

Universidad Nacional de Colombia

FACULTAD DE CIENCIAS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Informe del proyecto final del curso

Autores:

Sofía Cuartas García
Simón Cuartas Rendón
Juan Pablo Martínez Echavarría
Valentina Tamayo Guarín

Noviembre de 2022

Índice

1. Introducción	2
2. Planteamiento del problema	2
2.1. Factores que influyen en el problema	2
3. Descripción del diseño experimental	4
4. Diseño Piloto	5
4.1. Efectos principales:	6
4.2. Tiempos de vuelo por tipo de papel y de diseño	7
4.3. Interacción entre factores	7
5. Modelo:	8
5.1. Normalidad	8
5.2. Homocedasticidad	9
5.3. Independencia	10
6. Modelo 2	11
6.1. Efectos principales	11
6.2. Tiempos de vuelo por tipo de papel y de diseño	12
6.3. Interacción entre factores	12
6.4. Tabla Anova	13
6.5. Normalidad	13
6.6. Homocedasticidad	13
6.7. Independencia	15
7. Modelo 3	16
7.1. Efectos principales	17
7.2. Tiempos de vuelo por tipo de papel y de diseño	17
7.3. Interacción entre factores	18
7.4. Tabla Anova	18
7.5. Normalidad	18
7.6. Homocedasticidad	19
7.7. Independencia	19
8. Comparación de medias	21
8.1. Test Duncan.	21
8.2. Mínima diferencia significativa (LDS)	21
9. Conclusiones	21
10. Evidencia Fotográfica	23
11. Programa en R	23
12. Bibliografía	33

1. Introducción

El primer avión de papel documentado históricamente voló en un seminario en Rossleben, Thuringia en 1809. El profesor de matemáticas August Wilhelm Zacharias lo lanzó como parte de una lección. Desde entonces, los pequeños ingenios de papel han estado volando por todo el mundo. Los hermanos Wright los utilizaron para investigar los secretos de la aerodinámica antes de probarlos ellos mismos. En 1966 la Scientific American organizó la primera competición para aviones de papel, en la que participaron 12.000 modelos, en que se tuvieron en cuenta la duración del vuelo, dimensiones y valores estéticos. El record Guinness lo tiene el avión de papel de Ken Blackburn de Saint Louis, que estuvo en vuelo un total de 276 segundos [1].

El diseño de experimentos es una poderosa herramienta estadística que, entre sus usos más frecuentes, cuenta con la identificación de posibles relaciones entre los factores que intervienen en un proceso; esto en aras de la mejora del mismo. Para esto, se debe elegir apropiadamente el tipo de diseño que se llevará a cabo, en nuestro caso particular se hará un **diseño factorial**, ya que se hace necesario estudiar de manera simultánea la influencia de varios factores (los cuales serán mencionados posteriormente) sobre el tiempo de vuelo de un avión de papel, con la finalidad de conocer mejor como es esta relación y generar conocimiento que permita tomar acciones y decisiones en el desempeño del proceso.

Como proyecto se realizará el experimento diseñado que tiene como unidad experimental un avión de papel estándar al cual se le aplicarán diferentes modificaciones para probar si éstas afectan ya sea disminuyendo o incrementando el tiempo de vuelo del avión; en las siguientes páginas del documento se exhibirá más a detalle el tipo de diseño que se implementará, las variables, materiales y métodos a utilizar en el experimento, además se explicarán los pasos a seguir para llevar a cabo el experimento en caso de que un tercero quisiera replicarlo.

2. Planteamiento del problema

2.1. Factores que influyen en el problema

Cuando se consideran cuerpos cuyo objetivo es volar, planear o, en general, sostenerse en el aire por cierta cantidad de tiempo, es fundamental tener en cuenta las diferentes variables **aerodinámicas**, ya que éstas explican la forma en que el cuerpo se va a permanecer y desplazarse en el aire. Así, se pueden considerar diversas variables: fluido en el que se da el desplazamiento, material del cuerpo aerodinámico, forma del cuerpo aerodinámico y fuerzas externas al cuerpo aerodinámico (como el viento), entre otros. Teniendo esto presente, y considerando que el experimento a realizar es **controlado**, es posible describir los principales factores que intervienen en el experimento de la siguiente forma:

- *Forma del avión.* Se pueden plantear diferentes diseños para los aviones de papel, y esto puede influir en el tiempo que un avión logre sostenerse en el aire desde el momento en que es lanzado. Es importante tener en cuenta que los aviones pueden tener dimensiones distintas que serán determinantes en la aerodinámica del aeroplano, por lo que se controlará esta variable adicional al construir los distintos tipos de aeronaves con una dimensión inicial determinada del papel (por ejemplo, $20 \times 20 \text{ cm}$). El sitio web Fold 'N Fly ("Doblar y volar") recoge diversos diseños de aviones de papel [2], como los mostrados en la figura 1.

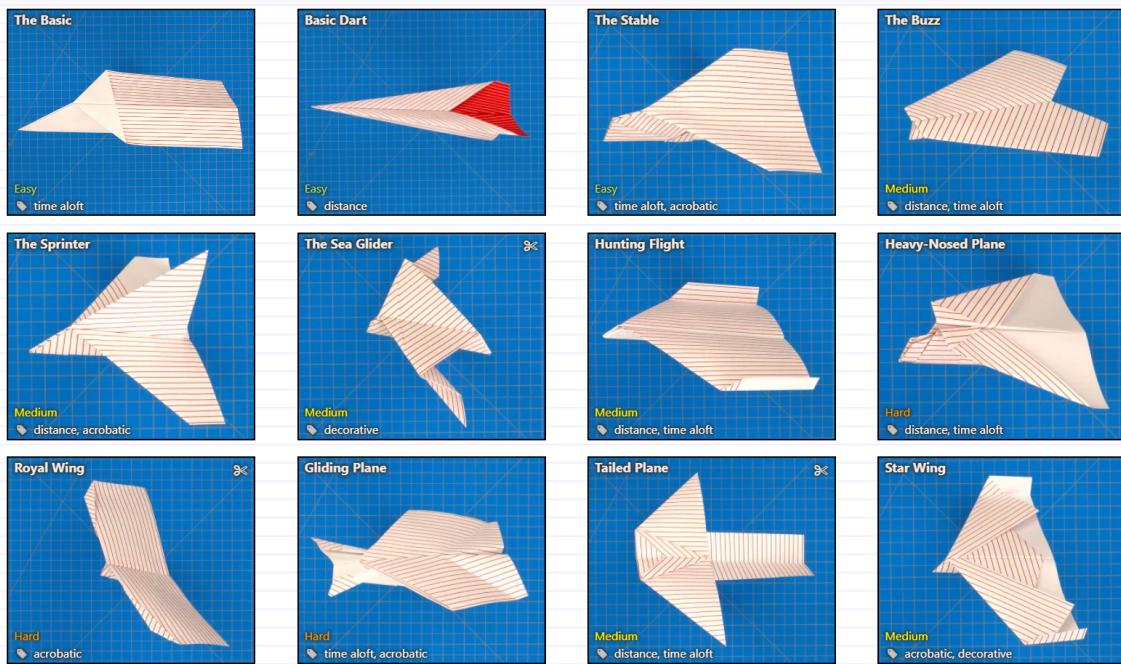


Figura 1: Diferentes diseños posibles para aviones de papel. Imagen tomada del sitio web de Fold 'N Fly.

- *Material del avión.* Existen distintos tipos de papeles con los que se puede construir un avión, y su textura y gramaje pueden influir en la aerodinámica del aeroplano. Algunos de ellos son:
 - Papel couché.
 - Papel offset.
 - Papel reciclado.
 - Papel creativo.
 - Papel bond.
- *Fluido en el que se realiza el experimento.* El ambiente en el que se lleve a cabo el experimento resulta determinante, pues en éste pueden haber fuerzas externas que influyan en el tiempo que un cuerpo aerodinámico pueda sostenerse en el aire.

Así las cosas, se puede considerar un experimento de dos variables: **forma del avión** y **material del avión**, para ambas es posible considerar diferentes niveles que, al combinarse, generen distintos tratamientos. En cuanto al fluido en el cual se aborde el experimento, es importante que las condiciones del experimento sean homogéneas para todos los lanzamientos que se vayan a realizar, por lo que se va a tomar un espacio cerrado donde fuerzas externas como el viento, el desplazamiento de cuerpos como personas o aparatos electrónicos como ventiladores no creen variabilidad adicional. Además, en cuanto a la parte humana que pudiese influir en los tiempos del experimento, se consideró a un solo sujeto para la construcción de los aviones de papel, un solo sujeto para el lanzamiento de estos y un solo sujeto para la toma de los tiempos desde el momento en que es lanzado al aire en el salón cerrado hasta que éste impacta el suelo. Respecto a quien lanza los aeroplanos, se tuvo un previo entrenamiento con el fin de que la forma de lanzar el avión sea la misma en todos los lanzamientos.

Por otro lado, es claro que la **unidad experimental** para este experimento está dada por cada uno de los **aviones de papel** considerados, los cuales van a diferir entre sí, como se mencionó

recién, de acuerdo con la combinación de tipo de papel y clase de diseño empleados para su construcción.

3. Descripción del diseño experimental

El objetivo principal del proyecto planteado será determinar el tipo de avión de papel más óptimo, para ello, se tendrán en cuenta diferentes factores, los cuales pueden variar para hacer diferente un avión de papel de otro.

Por lo tanto, el proyecto girará entorno a la siguiente pregunta: ¿Cuál tipo de avión de papel es el más óptimo?. Y para responder a esta pregunta se tendrá en cuenta como **variable respuesta** el tiempo de vuelo de los aviones de papel en segundos y la distancia recorrida en metros, además, para tener diferentes opciones a comparar se variarán los siguientes factores:

- Forma del avión.
- Material del avión.

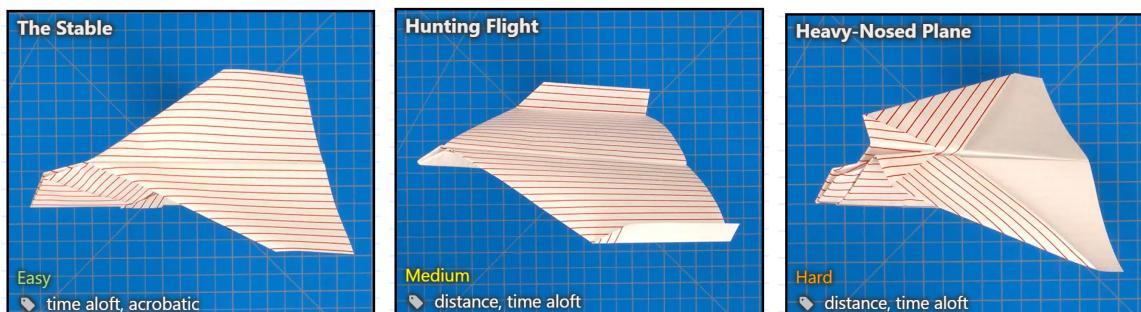
Se plantea los siguientes niveles de factores:

Forma del avión: El sitio web Fold 'N Fly describe la forma de crear diferentes tipos de aviones dividiéndolos en diferentes categorías según su dificultad (Easy, Medium, Hard y Expert). Como hipótesis temprana, se espera que aquellos aviones de papel más complejos posean un mejor desempeño en el tiempo de vuelo y distancia recorrida que aquellos más sencillos. Se decide evaluar el rendimiento de 3 tipos de aviones, uno de cada nivel de dificultad, cuya descripción refleje cualidades como el tiempo de vuelo y la distancia que puede recorrer en un lanzamiento:

(1) The Stable (Easy). (2) Hunting Flight (Medium). (3) Heavy-Nosed Plane (Hard).

Material (tipo de papel): El material seleccionado se fijó teniendo en cuenta la disponibilidad en Antioquia y que tuviera un costo accesible para las situaciones de los integrantes:

- (a) Papel Cappuccino.
- (b) Papel Bond.
- (c) Papel Sahara.
- (d) Papel cuaderno.



Como se indicó anteriormente, para realizar un experimento lo más controlado posible y así descartar efectos no deseados del medio, todos los aviones se construirán con tamaños de papel

iguales y los lanzamientos los realizará únicamente una persona del grupo en un mismo lugar cerrado.

Además, para establecer el número de muestras a tomar para cada combinación, se realizará una muestra piloto fijando un margen de error (a acordar).

Finalmente, se espera llegar a una tabla con la siguiente estructura:

Tipo de papel	Forma del avión		
	The Stable	Hunting Flight	Heavy Nosed Plane
Bond			
Cappuccino			
Sahara			

4. Diseño Piloto

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente en la descripción del diseño experimental, se tiene:

Tres tipos de aviones, uno de cada nivel de dificultad:

- The stable (el estable, fácil). $i = 1$.
- Hunting Flight (vuelo de caza, medio). $i = 2$.
- Heavy-Nosed Plane (avión de nariz pesada). $i = 3$.

Los materiales elegidos son:

- Papel cappuccino. $j = 1$.
- Papel bond. $j = 2$.
- Papel Sahara. $j = 3$.
- Papel cuaderno. $j = 4$.

Consideraciones:

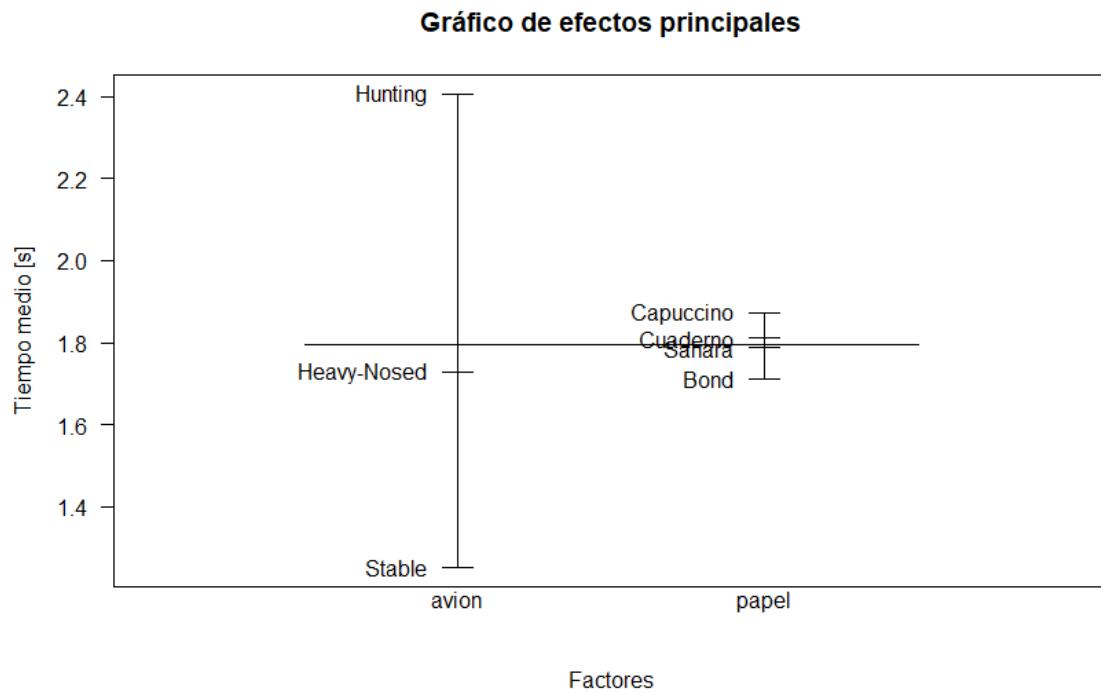
- Se determinó realizar $n = 8$ réplicas, cada una compuesta por doce lanzamientos (una por cada tratamiento).
- Con el propósito de que el rendimiento del sujeto encargado de los lanzamientos no se viera afectado por el cansancio, se realizaron dos réplicas por día

Para garantizar que el diseño fuera completamente aleatorizado, se organizaron ocho marcos de datos, cada uno con doce observaciones (una por cada tratamiento), y se les asignó con ayuda de R un número del uno al doce de forma aleatoria para indicar el orden en que se iba a realizar el lanzamiento.

También se le asignó un número del uno al ocho de forma aleatoria a cada marco de datos auxiliar para determinar el orden en que iban a realizarse las réplicas.

avion	papel	replica	orden	tiempo	log_t	t_bc
Stable	Bond		1	1	1.51	0.412109651
Stable	Capuccino		1	2	1.34	0.292669614
Hunting	Sahara		1	3	2.15	0.765467842
Hunting	Cuaderno		1	4	1.79	0.582215620
Stable	Cuaderno		1	5	1.20	0.182321557
Hunting	Capuccino		1	6	3.14	1.144222800
Stable	Sahara		1	7	1.45	0.371563556
Heavy-Nosed	Capuccino		1	8	1.74	0.553885113
Heavy-Nosed	Bond		1	9	1.78	0.576613364
Heavy-Nosed	Cuaderno		1	10	2.42	0.883767540
Heavy-Nosed	Sahara		1	11	1.25	0.223143551
Hunting	Bond		1	12	1.67	0.512823626
Stable	Bond		2	13	1.46	0.378436436
Stable	Capuccino		2	14	1.59	0.463734016
Hunting	Sahara		2	15	3.20	1.163150810
						0.809244094

4.1. Efectos principales:

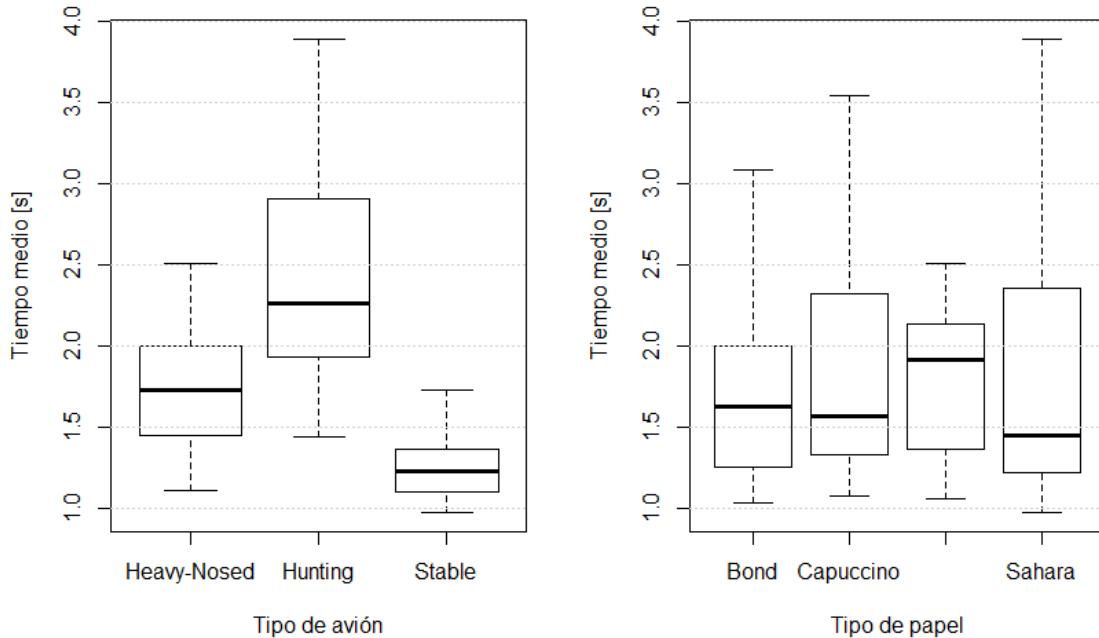


Se puede observar que las medias de los diferentes niveles del factor Tipo de Papel se encuentran menos dispersas que las medias de los niveles de Tipo de Avión. En particular, se puede ver que las medias del factor Tipo de Avión, poseen valores más alejados de la media global que Tipo

de Papel, esto puede indicar que el Tipo de Avión posee un mayor efecto que Tipo de Papel en el modelo planteado.

4.2. Tiempos de vuelo por tipo de papel y de diseño

Boxplots para el tiempo de vuelo según los niveles de cada factor

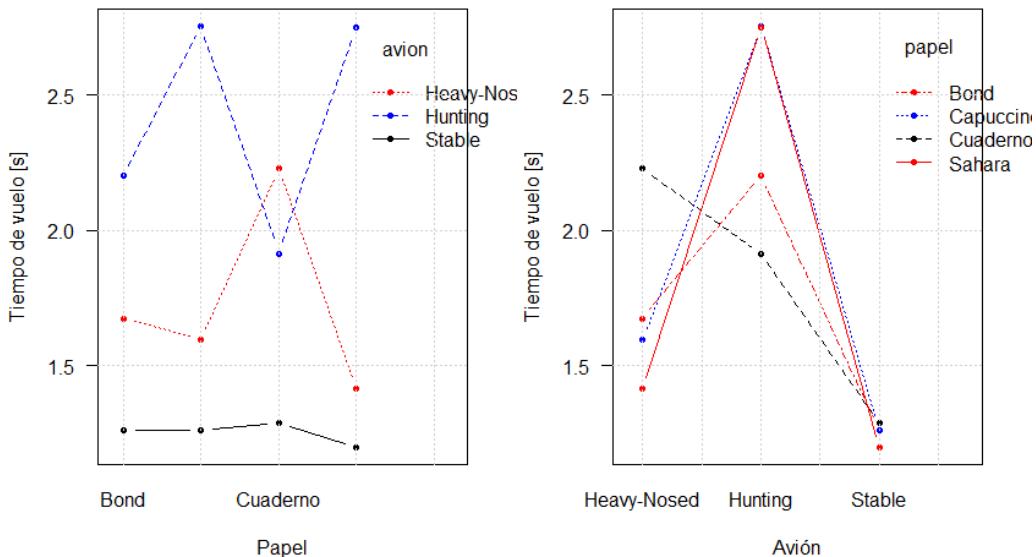


El principal objetivo de un gráfico de cajas y bigotes es observar el comportamiento de la varianza dentro de los niveles de cada factor. En este caso, se aprecia para el factor tipo de avión, que Stable posee la menor varianza y su media de tiempo de vuelo se encuentra por debajo de las demás cajas en comparación con los demás tipos. Para el tipo de papel, se observa un comportamiento similar para todos los tipos de papel.

4.3. Interacción entre factores

En este caso se observa que las rectas para los tres tipos de avión no son paralelas, esto refleja una posible interacción entre los 3 tipos de avión y el tipo de papel. Este efecto nos da la idea que tal vez la relación del tipo de papel y el tiempo de vuelo depende del tipo de avión.

Gráficos de interacción para cada factor



5. Modelo:

Sea Y_{ijk} el tiempo de vuelo de un avión de papel en segundos, μ la media global, τ_i el efecto asociado al diseño empleado en el avión con el i -ésimo diseño, β_j el efecto relacionado con el tipo de papel con el que se construye el avión con el j -ésimo material, durante la k -ésima réplica, $(\tau\beta)_{ij}$ la interacción entre estos dos factores y ε_{ijk} el error aleatorio.

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{ijk} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, 3 \\ j &= 1, 2, 3, 4 \\ k &= 1, \dots, 8 \end{aligned}$$

Tabla Anova:

	g.l.	SS	MS	F	V_p
Papel	3	0.312	0.104	0.772	0.513
Avión	2	21.501	10.750	79.848	2 e -16
Interac.	6	6.866	1.144	8.499	3.24 e-07
Error	84	11.309	0.135		

5.1. Normalidad

Usando un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$.

H_0 : Los errores siguen una distribución normal.

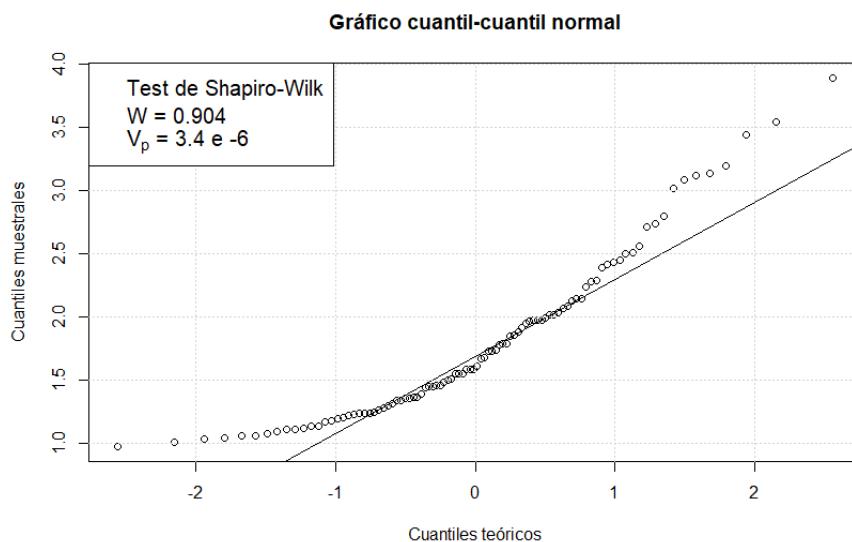
H_1 : Los errores **no** sigue una distribución normal.

Los resultados obtenidos con el programa estadístico R, fueron los siguientes:

- Test de Shapiro-Wilk. $V_p = 3.423 \times 10^{-6}$.
- Test de Anderson-Darling. $V_p = 3.423 \times 10^{-6}$.
- Test de Lilliefors. $V_p = 9.066 \times 10^{-4}$.

Conclusión: No hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores siguen una distribución normal, con un nivel de significancia del 5 %.

QQ-plot



Se puede notar que los residuales no caen exactamente a lo largo de la recta de referencia, lo anterior nos da la idea de que los residuales No se distribuyen normal. Lo cual se comprobó con la prueba de Shapiro Wilk.

5.2. Homocedasticidad

Se va a realizar el **test de Bartlett** en dos ocasiones, uno según cada factor, para probar homocedasticidad en los errores del modelo uno.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \\ H_1 : \exists (i, j) : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \end{cases}$$

Los resultados obtenidos con el programa estadístico R, fueron los siguientes:

- Según el tipo de avión. $V_p = 1.107 \times 10^{-9}$.
- Según el tipo de papel. $V_p = 0.025$.

Conclusión: No hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores poseen varianza constante, con un nivel de significancia del 5 %.

5.3. Independencia

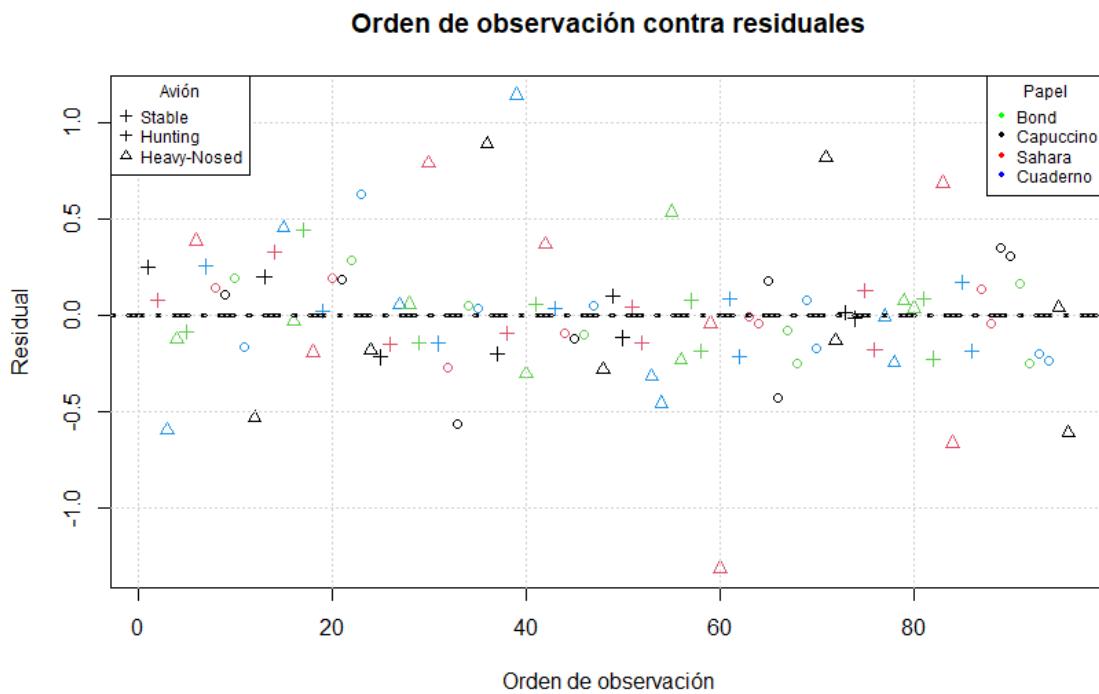
Se va a apelar al **test de Durbin-Watson** para probar la independencia de los errores del modelo.

$$\begin{cases} H_0 : \text{Los errores son independientes.} \\ H_1 : \text{Los errores \textbf{no} son independientes.} \end{cases}$$

Los resultados obtenidos con el programa estadístico R, fueron los siguientes:

- $V_p = 0.420$

Conclusión: Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores son independientes, con un nivel de significancia del 5 %.



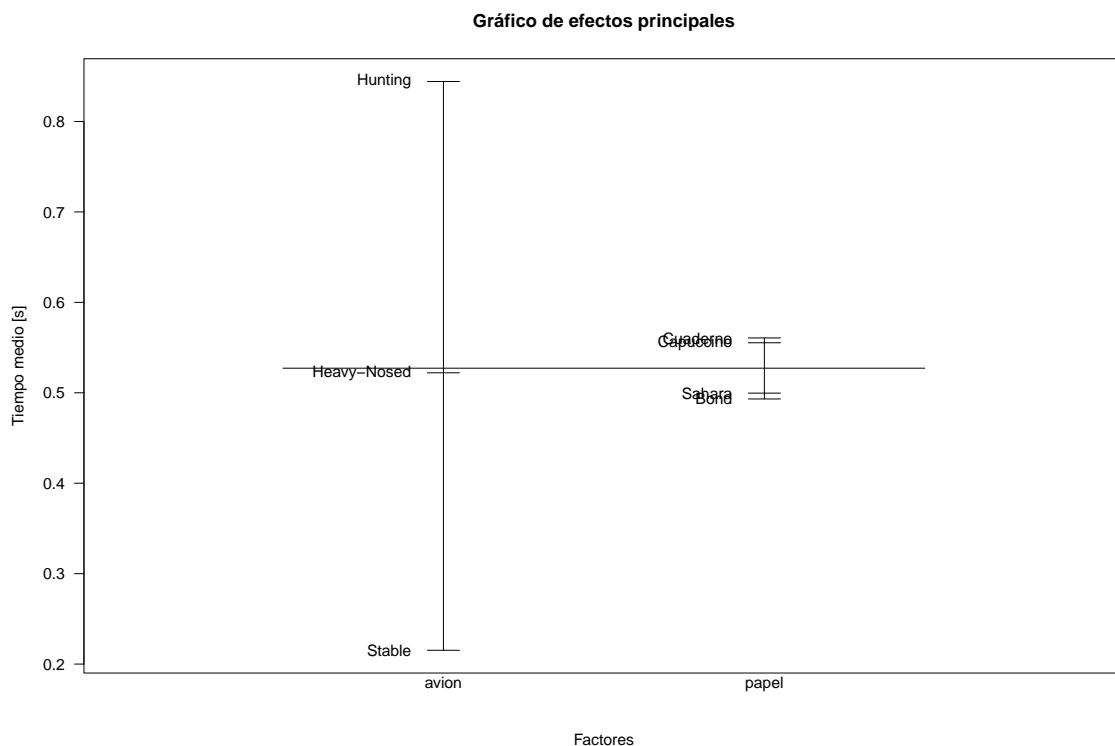
Los residuales no presentan tendencia en el gráfico, lo que nos da idea de independencia entre los residuales y el orden en el que se tomaron los datos. Confirmando el resultado obtenido en el test anterior.

6. Modelo 2

Se puede observar que no se cumplieron varios supuestos, entre ellos el de homocedasticidad. Así, vale la pena considerar un modelo que transforme la respuesta usando logaritmos. De manera que se llega al siguiente nuevo modelo:

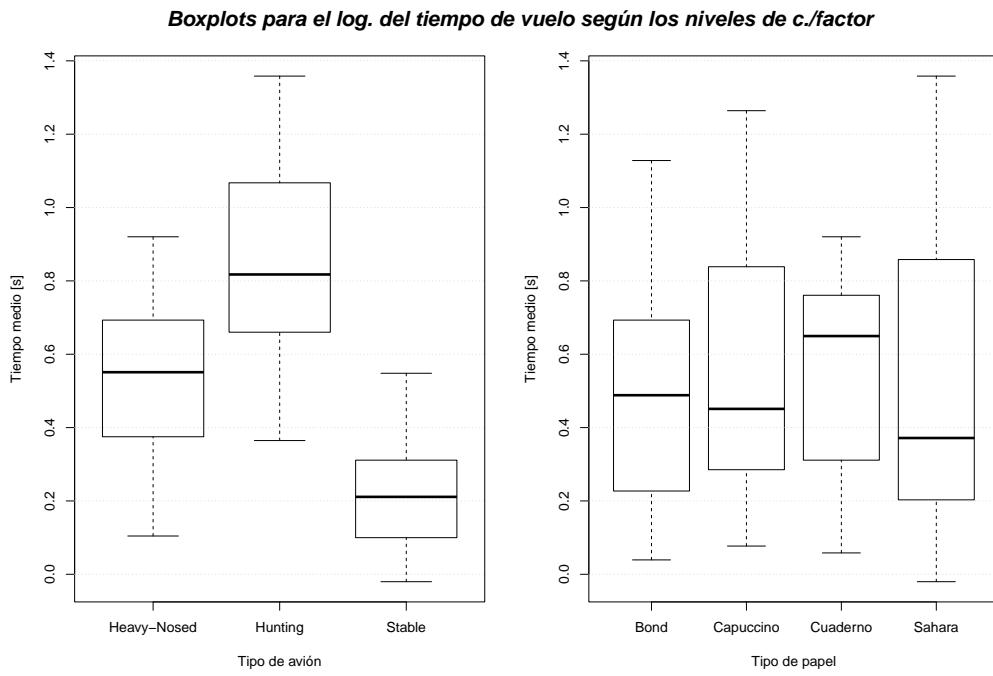
$$\log Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{ijk} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, 3 \\ j &= 1, 2, 3, 4 \\ k &= 1, \dots, 8 \end{aligned}$$

6.1. Efectos principales



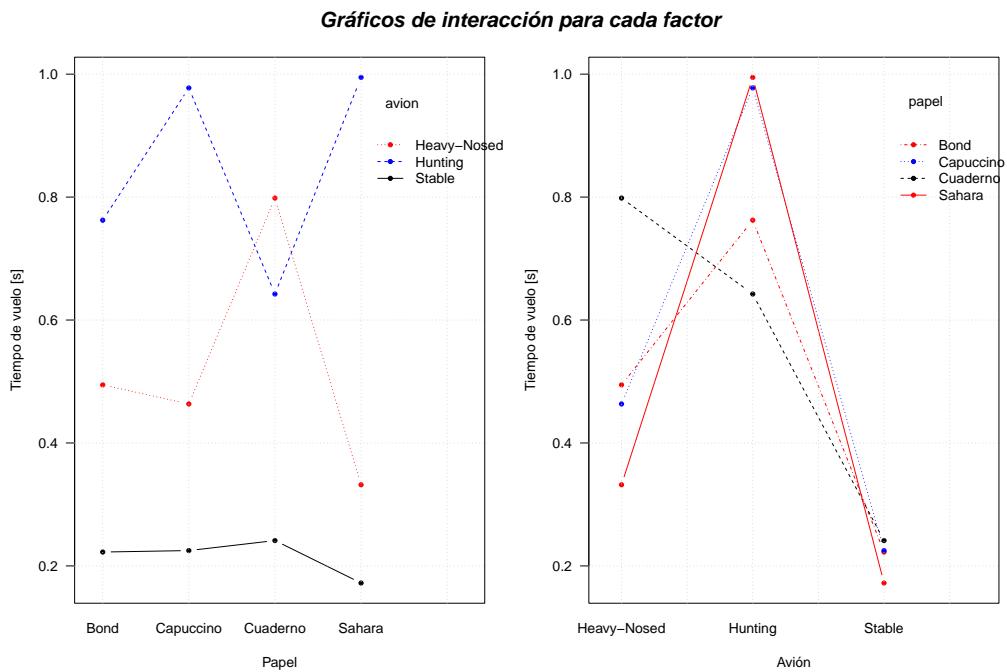
Para los datos transformados, se observa un comportamiento similar al de los datos no trasformados. El tipo de avión parece tener un mayor efecto en el tiempo de vuelo en comparación al tipo de papel.

6.2. Tiempos de vuelo por tipo de papel y de diseño



De igual manera, del gráfico de cajas y bigotes para los datos transformados, se puede concluir lo mismo que para el modelo piloto.

6.3. Interacción entre factores



De igual manera, del gráfico de interacción para los datos transformados, se puede concluir lo mismo que para el modelo piloto.

6.4. Tabla Anova

	g.l.	SS	MS	F	V_p
Papel	3	0.092	0.031	0.944	0.423
Avión	2	6.331	3.166	97.638	<2e-16
Interac.	6	1.566	0.261	8.049	7.09e-07
Error	84	2.723	0.032		

Para la **validación de los supuestos** del modelo se usarán las mismas hipótesis presentadas anteriormente, al mismo nivel de significancia del 5 %.

6.5. Normalidad

Los resultados obtenidos con el programa estadístico R, fueron los siguientes:

- Test de Shapiro-Wilk. $V_p = 0.01049$.
- Test de Anderson-Darling. $V_p = 0.02509$.
- Test de Lilliefors. $V_p = 0.1342$.

Conclusión: Con una significancia del 5 %, los test de Shapiro-Wilk y Anderson-Darling descartan la hipótesis nula de la prueba, la cual indica que los errores del modelo se distribuyen de manera normal. Por otro lado, con el test Lilliefors se concluye que los residuales del modelo se distribuyen de manera normal.

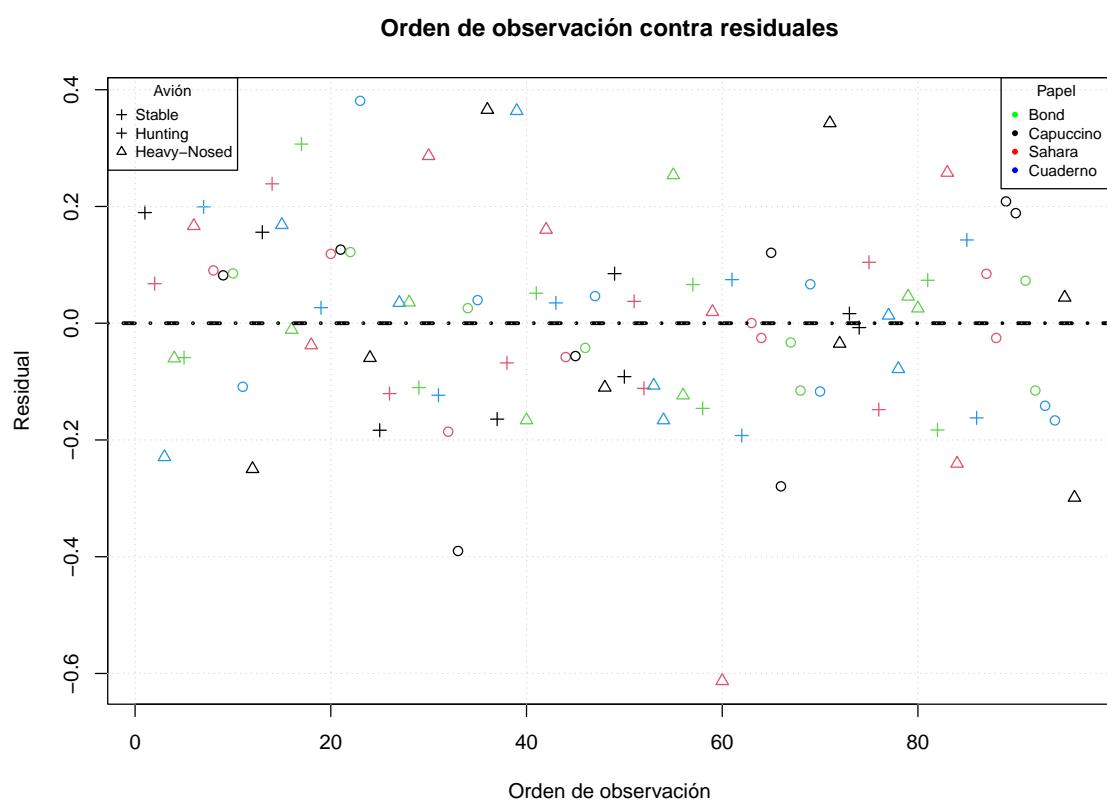
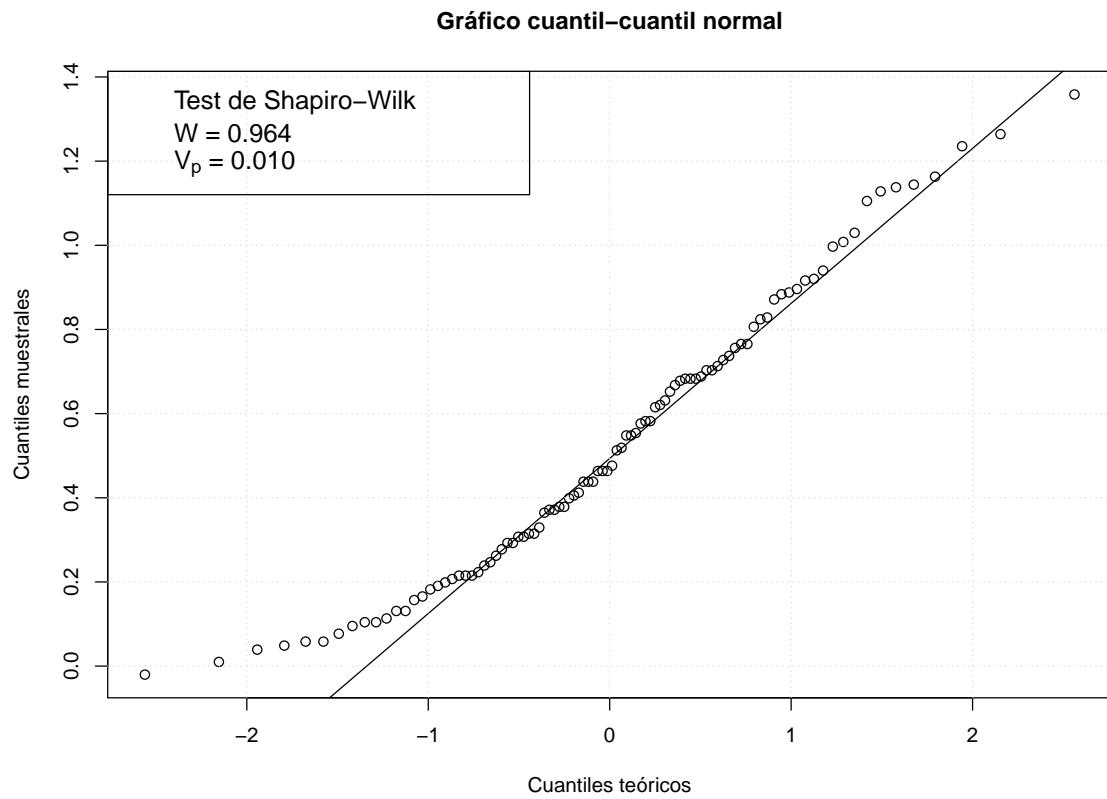
Se puede notar que los residuales no caen exactamente a lo largo de la recta de referencia, lo anterior nos da la idea de que los residuales No se distribuyen normal. Lo cual se comprobó con la prueba de Shapiro Wilk.

6.6. Homocedasticidad

Los resultados obtenidos con el programa estadístico R, fueron los siguientes:

- Según el tipo de avión. $V_p = 0.002956$.
- Según el tipo de papel. $V_p = 0.2144$.

Conclusión: Con una confianza del 95 %. Para el modelo planteado, se concluye que los errores según el tipo de avión no poseen una varianza constante. Por otra parte, para los residuales según el tipo de papel, se concluye que si poseen varianza constante.



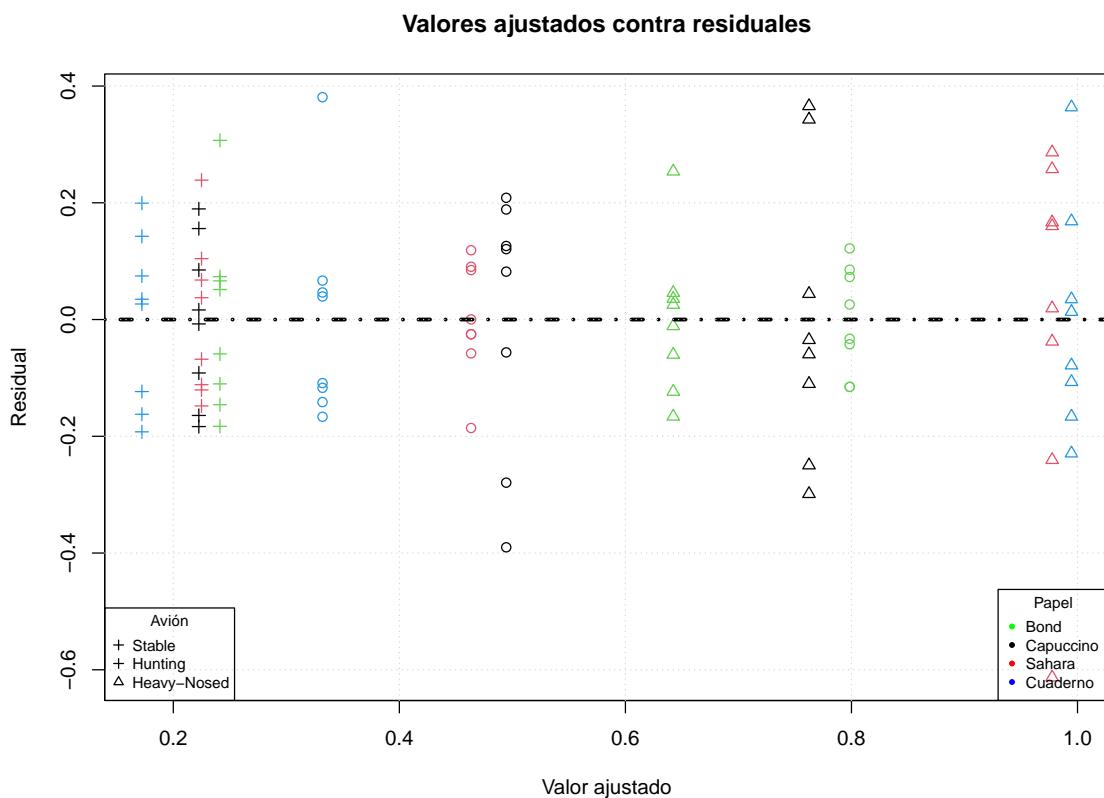
6.7. Independencia

Los resultados obtenidos con el programa estadístico R, fueron los siguientes:

- $V_p = 0.556$

Conclusión: Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores son independientes, con un nivel de significancia del 5 %.

Los residuales no presentan tendencia en el gráfico, lo que nos da idea de independencia entre los errores y el orden en el que se tomaron los datos. Confirmando el resultado obtenido en el test anterior.



El objetivo principal de este gráfico es observar si existen patrones los cuales indiquen que existe una varianza constante o no. En este caso y a primera vista, no se tienen indicios de heterogeneidad de varianza.

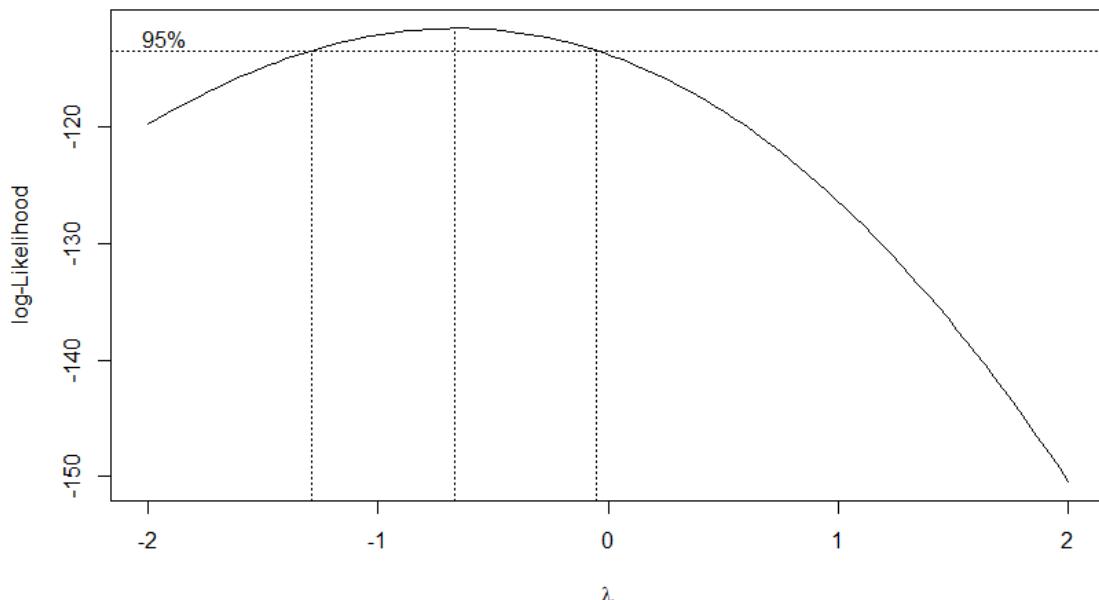
7. Modelo 3

Se puede observar que no se cumplieron varios supuestos a pesar de la transformación logarítmica. Así, vale la pena considerar un modelo que transforme la respuesta usando la transformación de Box Cox De manera que se llega al siguiente nuevo modelo:

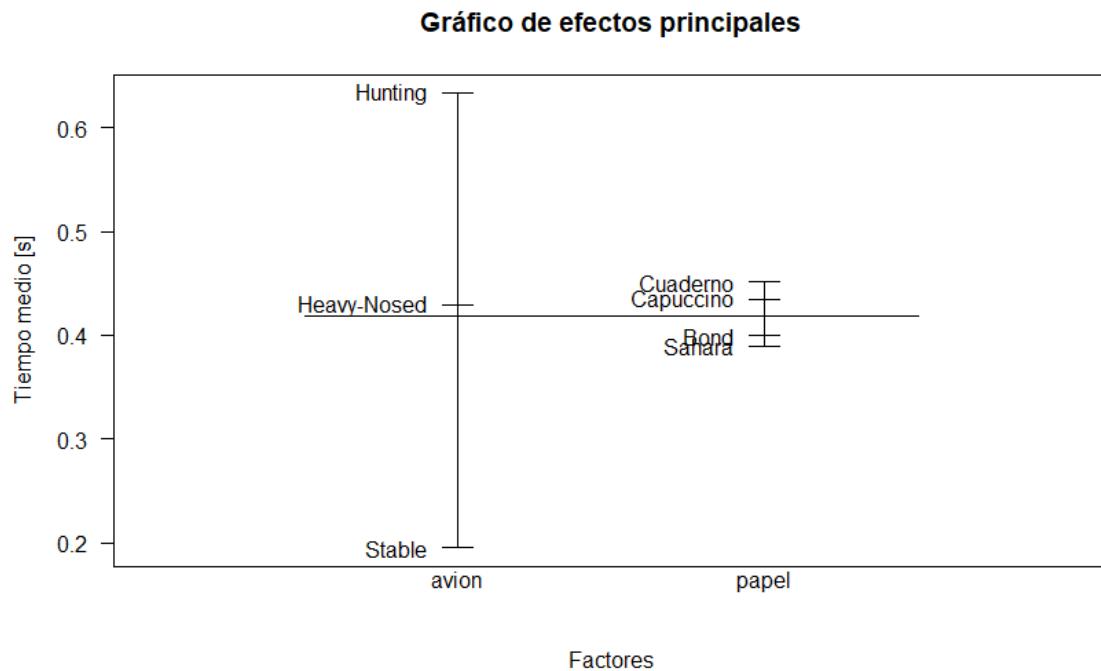
$$\lambda^{-1}(Y_{ijk}^\lambda - 1) = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{ijk} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, 3 \\ j &= 1, 2, 3, 4 \\ k &= 1, \dots, 8 \end{aligned}$$

Con ayuda de R se encuentra que el valor óptimo de λ es $\lambda = -2/6$



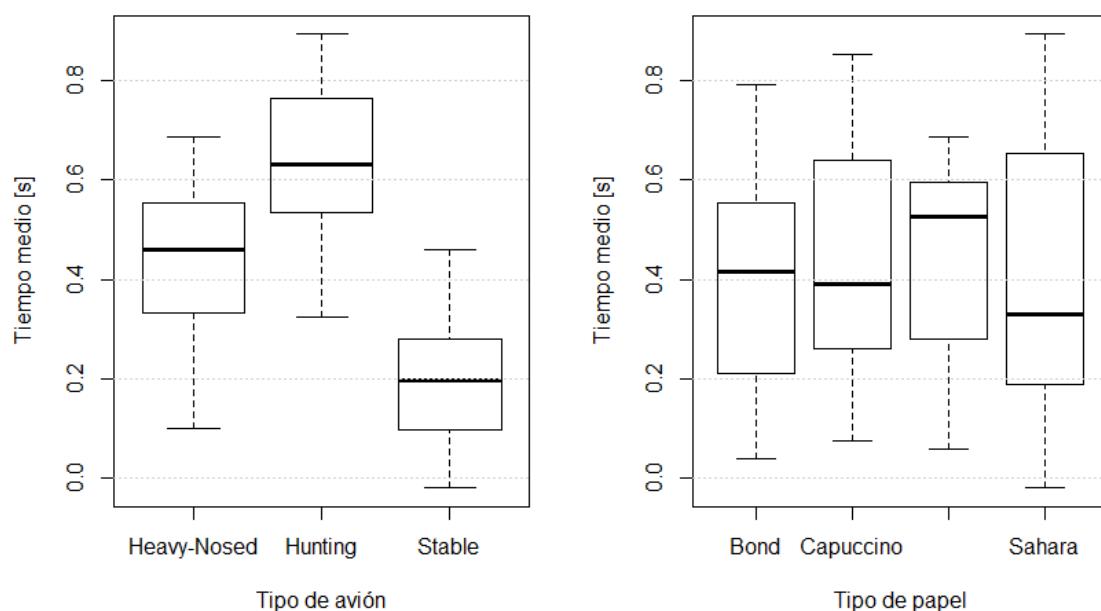
7.1. Efectos principales



Para los datos transformados, se observa un comportamiento similar al de los datos no trasformados. El tipo de avión parece tener un mayor efecto en el tiempo de vuelo en comparación al tipo de papel.

7.2. Tiempos de vuelo por tipo de papel y de diseño

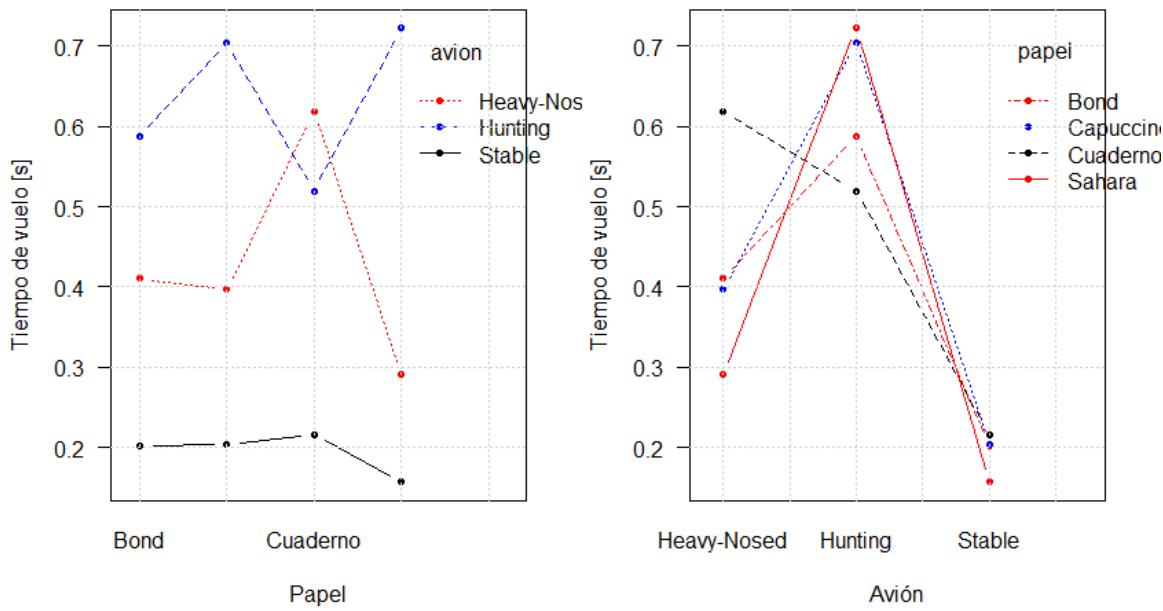
Boxplots para el tiempo transformado de vuelo según los niveles de c./factor



De igual manera, del gráfico de cajas y bigotes para los datos transformados, se puede concluir lo mismo que para el modelo piloto.

7.3. Interacción entre factores

Gráficos de interacción para cada factor



De igual manera, del gráfico de interacción para los datos transformados, se puede concluir lo mismo que para el modelo piloto.

7.4. Tabla Anova

	g.l.	SS	MS	F	V_p
Papel	3	0.060	0.020	1.295	0.281
Avión	2	3.073	1.536	799.274	2 e -16
Interac.	6	0.628	0.105	6.761	7.17 e-6
Error	84	11.309	0.135		

Para la **validación de los supuestos** del modelo se usarán las mismas hipótesis presentadas anteriormente, al mismo nivel de significancia del 5 %.

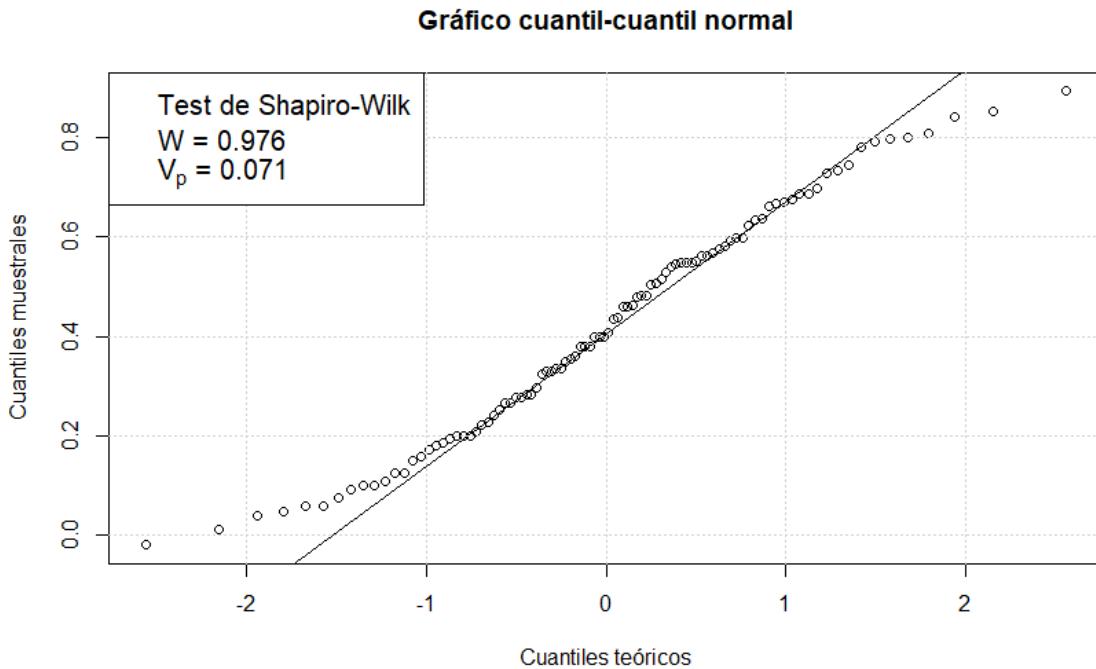
7.5. Normalidad

Los resultados obtenidos con el programa estadístico R, fueron los siguientes:

- Test de Shapiro-Wilk. $V_p = 0.071$.
- Test de Anderson-Darling. $V_p = 0.138$.

- Test de Lilliefors. $V_p = 0.422$.

Conclusión: Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores siguen una distribución normal, con un nivel de significancia del 5 %.



Se puede notar que los residuales cerca de las colas no caen exactamente a lo largo de la recta de referencia, pero en su mayoría los residuales se ajustan a dicha recta. Lo anterior nos da la idea de que los residuales se distribuyen normal, lo cual se comprobó con la prueba de Shapiro Wilk.

7.6. Homocedasticidad

Los resultados obtenidos con el programa estadístico R, fueron los siguientes:

- Según el tipo de avión. $V_p = 0.216$.
- Según el tipo de papel. $V_p = 0.421$.

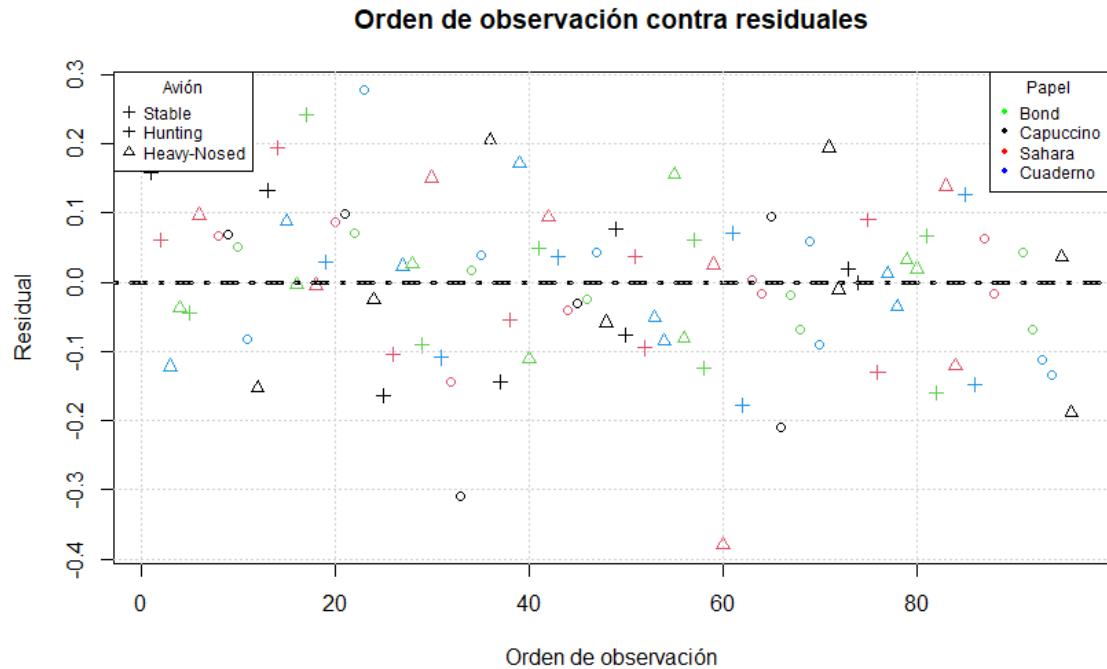
Conclusión: Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores poseen varianza constante, con un nivel de significancia del 5 %.

7.7. Independencia

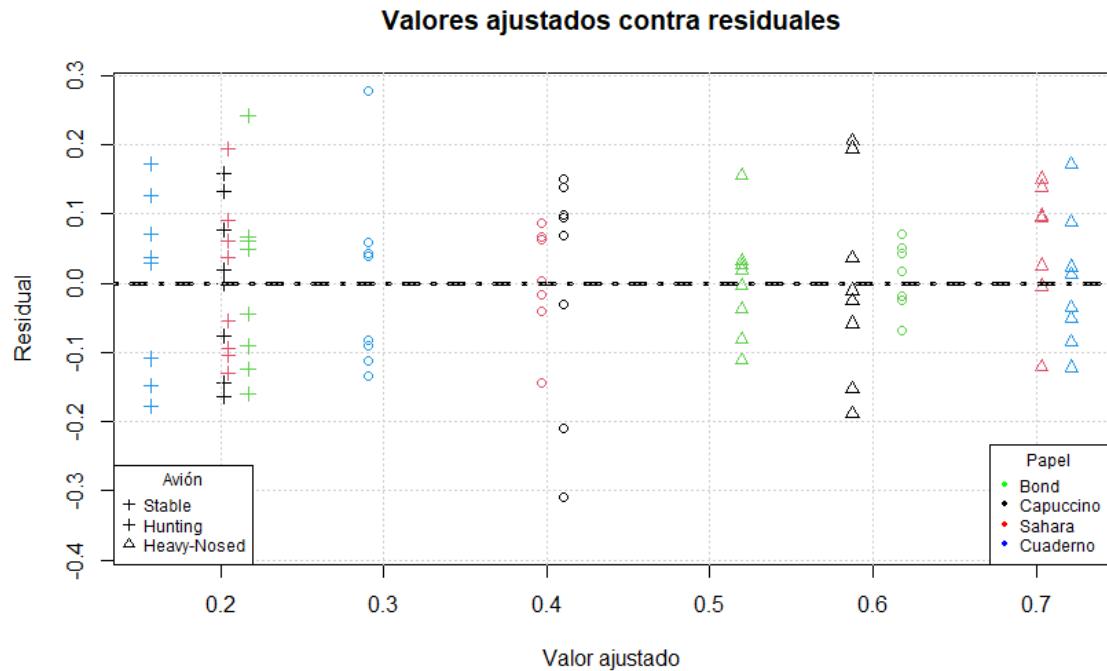
Los resultados obtenidos con el programa estadístico R, fueron los siguientes:

- $V_p = 0.682$

Conclusión: Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores son independientes, con un nivel de significancia del 5 %.



Los residuales no presentan tendencia en el gráfico, lo que nos da idea de independencia entre los residuales y el orden en el que se tomaron los datos. Confirmando el resultado obtenido en el test anterior.



Como en el caso anterior, para el modelo 3, empleando transformación Box Cox, no se aprecian patrones extraño que indiquen heterogeneidad de los residuales.

8. Comparación de medias

Todos los test de comparación de medias tienen las siguientes hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \forall (i, j) : \mu_i = \mu_j \\ H_1 : \exists (i, j) : \mu_i \neq \mu_j \end{cases}$$

Como existe interacción entre los factores estamos interesados en conocer cual es la combinación de forma del material y forma del avión que le brinda un mayor tiempo de vuelo al avión.

8.1. Test Duncan.

Tratamiento	tiempo	grupos
Hunting-Capuccino	2.75500	a
Hunting-Sahara	2.75000	a
Heavy-Nosed-Cuaderno	2.23000	b
Hunting-Bond	2.20250	b
Hunting-Cuaderno	1.91500	bc
Heavy-Nosed-Bond	1.67375	cd
Heavy-Nosed-Capuccino	1.59625	cde
Heavy-Nosed-Sahara	1.41500	de
Stable-Cuaderno	1.28750	de
Stable-Capuccino	1.26250	e
Stable-Bond	1.26000	e
Stable-Sahara	1.19875	e

8.2. Mínima diferencia significativa (LDS)

Tratamiento	Tiempo medio [s]	grupos
Hunting-Capuccino	2.75500	a
Hunting-Sahara	2.75000	a
Heavy-Nosed-Cuaderno	2.23000	b
Hunting-Bond	2.20250	b
Hunting-Cuaderno	1.91500	bc
Heavy-Nosed-Bond	1.67375	cd
Heavy-Nosed-Capuccino	1.59625	cde
Heavy-Nosed-Sahara	1.41500	def
Stable-Cuaderno	1.28750	ef
Stable-Capuccino	1.26250	ef
Stable-Bond	1.26000	ef
Stable-Sahara	1.19875	f

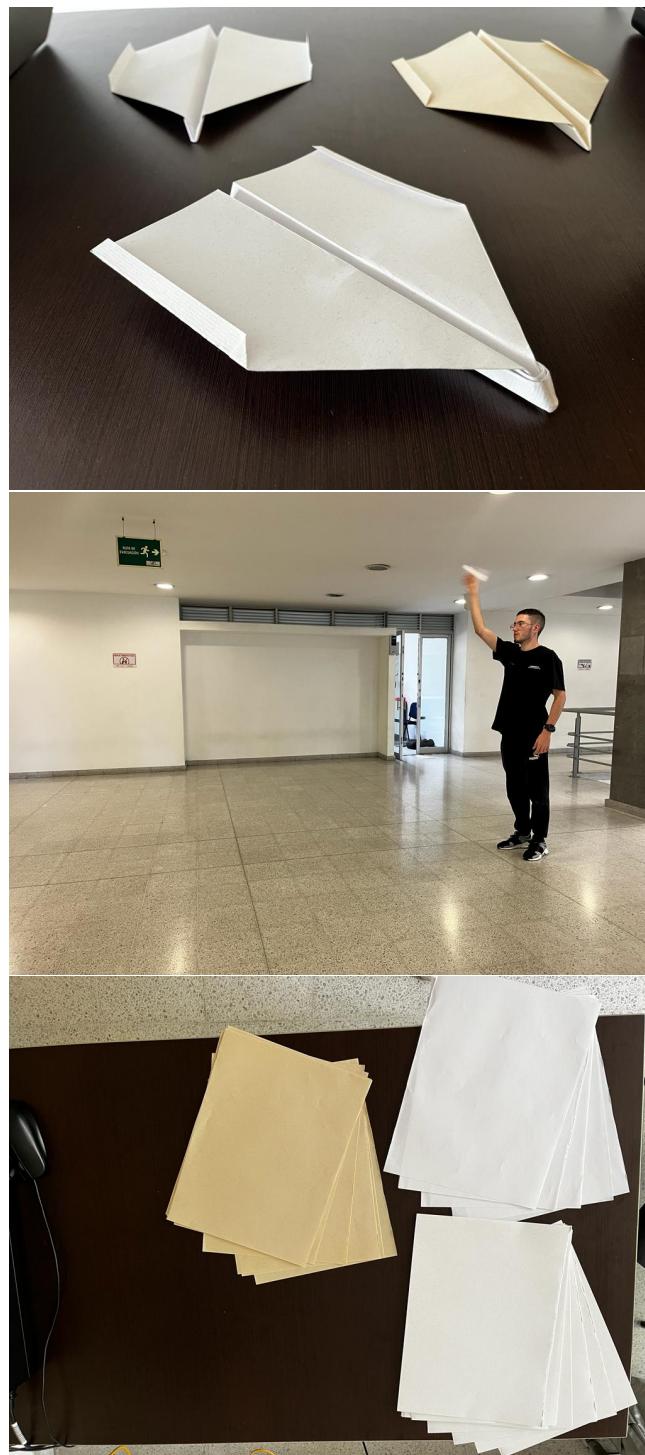
9. Conclusiones

- Emplear un diseño factorial resulta útil para considerar la interacción entre dos factores que intervengan en la variable respuesta. En este caso, era de importancia tener en cuenta

la interacción entre el tipo de papel y el diseño del avión para estudiar el tiempo de vuelo. En general, resultó útil a partir de los resultados de los tres modelos y del test LDS realizado.

- Las transformaciones resultan útiles para poder considerar modelos paramétricos como los considerados en este trabajo cuando los datos crudos no cumplen los supuestos por sí mismos.
- Hay evidencia muestral para sugerir que los aviones que tienen el diseño *hunting* tienen tiempos de vuelo en promedio mayores a otros diseños (particularmente sobre el *stable*) sin importar el tipo de papel empleado.

10. Evidencia Fotográfica



11. Programa en R

```
# Borrado de datos anteriores =====  
rm( list = ls())
```

```

# Lectura de librer as tiles =====

library(magrittr)
library(dplyr)
library(car)
library(agricolae)
library(MASS)
library(nortest)

# Lectura de los datos =====

datos <- read.csv('./Datos/tiempos_piloto.csv')
datos %>% str()
datos$papel %>% as.factor()
datos$avion %>% as.factor()
datos %>% str()
datos %>% head()
datos %>% tail()
datos %>% arrange(orden)

# 1. Modelo uno. Datos crudos =====

## 1.1. Gr fico de efectos =====

plot.design(tiempo ~ avion * papel, data = datos,
            main = 'Gr fico de efectos principales', las = 1,
            xlab = 'Factores',
            ylab = 'Tiempo medio [s]')

## 1.2. Gr ficos de cajas y bigotes =====

par(mfrow = c(1, 2))
boxplot(tiempo ~ avion, data = datos,
        xlab = 'Tipo de avi n',
        ylab = 'Tiempo medio [s]',
        col = 'white')
grid(nx = NA, ny = NULL)
boxplot(tiempo ~ papel, data = datos,
        xlab = 'Tipo de papel',
        ylab = 'Tiempo medio [s]',
        col = 'white')
grid(nx = NA, ny = NULL)
mtext("Boxplots para el tiempo de vuelo seg n los niveles de cada factor",
      side = 3, line = -2.5, outer = TRUE, cex = 1.5, font = 4)

## 1.3. Gr ficos de interacci n =====

par(mfrow = c(1, 2))
with(datos,

```

```

interaction.plot(papel, avion, tiempo,
                  type = 'b', pch = 20, fixed = TRUE,
                  xlab = 'Papel',
                  ylab = 'Tiempo de vuelo [s]',
                  las = 1, col = c('red', 'blue', 'black')))
grid()

with(datos,
      interaction.plot(avion, papel, tiempo,
                        type = 'b', pch = 20, fixed = TRUE,
                        xlab = 'Avión',
                        ylab = 'Tiempo de vuelo [s]',
                        las = 1, col = c('red', 'blue', 'black')))
grid()
mtext("Gráficos de interacción para cada factor",
      side = 3, line = -2.5, outer = TRUE, cex = 1.5, font = 4)

## 1.4. Tabla Anova =====

modelo <- aov(tiempo ~ papel * avion, data = datos)
modelo %>% summary()

## 1.5. Validación de supuestos =====

#### 1.5.1. Normalidad =====

##### Test paramétrico =====

# Test KS
datos$tiempo %>% shapiro.test() # Rechazo

# Test AD
datos$tiempo %>% ad.test() # Rechazo

# Test Lilliefors
datos$tiempo %>% lillie.test() # Rechazo

##### Gráfico cuantil cuantil =====

#Leyenda
leyenda <- c('Test de Shapiro-Wilk',
            expression(paste('W', ' = ', '0.904')),
            expression(paste('V'[p], ' = ', '3.4 e -6')))

# Gráfico cuantil-cuantil
par(mfrow = c(1, 1))
datos$tiempo %>% qqnorm(xlab = 'Cuantiles teóricos',
                           ylab = 'Cuantiles muestrales',
                           main = 'Gráfico cuantil-cuantil normal')
datos$tiempo %>% qqline()

```

```

grid()
legend('topleft', leyenda, cex = 1.25)

#### 1.5.2. Homocedasticidad =====

bartlett.test(tiempo ~ avion, data = datos)      # Rechazo
bartlett.test(tiempo ~ papel, data = datos)       # Rechazo

#### 1.5.3. Independencia y media nula =====

durbinWatsonTest(modelo)                         # Rechazo

plot(y = modelo$residuals, x = 1:nrow(datos),
      main = 'Orden de observaci n contra residuales',
      xlab = 'Orden de observaci n',
      ylab = 'Residual',
      pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor()),
      col = as.factor(datos$papel))
abline(a = 0, b = 0, col = 'black', lty = 4, lwd = 3)
grid()
legend('topright',
       legend = c('Bond', 'Capuccino', 'Sahara', 'Cuaderno'),
       pch = rep(20, 4),
       col = c('green', 'black', 'red', 'blue'),
       title = 'Papel', cex = 0.75)
legend('topleft',
       legend = c('Stable', 'Hunting', 'Heavy-Nosed'),
       pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor()),
       title = 'Avi n', cex = 0.75)

plot(x = modelo$fitted.values, y = modelo$residuals,
      main = 'Valores ajustados contra residuales',
      xlab = 'Valor ajustado',
      ylab = 'Residual',
      pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor()),
      col = as.factor(datos$papel),
      bg = as.factor(datos$Marca))
abline(a = 0, b = 0, col = 'black', lty = 4, lwd = 3)
grid()
legend('bottomright',
       legend = c('Bond', 'Capuccino', 'Sahara', 'Cuaderno'),
       pch = rep(20, 4),
       col = c('green', 'black', 'red', 'blue'),
       title = 'Papel', cex = 0.75)
legend('bottomleft',
       legend = c('Stable', 'Hunting', 'Heavy-Nosed'),
       pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor()),
       title = 'Avi n', cex = 0.75)

# /////////////////////////////////

```

```

# 2. Modelo dos. Logaritmo =====

datos$log_t <- datos$tiempo %>% log()

## 2.1. Gráfico de efectos =====

plot.design(log_t ~ avion * papel, data = datos,
            main = 'Gráfico de efectos principales', las = 1,
            xlab = 'Factores',
            ylab = 'Tiempo medio [s]')

## 2.2. Gráficos de cajas y bigotes =====

par(mfrow = c(1, 2))
boxplot(log_t ~ avion, data = datos,
        xlab = 'Tipo de avión',
        ylab = 'Tiempo medio [s]',
        col = 'white')
grid(nx = NA, ny = NULL)
boxplot(log_t ~ papel, data = datos,
        xlab = 'Tipo de papel',
        ylab = 'Tiempo medio [s]',
        col = 'white')
grid(nx = NA, ny = NULL)

mtext("Boxplots para el log. del tiempo de vuelo seg n los niveles de c./factor",
      side = 3, line = -2.5, outer = TRUE, cex = 1.5, font = 4)

## 2.3. Gráficos de interacción =====

par(mfrow = c(1, 2))
with(datos,
     interaction.plot(papel, avion, log_t,
                       type = 'b', pch = 20, fixed = TRUE,
                       xlab = 'Papel',
                       ylab = 'Tiempo de vuelo [s]',
                       las = 1, col = c('red', 'blue', 'black')))
grid()

with(datos,
     interaction.plot(avion, papel, log_t,
                       type = 'b', pch = 20, fixed = TRUE,
                       xlab = 'Avión',
                       ylab = 'Tiempo de vuelo [s]',
                       las = 1, col = c('red', 'blue', 'black')))
grid()

mtext("Gráficos de interacción para cada factor",
      side = 3, line = -2.5, outer = TRUE, cex = 1.5, font = 4)

```

```

## 2.4. Tabla Anova =====

modelo2 <- aov(log_t ~ papel * avion, data = datos)
modelo2 %>% summary()

## 2.5. Validaci n de supuestos =====

#### 2.5.1. Normalidad =====

##### Test param trico ===

# Test KS
datos$log_t %>% shapiro.test() # Rechazo

# Test AD
datos$log_t %>% ad.test() # Rechazo

# Test Lilliefors
datos$log_t %>% lillie.test() # No rechazo

##### Gr fico cuantil cuantil ===

#Leyenda
leyenda2 <- c('Test de Shapiro-Wilk',
             expression(paste('W', ' = ', '0.964'))),
             expression(paste('V'[p], ' = ', '0.010')))

# Gr fico cuantil-cuantil
par(mfrow = c(1, 1))
datos$log_t %>% qqnorm(xlab = 'Cuantiles te ricos',
                         ylab = 'Cuantiles muestrales',
                         main = 'Gr fico cuantil-cuantil normal')
datos$log_t %>% qqline()
grid()
legend('topleft', leyenda2, cex = 1.25)

#### 2.5.2. Homocedasticidad =====

bartlett.test(log_t ~ avion, data = datos) # Rechazo
bartlett.test(log_t ~ papel, data = datos) # No rechazo

#### 2.5.3. Independencia y media nula ===

durbinWatsonTest(modelo2) # No rechazo

plot(y = modelo2$residuals, x = 1:nrow(datos),
      main = 'Orden de observaci n contra residuales',
      xlab = 'Orden de observaci n',
      ylab = 'Residual',

```

```

  pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor()) ,
  col = as.factor(datos$papel))
abline(a = 0, b = 0, col = 'black', lty = 4, lwd = 3)
grid()
legend('topright',
       legend = c('Bond', 'Capuccino', 'Sahara', 'Cuaderno'),
       pch = rep(20, 4),
       col = c('green', 'black', 'red', 'blue'),
       title = 'Papel', cex = 0.75)
legend('topleft',
       legend = c('Stable', 'Hunting', 'Heavy-Nosed'),
       pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor())),
       title = 'Avi n', cex = 0.75)

plot(x = modelo2$fitted.values, y = modelo2$residuals,
      main = 'Valores ajustados contra residuales',
      xlab = 'Valor ajustado',
      ylab = 'Residual',
      pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor()),
      col = as.factor(datos$papel),
      bg = as.factor(datos$Marca))
abline(a = 0, b = 0, col = 'black', lty = 4, lwd = 3)
grid()
legend('bottomright',
       legend = c('Bond', 'Capuccino', 'Sahara', 'Cuaderno'),
       pch = rep(20, 4),
       col = c('green', 'black', 'red', 'blue'),
       title = 'Papel', cex = 0.75)
legend('bottomleft',
       legend = c('Stable', 'Hunting', 'Heavy-Nosed'),
       pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor())),
       title = 'Avi n', cex = 0.75)

# ///////////////////////////////////////////////////////////////////
# 3. Modelo tres. Box - Cox =====

boxcox <- lm(tiempo ~ 1, data = datos) %% boxcox()

lambda <- boxcox$x[which.max(boxcox$y)]
lambda

datos$t_bc <- (datos$tiempo ^ lambda - 1) / lambda

## 3.1. Gr fico de efectos =====

plot.design(t_bc ~ avion * papel, data = datos,
            main = 'Gr fico de efectos principales', las = 1,
            xlab = 'Factores',
            ylab = 'Tiempo medio [ s ]')

```

```

## 3.2. Gráficos de cajas y bigotes =====

par(mfrow = c(1, 2))
boxplot(t_bc ~ avion, data = datos,
        xlab = 'Tipo de avión',
        ylab = 'Tiempo medio [s]',
        col = 'white')
grid(nx = NA, ny = NULL)
boxplot(t_bc ~ papel, data = datos,
        xlab = 'Tipo de papel',
        ylab = 'Tiempo medio [s]',
        col = 'white')
grid(nx = NA, ny = NULL)
mtext("Boxplots para el tiempo transformado de vuelo seg n los
      niveles de c./ factor",
      side = 3, line = -3, outer = TRUE, cex = 1.5, font = 4)

## 2.3. Gráficos de interacción =====

par(mfrow = c(1, 2))
with(datos,
      interaction.plot(papel, avion, t_bc,
                        type = 'b', pch = 20, fixed = TRUE,
                        xlab = 'Papel',
                        ylab = 'Tiempo de vuelo [s]',
                        las = 1, col = c('red', 'blue', 'black')))
grid()

with(datos,
      interaction.plot(avion, papel, t_bc,
                        type = 'b', pch = 20, fixed = TRUE,
                        xlab = 'Avión',
                        ylab = 'Tiempo de vuelo [s]',
                        las = 1, col = c('red', 'blue', 'black')))
grid()
mtext("Gráficos de interacción para cada factor",
      side = 3, line = -2.5, outer = TRUE, cex = 1.5, font = 4)

## 3.4. Tabla Anova =====

modelo3 <- aov(t_bc ~ papel * avion, data = datos)
modelo3 %>% summary()

## 3.5. Validación de supuestos =====

#### 3.5.1. Normalidad =====

##### Test paramétrico ===

```

```

# Test KS
datos$t_bc %>% shapiro.test() # No rechazo

# Test AD
datos$t_bc %>% ad.test() # No rechazo

# Test Lilliefors
datos$t_bc %>% lillie.test() # No rechazo

##### Gráfico cuantil cuantil ===

#Leyenda
leyenda3 <- c('Test de Shapiro-Wilk',
             expression(paste('W', ' = ', '0.976')),
             expression(paste('V'[p], ' = ', '0.071')))

# Gráfico cuantil-cuantil
par(mfrow = c(1, 1))
datos$t_bc %>% qqnorm(xlab = 'Cuantiles teóricos',
                         ylab = 'Cuantiles muestrales',
                         main = 'Gráfico cuantil-cuantil normal')
datos$t_bc %>% qqline()
grid()
legend('topleft', leyenda3, cex = 1.25)

### 3.5.2. Homocedasticidad ===

bartlett.test(t_bc ~ avion, data = datos) # No rechazo
bartlett.test(t_bc ~ papel, data = datos) # No rechazo

### 3.5.3. Independencia y media nula ===

durbinWatsonTest(modelo3) # No rechazo

plot(y = modelo3$residuals, x = 1:nrow(datos),
      main = 'Orden de observación contra residuales',
      xlab = 'Orden de observación',
      ylab = 'Residual',
      pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor()),
      col = as.factor(datos$papel))
abline(a = 0, b = 0, col = 'black', lty = 4, lwd = 3)
grid()
legend('topright',
       legend = c('Bond', 'Capuccino', 'Sahara', 'Cuaderno'),
       pch = rep(20, 4),
       col = c('green', 'black', 'red', 'blue'),
       title = 'Papel', cex = 0.75)
legend('topleft',
       legend = c('Stable', 'Hunting', 'Heavy-Nosed'),
       pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor())),

```

```

title = 'Avi n', cex = 0.75)

plot(x = modelo3$fitted.values, y = modelo3$residuals,
      main = 'Valores ajustados contra residuales',
      xlab = 'Valor ajustado',
      ylab = 'Residual',
      pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor()),
      col = as.factor(datos$papel),
      bg = as.factor(datos$Marca))
abline(a = 0, b = 0, col = 'black', lty = 4, lwd = 3)
grid()
legend('bottomright',
       legend = c('Bond', 'Capuccino', 'Sahara', 'Cuaderno'),
       pch = rep(20, 4),
       col = c('green', 'black', 'red', 'blue'),
       title = 'Papel', cex = 0.75)
legend('bottomleft',
       legend = c('Stable', 'Hunting', 'Heavy-Nosed'),
       pch = as.numeric(datos$avion %% as.factor()),
       title = 'Avi n', cex = 0.75)

```

3.6. Test de Tuckey =====

```

TukeyHSD(modelo3, which = 'avion')
TukeyHSD(modelo3, which = 'papel')

```

3.7. Test de Duncan =====

```

duncan_avion <- duncan.test(modelo, 'avion')
duncan_papel <- duncan.test(modelo, 'papel')

```

```

duncan_avion
duncan_papel

```

3.8. Test LSD =====

```

lsd_avion <- LSD.test(modelo, 'avion')
lsd_papel <- LSD.test(modelo, 'papel')

```

```

lsd_avion
lsd_papel

```

12. Bibliografía

- [1] "El primer avión de papel voló en 1809." ASPAPEL, 1 May 2002, <http://www.aspapel.es/en/content/el-primer-avion-de-papel-volo-en-1809>. Accessed 23 September 2022.
- [2] Fold N' Fly. "Fold 'N Fly » Paper Airplane Folding Instructions". Fold 'N Fly » Paper Airplane Folding Instructions. <https://www.foldnfly.com//1-1-1-1-1-1-1-2> (accedido el 20 de septiembre de 2022).