FILTRE - generalități

- Funcția de transfer

FTS, FTB, FTJ, FRB, FTT

$$H(s) = H_0 \frac{s^2 + \frac{\omega_z}{Q_z}s + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2}$$

(rămân aceleași pt. toate filtrele)

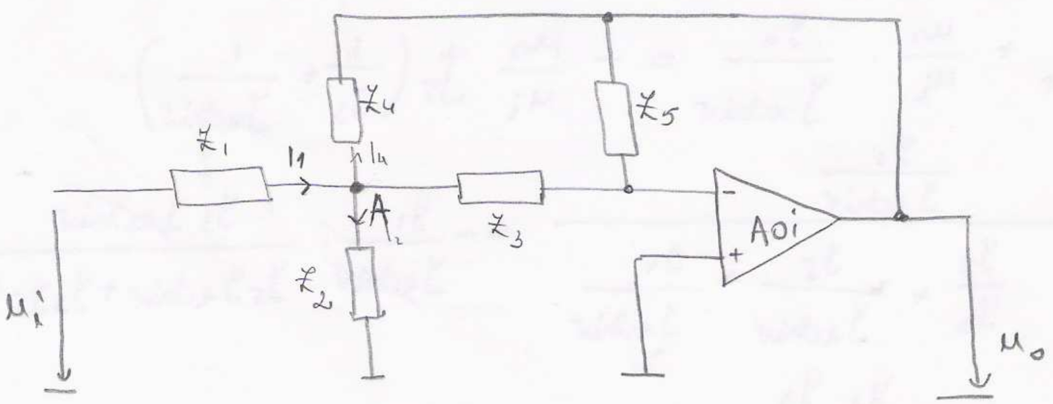
unde: • $\omega_z = \sqrt{Im^2(z_1) + Re^2(z_1)}$

$\omega_p = \sqrt{Im^2(p_1) + Re^2(p_1)}$ sunt pulsațiile zeroului, respectiv polului

• $Q_z = \dfrac{\omega_z}{2Re(z_1)}$

$Q_p = \dfrac{\omega_p}{2Re(p_1)}$ sunt factorii de calitate ai zeroului, respectiv polului.

- Implementarea filtrelor active de ordinul doi cu AOi
- Schema cu reacții multiple



Notând cu:

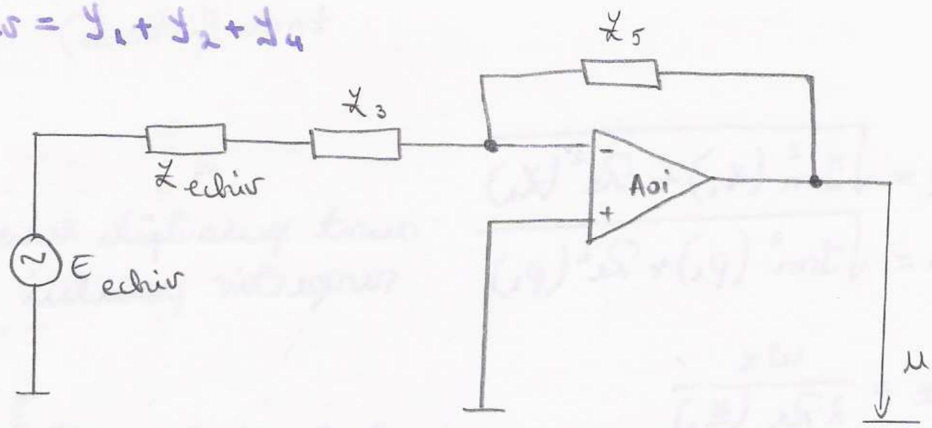
E_{echiv} - generatorul echivalent în punctul A

Y_{echiv} - admitanța generatorului echivalent în punctul A

se scrie legea Kirchoff I la borna neinversoare a amplificatorului:

$$E_{echiv} = \frac{u_i Y_1 + u_0 Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_4}$$

$$Y_{echiv} = Y_1 + Y_2 + Y_4$$



$$\frac{E_{echiv}}{\frac{1}{Y_3} + \frac{1}{Y_{echiv}}} = -u_0 Y_5$$

$$\Rightarrow \frac{u_i Y_1 + u_0 Y_4}{Y_{echiv}} = -u_0 Y_5 \left(\frac{1}{Y_3} + \frac{1}{Y_{echiv}}\right) \Big| : u_i$$

$$\frac{Y_1}{Y_{echiv}} + \frac{u_0}{u_i} \cdot \frac{Y_4}{Y_{echiv}} = -\frac{u_0}{u_i} Y_5 \left(\frac{1}{Y_3} + \frac{1}{Y_{echiv}}\right)$$

$$\frac{u_0}{u_i} = -\frac{\frac{Y_1}{Y_{echiv}}}{\frac{Y_5}{Y_3} + \frac{Y_5}{Y_{echiv}} + \frac{Y_4}{Y_{echiv}}} = -\frac{Y_1}{\cancel{Y_{echiv}}} \cdot \frac{Y_3 \cancel{Y_{echiv}}}{Y_5 Y_{echiv} + Y_3 Y_5 + Y_3 Y_4}$$

$$= -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{u_o(s)}{u_i(s)} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}}$$

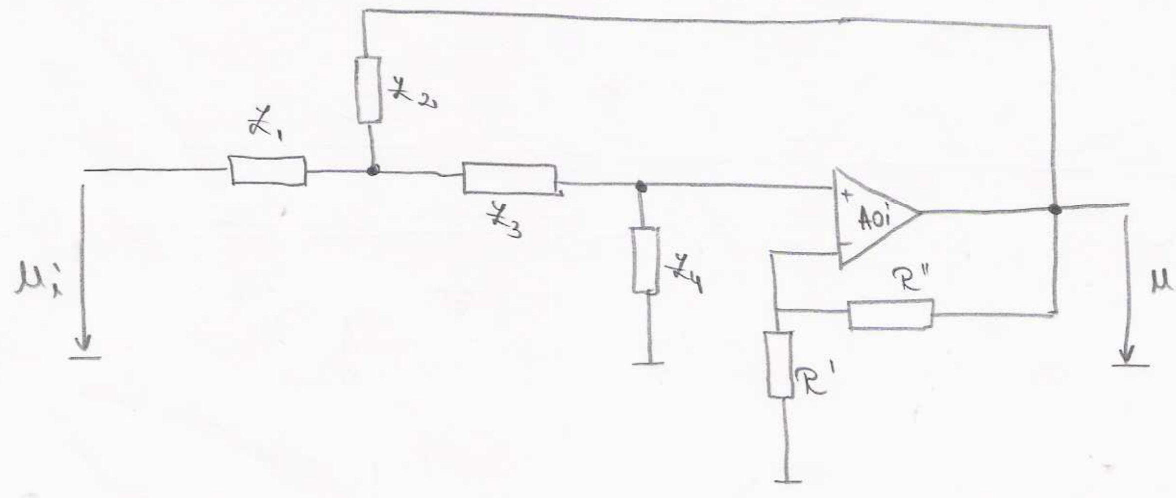
Alegând convenabil admitanțele $Y_1 - Y_5$ se pot obține cele 5 tipuri de filtre (FTJ, FTS, FRB, FTB, FTT).

- Implementarea filtrelor cu AO cu câștig scăzut

Aceste filtre utilizează AO caracterizat prin următorii parametrii:

$$\begin{cases} Z_{ind} \to \infty \\ Z_{ies} \to 0 \\ A < 20dB \end{cases}$$

Această caracterizare corespunde unui generator de tensiune ideal și de aceea aceste filtre se mai întâlnesc, în literatura de specialitate, sub numele de filtre cu generator de tensiune comandat. Una dintre cele mai utilizate structuri este descrisă în figura următoare:



Pentru deducerea funcției de transfer, se observă că amplificarea amplificatorului neinversor este dată de relația:

$$A_u = k = 1 + \frac{R''}{R'} \quad \text{în pct. A ?}$$

$$E_{echiv} = \frac{u_i Y_1 + u_o Y_2}{Y_1 + Y_2}$$

$$Y_{echiv} = Y_1 + Y_2$$

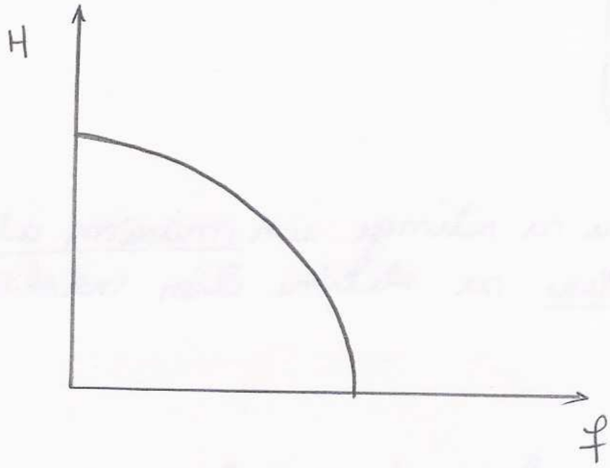
$$u_o = E_{echiv} \cdot k \cdot \frac{1}{1 + \frac{Y_4}{Y_3} + \frac{Y_4}{Y_{echiv}}} = \frac{k Y_3 (u_i Y_1 + u_o Y_2)}{(Y_3 + Y_4)(Y_1 + Y_2) + Y_3 Y_4}$$

de unde:

$$H(s) = \frac{u_o(s)}{u_i(s)} = \frac{k Y_1 Y_3}{(Y_3 + Y_4)(Y_1 + Y_2) + Y_3 Y_4 - k Y_2 Y_3}$$

FILTRE de ORDINUL II cu AO

1. FTJ (Filtru trece jos)



• Funcție de transfer:

$$H(s)=\frac{H_0\omega_0^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$

• H_0 - amplificarea (atenuarea) la frecvențe joase (în curent continuu)

• ω_0 - pulsația caracteristică filtrului

• Q - factorul de calitate al filtrului

• $\alpha=\frac{1}{Q}$ - factorul de amortizare al filtrului și are influență mare asupra formei caracteristicilor filtrului.

• Caracteristicile de frecvență și de fază ale filtrului:

În cazul unui semnal sinusoidal permanent, funcția de transfer devine:

$$\boxed{H(j\omega)=\frac{H_0\omega_0^2}{-\omega^2+j\omega\frac{\omega_0}{Q}+\omega_0^2}}$$

Din această relație, se deduc caracteristicile de frecvență și de fază ale filtrului sub forma:

$$\boxed{|H(j\omega)| = \frac{H_0\,\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\omega\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}}}$$

$$\boxed{\varphi = -\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega\frac{\omega_0}{Q}}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

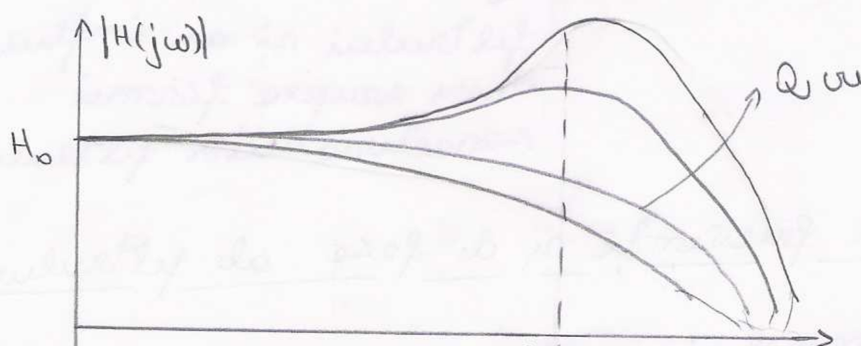
Valoarea pulsației pentru care se atinge un <u>maxim al modulului funcției de transfer</u> se obține din rezolvarea ecuației:

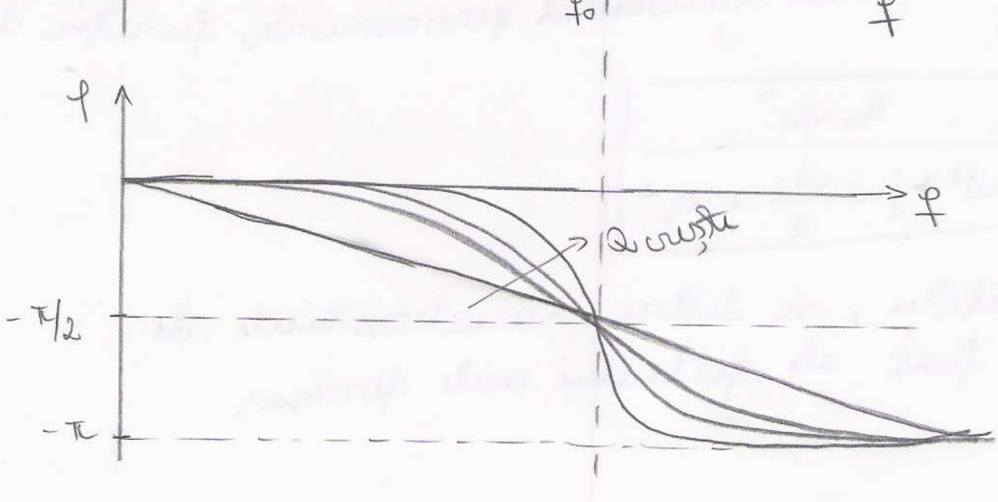
$$\frac{d\,|H(j\omega)|}{d\omega} = 0$$, care ne conduce la soluția:

$$\boxed{\omega_M = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \approx \omega_0}$$

(s-a ținut cont că Q are o valoare relativ mare)

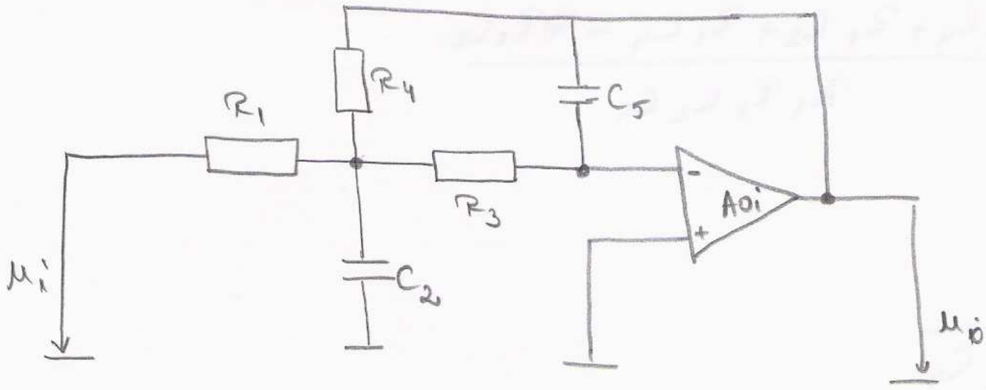
$$|H(j\omega)|_{max} = \frac{H_0 Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \approx H_0 Q$$ (pt. valori mari ale lui Q > 5)





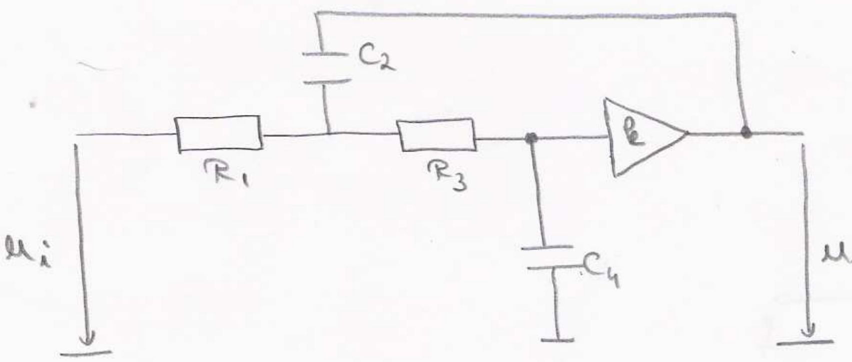
(Caracteristicile de frecvență și de fază pentru FTJ cu funcții de transfer de ordinul 2)

- Schema cu reacții multiplă:



$$H(s) = -\frac{\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_3}}{sC_5\left[\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)+sC_2\right]+\frac{1}{R_3}\cdot\frac{1}{R_4}}$$ (nu se cere)

- Implementarea FTJ cu AO cu câștig scăzut



$$H(s) = \frac{\frac{k}{R_1R_3}}{\left(\frac{1}{R_1}+sC_2\right)\left(\frac{1}{R_3}+sC_4\right)+\frac{1}{R_3}sC_4-\frac{k}{R_3}sC_2}$$

$$H(s) = \frac{\frac{k}{R_1R_3}}{s^2(C_2C_4)+s\left(\frac{C_4}{R_1}+\frac{C_2}{R_3}+\frac{C_4}{R_3}-\frac{kC_2}{R_3}\right)+\frac{1}{R_1R_3}}$$

$$H(s) = \frac{k\cdot\frac{1}{R_1R_3C_2C_4}}{s^2+s\left(\frac{1}{R_1C_2}+\frac{1}{R_3C_4}+\frac{1}{R_3C_2}-\frac{k}{C_4R_3}\right)+\frac{1}{R_1R_3C_2C_4}}$$

unde:

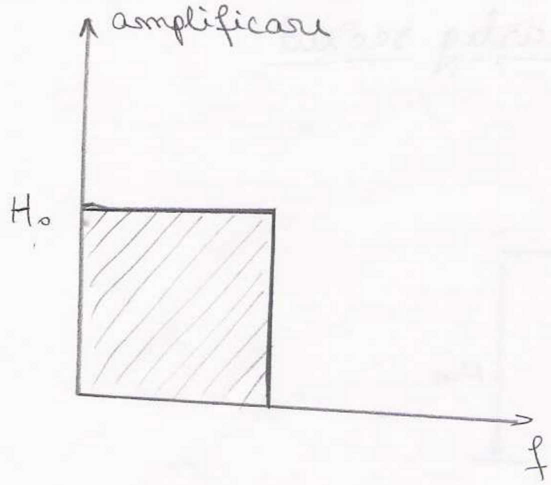
$$\alpha = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R_3 C_4 + R_1 C_2 + R_1 C_4 - k R_1 C_2}{R_1 R_3 C_2 C_4}$$

$$H_0 = k$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_3 C_2 C_4}$$

- Definiții:

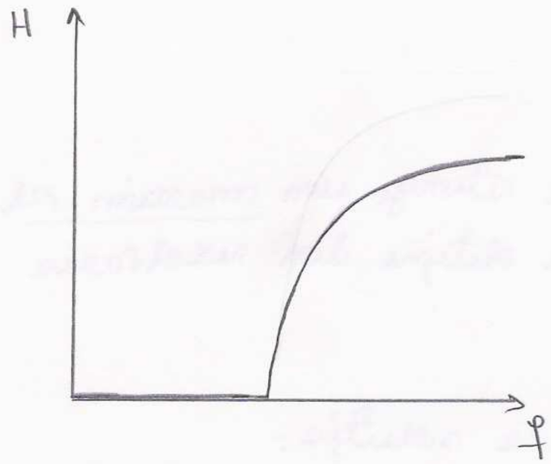
FTJ este un dispozitiv electronic ce permite rejectarea (atenuarea) selectivă a semnalelor în funcție de parametrul frecvență, cu caracteristica de frecvență ideală din figură:



FTJ permite trecerea semnalelor de frecvență joasă și blochează semnalele de frecvență înaltă.

FILTRE de ORDINUL II cu AO

2. FTS (Filtru trece sus)



Funcția de transfer

$$H(s) = \frac{H_0 s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

- H_0 - amplificarea (atenuarea) la frecvențe înalte
- ω_0 - pulsația caracteristică a filtrului
- Q - factorul de calitate al filtrului
- $\alpha = \frac{1}{Q}$ - factorul de amortizare al filtrului și care influențează mare asupra formei caracteristicilor filtrului.

- Caracteristicile de frecvență și de fază ale filtrului

În cazul unui semnal sinusoidal permanent, funcția de transfer devine:

$$\boxed{H(j\omega) = -\frac{H_0 \omega^2}{-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}}$$

Din această relație, se deduc caracteristicile de frecvență și de fază ale filtrului sub forma:

$$\boxed{|H(j\omega)| = \frac{H_0 \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\omega\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}}}$$

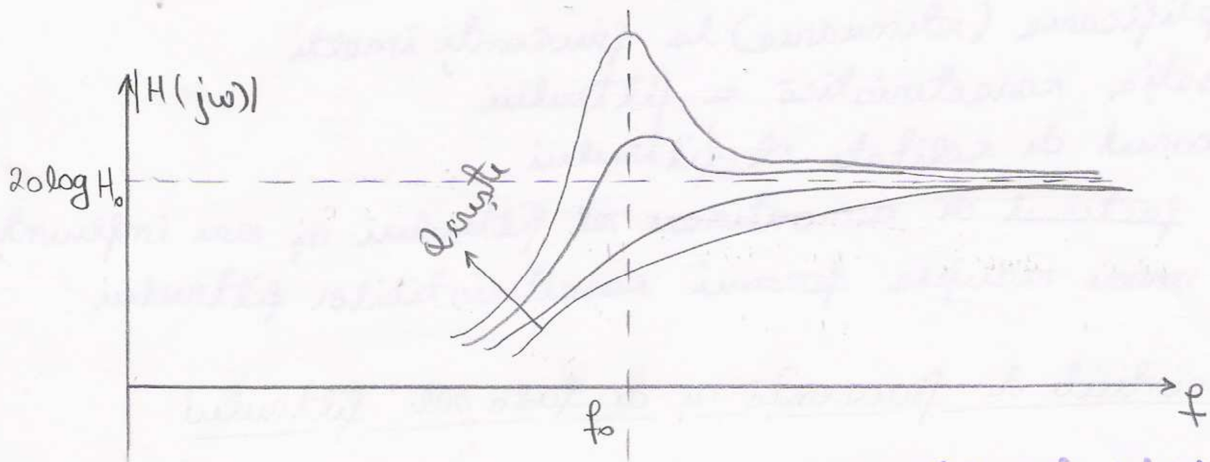
$$\boxed{\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{\omega\frac{\omega_0}{Q}}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

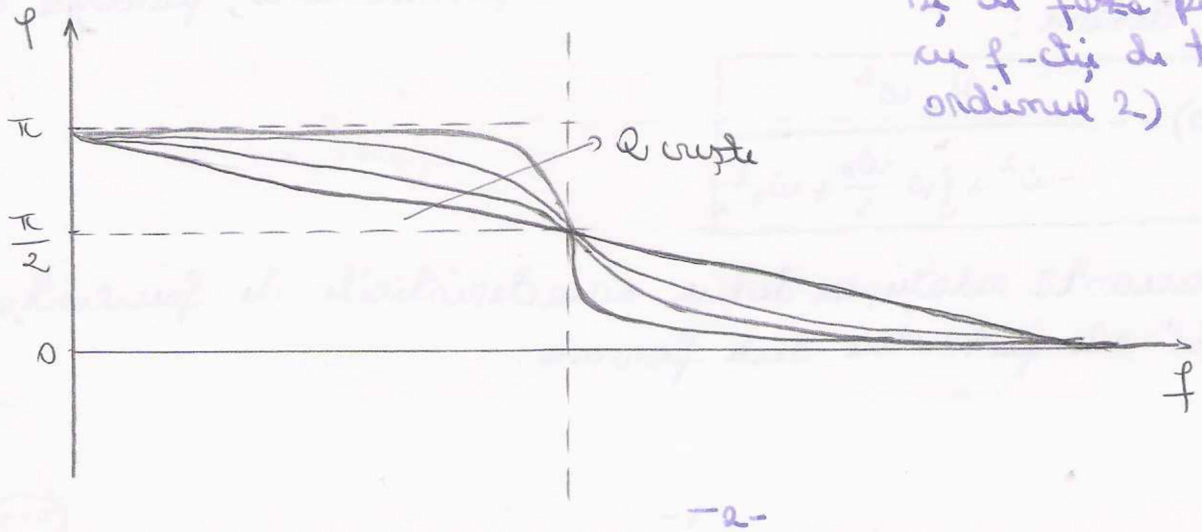
Valoarea pulsației pentru care se atinge un maxim al modulului funcției de transfer se obține din rezolvarea ecuației:

$\frac{\partial |H(j\omega)|}{\partial\omega} = 0$, ce a conduce la soluția:

$$\boxed{\omega_M = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}} \approx \omega_0} \text{ (pt. valori mari ale lui } Q\ (Q>5))$$

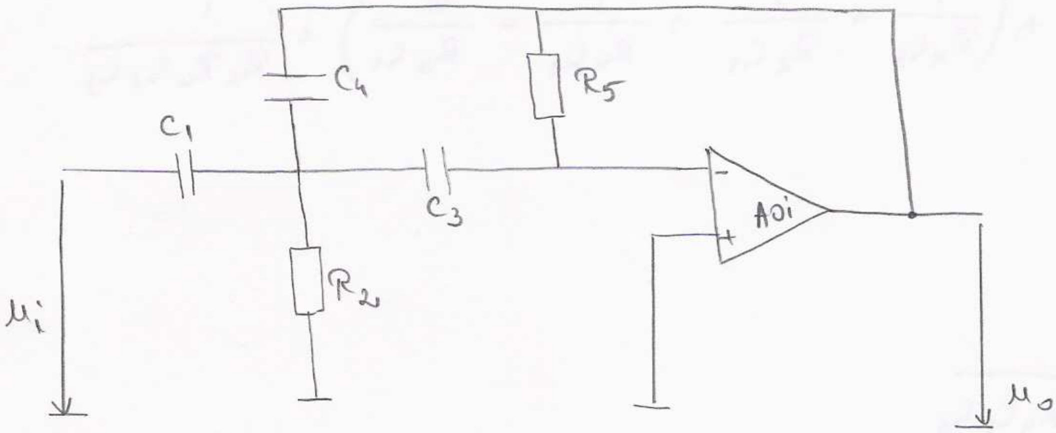
$|H(j\omega)|_{max} \approx H_0 Q$ (pt. valori mari ale lui Q)





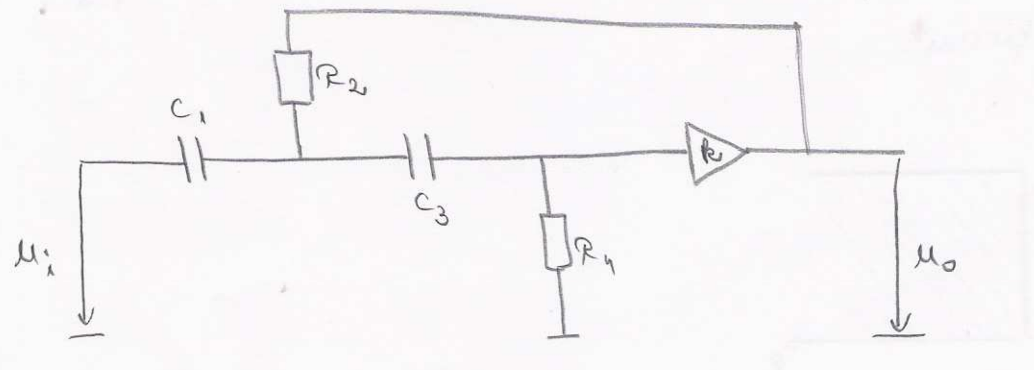
(Caracteristicile de frecvență și de fază pentru FTS cu f-cție de transfer de ordinul 2)

• Schema cu reacție multiplă:



$$H(s) = -\frac{s^2 C_1 C_3}{\frac{1}{R_5}\left[\frac{1}{R_2} + s\left(C_1 + C_3 + C_4\right)\right] + s^2 C_3 C_4}$$ (nu se cere)

• Implementarea FTS cu AO cu câștig scăzut



$$H(s) = \frac{s^2 C_1 C_3 k}{\left(sC_1 + \frac{1}{R_2}\right)\left(sC_3 + \frac{1}{R_4}\right) + sC_3\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_2} s C_3 k}$$

$$H(s) = \frac{s^2 C_1 C_3 k}{s^2\left(C_1 C_3\right) + s\left(\frac{C_1}{R_4} + \frac{C_3}{R_2} + \frac{C_3}{R_4} - \frac{kC_3}{R_2}\right) + \frac{1}{R_2 R_4}}$$

$$H(s) = \frac{s^2 \cdot k}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_4 C_3} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_4 C_1} - \frac{k}{R_2 C_1}\right) + \frac{1}{R_2 R_4 C_1 C_3}}$$

unde:

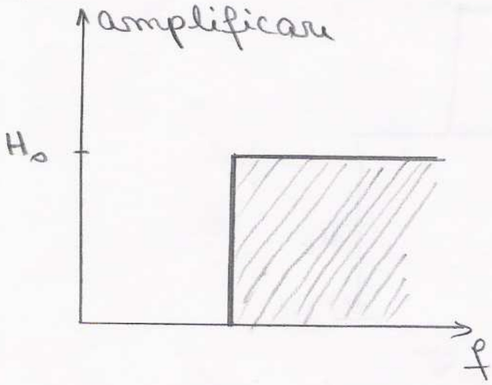
$$H_0 = k$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_2 R_4 C_1 C_3}$$

$$\alpha = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R_2 C_1 + R_4 C_3 + R_2 C_3 - k R_4 C_3}{R_2 R_4 C_1 C_3}$$

- Definiții:

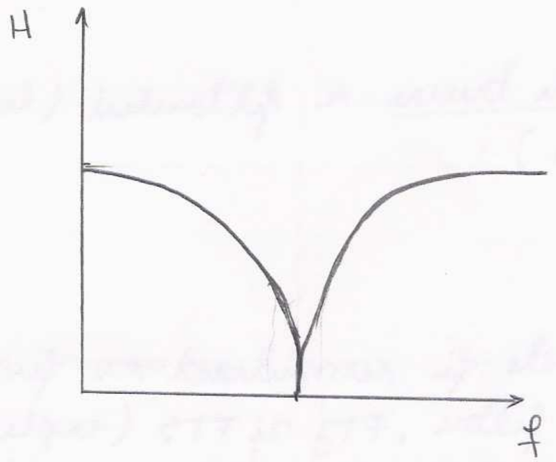
FTS este un dispozitiv electronic ce permite rejectarea (atenuarea) selectivă a semnalelor în funcție de parametrul frecvență, cu caracteristica de frecvență ideală din figură:



FTS permite trecerea semnalelor de frecvență înaltă și blochează semnalele de frecvență joasă

FILTRE de ORDINUL II cu AO

3. FRB (Filtru rejector de bandă)



• Funcție de transfer:

$$H(s) = H_0 \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

• H_0 - amplificarea la frecvențe joase și la frecvențe înalte, adică în afara benzii de rejecție
• ω_0 - frecvența centrală de rejecție
• Q - factorul de calitate care stabilește lărgimea benzii de rejecție
• $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ - banda de rejecție definită la 3 dB

• Caracteristicile de frecvență și de fază ale filtrului

$$\boxed{|H(j\omega)| = \frac{H_0\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\omega\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}}}$$

În cazul unui semnal sinusoidal permanent, funcția de transfer este

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{H_0(\omega_0^2-\omega^2)}{-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}}$$

FRB

Se observă că:

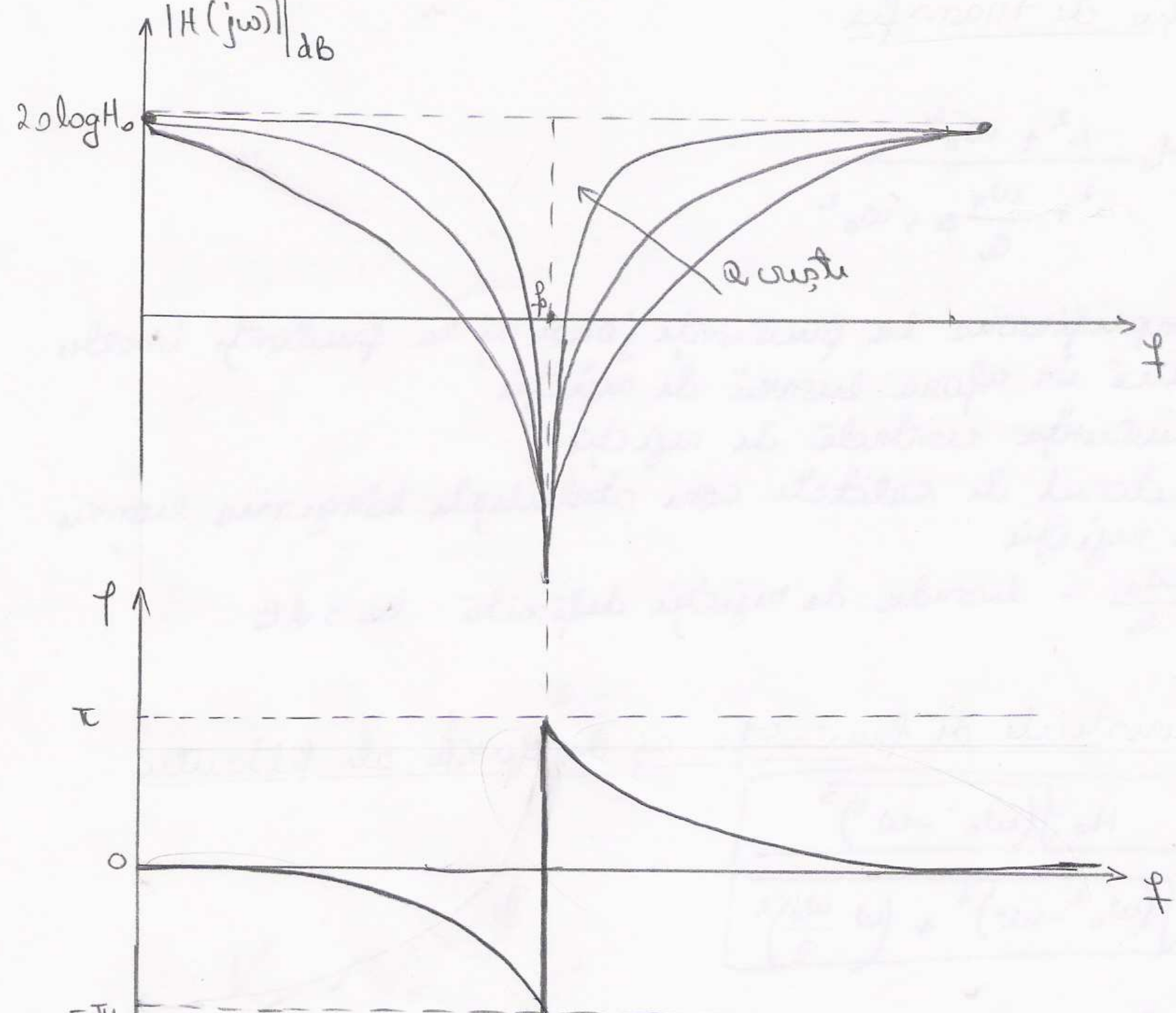
$$|H(j\omega)| = H_0, \text{ când } \omega \to 0 \text{ sau } \omega \to \infty$$

$$|H(j\omega)| = 0 \quad , \text{ când } \omega = \omega_0$$

Se poate determina banda de trecere a filtrului (la o scădere cu 3 dB a caracteristicii):

$$\boxed{BT = \frac{\omega_0}{Q_0}}$$

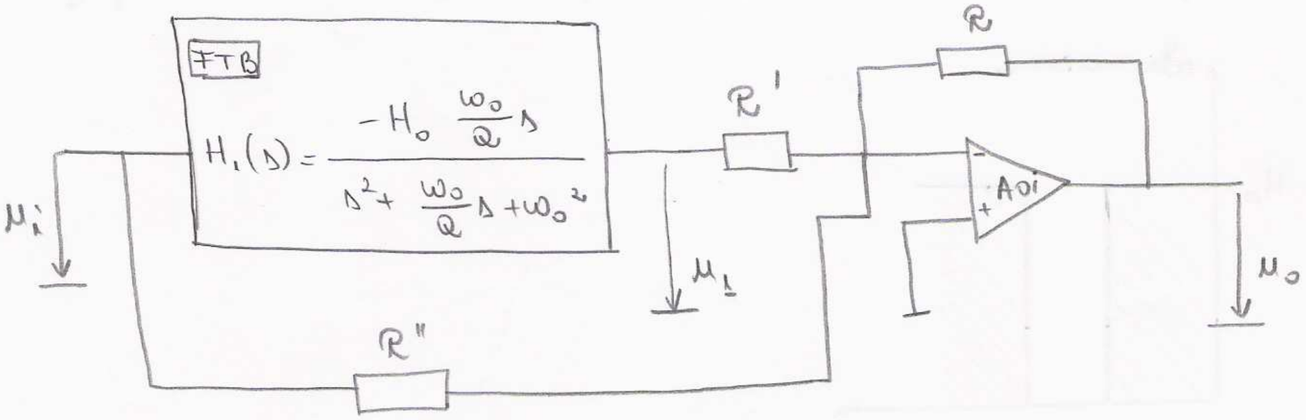
Filtrul rejector de bandă poate fi considerat ca fiind realizat din însumarea a două filtre, FTJ și FTS (explicabil și saltul de fază al filtrului FRB)



(Caracteristicile de frecvență și de fază pentru FRB cu funcții de transfer de ordinul 2)

• Schemă cu reacție multiplă:

Implementarea poate fi făcută utilizând un FTB și un AO în configurație de sumator:



$$u_1(s) = H_1(s) \cdot u_i(s)$$

$$u_o(s) = -u_1 \frac{R}{R'} - u_i \frac{R}{R''} = -u_i(s)\left(H_1(s) \frac{R}{R'} + \frac{R}{R''} \right)$$

$$H_2(s) = \frac{\frac{R}{R'}\left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2\right) - \frac{R}{R''} H_0 \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} =$$

$$= \frac{\frac{R}{R'}\left(s^2 + \omega_0^2\right) + \frac{s R \omega_0}{R' Q}\left(1 - \frac{R'}{R''} H_0\right)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

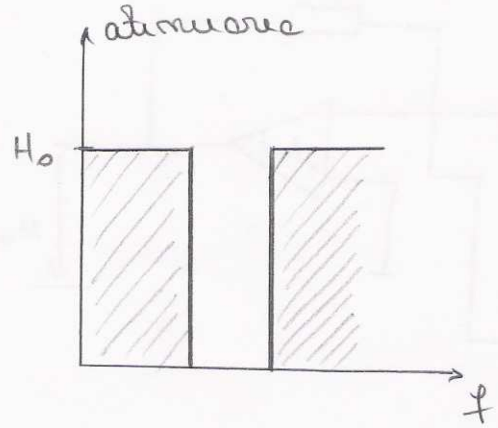
Pentru ca schema să fie un FRB trebuie îndeplinită condiția:

$$1 - \frac{R'}{R''} H_0 = 0 \Rightarrow H_0 = \frac{R''}{R'}$$

Amplificarea noului filtru H_0' va fi $\frac{R}{R'}$.

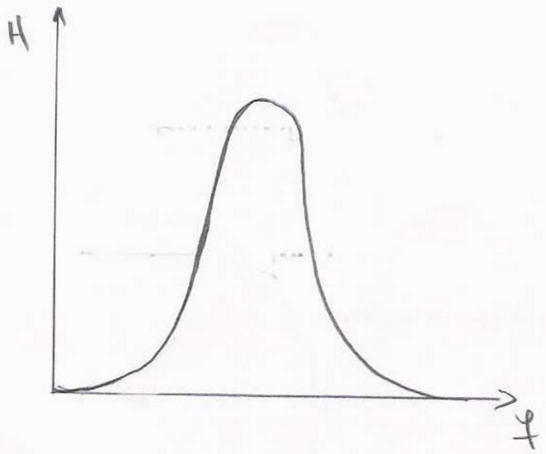
• Definiții:

FRB este un dispozitiv electronic ce permite rejectarea (atenuarea) selectivă a semnalelor în funcție de parametrul frecvență, cu caracteristica de frecvență ideală din figură:



FILTRE de ORDINUL II cu AO

4. FTB (Filtru trece bandă)



- Funcție de transfer:

$$H(s) = \frac{H_0 \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

- H_0 - amplificarea la frecvența de rezonanță (de acord)
- ω_0 - pulsație (frecvența) centrală, de acord, de rezonanță
- Q - factorul de calitate al circuitului rezonant.

- Caracteristicile de frecvență și de fază ale filtrului:

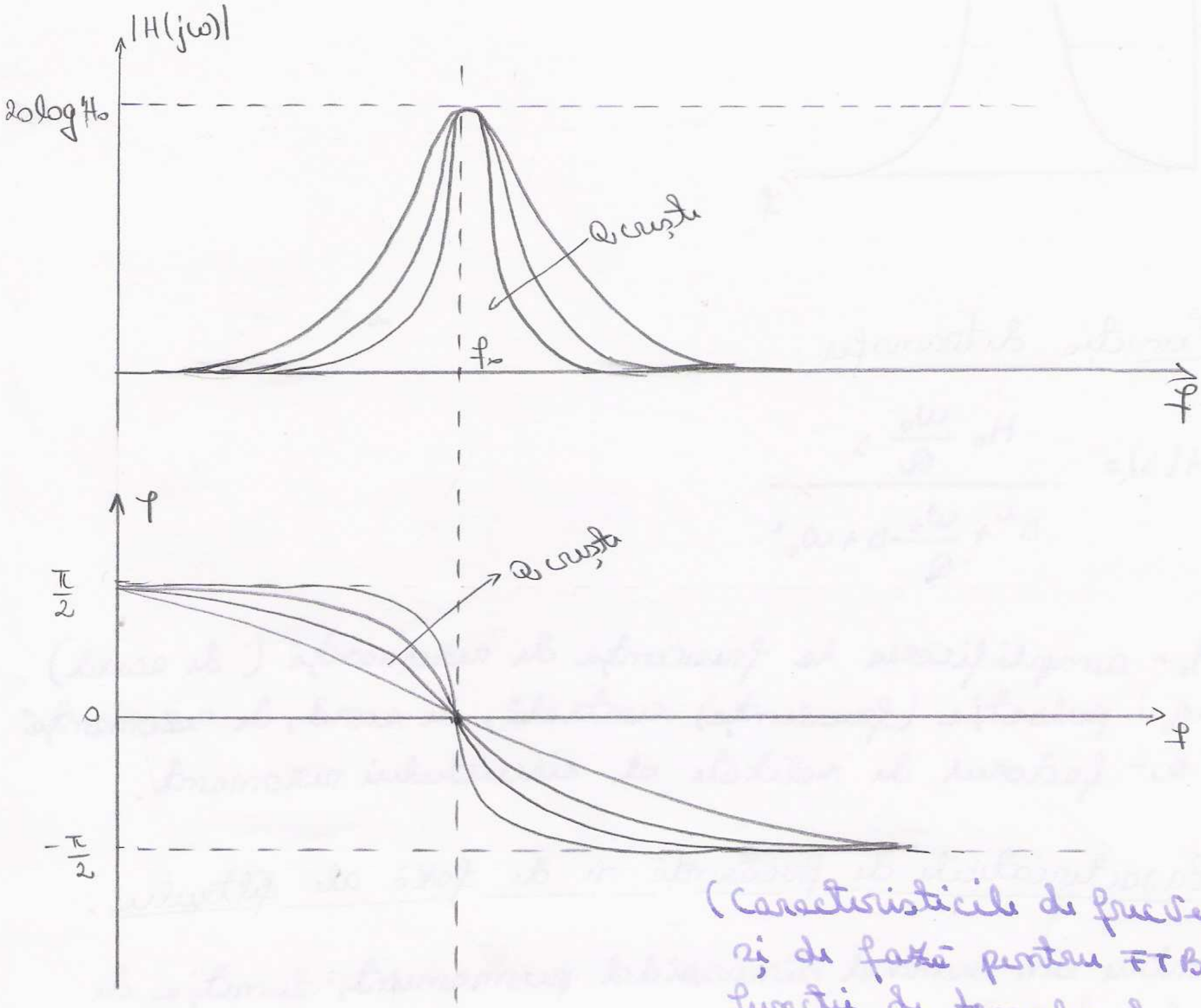
Pentru un semnal sinusoidal permanent, funcția de transfer devine:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{H_0 \cdot \frac{\omega_0}{Q} \cdot \omega j}{-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}}$$

Din această relație se deduc caracteristicile de frecvență și de fază ale filtrului sub forma:

$$\boxed{|H(j\omega)| = \frac{H_0 \frac{\omega\omega_0}{Q}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\omega\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(Q\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega\omega_0}\right)^2}}}$$

$$\boxed{\varphi = -\operatorname{arctg}\left(Q\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega\omega_0}\right)}$$

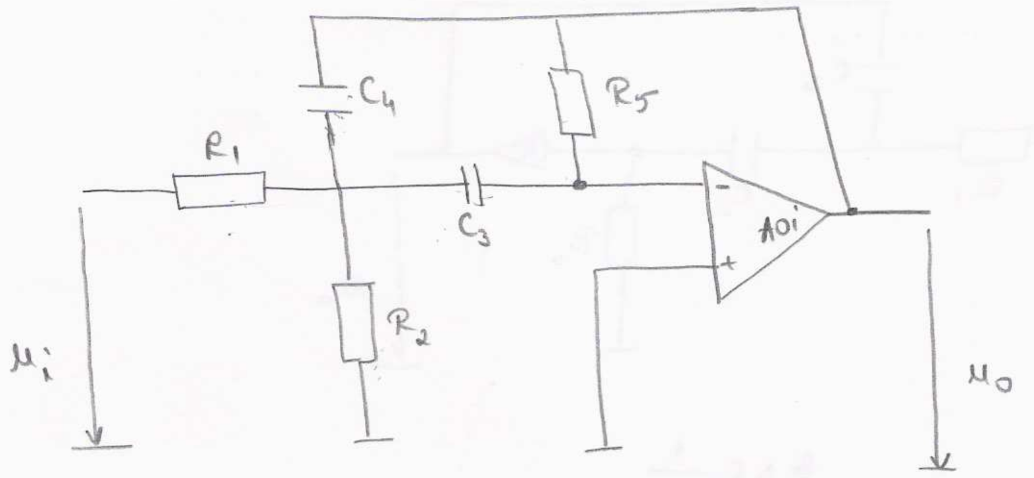


(Caracteristicile de frecvență și de fază pentru FTB cu funcții de transfer de ordinul II)

$$\boxed{B = \frac{\omega_0}{Q}}$$ (B - banda de trecere a filtrului)

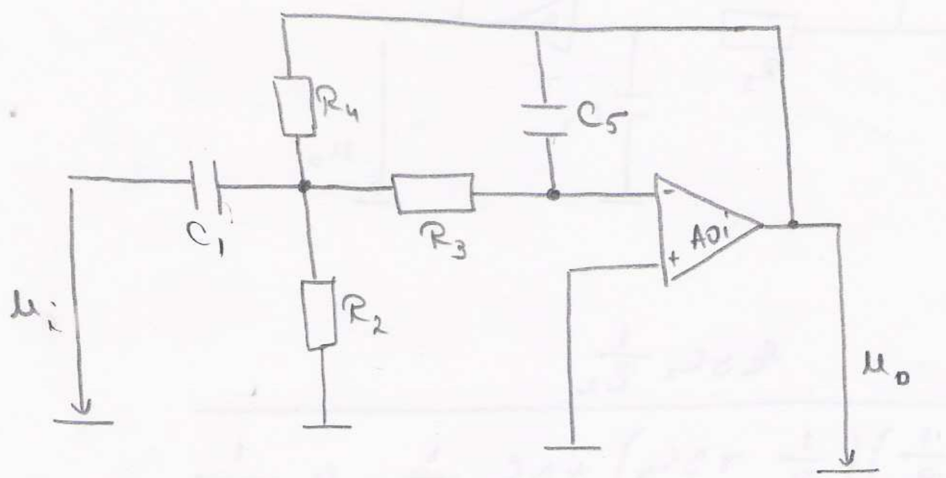
• Scheme cu reacții multiple:

a)



$$H(s) = -\frac{\frac{1}{R_1} C_3 s}{\frac{1}{R_5}\left[\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + s(C_3+C_4)\right] + s^2 C_3 C_4}$$ (nu se cere)

b)

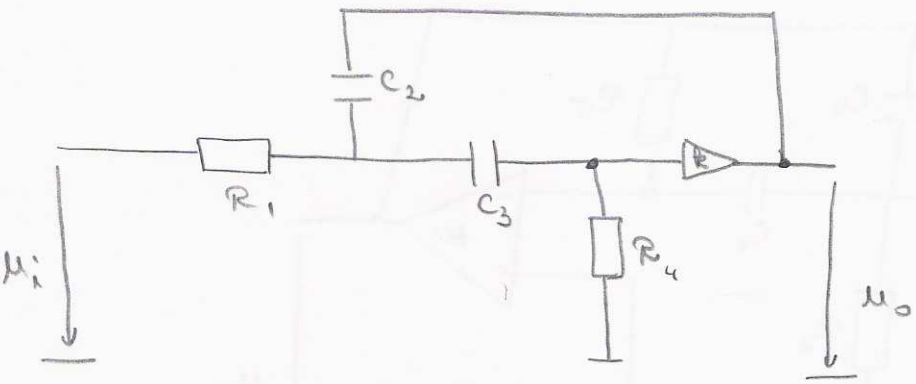


$$H(s) = -\frac{s C_1 \frac{1}{R_3}}{s C_5\left[\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) + s C_1\right] + \frac{1}{R_3 R_4}}$$ (nu se cere)

FTB

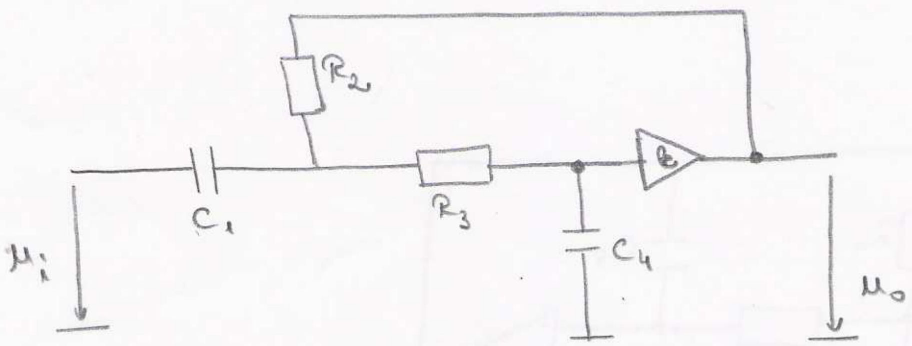
• Implementarea FTB cu AO cu câștig scăzut

a)



$$H(s)=\frac{k s C_3 \frac{1}{R_1}}{\left(\frac{1}{R_1}+sC_2\right)\left(sC_3+\frac{1}{R_4}\right)+sC_3\frac{1}{R_4}-k s^2 C_2 C_3}$$

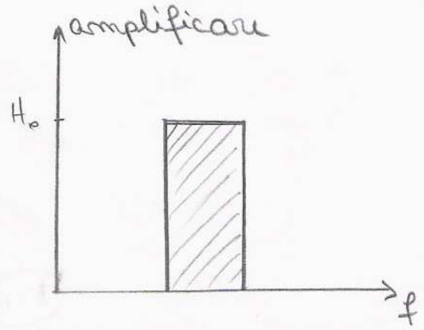
b)



$$H(s)=\frac{k s C_1 \frac{1}{R_2}}{\left(sC_1+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R_3}+sC_4\right)+sC_4\frac{1}{R_3}-k\frac{1}{R_2 R_3}}$$

• Definiții:

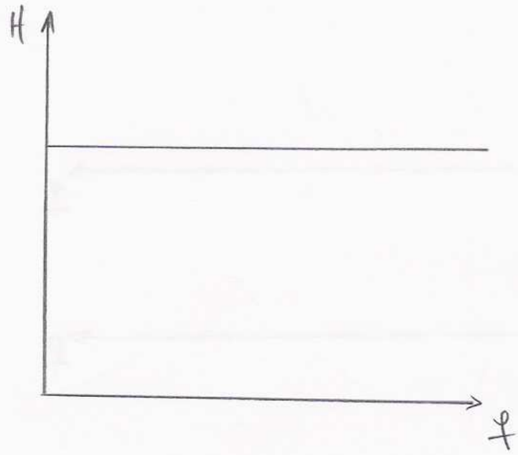
FTB este un dispozitiv electronic ce permite rejectarea (atenuarea) selectivă a semnalelor în funcție de parametrul frecvență, cu caracteristica de frecvență ideală din figură.



Lasă să treacă numai o bandă de frecvențe cuprinsă între 2 frecvențe de tăiere sus și jos

FILTRE de ORDINUL II cu AO

5. FTT (Filtru trece tot)



- **Definiție:**

FTT este un dispozitiv electronic ce permite rejectarea (atenuarea) selectivă a semnalelor în funcție de parametrul frecvență, la care amplificarea este constantă pentru tot domeniul de frecvență.

- **Funcție de transfer:**

$$H(s) = H_0 \cdot \frac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

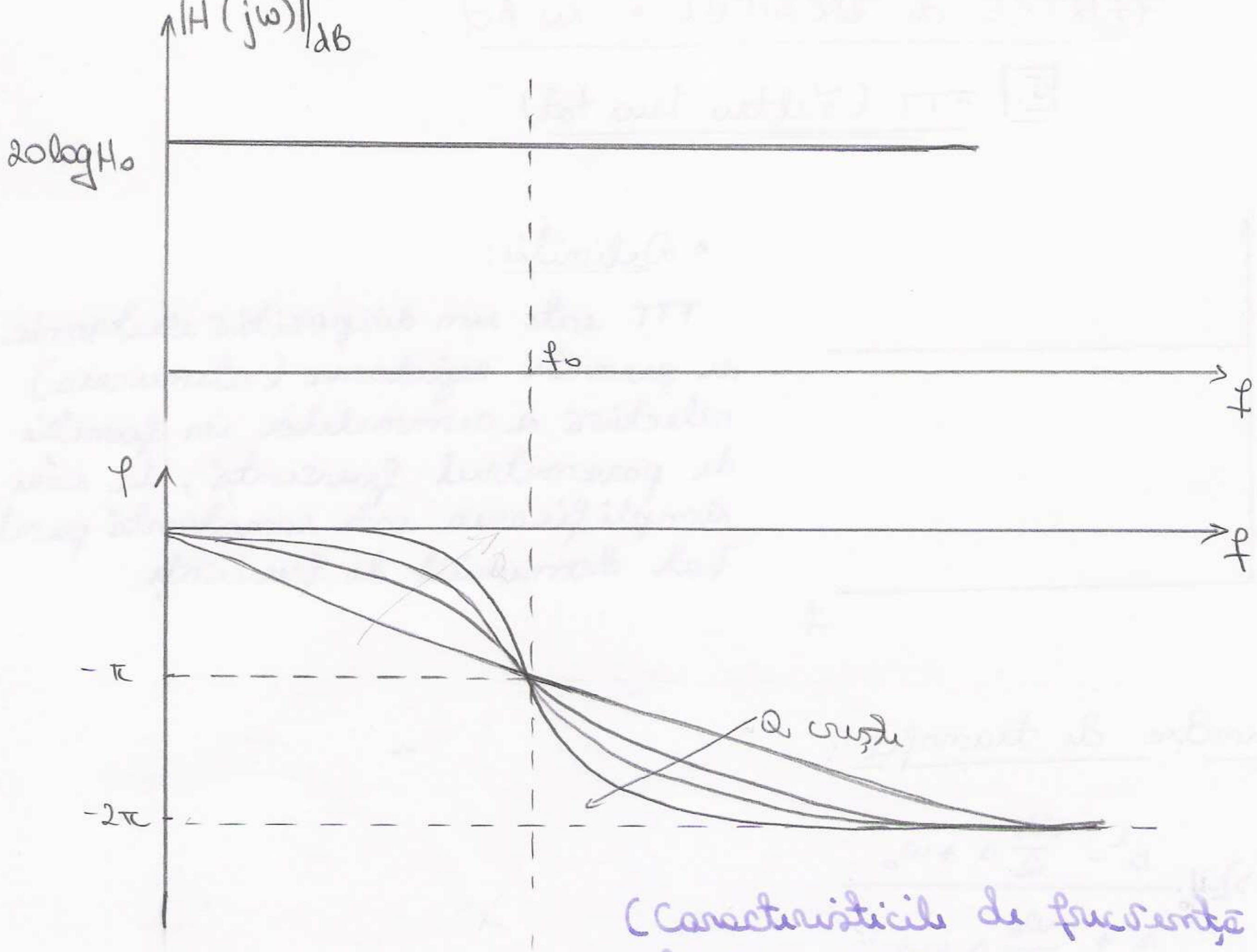
- H_0 - amplificarea (în modul) la frecvențele din afara benzii de rejecție a filtrului
- ω_0 - frecvența caracteristică a filtrului.

- **Caracteristicile de frecvență și de fază ale filtrului**

În cazul unui semnal sinusoidal permanent, funcția de transfer devine:

$$\boxed{H(j\omega) = H_0 \cdot \frac{-\omega^2 - j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}{-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}}$$

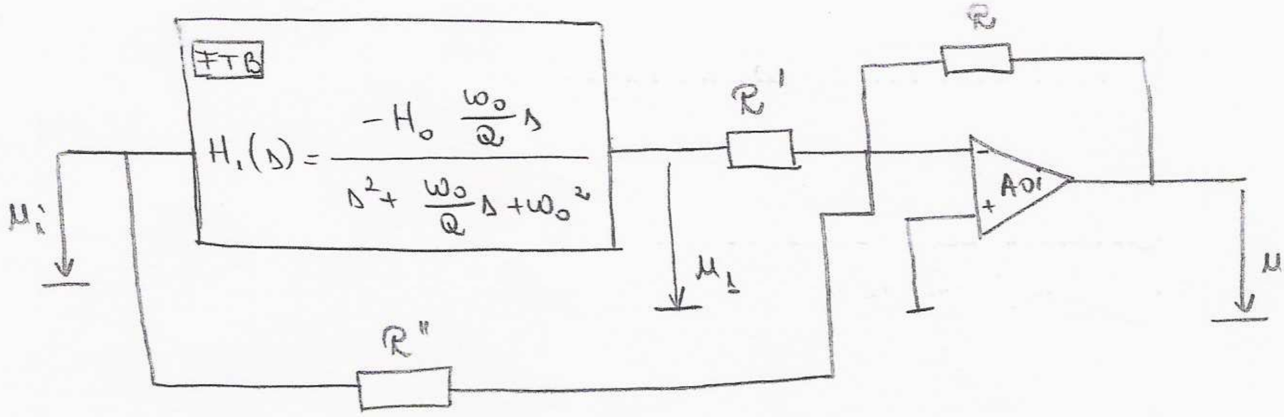
$$\boxed{|H(j\omega)| = H_0}$$



(Caracteristicile de frecvență și de fază pentru FTT cu funcții de transfer de ordinul 2)

• Schemă cu reacție multiplă.

Implementarea poate fi făcută utilizând un FTB și un AO în configurație de sumator:



$$u_1(s) = H_1(s) \cdot u_i(s)$$

$$u_o(s) = -u_1 \frac{R}{R'} - u_i \frac{R}{R''} = -u_i(s)\left(H_1(s)\frac{R}{R'} + \frac{R}{R''}\right)$$

$$H_2(s) = \frac{\frac{R}{R'}\left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2\right) - \frac{R}{R''} H_0 \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} =$$

$$= \frac{\frac{R}{R'}\left(s^2 + \omega_0^2\right) + \frac{sR\omega_0}{R'Q}\left(1 - \frac{R'}{R''} H_0\right)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

Pentru ca schema să fie un FTT trebuie îndeplinită condiția:

$$-1 = 1 - \frac{R'}{R''} H_0 \Rightarrow H_0 = 2\frac{R''}{R'}.$$