Pontificia Universidad Católica de Chile

Instituto de Economía

Tarea 2: Deudas en el ciclo de vida

Teoría Macroeconómica I

Profesor: Alxandre Janiak

Alumno: Nicolás Valle

Noviembre 2021

1. Equilibrio Parcial

1.1. (a)

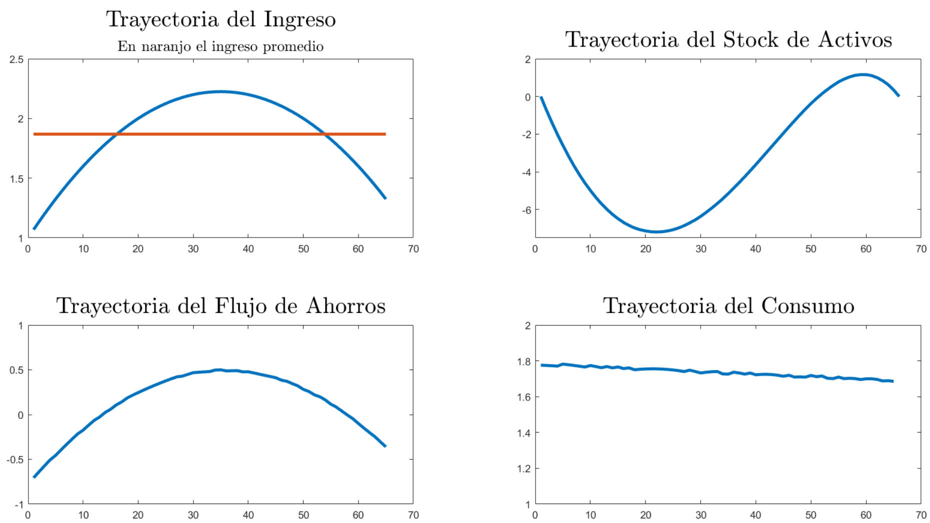

Figura 1: Trayectorias Relevantes en Equilibrio Parcial

Para la resolución númerica del problema del agente usamos la condición terminal de optimalidad dada por $a_{T+1} = 0$. A partir de esto se computa la función de valor iterativamente hacia atrás en el tiempo, seleccionando para cada nivel de activos iniciales (que es argumento de la función de valor) un nivel de activos futuro que resuelva la ecuación de Bellman de la ecuación número 2 de la tarea.
Con el fin de lograr eficiencia computacional se establece una cota inferior para el nivel de activos que puede tomar el individuo, dada por el hecho de que no puede morir con deuda y tiene un ingreso sin incertidumbre. Este hecho quedaría igualmente reflejado sin imponer la conta inferior pues es otra manera de establecer que la restricción presupuestaria se cumple con valores del consumo que tienen un mínimo en 0, sin embargo establecer a priori las cotas permite que el computador haga menos tareas.
Respecto a la correlación consumo e ingreso del agente, al computarla se obtiene un valor de $-0{,}209$ que es un valor relativamente bajo. La razón que permite explicar lo anterior es que este agente, dada su función de utilidad cóncava prefiere suavizar el consumo en el tiempo y para lograr aquello puede hacer uso de los mercados financieros de la siguiente manera: al inicio de su vida, cuando sus ahorros son bajos, el agente toma deuda que comienza a pagar desde pasados sus 20 años, momento en el que empieza a tener ahorro positivo. Los mercados financieros le permiten separar su decisión de consumo de su ingreso corriente y es esto lo que queda reflejado en las trayectorias graficadas, un stock de activos que decrece hasta que el individuo accede a mejores salarios y puede comenzar a generar ahorros positivos, finalizando su vida con un período en que incluso tiene un stock de activos positivo que es consumido en su totalidad cuando llega el último periodo.

1.2. (b)

Para el caso particular del agente, tendremos que la ecuación de Euler toma la siguiente forma:

$$c_t^{-\sigma} = \beta(1+r) * c_{t+1}^{-\sigma}$$

Para computar los errores de aproximación en la ecuación de Euler hay que despejarlos desde:

$$(c_t * (1+e_t))^{-\sigma} = \beta(1+r) * c_{t+1}^{-\sigma}$$

Por tanto podemos expresarlos de la siguiente manera:

$$e_t = \frac{K * c_{t+1} - c_t}{c_t}$$

con $K = \beta * (1+r)^{\frac{-1}{\sigma}}$.

A continuación se presenta un gráfico con la trayectoria del error de aproximación para nuestro caso particular:

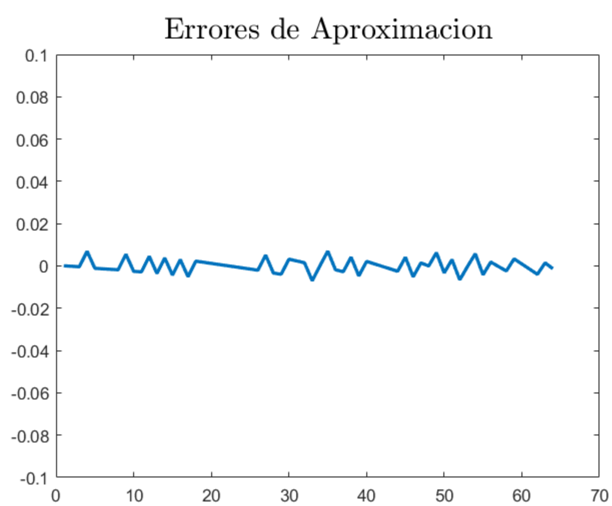

Figura 2: Trayectoria de los errores de aproximación

La baja magnitud de los errores y el hecho de que permanece sistemáticamente al rededor del 0 indica que la resolución numérica del problema del agente con una grilla de 3001 puntos es bastante buena.

1.3. (c)

A continuación se presentan dos figuras, iguales a la figura 1 pero con cambios en los parámetros, En la primera de ellas la variación respecto al caso base se da en que la tasa de interés es de 7 % en vez de 4 % como en caso base, mientras que en la segunda lo que se varía es un parametro de la función de utilidad desde $\sigma = 2$ a $\sigma = 5$.

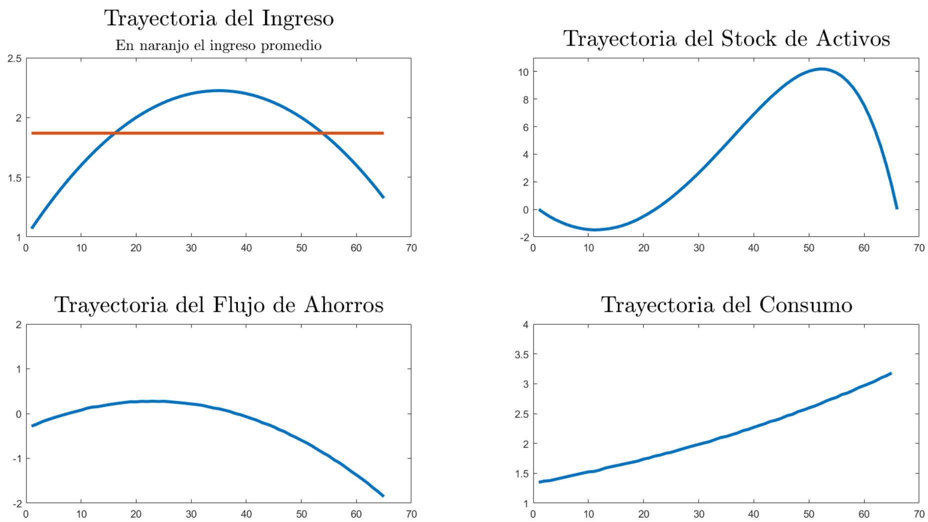

Figura 3: Trayectorias Relevantes en Equilibrio Parcial con $r = 7\,\%$

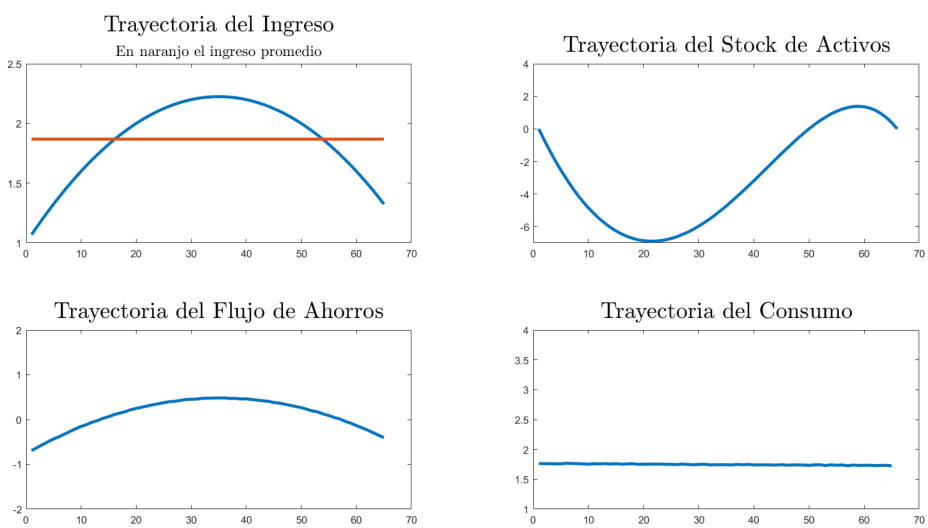

Figura 4: Trayectorias Relevantes en Equilibrio Parcial con $\sigma = 5$

De la Figura (3), que corresponde al caso en el que la tasa de interés es de $7\,\%$ podemos observar el efecto sustitución dominando las trayectorias importantes. Ahorrar durante la juventud tiene importantes beneficios en el futuro, en este sentido, el agente termina prefiriendo sacrificar una trayectoria de consumo plana para ahorrar y capitalizar sus ingresos y obtener mayor bienestar por el lado de un consumo superior en el futuro. Esta decisión se ve reflejada en su trayectoria de activos la que se mantiene sobre 0 en muchos momentos de su vida. A su vez es interesante notar que en la trayectoria del stock de activos la parte creciente comienza pasado el período 10 mientras que en el caso base esto sucedía pasado el 20.
La Figura (4) nos muestra las trayectorias cuando la función de utilidad del agente lo hace un agente que suaviza más consumo. De la ecuación de Euler, que es condición necesaria para la

optimalidad tenemos que:

$$c_t = \frac{1}{(\beta(1+r))^{\frac{1}{\sigma}}} * c_{t+1}$$

En este caso, a medida que σ crece, el término en el denominador del lado derecho converge a 1 con lo que se aplana la trayectoria de consumo óptima que es precisamente lo que se observa de contrastar la figura 1 con la 4.

2. Equilibrio General y Restricciones de Liquidez

2.1. (d)

A continuación, en la figura 5, vemos graficada la oferta neta de activos para distintos niveles de la tasa de interés, en particular una grilla de 15 puntos equidistantes entre las tasas 3.5 % y 7 %. La figura nos permite concluir que la tasa que equilibra el mercado financiero se encuentra entre 5 % y 6 %.

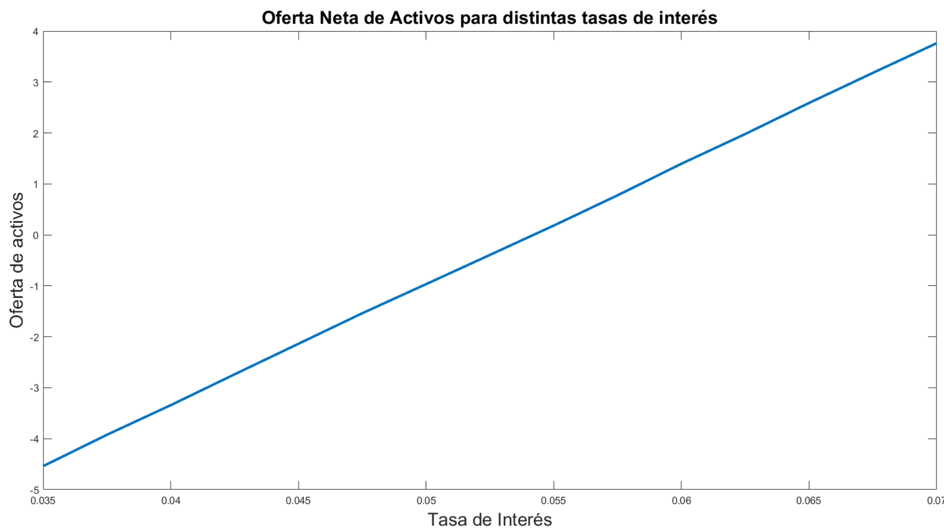

Figura 5: Oferta de Activos para difernte s tasas de interés

Para la aplicación del algoritmos de Bisección se definió $r_0 = 4\,\%$ y $r_1 = 7\,\%$. La tasa de equilibrio a la que se llegó es $r^* = 5{,}41\,\%$, la que produce un exceso de demanda de solo 0.0066, valor que se encuentra dentro de la tolerancia definida.

2.2. (e)

Cuando $R = \beta^{-1}$ tenemos que la condición de optimalidad de Euler se logra con una trayectoria de consumo pareja en el tiempo. Cuando se nace sin activos, el ingreso es parejo en cada período y se busca una trayectoria de consumo plana tendremos un equilibrio en que todo lo que se gana se consume, por tanto no hay ahorro ni toma de deuda en ningún momento de la vida, con lo que la oferta neta de activos es 0.

2.3. (f)

En la figura 6 y 7 se grafica la tasa de interés de equilibrio y la correlación entre la trayectoria del ingreso y del consumo, respectivamente, frente a diversos niveles de límite al endeudamiento.

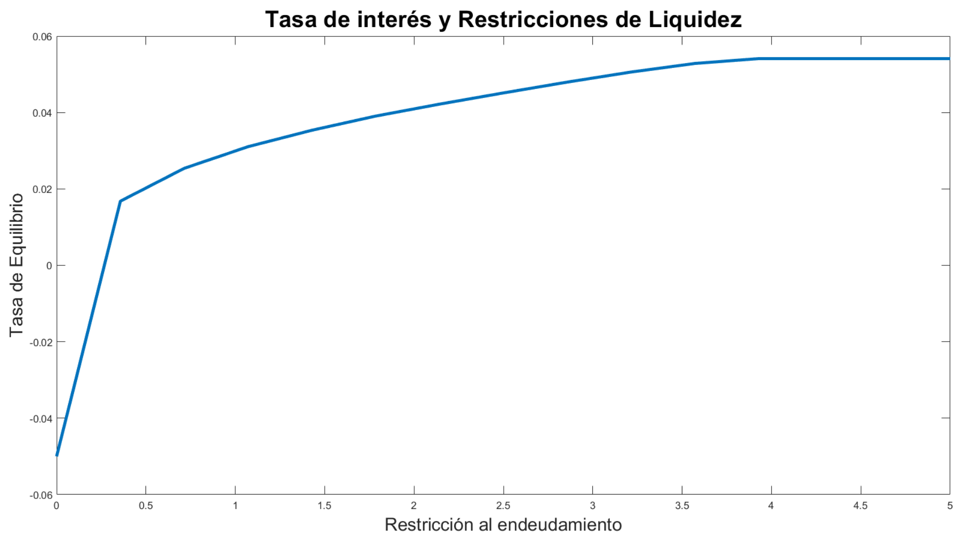

Figura 6: Tasa interés de equilibrio en el caso de Restricciones de Liquidez

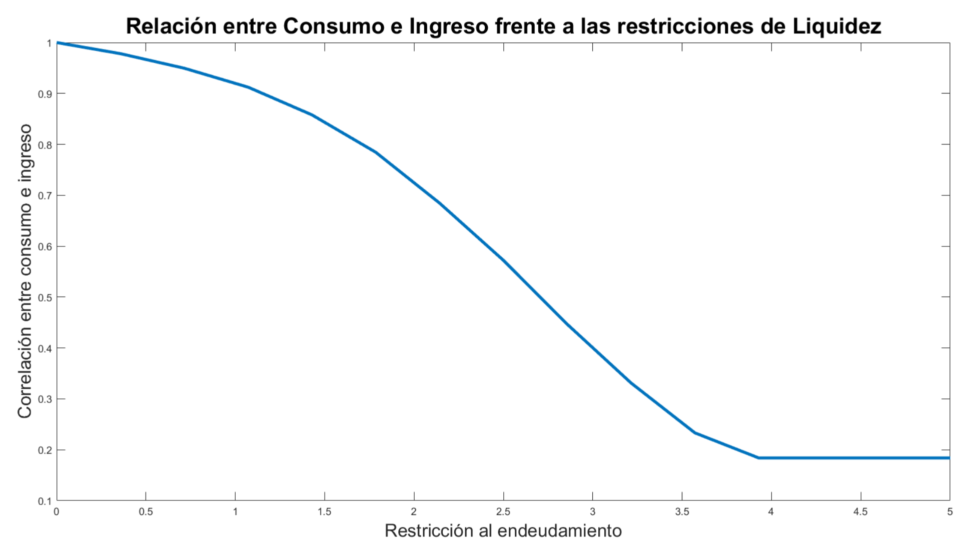

Figura 7: Correlación entre consumo e ingreso frente a Restricciones de Liquidez

A partir de la figura 6 podemos concluir que el costo financiero de endeudarse dsiminuye con las restricciones de liquidez. Esto se debe a que es necesario reducir la tasa para contraer la oferta de activos de aquellos individuos que están en la fase ahorradora de su vida, lo anterior debe suceder porque la demanda por estos activos está restringida, esta es la manera de actuar de la restricción.

La relación de la figura 7 se puede entender cuando tomamos en cuenta que el individuo en su trayectoria de vida parte con ingresos bajos y desea suavizar su consumo, pero, en presencia de restricciones de liquidez la capacidad para traer ingreso al presente y por lo tanto suavizar consumo se ve comprometida, así aunque el individuo quisiera endeudarse con el objetivo de consumir más, no puede y por ende tiene que consumir su salario corriente generando correlación entre éste último y el nivel de consumo.

3. Bienestar

3.1. (g)

En primer lugar hay que constatar que:

$$V_t^1 = \sum_{i=0}^{T-t} \beta^i u(c_{t+i}^{b_1}) = \frac{(c_t^{b_1})^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \beta \frac{(c_{t+1}^{b_1})^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + ... + \beta^{T-t} \frac{(c_T^{b_1})^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} = \frac{\sum_{i=0}^{T-t} \beta^i (c_{t+i}^{b_1})^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} - \chi_t$$

Además, dado este último desarrollo y el hecho de que la trayectoria aumentada en g % produce el mismo nivel de utilidad que con la restricción relajada, podemos concluir que:

$$V_t^1 = \frac{\sum_{i=0}^{T-t} \beta^i (c_{t+i}^{b_0}(1+g_t))^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} - \chi_t = (1+g_t)^{1-\sigma} \frac{\sum_{i=0}^{T-t} \beta^i (c_{t+i}^{b_0})^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} - \chi_t$$

Así, tendremos que:

$$\frac{\sum_{i=0}^{T-t} \beta^i (c_{t+i}^{b_1})^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} = (1+g_t)^{1-\sigma} \frac{\sum_{i=0}^{T-t} \beta^i (c_{t+i}^{b_0})^{(1-\sigma)}}{1-\sigma}$$

Lo que después de algunos arreglos algebraicos deriva en que:

$$g_t = \left(\frac{\frac{\sum_{i=0}^{T-t} \beta^i (c_{t+i}^{b_1})^{(1-\sigma)}}{1-\sigma}}{\frac{\sum_{i=0}^{T-t} \beta^i (c_{t+i}^{b_0})^{(1-\sigma)}}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} - 1$$

Además, es facil notar que tanto el numerador como el denominador son expresiones conocidas. Del numerador ya demostramos que es

$$V_t^1 + \chi_t$$

y por extensión del mismo argumento podemos concluir que el denominador es

$$V_t^0 + \chi_t$$

Consolidando todo esto, demostramos que:

$$g_t = \left(\frac{V_t^1 + \chi_t}{V_t^0 + \chi_t} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} - 1$$

3.2. h

En la Figura 8 encontramos la trayectoria solicitada de los g.

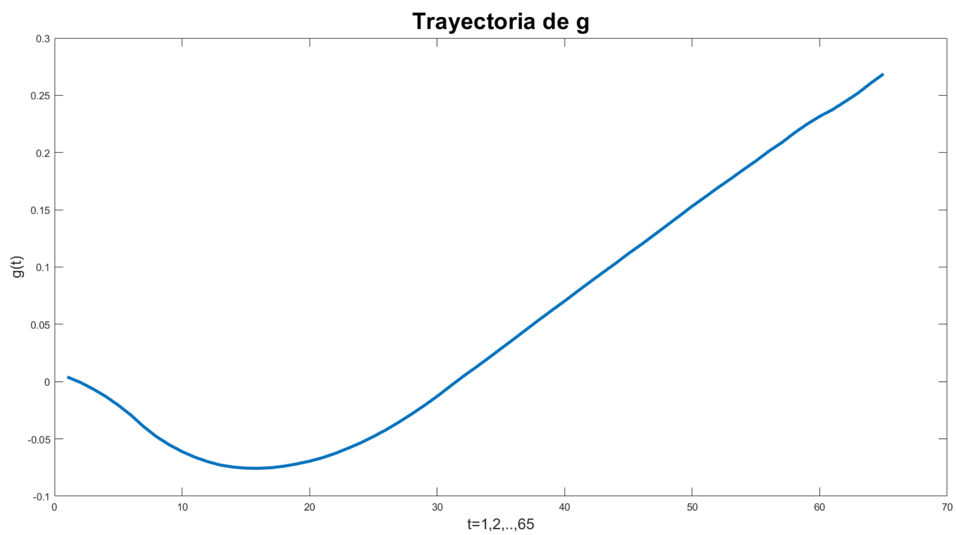

Figura 8: Trayectoria de la variación equivalente de consumo

Por supuesto el relajo de una restricción en todo tipo de problema de optimización mejora o deja igual el resultado de la optimización. En este caso, nosotros sabemos que en un caso sin restricciones los individuos en edades tempranas gustan de endeudarse para lograr el objetivo de suavizamiento del consumo. Cuando esta restricción se hace activa, situación que sucede desde una restricción al endeudamiento de 4 (más o menos) el individuo pierde bienestar.

Lo que la trayectoria de g captura es que, dado que el individuo en un comienzo opta por endeudamiento, parte en periodos sucesivos desde niveles de activo menores, por lo tanto estamos comparando dos funciones de valor desde un activo diferente. Aún así, g es mayor a 0 en la mayoría de los períodos denotando que el consumo que hace que la trayectoria bajo la restricción más estricta provea una utilidad como la que se obtiene con la restricción más relajada es mayor.

4. Oferta Laboral

4.1. (i)

La ecuación de Bellman que caracteriza el problema del agente es la siguiente:

$$V_t(a_t) = \max_{c_t, l_t, a_{t+1}} log(c_t) + \psi log(l_t) + \beta V_{t+1}(a_{t+1})$$

s.a

$$a_{t+1} + c_t = \epsilon_t n_t + (1+r)a_t$$
$$l_t + n_t = 1$$
$$a_{t+1} \geq -b$$
$$a_1 = a_{T+1} = 0$$

Las condiciones de optimalidad del problema las podemos obtener a partir del Lagrangeano del mismo

$$L = log(c_t) + \psi log(l_t) + \beta V_{t+1}(a_{t+1}) - \lambda(\epsilon_t(1-l_t) + (1+r)a_t) - a_{t+1} - c_t$$

Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{\partial u}{\partial c_t} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial l_t} = \frac{\partial u}{\partial l_t} - \lambda \epsilon_t = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial a_{t+1}} = \beta V_{t+1}^{'}(a_{t+1}) - \lambda = 0$$

De las primeras 2 condiciones de primero orden obtenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial l_t} = \epsilon_t \frac{\partial u}{\partial c_t}$$

Condición que establece que en un óptimo (siempre que sea lograble) la utilidad marginal del ocio es igual a la utilidad marginal del consumo multiplicada por el salario. Esto quiere decir que será óptimo aumentar el ocio solo hasta que su beneficio se iguale a su costo (a saber, el salario y las posibilidades de consumo asociadas), antes de que esto suceda la utilidad crece con el ocio y después la utilidad desciende. Además podemos valernos del teorema de la envolvente para calcular $V_{t+1}^{'}$ en un periodo atrás y después proyectar hacia adelante:

$$\frac{\partial V_t}{\partial a_t} = \lambda(1+r) = \lambda \frac{\partial u}{\partial c}$$

Donde el último paso se desprende de la primera condición de primer orden. Así,

$$\frac{\partial V_{t+1}^{'}}{\partial a_{t+1}} = (1+r)\frac{\partial u}{\partial c_{t+1}}$$

Lo que nos permite recuperar la famosa ecuación de Euler que es otra de las condiciones de optimalidad en este caso:

$$\frac{\partial u}{\partial c_t} = \beta(1+r)\frac{\partial u}{\partial c_{t+1}}$$

La primera condición de optimalidad enunciada (beneficio marginal del ocio igual a su costo marginal) nos permite concluir que toda vez que las restricciones lo permitan tendremos:

$$l_t = \frac{\psi}{\epsilon_t} c_t$$

Igualdad que podremos explotar en nuestra resolución numérica para no extender la dimensionalidad del problema.

4.2. (j)

En la figura 9 se grafican las trayectoria solicitadas

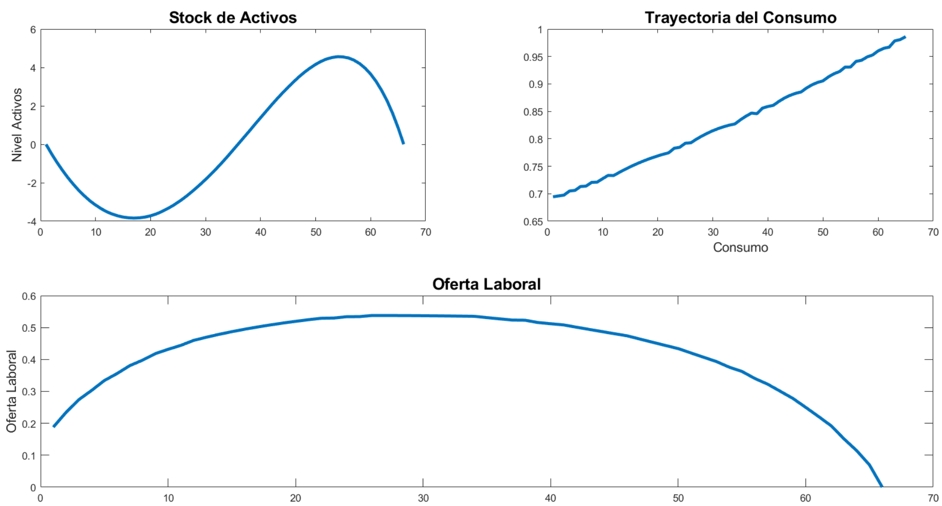

Figura 9: Trayectorias relevantes en un contexto con oferta laboral y sin restricciones de liquidez

En primer lugar hay que mencionar que la tasa que equilibra el mercado de capital en ausencia de restricciones de liquidez es 4.75 %. Podemos observar una trayectoria laboral creciente en el tiempo impulsada por los salarios más altos que el agente puede recibir al desprenderse de ocio en esa etapa de su vida.

Además el consumo presenta una trayectoria ascendente compatible con lo que esperamos de la ecuación de Euler considerando que $\beta r > 1$.

En cuanto a la trayectoria de Activos vemos un primer período de desahorro consistente con salarios bajos y por ende una baja oferta laboral. Más tardiamente, el descenso del ocio y correspondiente aumento del salario e ingresos permiten acumular activos que permiten financiar la trayectoria de consumo deseada.

4.3. (k)

Es posible comprobar que la restricción de liquidez no se activa para b¿4. Por tanto para observar el efecto de las restricciones de liquidez en las trayectoria del agente utilizaremos el caso de b=1. En este caso la tasa de equilibrio es de 3.63 %

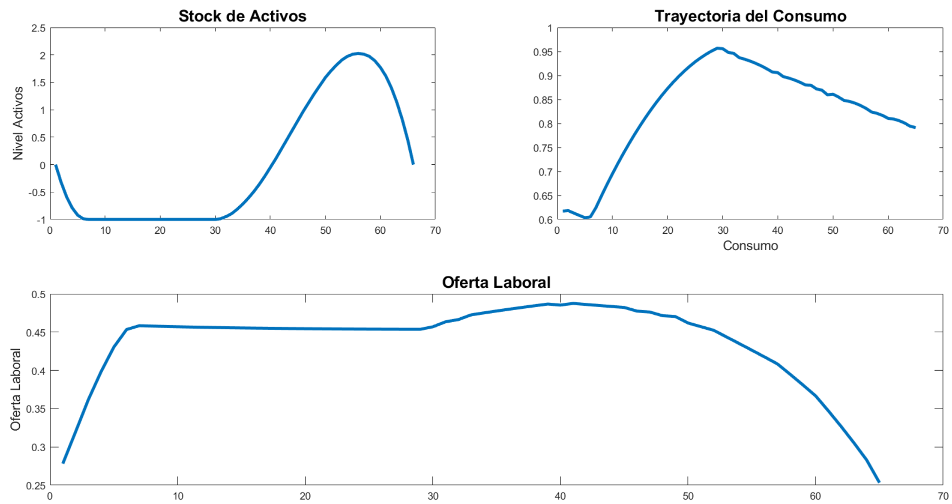

Figura 10: Trayectorias relevantes en un contexto con oferta laboral y con restricciones de liquidez

Es notoria la diferencia con el caso anterior, en particular podemos observar que asociado al periodo donde el agente quisiera tomar deuda observamos una oferta laboral plana. Durante todo ese periodo el consumo nuevamente se encuentra presionado desde arriba por la no disponibilidad de deuda hasta pasados los 30 años donde la restricción deja de estar activa tendremos una oferta laboral similar a la anterior y una stock de activos que comienza a subir. Además en este punto el consumo es decreciente consistente con la ecuación de Euler y el hecho de que en este caso la tasa que equilibra implica $\beta(1+r) < 1$.

4.4. l

A continuación los gráficos solicitados:

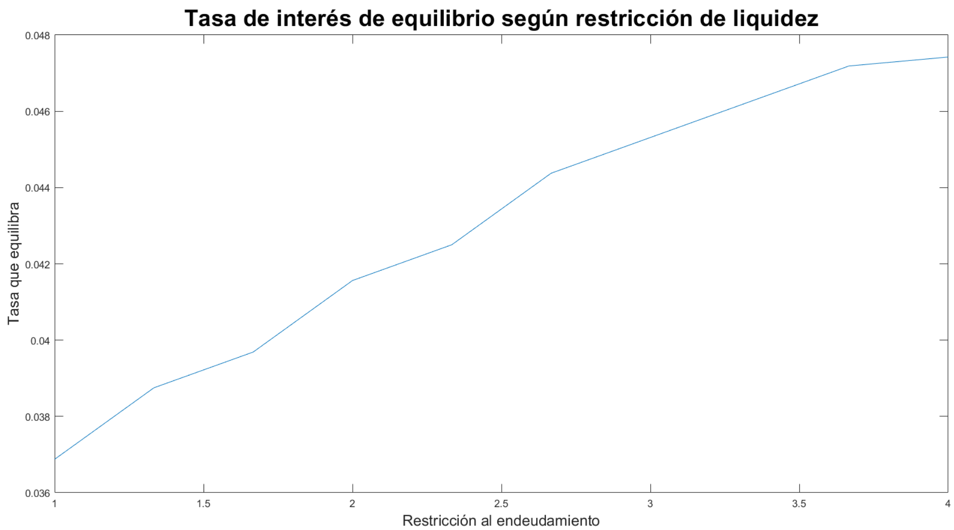

Figura 11: Tasa de interés de Equilibrio

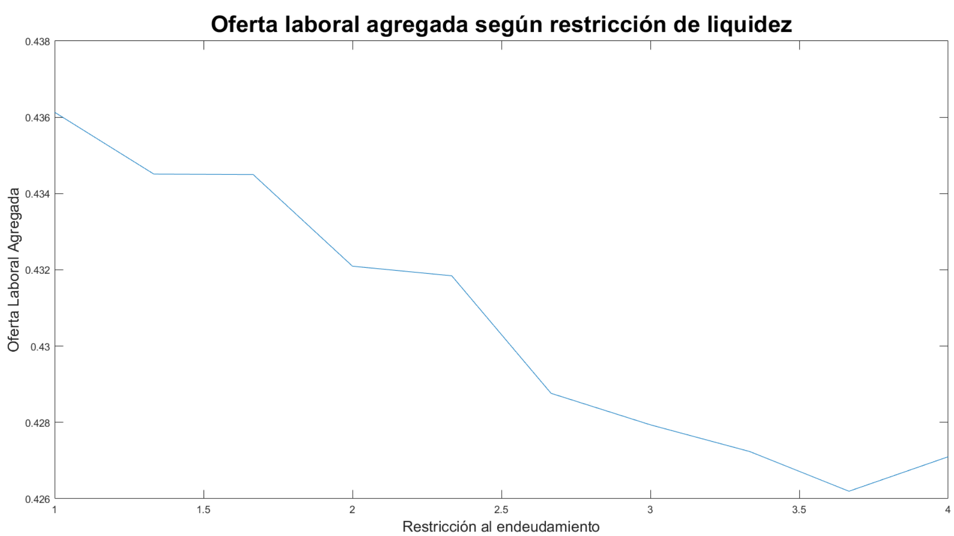

Figura 12: Oferta Laboral Agregada

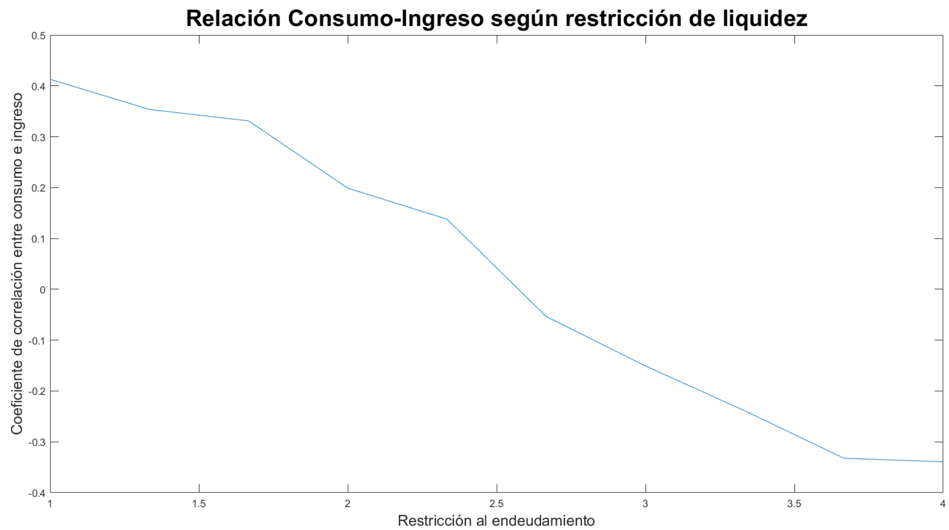

Figura 13: Correlación entre consumo e ingreso

Podemos observar que la tasa de interés es creciente como en el caso de oferta inelástica por lo que es posible esgrimir la misma razón. Esto es, para equilibrar el mercado cuando las restricciones de liquidez son más agudas es necesario disminuir la oferta (la demanda está limitada por la propia restricción), esto se logra con menos tasa.
La oferta laboral es decreciente pues se utiliza para mitigar el problema de no poder acceder a más recursos a través del crédito y pagarlos luego con salarios más altos.
Finalmente, y también como en el caso sin oferta laboral la relación entre ingreso y consumo es decreciente. En un primer momento del ciclo de vida quisiera consumir más pero utilizando crédito (no restando ocio, esa opción estuvo disponible en la resolución) por tanto a medida que se gana más se suele gastar, de todas maneras hay un efecto mitigador pues gastarlo todo, dada la restricción me deja sin recursos para mañana, momento en el que nuevamente no podré endeudarme y el trabajo reduce utilidad.