

# Trabajo final de Diseño de Experimento

## Tiempo de vuelo de aviones de papel según el material y el diseño del aeroplano

Sofía Cuartas García <sup>1</sup>    Simón Cuartas Rendón <sup>1</sup>  
Juan Pablo Martínez Echavarría <sup>1</sup>    Valentina Tamayo Guarín <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín

Noviembre, 2022

# Contenidos

- 1 Introducción
  - Justificación
  - Planteamiento del problema
- 2 Descripción detallada del diseño experimental
  - Tipo de diseño utilizado
  - Factores
  - Consideraciones
  - ¿Cómo se garantiza la asignación aleatoria?
- 3 Modelo uno
  - Gráficos descriptivos
  - Modelo ajustado
  - Verificación de supuestos
- 4 Modelo dos
  - Gráficos descriptivos
  - Modelo ajustado
  - Verificación de supuestos
- 5 Modelo tres

# Contexto

Los aviones de papel son una de las manualidades clásicas preferidas por niños y adultos gracias a la facilidad de su elaboración si se es un novato en el tema, como también el nivel de complejidad que pueden alcanzar si se propone.

## Contexto

Los aviones de papel son una de las manualidades clásicas preferidas por niños y adultos gracias a la facilidad de su elaboración si se es un novato en el tema, como también el nivel de complejidad que pueden alcanzar si se propone. El origen de esta forma de origami es difícil de determinar; lo que sí se puede decir es que fueron utilizados para estudiar los secretos de la aerodinámica por figuras de renombre como Leonardo da Vinci y los hermanos Wright.



# Motivación del experimento

Es tal la popularidad de estos pequeños ingenios de papel que existen competiciones e incluso récords Guinness dedicados a estos. Si se busca la frase "aviones de papel" en motores de búsqueda saltarán cantidad de artículos y videos que pretenden enseñar como crear el avión que alcance la mejor duración y distancia.

# Motivación del experimento

Es tal la popularidad de estos pequeños ingenios de papel que existen competencias e incluso récords Guinness dedicados a estos. Si se busca la frase "aviones de papel" en motores de búsqueda saltarán cantidad de artículos y videos que pretenden enseñar como crear el avión que alcance la mejor duración y distancia.

## Objetivo

Averiguar cuál es la combinación de papel y forma que le brinda al avión de papel un mayor **tiempo de vuelo**.

# ¿Qué se va a hacer?

Se van a realizar aviones de papel elaborados con diferentes combinaciones de tipo de papel y tipo de diseño, se tomará el tiempo de vuelo de los aviones y se determinará si estos factores o la interacción de estos tienen un efecto estadísticamente significativo sobre la duración de los aviones en el aire.

# Diseño factorial de efectos fijos

Debido a que las corridas experimentales no son costosas, ni implican un nivel de dificultad alto, se optó por un diseño factorial como se mencionó anteriormente con dos factores:



# Diseño factorial de efectos fijos

Debido a que las corridas experimentales no son costosas, ni implican un nivel de dificultad alto, se optó por un diseño factorial como se mencionó anteriormente con dos factores:

- Forma del avión, un factor con tres niveles.

# Diseño factorial de efectos fijos

Debido a que las corridas experimentales no son costosas, ni implican un nivel de dificultad alto, se optó por un diseño factorial como se mencionó anteriormente con dos factores:

- Forma del avión, un factor con tres niveles.
- Material del avión, un factor con cuatro niveles.

# Diseño factorial de efectos fijos

Debido a que las corridas experimentales no son costosas, ni implican un nivel de dificultad alto, se optó por un diseño factorial como se mencionó anteriormente con dos factores:

- Forma del avión, un factor con tres niveles.
- Material del avión, un factor con cuatro niveles.

Los efectos son fijos ya que los niveles de los factores fueron elegidos por los investigadores.

# Modelo

Inicialmente se va a considerar un modelo sin transformaciones:

Sea  $Y_{ijk}$  el tiempo de vuelo de un avión de papel en segundos,  $\mu$  la media global,  $\tau_i$  el efecto asociado al diseño empleado en el avión con el  $i$ -ésimo diseño,  $\beta_j$  el efecto relacionado con el tipo de papel con el que se construye el avión con el  $j$ -ésimo material, durante la  $k$ -ésima réplica,  $(\tau\beta)_{ij}$  la interacción entre estos dos factores y  $\varepsilon_{ijk}$  el error aleatorio.

# Modelo

Inicialmente se va a considerar un modelo sin transformaciones:

Sea  $Y_{ijk}$  el tiempo de vuelo de un avión de papel en segundos,  $\mu$  la media global,  $\tau_i$  el efecto asociado al diseño empleado en el avión con el  $i$ -ésimo diseño,  $\beta_j$  el efecto relacionado con el tipo de papel con el que se construye el avión con el  $j$ -ésimo material, durante la  $k$ -ésima réplica,  $(\tau\beta)_{ij}$  la interacción entre estos dos factores y  $\varepsilon_{ijk}$  el error aleatorio.

## Modelo

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{ijk} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2) \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, \dots, 8 \end{matrix}$$

## Forma del avión ( $\tau$ )

El sitio web *Fold 'N Fly describe* la forma de crear diferentes tipos de aviones dividiéndolos en diferentes categorías según su dificultad (fácil, medio, difícil y experto).

## Forma del avión ( $\tau$ )

El sitio web *Fold 'N Fly describe* la forma de crear diferentes tipos de aviones dividiéndolos en diferentes categorías según su dificultad (fácil, medio, difícil y experto). Como hipótesis temprana, se espera que aquellos aviones de papel más complejos posean un mejor desempeño en el tiempo de vuelo y distancia recorrida que aquellos más sencillos.

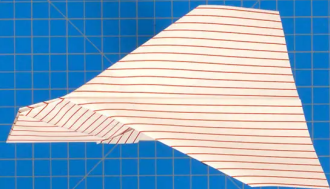
## Forma del avión ( $\tau$ )

El sitio web *Fold 'N Fly describe* la forma de crear diferentes tipos de aviones dividiéndolos en diferentes categorías según su dificultad (fácil, medio, difícil y experto). Como hipótesis temprana, se espera que aquellos aviones de papel más complejos posean un mejor desempeño en el tiempo de vuelo y distancia recorrida que aquellos más sencillos.

Se decide evaluar el rendimiento de tres tipos de aviones, uno de cada nivel de dificultad:

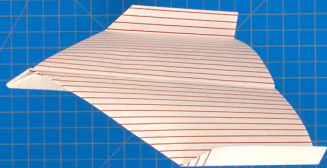
- The stable (el estable, fácil).  $i = 1$ .
- Hunting Flight (vuelo de caza, medio).  $i = 2$ .
- Heavy-Nosed Plane (avión de nariz pesada).  $i = 3$ .



**The Stable**

Easy

📌 time aloft, acrobatic

**Hunting Flight**

Medium

📌 distance, time aloft

**Heavy-Nosed Plane**

Hard

📌 distance, time aloft

# Material del avión ( $\beta$ )

Existen distintos tipos de papeles con los que se puede construir un avión, y su textura y gramaje pueden influir en la aerodinámica del aeroplano.

Los materiales elegidos son:

- Papel cappuccino.  $j = 1$ .
- Papel bond.  $j = 2$ .
- Papel Sahara.  $j = 3$ .
- Papel cuaderno.  $j = 4$ .

# Material del avión ( $\beta$ )



# Consideraciones

Para garantizar que las condiciones del experimento sean homogéneas para todos los lanzamientos, las corridas se realizaron en un salón cerrado donde fuerzas externas no creen variabilidad adicional.

# Consideraciones

Para garantizar que las condiciones del experimento sean homogéneas para todos los lanzamientos, las corridas se realizaron en un salón cerrado donde fuerzas externas no creen variabilidad adicional.

Además, en cuanto a la parte humana que pudiese influir en los tiempos del experimento, se consideró a un solo sujeto para la construcción de los aviones de papel, un solo sujeto para el lanzamiento de estos y un solo sujeto para la toma de los tiempos desde el momento en que es lanzado al aire en el salón cerrado hasta que éste impacta el suelo.

# Consideraciones

Para garantizar que las condiciones del experimento sean homogéneas para todos los lanzamientos, las corridas se realizaron en un salón cerrado donde fuerzas externas no creen variabilidad adicional.

Además, en cuanto a la parte humana que pudiese influir en los tiempos del experimento, se consideró a un solo sujeto para la construcción de los aviones de papel, un solo sujeto para el lanzamiento de estos y un solo sujeto para la toma de los tiempos desde el momento en que es lanzado al aire en el salón cerrado hasta que éste impacta el suelo.

Respecto a quien lanza los aeroplanos, se tuvo un previo entrenamiento con el fin de que la forma de lanzar el avión sea la misma en todos los lanzamientos.

# Diseño completamente aleatorizado

## Réplicas

Se determinó realizar  $n = 8$  réplicas, cada una compuesta por doce lanzamientos (una por cada tratamiento).

# Diseño completamente aleatorizado

## Réplicas

Se determinó realizar  $n = 8$  réplicas, cada una compuesta por doce lanzamientos (una por cada tratamiento).

## Observación

Con el propósito de que el rendimiento del sujeto encargado de los lanzamientos no se viera afectado por el cansancio, se realizaron dos réplicas por día.



# Diseño completamente aleatorizado

## Réplicas

Se determinó realizar  $n = 8$  réplicas, cada una compuesta por doce lanzamientos (una por cada tratamiento).

## Observación

Con el propósito de que el rendimiento del sujeto encargado de los lanzamientos no se viera afectado por el cansancio, se realizaron dos réplicas por día.

## ¿Cómo se garantiza la asignación aleatoria?

Para garantizar que el diseño fuera completamente aleatorizado, se organizaron ocho marco de datos, cada uno con doce observaciones (una por cada tratamiento), y se les asignó con ayuda de R un número del uno al doce de forma aleatoria para indicar el orden en que se iba a realizar el lanzamiento.

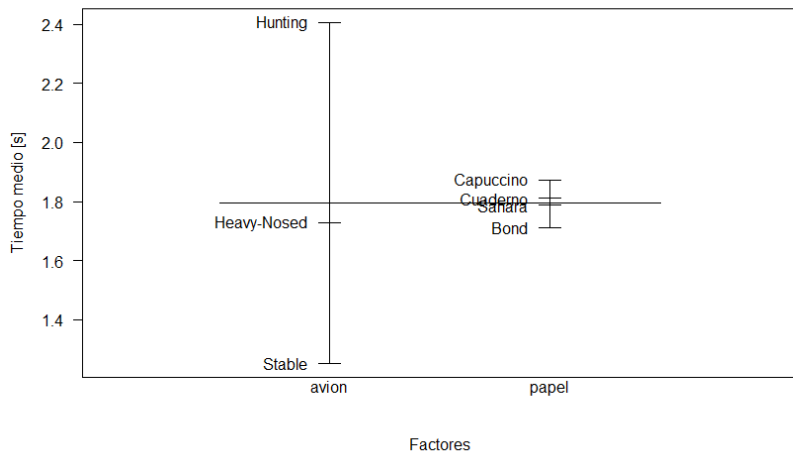
También se le asignó un número del uno al ocho de forma aleatoria a cada marco de datos auxiliar para determinar el orden en que iban a realizarse las réplicas.

# Efectos principales



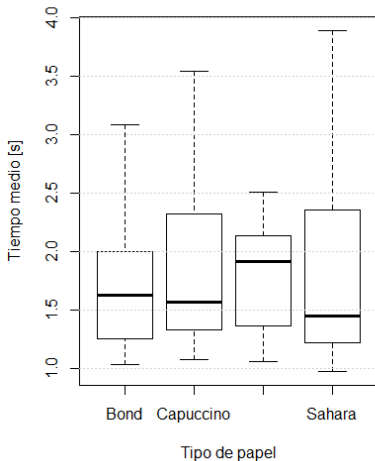
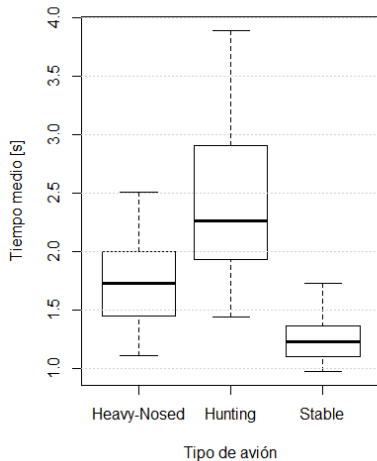
# Efectos principales

Gráfico de efectos principales



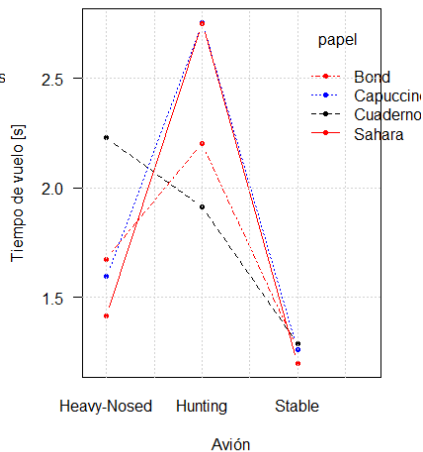
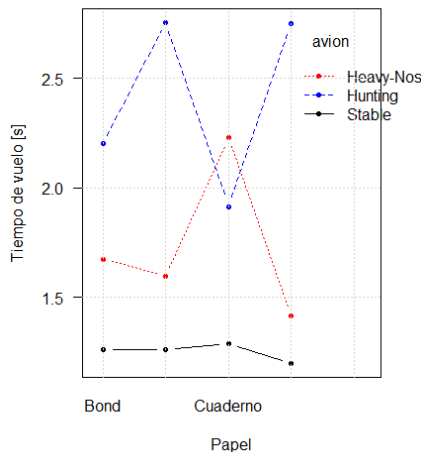
# Tiempos de vuelo por tipo de papel y de diseño

**Boxplots para el tiempo de vuelo según los niveles de cada factor**



# Interacción entre factores

## Gráficos de interacción para cada factor



# Tabla Anova

	g.l.	SS	MS	F	$V_p$
Papel	3	0.312	0.104	0.772	0.513
Avión	2	21.501	10.750	79.848	$<2 \text{ e } -16$
Interac.	6	6.866	1.144	8.499	$3.24 \text{ e } -07$
Error	84	11.309	0.135		

# Normalidad

Usando un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ .

$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores siguen una distribución normal.} \\ H_1 : \text{Los errores **no** sigue una distribución normal.} \end{cases}$$



# Normalidad

Usando un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ .

$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores siguen una distribución normal.} \\ H_1 : \text{Los errores **no** sigue una distribución normal.} \end{cases}$$

- Test de Shapiro-Wilk.  $V_p = 3.423 \times 10^{-6}$ .
- Test de Anderson-Darling.  $V_p = 3.423 \times 10^{-6}$ .
- Test de Lilliefors.  $V_p = 9.066 \times 10^{-4}$ .

# Normalidad

Usando un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ .

$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores siguen una distribución normal.} \\ H_1 : \text{Los errores **no** sigue una distribución normal.} \end{cases}$$

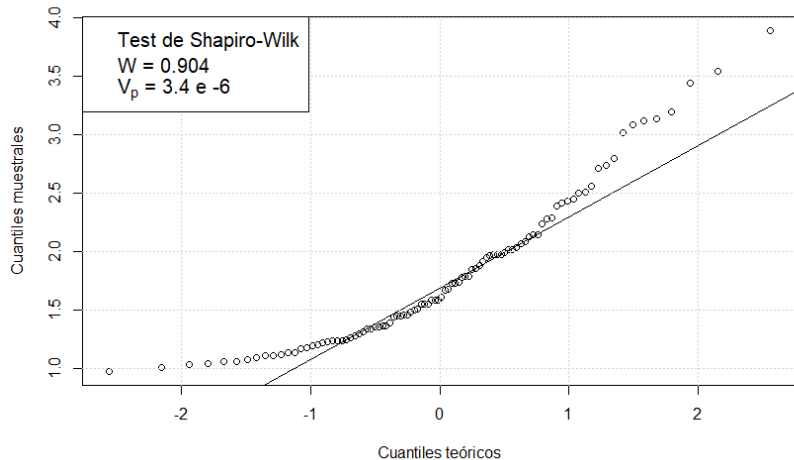
- Test de Shapiro-Wilk.  $V_p = 3.423 \times 10^{-6}$ .
- Test de Anderson-Darling.  $V_p = 3.423 \times 10^{-6}$ .
- Test de Lilliefors.  $V_p = 9.066 \times 10^{-4}$ .

## Conclusión

No hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores siguen una distribución normal, con un nivel de significancia del 5 %.

# Normalidad

Gráfico cuantil-cuantil normal



# Homocedasticidad

Se va a realizar el **test de Bartlett** en dos ocasiones, uno según cada factor, para probar homocedasticidad en los errores del modelo uno.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \\ H_1 : \exists (i, j) : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \end{cases}$$

# Homocedasticidad

Se va a realizar el **test de Bartlett** en dos ocasiones, uno según cada factor, para probar homocedasticidad en los errores del modelo uno.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \\ H_1 : \exists (i, j) : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \end{cases}$$

- Según el tipo de avión.  $V_p = 1.107 \times 10^{-9}$ .
- Según el tipo de papel.  $V_p = 0.025$ .

# Homocedasticidad

Se va a realizar el **test de Bartlett** en dos ocasiones, uno según cada factor, para probar homocedasticidad en los errores del modelo uno.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \\ H_1 : \exists (i, j) : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \end{cases}$$

- Según el tipo de avión.  $V_p = 1.107 \times 10^{-9}$ .
- Según el tipo de papel.  $V_p = 0.025$ .

## Conclusión

No hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores poseen varianza constante, con un nivel de significancia del 5 %.

# Independencia

Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independencia de los errores del modelo.

$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores } \mathbf{no} \text{ son independientes.} \end{cases}$$

# Independencia

Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independencia de los errores del modelo.  $\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores } \mathbf{no} \text{ son independientes.} \end{cases}$

- $V_p = 0.420$



# Independencia

Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independencia de los errores del modelo.  $\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores } \mathbf{no} \text{ son independientes.} \end{cases}$

- $V_p = 0.420$

## Conclusión

Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores son independientes, con un nivel de significancia del 5 %.

# Independencia

Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independencia de los errores del modelo.  $\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores } \mathbf{no} \text{ son independientes.} \end{cases}$

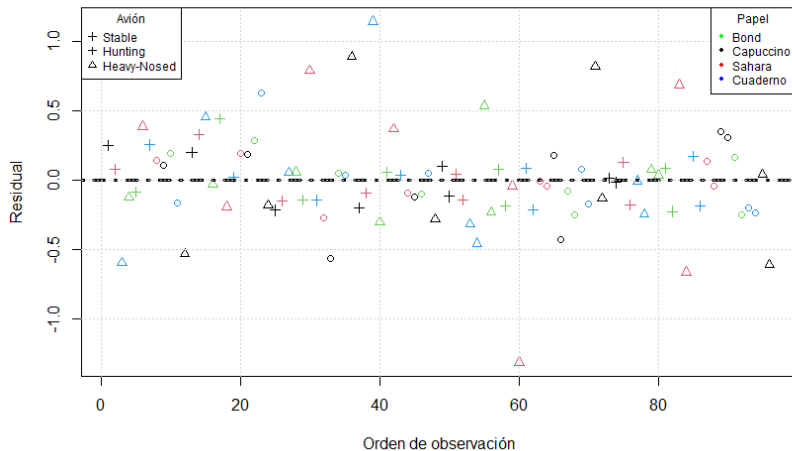
- $V_p = 0.420$

## Conclusión

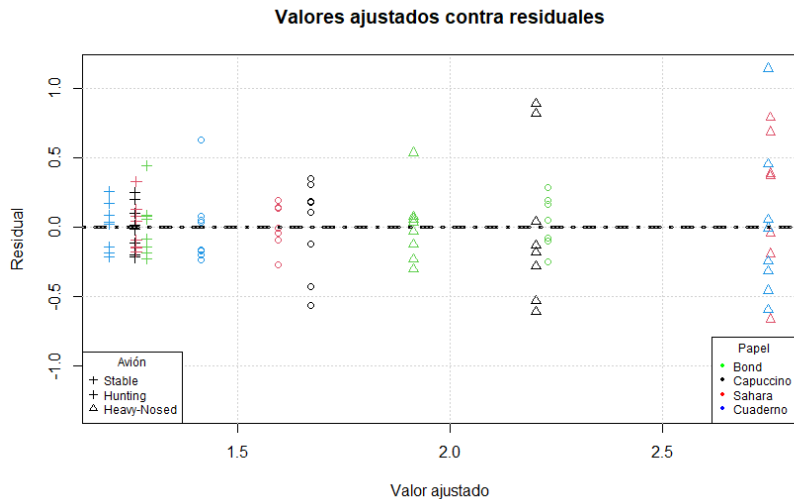
Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores son independientes, con un nivel de significancia del 5 %.

# Independencia

Orden de observación contra residuales



# Independencia



# Transformación logarítmica

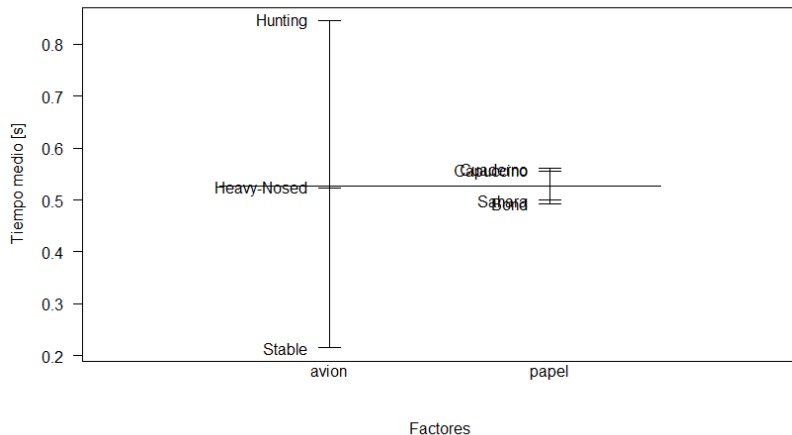
Se puede observar que no se cumplieron varios supuestos, entre ellos el de homocedasticidad. Así, vale la pena considerar un modelo que transforme la respuesta usando logaritmos. De manera que se llega al siguiente nuevo modelo:

## Modelo

$$\log Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{ijk} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2) \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, \dots, 8 \end{matrix}$$

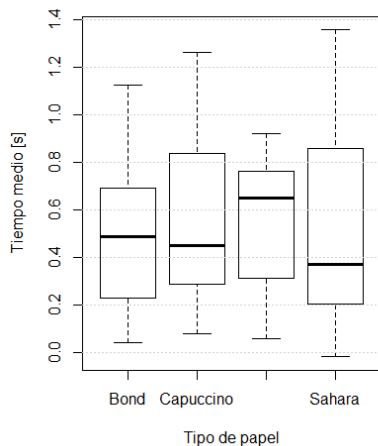
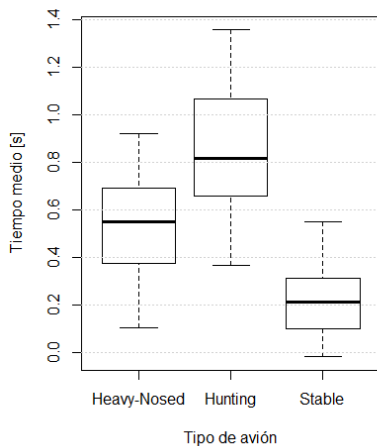
# Efectos principales

Gráfico de efectos principales



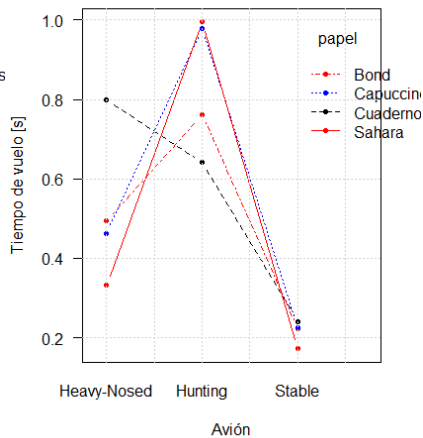
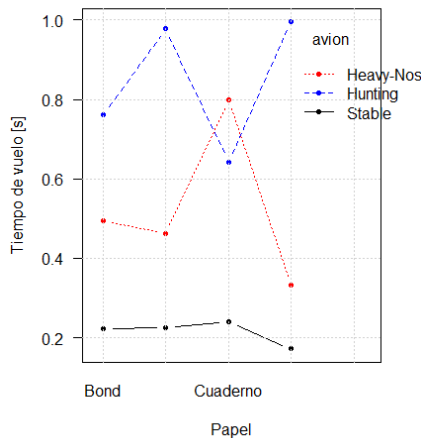
# Tiempos de vuelo por tipo de papel y de diseño

**Boxplots para el log. del tiempo de vuelo según los niveles de c./factor**



## Interacción entre factores

**Gráficos de interacción para cada factor**





# Tabla Anova

	g.l.	SS	MS	F	$V_p$
Papel	3	0.092	0.031	0.944	0.423
Avión	2	6.331	3.166	97.638	$<2 \text{ e } -16$
Interac.	6	1.566	0.261	8.049	$7.09 \text{ e } -7$
Error	84	2.723	0.032		

# Normalidad

Usando un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ .

$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores siguen una distribución normal.} \\ H_1 : \text{Los errores **no** sigue una distribución normal.} \end{cases}$$

# Normalidad

Usando un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ .

$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores siguen una distribución normal.} \\ H_1 : \text{Los errores **no** sigue una distribución normal.} \end{cases}$$

- Test de Shapiro-Wilk.  $V_p = 0.01049$ .
- Test de Anderson-Darling.  $V_p = 0.02509$ .
- Test de Lilliefors.  $V_p = 0.1342$ .

# Normalidad

Usando un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ .

$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores siguen una distribución normal.} \\ H_1 : \text{Los errores **no** sigue una distribución normal.} \end{cases}$$

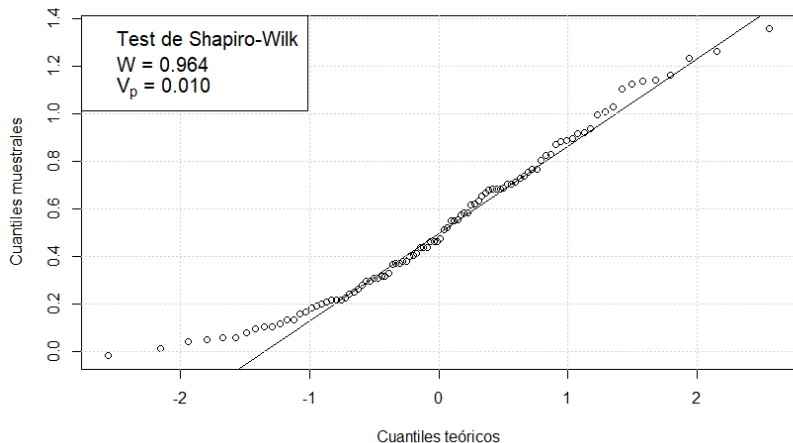
- Test de Shapiro-Wilk.  $V_p = 0.01049$ .
- Test de Anderson-Darling.  $V_p = 0.02509$ .
- Test de Lilliefors.  $V_p = 0.1342$ .

## Conclusión

Según los tests de normalidad de Shapiro-Wilk y Anderson-Darling, no hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores siguen una distribución normal, con un nivel de significancia del 5 %.

# Normalidad

Gráfico cuantil-cuantil normal



# Homocedasticidad

Se va a realizar el **test de Bartlett** en dos ocasiones, uno según cada factor, para probar homocedasticidad en los errores del modelo uno.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \\ H_1 : \exists (i, j) : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \end{cases}$$

# Homocedasticidad

Se va a realizar el **test de Bartlett** en dos ocasiones, uno según cada factor, para probar homocedasticidad en los errores del modelo uno.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \\ H_1 : \exists (i, j) : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \end{cases}$$

- Según el tipo de avión.  $V_p = 0.003$ .
- Según el tipo de papel.  $V_p = 0.214$ .

# Homocedasticidad

Se va a realizar el **test de Bartlett** en dos ocasiones, uno según cada factor, para probar homocedasticidad en los errores del modelo uno.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \\ H_1 : \exists (i, j) : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \end{cases}$$

- Según el tipo de avión.  $V_p = 0.003$ .
- Según el tipo de papel.  $V_p = 0.214$ .

## Conclusión

No hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores poseen varianza constante, con un nivel de significancia del 5 %.



# Independencia

Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independiencia de los errores del modelo.  $\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores **no** son independientes.} \end{cases}$

# Independencia

Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independiencia de los errores del modelo.  $\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores **no** son independientes.} \end{cases}$

- $V_p = 0.538$

# Independencia

Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independencia de los errores del modelo. 
$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores } \mathbf{no} \text{ son independientes.} \end{cases}$$

- $V_p = 0.538$

## Conclusión

Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores son independientes, con un nivel de significancia del 5 %.

# Independencia

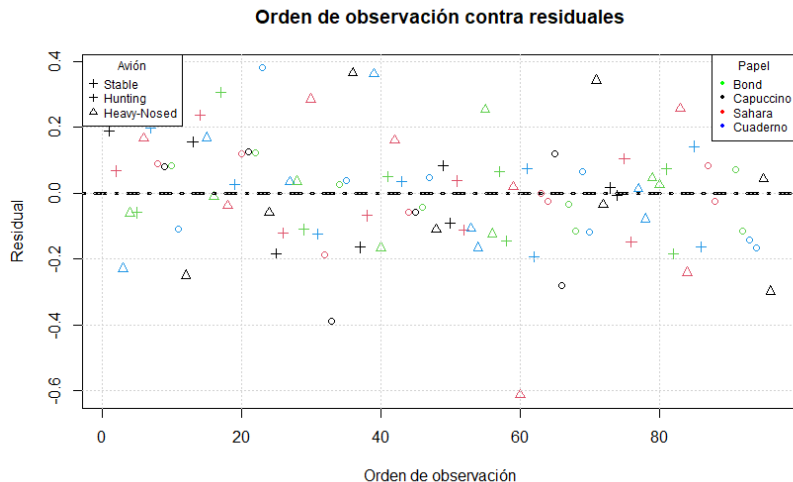
Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independiencia de los errores del modelo.  $\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores } \mathbf{no} \text{ son independientes.} \end{cases}$

- $V_p = 0.538$

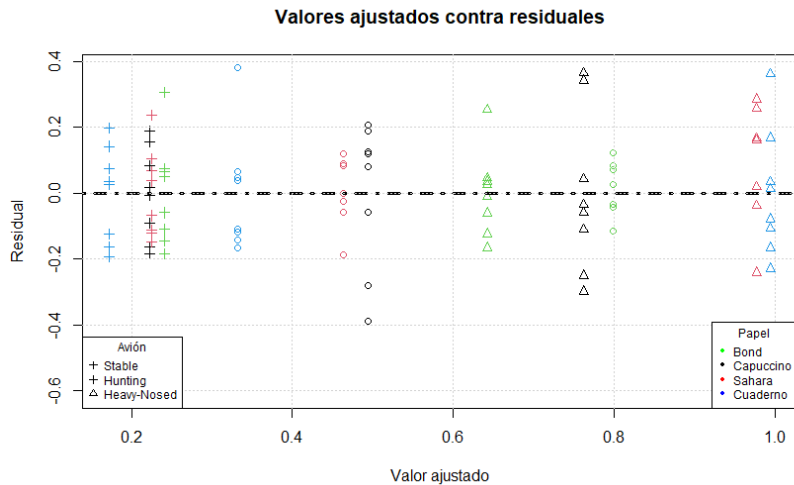
## Conclusión

Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores son independientes, con un nivel de significancia del 5 %.

# Independencia



# Independencia



## Transformación de Box-Cox

Se puede observar que no se cumplieron varios supuestos a pesar de la transformación logarítmica. Así, vale la pena considerar un modelo que transforme la respuesta usando la transformación de Box-Cox De manera que se llega al siguiente nuevo modelo:

### Modelo

$$\lambda^{-1}(Y_{ijk}^{\lambda} - 1) = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{ijk} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

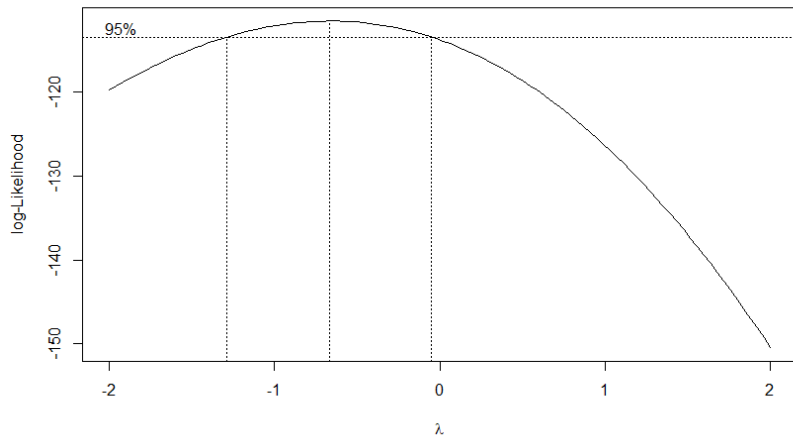
$$i = 1, 2, 3$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

$$k = 1, \dots, 8$$

Con ayuda de R se encuentra que el valor óptimo de  $\lambda$  es  $\lambda = -2/6$

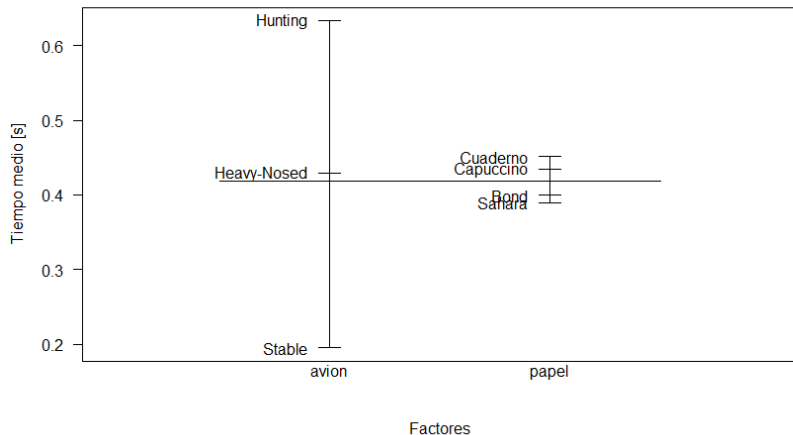
# Efectos principales





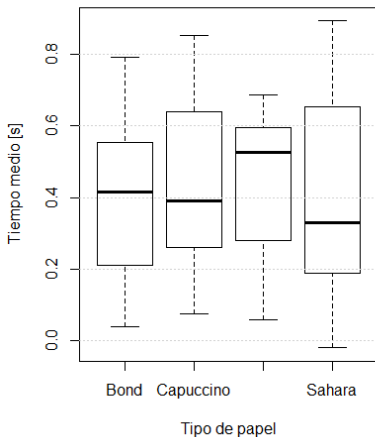
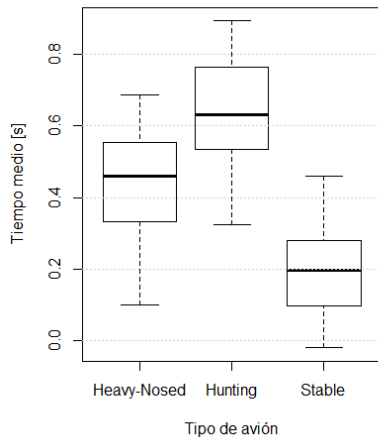
# Efectos principales

Gráfico de efectos principales



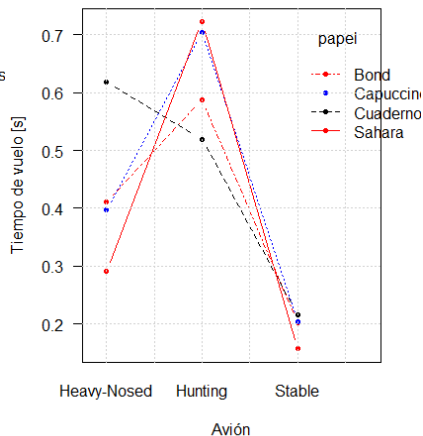
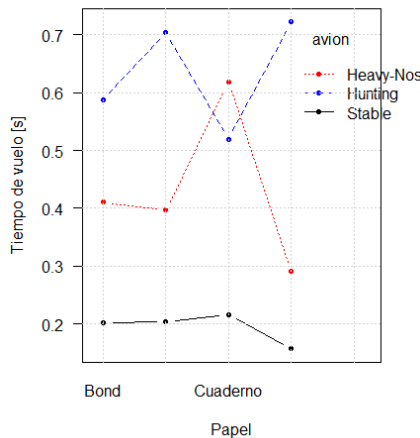
# Tiempos de vuelo por tipo de papel y de diseño

**Boxplots para el tiempo transformado de vuelo según los niveles de c./factor**



## Interacción entre factores

**Gráficos de interacción para cada factor**



# Tabla Anova

	g.l.	SS	MS	F	$V_p$
Papel	3	0.060	0.020	1.295	0.281
Avión	2	3.073	1.536	799.274	$<2 \text{ e } -16$
Interac.	6	0.628	0.105	6.761	$7.17 \text{ e } -6$
Error	84	11.309	0.135		

# Normalidad

Usando un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ .

$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores siguen una distribución normal.} \\ H_1 : \text{Los errores **no** sigue una distribución normal.} \end{cases}$$

# Normalidad

Usando un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ .

$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores siguen una distribución normal.} \\ H_1 : \text{Los errores **no** sigue una distribución normal.} \end{cases}$$

- Test de Shapiro-Wilk.  $V_p = 0.071$ .
- Test de Anderson-Darling.  $V_p = 0.138$ .
- Test de Lilliefors.  $V_p = 0.422$ .

# Normalidad

Usando un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ .

$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores siguen una distribución normal.} \\ H_1 : \text{Los errores **no** sigue una distribución normal.} \end{cases}$$

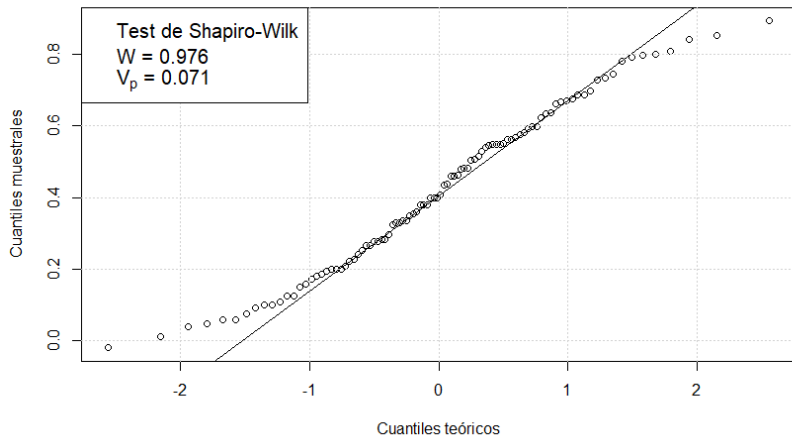
- Test de Shapiro-Wilk.  $V_p = 0.071$ .
- Test de Anderson-Darling.  $V_p = 0.138$ .
- Test de Lilliefors.  $V_p = 0.422$ .

## Conclusión

Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores siguen una distribución normal, con un nivel de significancia del 5 %.

# Normalidad

Gráfico cuantil-cuantil normal





# Homocedasticidad

Se va a realizar el **test de Bartlett** en dos ocasiones, uno según cada factor, para probar homocedasticidad en los errores del modelo uno.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \\ H_1 : \exists (i, j) : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \end{cases}$$

# Homocedasticidad

Se va a realizar el **test de Bartlett** en dos ocasiones, uno según cada factor, para probar homocedasticidad en los errores del modelo uno.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \\ H_1 : \exists (i, j) : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \end{cases}$$

- Según el tipo de avión.  $V_p = 0.216$ .
- Según el tipo de papel.  $V_p = 0.421$ .

# Homocedasticidad

Se va a realizar el **test de Bartlett** en dos ocasiones, uno según cada factor, para probar homocedasticidad en los errores del modelo uno.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \\ H_1 : \exists (i, j) : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \end{cases}$$

- Según el tipo de avión.  $V_p = 0.216$ .
- Según el tipo de papel.  $V_p = 0.421$ .

## Conclusión

Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores poseen varianza constante, con un nivel de significancia del 5 %.

# Independencia

Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independencia de los errores del modelo.  $\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores } \mathbf{no} \text{ son independientes.} \end{cases}$

# Independencia

Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independencia de los errores del modelo.  $\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores } \mathbf{no} \text{ son independientes.} \end{cases}$

- $V_p = 0.682$

# Independencia

Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independencia de los errores del modelo.  $\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores } \mathbf{no} \text{ son independientes.} \end{cases}$

- $V_p = 0.682$

## Conclusión

Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores son independientes, con un nivel de significancia del 5 %.

# Independencia

Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independencia de los errores del modelo.  $\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores } \mathbf{no} \text{ son independientes.} \end{cases}$

- $V_p = 0.682$

## Conclusión

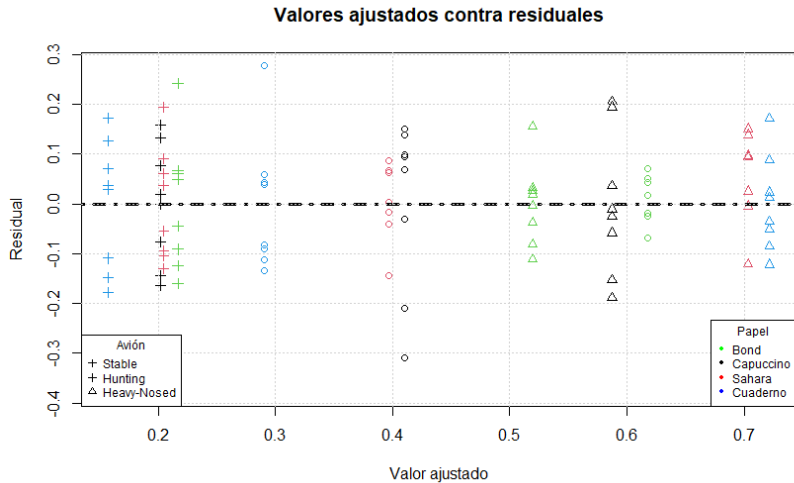
Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores son independientes, con un nivel de significancia del 5 %.

# Independencia





# Independencia



# Test comparación de medias.

Todos los test de comparación de medias tienen las siguientes hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \forall (i, j) : \mu_i = \mu_j \\ H_1 : \exists (i, j) : \mu_i \neq \mu_j \end{cases}$$

Como existe interacción entre los factores estamos interesados en conocer cual es la combinación de forma del material y forma del avión que le brinda un mayor tiempo de vuelo al avión.

# Test Duncan.

Tratamiento	tiempo	grupos
Hunting-Capuccino	2.75500	a
Hunting-Sahara	2.75000	a
Heavy-Nosed-Cuaderno	2.23000	b
Hunting-Bond	2.20250	b
Hunting-Cuaderno	1.91500	bc
Heavy-Nosed-Bond	1.67375	cd
Heavy-Nosed-Capuccino	1.59625	cde
Heavy-Nosed-Sahara	1.41500	de
Stable-Cuaderno	1.28750	de
Stable-Capuccino	1.26250	e
Stable-Bond	1.26000	e
Stable-Sahara	1.19875	e

## Mínima diferencia significativa (LDS)

Tratamiento	Tiempo medio [s]	grupos
Hunting-Capuccino	2.75500	a
Hunting-Sahara	2.75000	a
Heavy-Nosed-Cuaderno	2.23000	b
Hunting-Bond	2.20250	b
Hunting-Cuaderno	1.91500	bc
Heavy-Nosed-Bond	1.67375	cd
Heavy-Nosed-Capuccino	1.59625	cde
Heavy-Nosed-Sahara	1.41500	def
Stable-Cuaderno	1.28750	ef
Stable-Capuccino	1.26250	ef
Stable-Bond	1.26000	ef
Stable-Sahara	1.19875	f

# Conclusiones

- Considerar un diseño factorial resulta útil para considerar la interacción entre el tipo de papel y el diseño del avión, lo cual resultó útil a partir de los resultados de los tres modelos y del test LDS realizado.

# Conclusiones

- Considerar un diseño factorial resulta útil para considerar la interacción entre el tipo de papel y el diseño del avión, lo cual resultó útil a partir de los resultados de los tres modelos y del test LDS realizado.
- Las transformaciones resultan útiles para poder considerar modelos paramétricos como los considerados en este trabajo cuando los datos crudos no cumplen los supuestos por sí mismos.

# Conclusiones

- Considerar un diseño factorial resulta útil para considerar la interacción entre el tipo de papel y el diseño del avión, lo cual resultó útil a partir de los resultados de los tres modelos y del test LDS realizado.
- Las transformaciones resultan útiles para poder considerar modelos paramétricos como los considerados en este trabajo cuando los datos crudos no cumplen los supuestos por sí mismos.
- Hay evidencia muestral para sugerir que los aviones que tienen el diseño *hunting* tienen tiempos de vuelo en promedio mayores a otros diseños (particularmente sobre el *stable*) sin importar el tipo de papel empleado.

# ¡Gracias!