Comparación de Cosinor y Single Spectral Analysis (SSA) como métodos para el estudio de actigrafía entre poblaciones con sobre peso, obesidad y peso normal

Ceñal Cisneros Andrea Sofía, Montida Bastiel Valentina, Moreno Sánchez Ángel Andrés

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Algorítmos Computacionales

5 de junio, 2019

Índice

Objetivo

Hacer una comparación entre dos métodos de análsis de series de tiempo

Ciclos circadianos

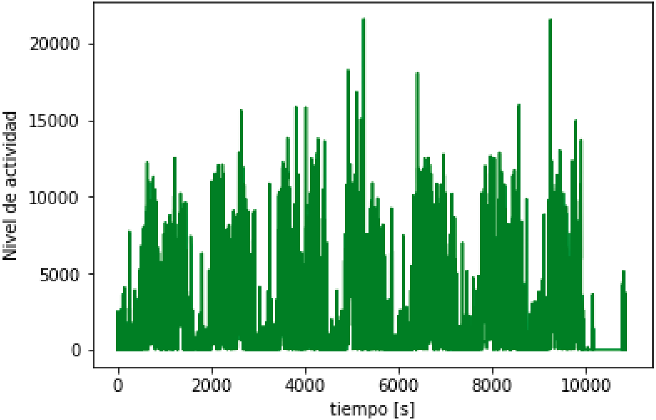
¿Qué son y por qué son importantes en el ámbito clínico?

Son cambios físicos, mentales y comportacionales que siguen un patrón diario.
El cuerpo produce sus propios ritmos circadianos gracias a factores naturales, sin embrago estos se ven afectados por el ambiente, siendo la luz el agente de mayor influencia.
Los ritmos circadianos afectan patrones de sueño, secreción de hormonas, hábitos alimenticios y digestión, temperatura corporal y otras funciones corporales importantes. Ritmos irregulares han sido asociados con varias condiciones clínicas como desórdenes de sueño, obesidad, diabetes, depressión y bipolaridad.

Actigrafía

Qué es la actigrafía y cómo se mide

Es una técnica no invasiva para monitorear ciclos de reposo/actividad. Un actígrafo utiliza acelerómetros para captar el movimiento lo cual es útil para evaluar ritmos circadianos.



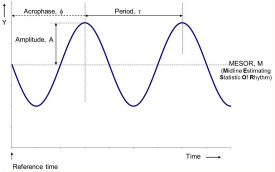
Métodos de análisis

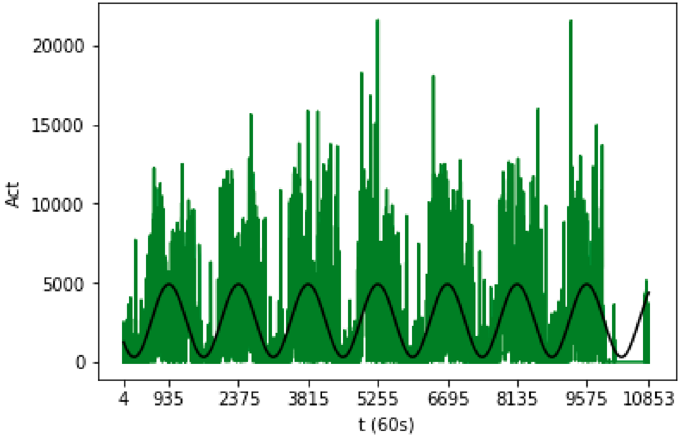
Cosinor

Ajusta una senoidal con un periodo dado, el cual para ciclos circadianos corresponde al ritmo de 24 horas, a la serie de tiempo

$$Y(t) = M + Acos(\frac{2\pi t}{T} + \phi) \quad (1)$$

donde M es el Mesor (Midline Statistic of Rhythm) valor medio alrededor del cual varían los valores de una variable en un ciclo. A es la amplitud, ϕ es la acrofase (momento del ciclo, medido como tiempo, en el cual se tiene la amplitud máxima) y T es el periodo.




20000
15000
10000
5000
0
Act
4
935
2375
3815
5255
6695
8135
9575
10853
t (60s)

SSA

El método Cosinor (funciones periódicas) pierde utilidad cuando se tienen datos experimentales cuyas propiedades estadísticas varían en el tiempo. En este caso, nos interesa medir la variabilidad día con día de los datos. La idea básica de esta técnica es que se puede descomponer la serie de tiempo en una suma de componentes que describen una tendencia no-oscilante, elementos periódicos y ruido de alta frecuencia. Puede describirse como un proceso de tres pasos:

1. (i) Transformación de la serie de tiempo en una matriz que se construye tomando una ventana de tiempo y recorriéndola por toda la serie de uno a uno.
2. (ii) Descomposición de valores singulares (SVD). Descompone la matriz como una suma de matrices elementales.
3. (iii) Cada matriz elemental se transforma nuevamente en un componente de la serie de tiempo.

SSA

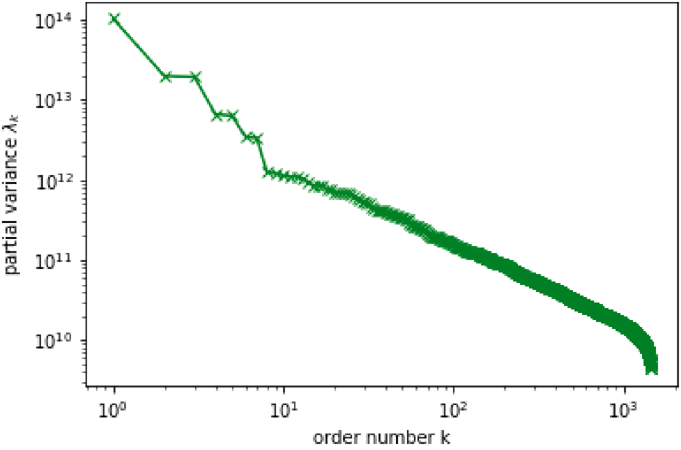
$$x(n) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k g_k(n) \tag{2}$$

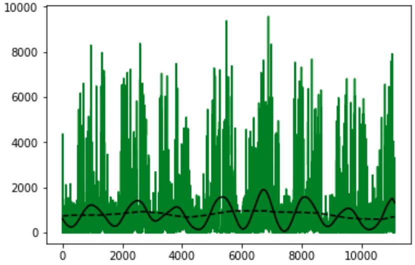
Donde g_k son componentes de la serie de tiempo, σ_k son valores singulares que hacen una ponderación de los componentes de la serie y r es el número de renglones de la matriz contruida a partir de la ventana de tiempo L, la cual se toma de acuerdo al periodo circadiano de 24 horas, 1140 minutos.

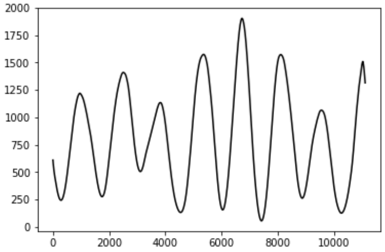
Scree Diagram

Representa visualmente las varianzas parciales $\lambda_k = \sigma_k^2$ desde la mayor en magnitud hasta la menor, asociadas a cada uno de los componentes $g_k(n)$ de la serie de tiempo. La varianza dominante λ_1, respectiva a $g_1(n)$ corresponde a la tendencia. Después, hay periodicidades dominantes que correponden a los ritmos circadianos de 24 y 12 horas. El decremento graual en los valores de λ_k indica que los componentes $g_k(n)$ asociados no pueden tratarse como componentes individuales a los cuales se les pueda asignar un significado físico.

Scree Diagram




10000
8000
6000
4000
2000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000


2000
1750
1500
1250
1000
750
500
250
0
0
2000
4000
6000
8000
10000

Conclusiones

Mediante el método de cosinor es posible hacer un acercamiento al análsis de tiempo, pero para observar cambios en fisiología y y hacer un análsis más detallado, considerando la intravariabilidad de los datos el método de SSA aporta más información.

Agradecimientos

Agradecemos el apoyo del profesor Ruben Fossion, el cual nos proporcionó los datos con los que trabajamos y nos orientó con el código. También agradecemos el apoyo y ayuda d sor Pedro Porras y su ayudante Miguel Guadarrama.

Referencias

- FOSSION, R. LEONOR, A., TOLEDO, J.C., y ELLIS, J. *Multiscale adaptive analysis of circadian rhythms and intradaily variability: Application to actigraphy time series in acute insomnia subjects*, Julio, 2017.
- FOSSION, R. *A time-series approach to dynamical systems from classical and quantum worlds*, México, 2014.

Gracias

SVD ejemplo

Sea la matriz $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ al descomponer a la matriz en sus valores singulares buscamos que: $C = U\Sigma V^T$. Para ello se utilizan las identidades:

I.- $C^TC = V\Sigma^T\Sigma V^T$
II.- $CV = U\Sigma$

Calculando:

$$C^TC = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 74 \end{pmatrix}$$

Nótese que de la identidad **I.-** se obtiene la diagonalización de la matriz C^TC por lo que el siguiente paso consiste en encontrar los valores y vectores propios de dicha matriz.

$$det = [C^TC - \lambda\mathbb{I}d] = det\begin{bmatrix} 26-\lambda & 18 \\ 18 & 74-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 100\lambda + 1600 = (\lambda - 20)(\lambda - 80)$$

SVD ejemplo

$$\Rightarrow det = [C^TC - 20\mathbb{I}d] = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde el sistema de ecuaciones es $\begin{Bmatrix} 6x + 18y = 0 \\ 18x + 54y = 0 \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pero se busca que sea un vector unitario por lo que lo se divide por su norma. $\therefore \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$.

SVD ejemplo

De forma análoga se calcula el segundo vector propio:

$\vec{v_2}. \Rightarrow det = [C^T C - 80\mathbb{I}d] = \begin{pmatrix} -54 & 18 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -54 & 18 \\ 18 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donde el sistema de ecuaciones es $\begin{Bmatrix} -54x + 18y = 0 \\ 18x - 6y = 0 \end{Bmatrix}$

$\therefore \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$

Con esta información es posible definir las matrices V y Σ ya que corresponden la matriz de los vectores propios de la matriz $C^T C$ y la diagonal con los valores singulares σ de la matriz C respectivamente. Donde por definición $\sigma^2 i = \lambda i$

SVD ejemplo

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Finalmente, para encontrar la matriz U utilizamos la identidad **II.-**:

$$CV = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{10} & 2\sqrt{10} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{10} \end{pmatrix} = U\Sigma$$

Entonces, como la matriz resultante es el producto de $U\Sigma$ entonces solo basta obtener la matriz unitaria transpuesta del producto.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{10} & 2\sqrt{10} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{8} \\ 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\therefore U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{8} & 2/\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

Y así, la descomposición de la matriz C es:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{8} & 2/\sqrt{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$