Ayudantía IV

Teoría Macroeconómica I

06 de septiembre de 2021

Pregunta 1.(a)

(a)
- El problema del agente es:

$$V_t(W) = \max_{c, W' \geq 0} \; u(c) + \beta V_{t+1}(W') \tag{1}$$

$$\text{s.a.}$$

$$W' = R(W - c + y) \tag{2}$$

$$W_0 \text{ dado} \tag{3}$$

- Variables de **estado**: t, W.
- Variables de **control**: c, W'.

Pregunta 1.(a) (contd.)

- **Resolución**:

  * Resolveremos el problema V_t recursivamente en el tiempo, i.e., desde $t = T$ hasta $t = 0$.

  * Resolveremos V_t mediante sustitución del consumo: utilizamos la restricción (2) en la función de utilidad $u(c)$.

  * Aproximaremos la solución a V_t restringiendo las decisiones de activos futuros W' a una grilla $\mathcal{W}$, i.e., un espacio discreto.

Pregunta 1.(a) (contd.)

- Luego, el problema del periodo t es:

$$V_t\left(W\right) = \max_{W'} \; u\left(W + y - \frac{W'}{R}\right) + \beta V_{t+1}\left(W'\right) \tag{4}$$

$$\text{s.a.}$$

$$W' \in \mathcal{W} \tag{5}$$

donde $\mathcal{W} = [0, W_2, \ldots W_{\text{gpw}}]$ y `gpw` es la cardinalidad de $\mathcal{W}$.

- Como el espacio de estados del agente es discreto, podemos representar la función de valor $V_t(W)$ con la siguiente matriz:

$$\mathrm{V}_{[T+1 \times gpw]} = \begin{bmatrix} \mathrm{V}_1 \\ \mathrm{V}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{V}_{T+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(W_1) & V_1(W_2) & \ldots & V_1(W_{\text{gpw}}) \\ V_2(W_1) & V_2(W_2) & \ldots & V_2(W_{\text{gpw}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{T+1}(W_1) & V_{T+1}(W_2) & \ldots & V_{T+1}(W_{\text{gpw}}) \end{bmatrix}$$

Pregunta 1.(a) (contd.)

- **Preámbulo**:
  - Discretizar el espacio de estados.
- **Algoritmo**:

I. Imponer una función de valor terminal $V_{T+1}(W)$.

II. Dado $V_{T+1}(W)$, resolver el lado derecho de (1) para obtener $V_T(W)$.

- Sustituir el consumo en la función de utilidad y resolver para W'.
- Castigar la utilidad de consumos no factibles dada la especificación de utilidad, i.e., $c \leq 0$.

III. Resolver recursivamente la secuencia de funciones de valor $V_{T-1}, V_{T-2}, \ldots, V_0(W)$ de forma análoga al punto paso II.

Pregunta 1.(a) (contd.)

- Para resolver la función de valor $V_t(W)$ en un periodo t dado, definiremos una función de posibilidades de utilidad $V_{\text{aux}}(W, W')$. Esta función entrega la utilidad del agente asociada a la elección W' cuando su estado es W. Representaremos la función $V_{\text{aux}}(W, W')$ con la siguiente matriz **Vaux** $_{[gpw \times gpw]}$:

$$\begin{bmatrix} u\left(W_1 + y - \frac{W_1'}{R}\right) + \beta V_{t+1}\left(W_1'\right) & \dots & u\left(W_1 + y - \frac{W_{\text{gpw}}'}{R}\right) + \beta V_{t+1}\left(W_{\text{gpw}}'\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u\left(W_{\text{gpw}} + y - \frac{W_1'}{R}\right) + \beta V_{t+1}\left(W_1'\right) & \dots & u\left(W_{\text{gpw}} + y - \frac{W_{\text{gpw}}'}{R}\right) + \beta V_{t+1}\left(W_{\text{gpw}}'\right) \end{bmatrix}$$

- Luego, la solución a la ecuación de Bellman del periodo t es:

$$V_t(W) = \max_{W'} \; u\left(W + y - \frac{W'}{R}\right) + \beta V_{t+1}\left(W'\right)$$

$$\mathrm{V}_t = \max_{W'} \; V_{\text{aux}}(W, W') = \max_{\text{dimensión } \#2} \; \mathbf{Vaux} \tag{6}$$

Pregunta 1.(b)

(b)

- Bajo horizonte infinito y sin incertidumbre, el problema del agente es:

$$V(W) = \max_{c, W' \geq 0} \; u(c) + \beta V(W') \tag{7}$$

$$\text{s.a.}$$

$$W' = R(W - c + y) \tag{8}$$

- Variables de **estado**: W.
- Variables de **control**: c, W'.

Pregunta 1.(b) (contd.)

- **Resolución**:

  * Resolvemos el punto fijo V de la ecuación Bellman (9) de forma iterativa, conjeturando una solución y actualizándola hasta obtener convergencia.

  * Nuevamente sustituiremos el consumo restringiendo las decisiones de activos futuros W' a un espacio discreto $\mathcal{W}$.

Pregunta 1.(b) (contd.)

- **Preámbulo**:
  - Discretizar el espacio de estados.
  - Inicializar la distancia d.
- **Algoritmo**:

  I. Conjeturar una función de valor de continuación V_1.

  II. Dado $V_1(W)$, resolver el lado derecho de (9) para obtener $V_0(W)$.
  - Sustituir el consumo en la función de utilidad y resolver para W'.
  - Castigar la utilidad de consumos no factibles dada la especificación de utilidad, i.e., $c \leq 0$.

Pregunta 1.(b) (contd.)

III. Computar la distancia d entre las funciones de valor V_0 y V_1:

$$d = \max_{i \in \{1,\ldots,\text{gpw}\}} |V_0(W) - V_1(W)|$$

IV. Si $d > \xi$, actualizar V_1 con V_0 y volver al paso II.

V. Si $d \leq \xi$, finalizar el algoritmo.

Pregunta 1.(b) (contd.)

- El problema del agente a resolver es:

$$V_0\left(W\right) = \max_{c,W'\geq 0} \; u(c) + \beta V_1\left(W'\right) \tag{9}$$

$$\text{s.a.}$$

$$W' \in \mathcal{W} \tag{10}$$

  donde $\mathcal{W} = [0, W_2, \ldots W_{\text{gpw}}]$ y gpw es la cardinalidad de $\mathcal{W}$. Buscamos el punto fijo en la ecuación de Bellman (9), i.e. $V = V_0 = V_1$.

- Notar similitud al problema de horizonte finito: resolución análoga, iterando hasta $V_1 \approx V_0$. Intuitivamente, estamos haciendo *Guess & Verify* sobre la función de valor V de una forma *naïve*.

- ¿Funciona la metodología propuesta? **Condiciones de suficiencia de Blackwell**.