ahora desea estudiar el movimiento denominado caída libre, ¿Podría utilizar las funciones NR y BS para estudiar la trayectoria del objeto de estudio? No es necesario que haga cálculos. Explique brevemente la lógica que hay detrás de los movimientos estudiados.

[12]Hint]: Recuerde que: $\frac{\partial h(t)}{\partial t} = v(t)$ y $\frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} = a$, donde $v(t)$ describe la velocidad del objeto en función del tiempo y a corresponde a su aceleración.

4 Introducción a Funciones Impulso Respuesta (IRF)

En esta pregunta se estudiará superficialmente las Funciones Impulso Respuesta, aplicación utilizada en series de tiempo que permiten comprender cuanto afecta un shock puramente transitorio al estado estacionario de una serie.

Una forma de entender en que consiste esta aplicación implica recordar un proceso autorregresivo de orden 1 $AR(1)$ del tipo:

$$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{16}$$

Donde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ es un ruido blanco. Se dice que la serie es estacionaria[13] cuando $|\phi| < 1$, es decir, la serie converge a un valor de estado estacionario[14] . La velocidad de convergencia de la serie depende del valor de ϕ, por lo cual mientras este valor sea más cercano a 1, más lento será su retorno al estado estacionario. Por el contrario, cuando ϕ es un valor cercano a 0, el proceso converge rápidamente al estado estacionario. Además, se dice que hay raíz unitaria cuando $\phi = 1$.

Contexto

Imagine dos series idénticas que describen un proceso $AR(1)$ descrito por (16). Vamos a perturbar una de las dos series en un momento t (por especificar) sumando un shock de magnitud α (por definir) al residuo ε_t^1 de la serie. El resto de los períodos permanecen igual, es decir, los residuos de las series serán iguales excepto en el período perturbado. Dado que las series eran idénticas antes de la perturbación, tenemos la serie y su **contrafactual**, por lo cual podemos conocer la magnitud del efecto del shock transitorio restando ambas series.

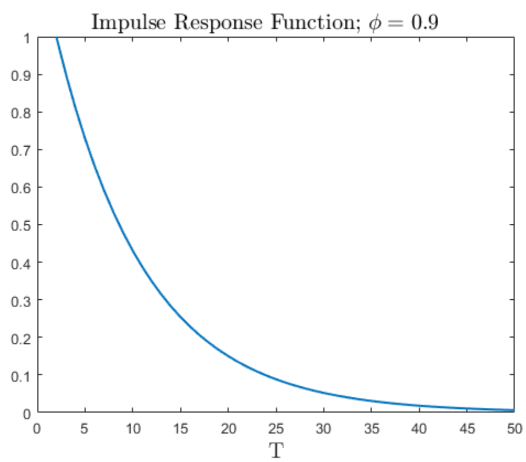

Figure 4: Función Impulso Respuesta con $\phi = 0.9$.

Responda las siguientes preguntas:

(a) Simule una serie[15] $AR(1)$ idéntica a (16) de 500 períodos con $\phi = 0.9$. De la misma forma, simule la misma serie, pero ahora pertúrbela con un shock transitorio $\varepsilon = 1$ en el período $t = 0$. Grafique la IRF[16].

[13] Dada una serie estacionaria, es posible realizar inferencia estándar mediante el estimador OLS.

[14] En la figura 4, el estado estacionario corresponde al eje x, es decir, si no hubiera habido perturbación la función sería una recta fija en $y = 0$.

[15] Utilice el comando *randn* en Matlab para crear el vector de residuos.

[16] La figura 4 es una buena referencia de la IRF que se solicita.

(b) Construya un subplot para distintos coeficientes autorregresivos $\phi \in (0,1)$ dados por el vector: Explique.

$$\phi = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 0.95 \end{bmatrix}_{[6\times 1]} \tag{17}$$

(c) Descargue la serie del PIB per capita de Chile (código: NY.GDP.PCAP.KN) desde la base de datos del Banco Mundial[17].

(d) Obtenga la tendencia y el ciclo de la serie utilizando el filtro de Hodrick-Prescott estudiado en preguntas anteriores. Puede reutilizar las funciones creadas previamente si así lo desea.

(e) Mediante OLS, compute el coeficiente autorregresivo asumiendo que la serie sigue un proceso AR(1).

(f) Compute una IRF asumiendo un shock transitorio $\varepsilon = 1$ sobre el residuo de la serie.

(g) ¿Cómo cambian los resultados anteriores al variar la persistencia[18] del proceso? Grafique y explique.

(h) ¿Cómo cambian los resultados anteriores al variar la magnitud del shock transitorio? Grafique y explique.

[17] https://databank.worldbank.org/indicator/NY.GDP.MKTP.KD.ZG/1ff4a498/Popular-Indicators

[18] La persistencia da cuenta de la magnitud del coeficiente autorregresivo.