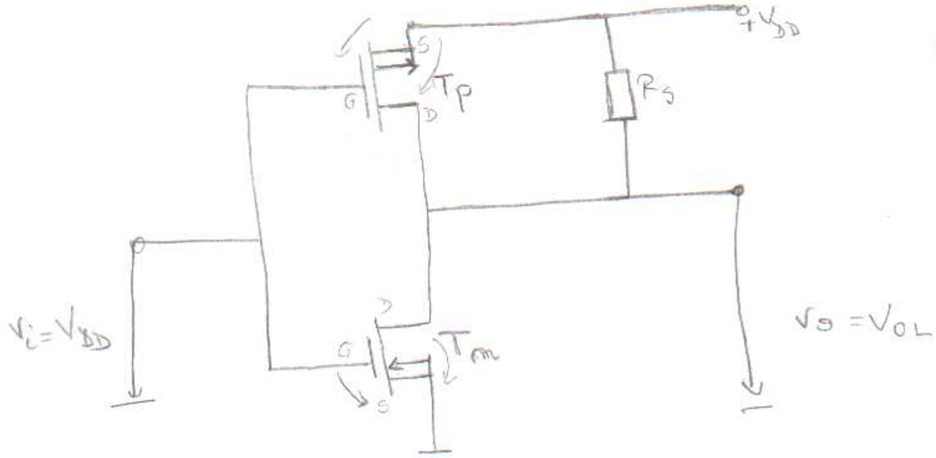
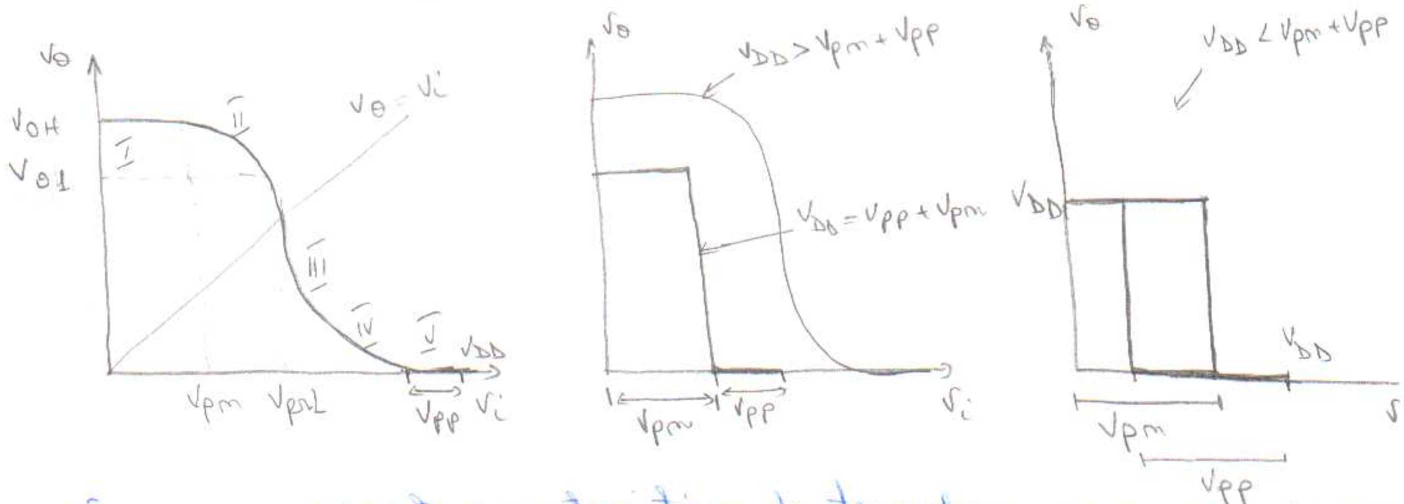
Caracteristica de transfer a inversorului CMOS

lin. $K\cdot\left[(V_{GS}-V_p)V_{DS}-\frac{V_{DS}^2}{2}\right]$

sat. $k\cdot\frac{(V_{GS}-V_T)^2}{2}$





În cele ce privește caracteristica de transfer a inversorului CMOS se disting cinci zone de funcționare în raport cu stările celor două tranzistoare:

- Zona I - pentru $0 < v_i < V_{pn}$ - tranzistorul T_n este blocat, iar tranzistorul T_p este în conducție, în zona liniară, cu un curent mic $\Rightarrow i_D = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k_p\left[(V_{DD}-V_{O}-V_{pp})(V_{DD}-V_{O}) - \frac{(V_{DD}-V_{O})^2}{2}\right] \Rightarrow V_O = V_{DD} = V_{O}$$

- Zona II - pentru $v_i > V_{pn}$ - T_n se deschide în zona de saturație, iar T_p rămâne în zona liniară

$$\Rightarrow k_p\left[(V_{DD}-v_i-V_{pp})\cdot(V_{DD}-v_O) - \frac{(V_{DD}-v_O)^2}{2}\right] = k_n\cdot\frac{(v_i-V_{pn})^2}{2} \;/ : k_p$$

Notăm $\frac{k_n}{k_p} = a^2$

$$\Rightarrow \quad a^2 = \frac{2(V_{DD}-v_i-V_{PP})(V_{DD}-v_O)-(V_{DD}-v_O)^2}{(v_i-V_{pn})^2}$$

$$2(V_{DD}-v_i-V_{PP})(V_{DD}-v_O)-(V_{DD}-v_O)^2 = a^2(v_i-V_{pn})^2 \quad /\cdot(-1)$$

$$(V_{DD}-v_O)^2-2(V_{DD}-v_O)(V_{DD}-v_i-V_{PP}) = -a^2(v_i-V_{pn})^2$$

$$(\cancel{V_{DD}}-v_O-\cancel{V_{DD}}+v_i+V_{PP})^2 = (V_{DD}-v_i-V_{PP})^2-a^2(v_i-V_{pn})^2$$

$$-v_O+v_i+V_{PP} = \pm\sqrt{(V_{DD}-v_i-V_{PP})^2-a^2(v_i-V_{pn})^2}$$

$$\Rightarrow \underline{v_O = v_i+V_{PP}+\sqrt{(V_{DD}-v_i-V_{PP})^2-a^2(v_i-V_{pn})^2}}$$

- Zona III - pentru $V_{pn} < v_i < V_{prL}$ - ambele tranzistoare sunt în regiunea de saturație.
  - panta infinită; se determină tensiunea de prag logic V_{prL}

$$\Rightarrow k_p \cdot \frac{(V_{DD}-V_{prL}-V_{PP})^2}{2} = k_n \cdot \frac{(V_{prL}-V_{pn})^2}{2} \quad /: k_p$$

Notăm $\frac{k_n}{k_p} = a^2$

Obținem: $(V_{DD}-V_{prL}-V_{PP})^2 = [a(V_{prL}-V_{pn})]^2$

$$V_{DD}-V_{prL}-V_{PP} = a(V_{prL}-V_{pn})$$

$$V_{DD}-V_{PP}+aV_{pn} = aV_{prL}+V_{prL}$$

$$\Rightarrow \underline{V_{prL} = \frac{V_{DD}-V_{PP}+aV_{pn}}{1+a}}$$

Dacă $V_{pn}=V_{PP}=V_p$ și $k_n=k_p=k \Rightarrow a=1$

$\Rightarrow V_{prL} = \frac{V_{DD}}{2}$ avantaj pentru CMOS (inversor ideal)

Marginile de zgomot sunt egale cu $\frac{V_{DD}}{2}$ (maxime - inversor ideal)

Tensiunea v_{O1} la care se face trecerea T_p în saturație este:

$$\underline{v_{O1} = V_{pn1} + V_{pp} + \sqrt{\underbrace{(V_{DD} - V_{pn1} - V_{pp})^2 - a^2 (V_{pn1} - V_{pn})^2}_{=0}}} =$$

$$= \frac{V_{DD} - V_{pp} + aV_{pn}}{1+a} + V_{pp} = \underline{\frac{V_{DD} - a(V_{pn} + V_{pp})}{1+a}}$$

sau: $|V_{DS}^{p}| = V_{DD} - V_{O1} = |V_{GS}^{p} - V_{pp}| = V_{DD} - V_{pn1} - V_{pp} \Rightarrow V_{O1} = V_{pn1} + V_{pp}$

• Zona IV – pentru $V_{p1} < v_i < V_{DD} - V_{pp}$ – tranzistorul T_n este în zona liniară, iar T_p este saturat:

$$k_p \cdot \frac{(V_{DD} - v_i - V_{pp})^2}{2} = k_n \left[(v_i - V_{pn}) \cdot v_O - \frac{v_O^2}{2} \right] \; / : k_p$$

Notăm $\frac{k_n}{k_p} = a^2$

$$(V_{DD} - v_i - V_{pp})^2 = 2a^2 (v_i - V_{pn}) v_O - a^2 v_O^2 \quad / \cdot (-1)$$

$$a^2 v_O^2 - 2a^2 (v_i - V_{pn}) v_O + a^2 (v_i - V_{pn}) = a^2 (v_i - V_{pn})^2 - (V_{DD} - v_i - V_{pp})^2$$

$$[a v_O - a(v_i - V_{pn})]^2 = a^2 (v_i - V_{pn})^2 - (V_{DD} - v_i - V_{pp})^2 \quad / : a^2$$

$$(v_O - v_i + V_{pn})^2 = (v_i - V_{pn})^2 - \frac{(V_{DD} - v_i - V_{pp})^2}{a^2}$$

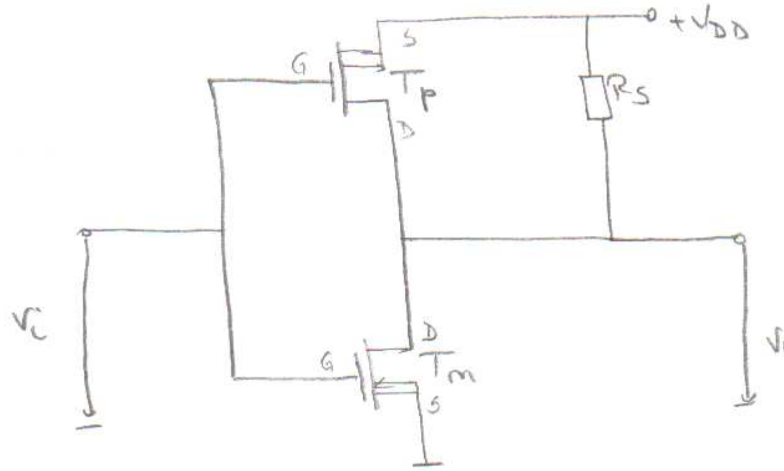
$$\Rightarrow \underline{v_O = v_i - V_{pn} - \sqrt{(v_i - V_{pn})^2 - \frac{1}{a^2}(V_{DD} - v_i - V_{pp})^2}}$$

$$\underline{V_{O2} = V_{pn1} - V_{pn}}$$

• Zona V – pentru $V_{DD} - V_{pp} < v_i < V_{DD}$ – tranzistorul T_n este în zona liniară, iar T_p este blocat:

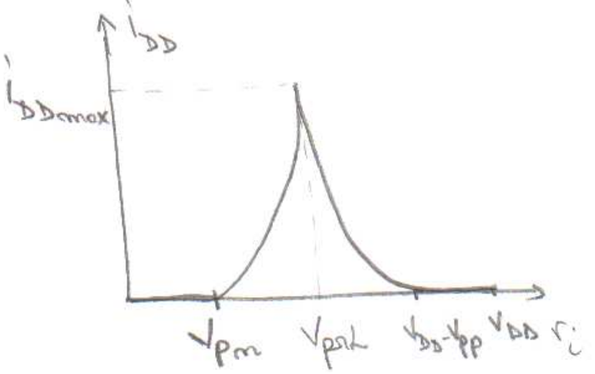
$$k_n \left[(v_i - V_{pn}) \cdot v_O - \frac{v_O^2}{2} \right] = 0 \quad \Rightarrow \underline{v_O = V_{OL} = 0}$$

Caracteristica de alimentare a inversorului CMOS



- tensiune de alimentare : $3V < V_{DD} < 15V$
- se poate constata că pentru tensiuni de intrare ce satisfac condițiile $0 < v_i < V_{pn}$ și $V_{DD} - V_{pp} < v_i < V_{DD}$, unul dintre tranzistoare este blocat și curentul absorbit de la sursa de alimentare este nul. =>

$i_{DDL} = 0$ și $i_{DDH} = 0$, $P_d = 0$ (inversor ideal)



- $0 < v_i < V_{pn}$ => tranzistorul T_p este în zona liniară, iar T_n blocat $\underline{i_{DD} = 0}$

- $V_{pn} < v_i < V_{prL}$ => tranzistorul T_p este în zona liniară, iar T_n este în saturație.

$$\Rightarrow \underline{i_{DD} = k_n \cdot \frac{(v_i - V_{pn})^2}{2}}$$

- $V_{prL} < v_i < V_{DD} - V_{pp}$ => tranzistorul T_p este în saturație, iar T_n este în zona liniară

$$\Rightarrow \underline{i_{DD} = k_p \cdot \frac{(V_{DD} - v_i - V_{pp})^2}{2}}$$

• $V_{DD} - V_{PP} < v_i < V_{DD} \Rightarrow$ tranzistorul T_p este blocat, iar T_n este în zona liniară

$\Rightarrow \underline{i_{DD} = 0}$

Determinăm V_{prL}: (ambele tranzistoare sunt în saturație):

$$k_p \cdot \frac{(V_{DD} - V_{prL} - V_{PP})^2}{2} = k_n \cdot \frac{(V_{prL} - V_{pn})^2}{2}$$

Notăm $\frac{k_n}{k_p} = a^2$

$$\Rightarrow (V_{DD} - V_{prL} - V_{PP})^2 = a^2 (V_{prL} - V_{pn})$$

$$V_{prL} + a V_{prL} = V_{DD} - V_{PP} + aV_{pn}$$

$$V_{prL} = \frac{V_{DD} - V_{PP} + aV_{pn}}{1+a}.$$

Determinăm i_{DDmax}:

$$\underline{i_{DDmax}} = i_{DD}(V_{prL}) = \frac{k_n}{2}\left(\frac{V_{DD} - V_{PP} + aV_{pn}}{1+a} - \overset{a+1}{V_{pn}}\right)^2 =$$

$$= \frac{k_n}{2} \cdot \left(\frac{V_{DD} - V_{PP} + \cancel{aV_{pn}} - \cancel{aV_{pn}} - V_{pn}}{1+a}\right)^2 = \frac{k_n}{2}\left(\frac{V_{DD} - V_{PP} - V_{pn}}{1+a}\right)^2 =$$

$$= \frac{k_n}{2} \cdot \frac{(V_{DD} - V_{PP} - V_{pn})^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{k_n}}{\sqrt{k_p}}\right)^2} = \frac{k_n}{2} \cdot \frac{(V_{DD} - V_{PP} - V_{pn})^2}{1 + 2\frac{\sqrt{k_n}}{\sqrt{k_p}} + \frac{k_n}{k_p}} =$$

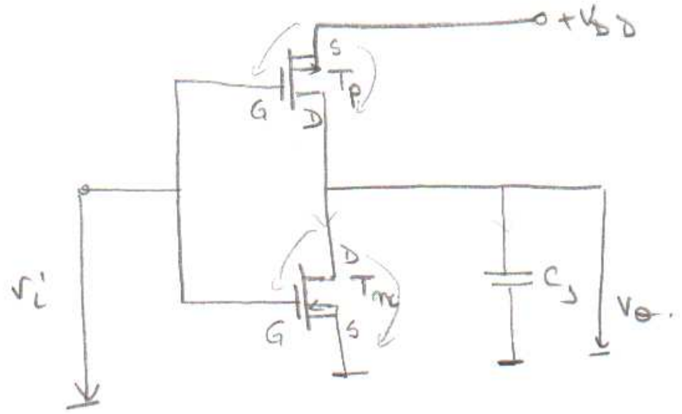
$$= \frac{k_n}{2} \cdot k_p \cdot \frac{(V_{DD} - V_{PP} - V_{pn})^2}{k_p + 2\sqrt{k_n}\cdot\sqrt{k_p} + k_n} = \underline{k_n k_p \cdot \frac{(V_{DD} - V_{PP} - V_{pn})^2}{2(\sqrt{k_p} + \sqrt{k_n})^2}}$$

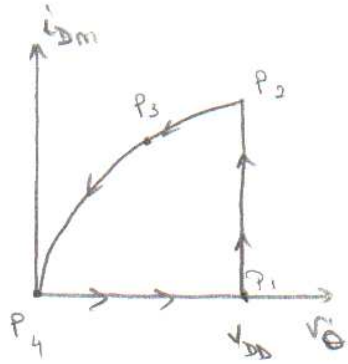
Dacă $V_{pn} = V_{PP} = V_p$ și $k_n = k_p = k \Rightarrow$

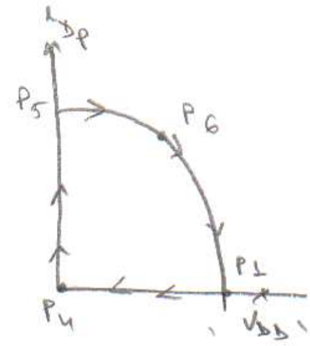
$$\Rightarrow \underline{i_{DDmax}} = \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{V_{DD} - V_p - V_p}{2}\right)^2 = \underline{\frac{k}{8}(V_{DD} - 2V_p)^2}$$

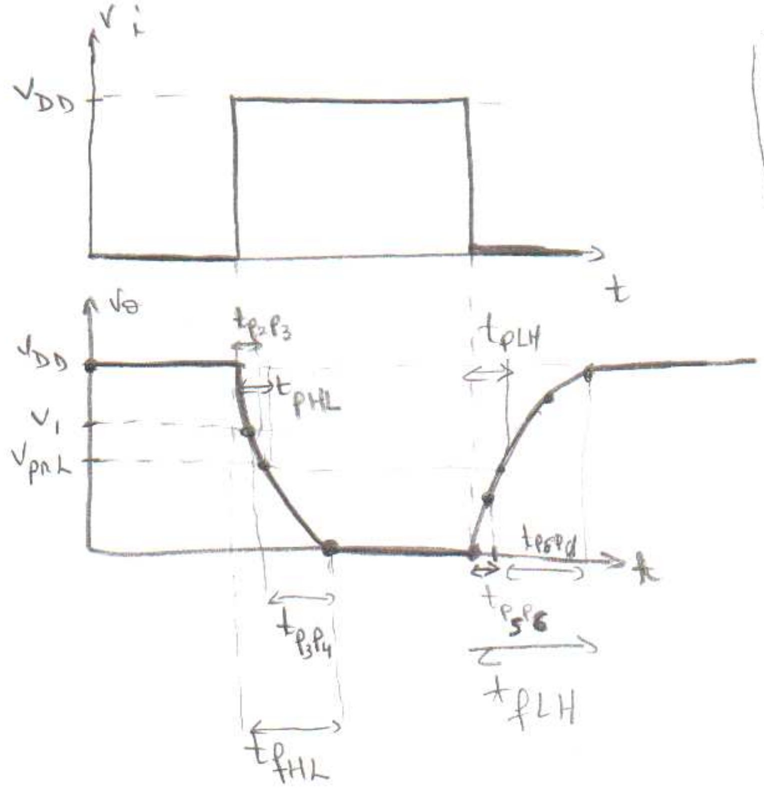
• importanța lui i_{DDmax} pentru creșterea puterii disipate cu frecvența

• influența tensiunii de alimentare asupra valorii maxime a curentului de alimentare este puternică, valoarea maximă a curentului fiind dependentă de puterea a doua a acestei tensiuni; pentru $V_{DD} = 2V_p$, $i_{DDmax} = 0$.









sat: $i_D = k\frac{(V_{GS}-V_p)^2}{2}$

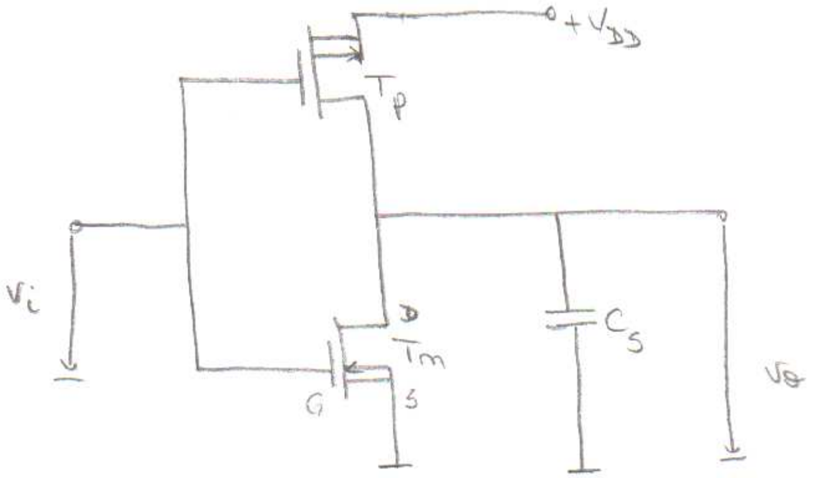
lin: $i_D = k\left[(V_{GS}-V_p)\cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2}\right]$

condensator:

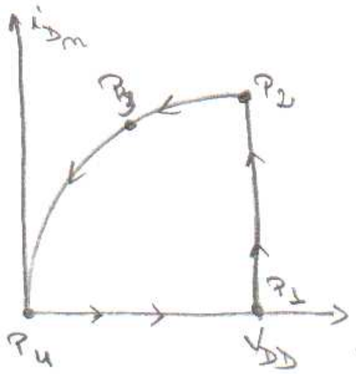
$u_c(t) = u_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)\,dt$

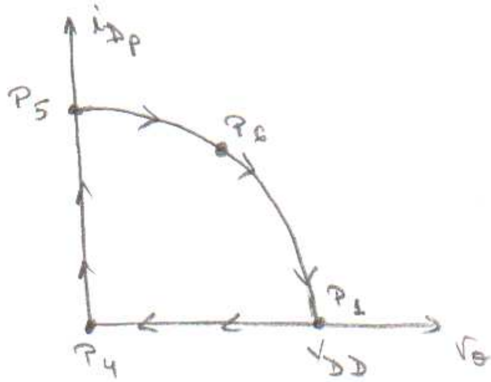
$i_c(t) = C\cdot\frac{dv_c}{dt}$

Comutarea directă a inversorului CMOS cu sarcină capacitivă



Curenții prin cele două tranzistoare:





- În starea inițială, tranzistorul T_n este blocat și tensiunea de ieșire este egală cu tensiunea de alimentare (punctul P_1)
- $P_1 - P_2$ - tranzistorul T_n se deschide, iar tranzistorul T_p se închide
  - $t_{P_1P_2} \cong 0$
  - v_o - constant

- $P_2 - P_3$: - tranzistorul T_n se deschide în saturație, iar T_p rămâne blocat
  - C_s se descarcă.

$$I_n \max = \frac{k_n}{2}(V_i - V_{pn})^2 = \frac{k_n}{2}(V_{DD} - V_{pn})^2$$

$$v_o(t) = V_{DD} - \frac{1}{C_s} \cdot \frac{k_n}{2}(V_{DD} - V_{pn})^2 \cdot t$$

Condiția de ieșire din saturație a lui T_n:

$V_{DS}^n = V_{GS}^n - V_{pn} \Leftrightarrow v_o(t_{P_2P_3}) = V_{DD} - V_{pn}$.

$$\Rightarrow \cancel{V_{DD}} - \frac{1}{C_S}\cdot\frac{k_n}{2}\left(V_{DD}-V_{pn}\right)^2\cdot t_{P_2P_3} = \cancel{V_{DD}} - V_{pn}$$

$$t_{P_2P_3} = \frac{V_{pn}}{\frac{1}{C_S}\cdot\frac{k_n}{2}\left(V_{DD}-V_{pn}\right)^2} \Rightarrow t_{P_2P_3} = \frac{2C_S\cdot V_{pn}}{k_n\left(V_{DD}-V_{pn}\right)^2}$$

$$t_{P_2P_3} = \tau\frac{V_{pn}}{V_{DD}-V_{pn}}, \text{ unde } \tau = \frac{2C_S}{k_n(V_{DD}-V_{pn})}$$

- P_3-P_4: - tranzistorul T_n deschis în regiunea liniară, iar T_p blocat

$$i_{C_S} = -i_{Dn} \Rightarrow C_S\frac{dv_0}{dt} = -k_n\left[\left(V_{DD}-V_{pn}\right)\cdot v_0 - \frac{v_0^2}{2}\right], \text{ cu}$$

condiția inițială $v_0(0) = V_{DD}-V_{pn}$

$$dt = -\frac{2C_S\,dv_0}{k_n\left[2v_0(V_{DD}-V_{pn})-v_0^2\right]} = \frac{2C_S\,dv_0}{k_n\left[v_0^2-2v_0(V_{DD}-V_{pn})\right]}$$

$$\int_0^t dt = \frac{2C_S}{k_n}\int_{V_{DD}-V_{pn}}^{v_0}\frac{1}{v_0^2-2v_0(V_{DD}-V_{pn})}\,dv_0 =$$

$$= \frac{2C_S}{k_n}\int_{V_{DD}-V_{pn}}^{v_0}\frac{1}{V_{DD}-V_{pn}}\cdot\frac{1}{\frac{v_0^2}{V_{DD}-V_{pn}}-2v_0}\,dv_0 =$$

$$= \frac{2C_S}{k_n}\cdot\frac{1}{V_{DD}-V_{pn}}\int_{V_{DD}-V_{pn}}^{v_0}\frac{1}{v_0\left(\frac{v_0}{V_{DD}-V_{pn}}-2\right)}\,dv_0$$

$$\frac{1}{v_0\left(\frac{v_0}{V_{DD}-V_{pn}}-2\right)} = \frac{A}{v_0} + \frac{B}{\frac{v_0}{\underbrace{V_{DD}-V_{pn}}_{a}}-2} \Rightarrow \frac{v_0}{a}\cdot A - 2A + Bv_0 = 1$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{A}{a} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2(V_{DD}-V_{pn})}$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt = \frac{2C_s}{k_n}\cdot\frac{1}{V_{DD}-V_{pn}}\int_{V_{DD}-V_{pn}}^{v_\theta}\left(-\frac{1}{2v_\theta}+\frac{1}{2(V_{DD}-V_{pn})}\cdot\frac{1}{\frac{v_\theta}{V_{DD}-V_{pn}}-2}\right)dv_\theta$$

$$=\frac{2C_s}{k_n}\cdot\frac{1}{V_{DD}-V_{pn}}\cdot\int_{V_{DD}-V_{pn}}^{v_\theta}\left(-\frac{1}{2v_\theta}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{v_\theta-2(V_{DD}-V_{pn})}\right)dv_\theta=$$

$$=\underbrace{\frac{2C_s}{k_n}\cdot\frac{1}{V_{DD}-V_{pn}}}_{\tau}\cdot\left(-\frac{1}{2}\ln v_\theta+\frac{1}{2}\ln\left(v_\theta-2(V_{DD}-V_{pn})\right)\right)\Bigg|_{V_{DD}-V_{pn}}^{v_\theta}$$

$$\Rightarrow t=\frac{\tau}{2}\left(\ln\left(v_\theta-2(V_{DD}-V_{pn})\right)-\ln v_\theta\right)\Bigg|_{V_{DD}-V_{pn}}^{v_\theta}.$$

$$t=\frac{\tau}{2}\ln\frac{v_\theta-2(V_{DD}-V_{pn})}{v_\theta}\Bigg|_{V_{DD}-V_{pn}}^{v_\theta}$$

$$t=\frac{\tau}{2}\left(-\ln\frac{V_{DD}-V_{pn}-2V_{DD}+2V_{pn}}{V_{DD}-V_{pn}}+\ln\frac{v_\theta-2(V_{DD}-V_{pn})}{v_\theta}\right)$$

$$t=\frac{\tau}{2}\ln\frac{2(V_{DD}-V_{pn})-v_\theta}{v_\theta}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{2(V_{DD}-V_{pn})-v_\theta}{v_\theta}=\frac{2t}{\tau}$$

$$\frac{2(V_{DD}-V_{pn})-v_\theta}{v_\theta}=e^{2t/\tau}$$

$$2(V_{DD}-V_{pn})-v_\theta=v_\theta e^{2t/\tau}$$

$$v_\theta=\frac{2(V_{DD}-V_{pn})}{1+e^{2t/\tau}}=(V_{DD}-V_{pn})\left[1-1+\underbrace{\frac{2}{1+e^{2t/\tau}}}_{1+e^{2t/\tau}}\right]=$$

$$=(V_{DD}-V_{pn})\left[1+\frac{1-e^{2t/\tau}}{1+e^{2t/\tau}}\right]=(V_{DD}-V_{pn})\left[1+\frac{e^{-t/\tau}-e^{t/\tau}}{e^{-t/\tau}+e^{t/\tau}}\right]$$

$$=(V_{DD}-V_{pn})\left(1-\mathrm{th}\,\frac{t}{\tau}\right)$$

$$t_{P_3P_4} = \frac{\tau}{2} \ln \frac{2(V_{DD}-V_{pm}) - 0{,}1(V_{DD}-V_{pm})}{0{,}1(V_{DD}-V_{pm})} = \frac{\tau}{2} \ln 19 \cong 1{,}45\tau$$

Durata frontului descrescător:

$$t_{fHL} = t_{P_2P_3} + t_{P_3P_4} \cong \tau \frac{V_{pm}}{V_{DD}-V_{pm}} + 1{,}45\tau.$$

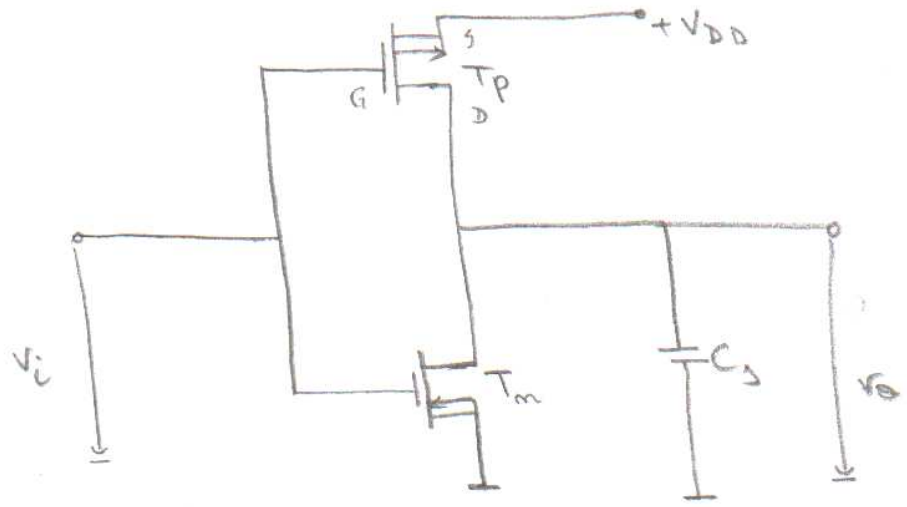
Timpul de propagare la frontul descrescător:

$$t_{pHL} = t_{P_2P_3} + t_{P_3P_4}(V_{p\pi L}) =$$

$$= t_{P_2P_3} + \frac{\tau}{2} \ln \frac{2(V_{DD}-V_{pm}) - V_{p\pi L}}{V_{p\pi L}} =$$

$$\overset{V_{p\pi L} = \frac{V_{DD}}{2}}{=} \tau \frac{V_{pm}}{V_{DD}-V_{pm}} + \frac{\tau}{2} \ln \frac{3V_{DD} - 4V_{pm}}{V_{DD}}.$$

Comutarea inversă a inversorului CMOS cu sarcină capacitivă



La comutarea inversă, starea inițială a circuitului este cu tranzistorul T_p blocat și T_n în conducție (punctul P_4

- $\underline{P_4 - P_5}$: – tranzistorul T_p se deschide, iar T_n se închide
  – $t_{P_4 P_5} \cong 0$

- $\underline{P_5 - P_6}$: – tranzistorul T_p este deschis în saturație, iar T_n blocat
  – C_s se încarcă.

$$i_{D_p max} = \frac{k_p}{2}(V_{DD} - V_{PP})^2$$

$$v_o(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_o(t) = \frac{1}{C_s} \cdot \frac{k_p}{2}(V_{DD} - V_{PP})^2 t$$

Condiția de ieșire din saturație a lui T_p:

$$V_{DS}^{p} = V_{GS}^{p} - V_{PP} \Leftrightarrow \cancel{V_{DD}} - v_o(t_{P_5P_6}) = \cancel{V_{DD}} - V_{PP} \Rightarrow v_o(t_{P_5P_6}) = V_{PP}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_s} \cdot \frac{k_p}{2}(V_{DD} - V_{PP})^2 \cdot t_{P_5P_6} = V_{PP}$$

$$\underline{t_{P_5P_6}} = \frac{2 C_s V_{PP}}{k_p (V_{DD} - V_{PP})^2} = \frac{2 C_s}{k_p (V_{DD} - V_{PP})} \cdot \frac{V_{PP}}{V_{DD} - V_{PP}} = \underline{\tau \frac{V_{PP}}{V_{DD} - V_{PP}}},$$

unde $\tau = \dfrac{2 C_s}{k_p (V_{DD} - V_{PP})}$

- $P_6 - P_1$: - tranzistorul T_p deschis în regiunea liniară, iar T_n blocat.

$$i_{C_s} = i_{D_p} \Rightarrow C_s \cdot \frac{dv_o}{dt} = k_p \cdot \left[(V_{DD} - V_{PP})(V_{DD} - V_o) - \frac{(V_{DD} - V_o)^2}{2} \right]$$

cu condiția inițială $V_o(0) = V_{PP}$.

Notăm $u = V_{DD} - V_o$, $u(0) = V_{DD} - V_{PP}$, $dv_o = -du$

$$\Rightarrow -C_s \cdot \frac{du}{dt} = k_p \left[(V_{DD} - V_{PP}) \cdot u - \frac{u^2}{2} \right]$$

$$dt = \frac{-C_s \cdot du}{k_p \left[(V_{DD} - V_{PP}) \cdot u - \frac{u^2}{2} \right]} = \frac{-2C_s \cdot du}{k_p \left[2(V_{DD} - V_{PP}) \cdot u - u^2 \right]} =$$

$$= \frac{2C_s \cdot du}{k_p \left[u^2 - 2u(V_{DD} - V_{PP}) \right]} = \frac{2C_s \cdot du}{k_p \cdot (V_{DD} - V_{PP}) \left[\frac{u^2}{V_{DD} - V_{PP}} - 2u \right]} =$$

$$= \tau \cdot \frac{du}{u \left(\frac{u}{V_{DD} - V_{PP}} - 2 \right)}$$

$$\frac{1}{u \left(\frac{u}{V_{DD} - V_{PP}} - 2 \right)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{\frac{u}{V_{DD} - V_{PP}} - 2} \Rightarrow \frac{Au}{V_{DD} - V_{PP}} - 2A + Bu = 1$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2(V_{DD} - V_{PP})} = B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt = \int_{V_{DD} - V_{PP}}^{u} \tau \left(-\frac{1}{2u} + \frac{1}{2\cancel{(V_{DD} - V_{PP})}} \cdot \frac{\cancel{V_{DD} - V_{PP}}}{u - 2(V_{DD} - V_{PP})} \right) du$$

$$= \frac{\tau}{2} \left[-\ln u + \ln \left(u - 2(V_{DD} - V_{PP}) \right) \right] \Bigg|_{V_{DD} - V_{PP}}^{u} =$$

$$= \frac{\tau}{2} \ln \frac{u - 2(V_{DD} - V_{PP})}{u} \Bigg|_{V_{DD}-V_{PP}}^{u} =$$

$$= \frac{\tau}{2} \left[\ln \frac{u - 2(V_{DD}-V_{PP})}{u} - \ln \frac{V_{DD}-V_{PP} - 2(V_{DD}-V_{PP})}{V_{DD} - V_{PP}} \right] =$$

$$= \frac{\tau}{2} \ln \frac{2(V_{DD}-V_{PP}) - u}{u}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\tau}{2} \ln \frac{2(V_{DD}-V_{PP}) - (V_{DD} - v_\theta)}{V_{DD} - v_\theta} = \frac{\tau}{2} \ln \frac{V_{DD} - 2V_{PP} + v_\theta}{V_{DD} - v_\theta}$$

$$\ln \frac{V_{DD} - 2V_{PP} + v_\theta}{V_{DD} - v_\theta} = e^{2t/\tau}$$

$$V_{DD} - 2V_{PP} + v_\theta = V_{DD} e^{2t/\tau} - v_\theta e^{2t/\tau}$$

$$v_\theta = \frac{-V_{DD} + 2V_{PP} + V_{DD} e^{2t/\tau}}{1 + e^{2t/\tau}}$$

$$v_\theta = \frac{V_{DD}(e^{2t/\tau} - 1) + 2V_{PP}}{1 + e^{2t/\tau}} = \frac{V_{DD}(1 + e^{2t/\tau}) + 2(V_{PP} - V_{DD})}{1 + e^{2t/\tau}}$$

$$= V_{DD} - \frac{2(V_{DD} - V_{PP})}{1 + e^{2t/\tau}} = V_{DD} - (V_{DD} - V_{PP}) \cdot \frac{2}{1 + e^{2t/\tau}}$$

$$1 + e^{-2t/\tau}$$

$$= V_{DD} - (V_{DD} - V_{PP}) \cdot \left(1 - 1 + \frac{2}{1 + e^{2t/\tau}} \right) =$$

$$= V_{DD} - (V_{DD} - V_{PP}) \left(1 + \frac{1 - e^{2t/\tau}}{1 + e^{2t/\tau}} \right) = V_{DD} - (V_{DD} - V_{PP}) \left(1 - \frac{e^{t/\tau} - e^{-t/\tau}}{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}} \right)$$

$$= V_{DD} - (V_{DD} - V_{PP}) \left(1 - \operatorname{th} \frac{t}{\tau} \right)$$

$$t_{P_6P_1} = \frac{\tau}{2} \ln \frac{2(V_{DD} - V_{PP}) - 0{,}1(V_{DD} - V_{PP})}{0{,}1(V_{DD} - V_{PP})} = \frac{\tau}{2} \ln 19 \cong 1{,}45\tau .$$

Durata frontului crescător:

$$t_{fLH} = t_{P_5P_6} + t_{P_6P_1} \cong \tau \cdot \frac{V_{PP}}{V_{DD} - V_{PP}} + 1{,}45\tau = t_{fHL}$$

Timpul de propagare la timpul crescător:

$$t_{pLH} = t_{P_5P_6} + t_{P_6P_1}(V_{prL}) =$$

$$= \tau \cdot \frac{V_{PP}}{V_{DD} - V_{PP}} + \frac{\tau}{2} \ln \frac{2(V_{DD} - V_{PP}) - (V_{DD} - V_{prL})}{V_{DD} - V_{prL}} = t_{pHL}$$