

Introducción al modelo GARCH ortogonal

profesora carol alexander

*Centro ISMA, Escuela de Negocios para Mercados Financieros,
universidad de lectura*

Primera Versión: Abril 1999

Esta Versión: Marzo 2001

Palabras clave: *Análisis de componentes principales, matriz de covarianza, modelo factorial ortogonal, Value-at-Risk, heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizada, media móvil ponderada exponencialmente.*

1. Introducción

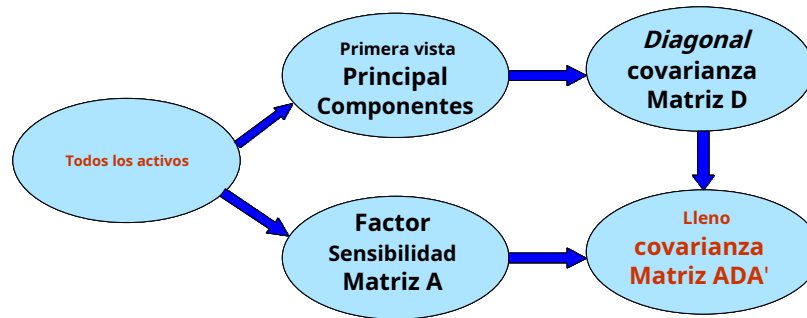
La generación de matrices de covarianza semidefinidas positivas grandes ha presentado un gran desafío para los profesionales de las finanzas durante muchos años. Desde la Enmienda de 1996 al acuerdo de Basilea de 1988, donde se describieron los principios de los modelos internos para el cálculo del capital de riesgo de mercado, ha sido un gran problema generar las matrices de covarianza que son necesarias para calcular el valor en riesgo de toda la empresa. medidas. Las matrices de covarianza grandes también juegan un papel importante en el análisis de inversiones, porque el riesgo de la cartera normalmente está determinado por la matriz de covarianza de todos los activos de la cartera. En carteras muy grandes se puede emplear un modelo de factores de riesgo, pero aún es necesario tener una matriz de covarianza de todos los factores de riesgo de la cartera. La necesidad de matrices de covarianza grandes no se limita solo a la oficina intermedia de un gran banco de inversión. Los comerciantes en la oficina principal también requieren estas matrices para cotizar y cubrir sus carteras de opciones.

El cálculo de una matriz de covarianza definida positiva grande es un problema complejo y, a menudo, en esta matriz de covarianza se utilizan medidas muy simples de volatilidad y correlación. Por ejemplo, las metodologías de RiskMetrics diseñadas por JP Morgan utilizan promedios móviles igualmente ponderados o promedios móviles ponderados exponencialmente con la misma constante de suavizado para todos los rendimientos. Los métodos de RiskMetrics tienen limitaciones, y estas se han descrito en ([enlace al sitio web](#)).

El propósito de este artículo es mostrar cómo se pueden utilizar modelos factoriales ortogonales para simplificar el proceso de producción diaria de estas grandes matrices de covarianza. Su idea central es la factorización ortogonal por análisis de componentes principales de los activos o factores de riesgo que representa la matriz de covarianza. El documento se centra en cómo estos componentes principales se pueden utilizar junto con los métodos estándar de estimación de la volatilidad, como los promedios móviles ponderados exponencialmente (EWMA) o la heteroscedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH), para producir grandes matrices de covarianza semidefinidas positivas.

¹De los tres métodos que son de uso estándar (el método de covarianza para carteras lineales y Monte Carlo y simulación histórica), solo el método de simulación histórica no requiere matriz de covarianza. E incluso con simulación histórica, las matrices de covarianza se utilizan normalmente en pruebas de tensión y análisis de escenarios. Véase Alejandro (2001).

El método es computacionalmente muy simple: toma las volatilidades univariadas de los primeros componentes principales de un sistema de factores de riesgo y la matriz de pesos de los factores de la representación de los componentes principales para producir una matriz de covarianza completa para el sistema original. A continuación se muestra un esquema del método. Aquí la matriz **A** es una matriz de pesos factoriales reescalados y la matriz diagonal **D** es una matriz de volatilidades GARCH o EWMA de los componentes principales.



El método ortogonal para generar matrices de covarianza tiene muchas ventajas:

- La carga computacional es mucho más ligera cuando todas las volatilidades y correlaciones $k(k+1)/2$ son transformaciones de matrices simples de solo 2 o 3 varianzas EWMA o GARCH;
- Las matrices son siempre semidefinidas positivas;
- Se imponen muy pocas restricciones a los movimientos de volatilidad y correlación;²
- Si el método se aplica con EWMA el valor efectivo de λ para una serie de rendimientos viene determinado por su correlación en el sistema. No hay necesidad de imponer el mismo valor de la constante de suavizado en todos los rendimientos, como ocurre en los conjuntos de datos de RiskMetrics.
- Si el método se aplica con GARCH univariante, se pueden generar estructuras de término de estructuras de término de matriz de covarianza que revierten la media. Es decir, no hay necesidad de aplicar la regla de la 'raíz cuadrada del tiempo' y asumir que las volatilidades y las correlaciones son constantes. En su lugar, se aplican las fórmulas analíticas habituales de GARCH para calcular la estructura temporal de la volatilidad y la correlación, de modo que la matriz de covarianza de n días converja al promedio a largo plazo a medida que n aumenta;
- Al usar solo los primeros componentes principales para representar el sistema, las estimaciones de las correlaciones se vuelven más estables y menos influenciadas por la variación que se atribuiría mejor al 'ruido' en los datos.
- Los datos pueden ser difíciles de obtener directamente, particularmente sobre nuevas emisiones o sobre activos financieros que no se negocian mucho. Cuando los datos son escasos o poco fiables sobre algunas de las variables del sistema, puede ser muy difícil realizar una estimación directa de las volatilidades y la correlación. Pero si hay suficiente

²Por ejemplo, no es necesario imponer la restricción de que todas las estimaciones de volatilidad y correlación tengan la misma persistencia ante las perturbaciones del mercado. Esta restricción es necesaria en las matrices EWMA de RiskMetrics.

la información para inferir sus pesos factoriales en la representación de componentes principales, sus volatilidades y correlaciones se puede obtener utilizando el método ortogonal;

En un sistema altamente correlacionado, solo se requieren unos pocos componentes principales para representar la variación del sistema con un grado muy alto de precisión. Por ejemplo, si se usaron 3 componentes principales para representar una estructura de plazos con n vencimientos, solo será necesario calcular 3 volatilidades: un método mucho más simple que calcular directamente todas las $n(n+1)/2$ volatilidades y correlaciones. Se garantiza que la matriz de covarianza que se construye utilizando el método de componentes principales es semidefinida positiva. Además, al adaptar el número de componentes principales para capturar solo las variaciones principales, en lugar de los movimientos pequeños e insignificantes que podrían atribuirse mejor al 'ruido', las estimaciones de correlación serán más estables que si se estimaran directamente.

La primera parte del artículo trata sobre la ortogonalización de los factores de riesgo en un modelo multifactorial utilizando el análisis de componentes principales. Las secciones 2 y 3 cubren el álgebra del método para generar una matriz de covarianza $n \times n$ completa, que siempre será semidefinida positiva, solo a partir de las volatilidades de los componentes principales. El álgebra básica se ilustra con un ejemplo que utiliza estimaciones de medias móviles igualmente ponderadas de las volatilidades de los componentes principales.

La siguiente sección amplía el modelo básico para permitir variaciones medias móviles exponencialmente ponderadas de los componentes principales. Los promedios móviles exponencialmente ponderados de los cuadrados y los productos cruzados de los rendimientos son un método estándar para generar matrices de covarianza. Pero una limitación de este tipo de aplicación directa de promedios móviles ponderados exponencialmente es que solo se garantiza que la matriz de covarianza sea semidefinida positiva si se usa la misma constante de suavizado para todos los datos. Es decir, se debe suponer que la reacción de la volatilidad a los eventos del mercado y la persistencia de la volatilidad es la misma en todos los mercados que están representados en la matriz de covarianza. Una de las principales ventajas del método del factor ortogonal descrito aquí es que permite utilizar métodos de promedio móvil ponderados exponencialmente sin esta restricción poco realista. De hecho, la constante de suavización que define la volatilidad exponencial de cualquier activo o mercado en particular vendrá dada por sus ponderaciones factoriales en la representación de los componentes principales. Dicho de otro modo, la persistencia de la volatilidad y la reacción del mercado de una determinada serie de rentabilidades no será la misma que la de las demás variables del sistema, sino que está relacionada con su correlación con dichas variables.

Habiendo aplicado el método ortogonal con promedios móviles ponderados exponencialmente en la sección 4, es un pequeño paso reemplazar las varianzas de promedio móvil ponderado exponencialmente con varianzas GARCH completas como se describe en la sección 5. Los modelos GARCH multivariados han sido objeto de una extensa investigación académica (en ver en particular Engle y Kroner, 1993). Una de las muchas buenas razones para esto es que un modelo GARCH normalmente proporciona estructuras de términos de volatilidad y correlación que revierten a la media con una forma analítica simple. Bollerslev, Engle y Nelson (1994) brindan una buena revisión de la mayor parte de la literatura anterior sobre el modelo GARCH y véase Alexander (2001) para una revisión del trabajo más reciente. Ha habido una investigación considerable sobre diferentes formas de parametrizar modelos GARCH multivariados para que las matrices de covarianza GARCH sean definidas positivas. Desafortunadamente, los aspectos computacionales se vuelven cada vez más problemáticos a medida que aumenta la dimensión y, en este momento, no hay posibilidad de que los modelos GARCH multivariantes puedan usarse para estimar directamente las matrices de covarianza muy grandes que se requieren para compensar todos los riesgos en una gran cartera de negociación. La importancia del método que se explica en este "manual" es que permitirá generar grandes matrices GARCH multivariadas a partir de modelos GARCH univariados.

Engle (2000) describe los métodos alternativos para estimar matrices de covarianza GARCH multivariadas a partir de modelos GARCH univariados y muestra que el modelo GARCH ortogonal funciona extremadamente bien

de acuerdo con tres de los cuatro diagnósticos que ha elegido para evaluar la precisión de los pronósticos de correlación.

El modelo GARCH ortogonal se valida empíricamente utilizando datos sobre futuros de materias primas, tasas de interés e índices bursátiles. Un enfoque principal de la sección 5 es la calibración de volatilidades y correlaciones que se generan usando el modelo GARCH ortogonal con aquellas que se generan directamente usando parametrizaciones GARCH multivariadas estándar. Estos ejemplos se han incluido para mostrar que la calibración del modelo necesitará mucho más cuidado cuando el sistema no esté tan altamente correlacionado. Pero aunque la calibración inicial del modelo GARCH ortogonal puede requerir cierto cuidado, una vez que el modelo ha sido calibrado de esta manera, puede usarse diariamente sin recalibración.

El GARCH ortogonal tiene una serie de ventajas sobre el GARCH multivariante directo: dado que solo se requieren muy pocos modelos GARCH univariante para generar la matriz de covarianza grande, los problemas de convergencia de las rutinas de optimización serán raros (mientras que son un lugar común con la aplicación del modelo GARCH multivariante directo). a grandes sistemas); No es necesario que haya restricciones en la dimensionalidad del sistema original (mientras que los modelos GARCH multivariantes directos solo pueden hacer frente a las dimensiones de una sola figura); El método GARCH ortogonal brinda la opción de eliminar cualquier "ruido" en los datos que, de lo contrario, haría que las estimaciones de correlación fueran inestables; además, el método ortogonal permite generar estimaciones de volatilidades y correlaciones de variables en el sistema incluso cuando los datos son escasos y poco confiables, por ejemplo, en mercados sin liquidez.

La sección 6 muestra cómo se puede aplicar el método del factor ortogonal para generar matrices de covarianza muy grandes. Sugiere cómo se deben dividir los factores de riesgo en diferentes categorías antes de la aplicación del análisis de componentes principales, y demuestra la mejor manera de 'unir' diferentes bloques en una matriz de covarianza del gran sistema original.

Este es un documento largo, pero los puntos principales son bastante simples. Primero, en el mundo de los mercados financieros donde hay tanta incertidumbre, tiene sentido destilar la información importante en unos pocos factores que influyen en todas las variables del sistema en mayor o menor medida. Gran parte de la variabilidad del mercado se puede atribuir simplemente al "ruido" y los modelos que no saben cómo filtrar eso pueden carecer de solidez. Y segundo, el método ortogonal permite usar modelos GARCH para generar grandes matrices de covarianza para muchos tipos de sistemas, desde acciones o tipos de cambio hasta todo tipo de estructuras de plazos.

Este manual comienza mostrando cómo se puede aplicar el modelo ortogonal con la varianza de la media móvil ponderada exponencialmente, pero existen muy buenas razones para preferir los modelos GARCH a los modelos de media móvil ponderada exponencialmente. Quizás la razón más importante es la convergencia de los pronósticos de correlación y volatilidad de GARCH a sus niveles promedio a largo plazo, mientras que el modelo de promedio móvil ponderado exponencialmente tiene una estructura de pronósticos de plazo constante. El artículo ha sido escrito en respuesta a las muchas solicitudes que he recibido desde que expliqué por primera vez estas ideas (Alexander y Chibumba, 1996 y Alexander, 2000, 2001).³En primer lugar, está escrito como una introducción al método, por lo que he

³Zhuanxin Ding me ha señalado recientemente que en su disertación de doctorado de 1994 con Rob Engle en UCSD, habló sobre 23 formas diferentes posibles de modelo GARCH multivariado que están garantizados como definitivos positivos. El modelo ARCH multivariado de componentes principales aparece como modelo n.º 23, pero no funcionó tan bien porque, para garantizar una definición positiva estricta, Ding tomó todos los componentes principales del modelo. La gran ventaja del modelo GARCH ortogonal que se explica en este documento es que solo unas pocas claves de riesgo no correlacionadas

proporcionó los ejemplos y los programas de apoyo como descargas gratuitas del sitio web de Wilmott (enlace). Las referencias dentro de este documento lo llevarán a los programas TSP con el archivo comprimido de datos proporcionado. Una versión de demostración de TSP está disponible gratuitamente en su sitio web (www.tspintl.com) pero tiene capacidades de memoria restringidas, por lo que algunos de los programas de ejemplo presentados aquí no se pudieron ejecutar en la versión de demostración de TSP. Un complemento de Excel rudimentario para GARCH ortogonal está disponible en www.chrisleigh.co.uk y el software comercial para GARCH ortogonal también está disponible en Algorithmics Inc. (www.algorithmics.com).

2. Análisis de componentes principales

Las ideas de esta sección se ilustran mediante la generación de matrices de covarianza para dos conjuntos de rendimientos (a) una estructura temporal de futuros de petróleo crudo y (b) un pequeño conjunto de acciones francesas. Cada uno de estos sistemas está más o menos correlacionado: los futuros del crudo mucho más que las acciones. Si se generara una matriz de covarianza para cada sistema aplicando algunas medidas simples de varianza y covarianza de promedio ponderado a los rendimientos, ciertamente se encontraría que las correlaciones de futuros de petróleo crudo son más altas y más estables en el tiempo que las correlaciones de acciones. Los futuros de petróleo crudo son altamente colineales porque solo hay unas pocas fuentes importantes de información en los datos, que son comunes a muchas variables.

El análisis de componentes principales (PCA) es un método para extraer las fuentes de información no correlacionadas más importantes en los datos. De un conjunto de k retornos estacionarios se obtendrán k variables estacionarias ortogonales que se denominan componentes principales. Al mismo tiempo, PCA establece exactamente cuánto de la variación total en los datos originales se explica por cada componente principal. Los resultados de PCA son sensibles al cambio de escala de los datos, por lo que es una práctica estándar normalizar los datos antes del análisis. Por lo tanto, asumimos que cada columna en la matriz de datos estacionaria X tiene media cero y varianza 1, habiendo restado previamente la media muestral y dividido por \sqrt{T} veces la desviación estándar de la muestra. Ocasionalmente se aplican otras formas de normalización, lo que explica por qué los paquetes estadísticos pueden dar resultados diferentes.

Deje que las columnas de X sean X_1, \dots, X_k de modo que $X'X$ es una matriz simétrica $k \times k$ con 1 a lo largo de la diagonal, de correlaciones entre las variables en X . Cada componente principal es una combinación lineal de estas columnas, donde los pesos se eligen del conjunto de vectores propios de la $X'X$ matriz de correlación de modo que (a) el primer componente principal explique la cantidad máxima de la variación total en X , el segundo componente explica la cantidad máxima de la variación restante, y así sucesivamente; y (b) los componentes principales no están correlacionados entre sí.

Denotamos por W la matriz de vectores propios de $X'X$. De este modo

$$X'X W = W \Lambda$$

Los factores se utilizan para representar el sistema. Al tomar solo unos pocos componentes principales, se controla gran parte del "ruido" que hace que las estimaciones de correlación sean tan inestables. La matriz de covarianza no será estrictamente positiva definitiva pero sí *voluntad* siempre ser positivo semidefinido.

donde Λ es la matriz diagonal de valores propios de $X'X$. Ordena las columnas de W según el tamaño del valor propio correspondiente. Así si $W = (w_{ij})$ para $i, j = 1, \dots, k$, entonces la m -ésima columna de W , denotada $w_{metro} = (w_{1m}, \dots, w_{kilómetrosm})'$ es el vector propio $k \times 1$ correspondiente al valor propio λ_{metro} el etiquetado de la columna se ha elegido de modo que $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$. Luego defina el m -ésimo componente principal del sistema por

$$pag_{metro} = w_{1m}X_1 + w_{2m}X_2 + \dots + w_{kilómetrosm}X_k$$

dónde X_i denota la i -ésima columna de X , o en notación matricial

$$pag_{metro} = Xw_{metro}$$

Cada componente principal es una serie temporal de combinaciones lineales de los X variables, y si estas se colocan como las columnas de una matriz $T \times k$ completa PAG de componentes principales tenemos

$$P = XW \quad (1)$$

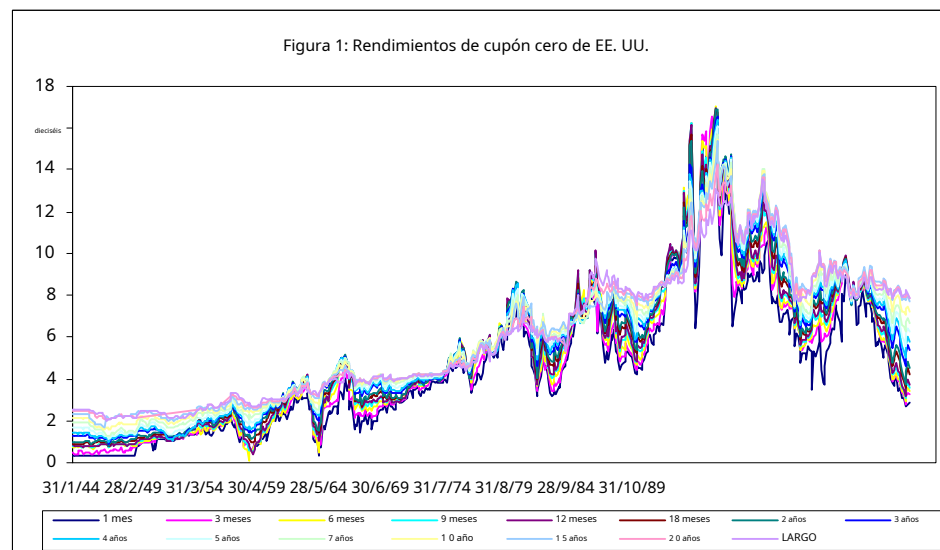
Para ver que este procedimiento conduce a componentes no correlacionados, tenga en cuenta que

$$P'P = W'X'XW = W'\Lambda W$$

Pero W es una matriz ortogonal, es decir $W' = W^{-1}$ y así $P'P = \Lambda$. Como esta es una matriz diagonal, las columnas de PAG no están correlacionados. Desde $W' = W^{-1}$ (1) es equivalente a $X = VP'$, eso es

$$X_i = w_{i1}PAG_1 + w_{i2}PAG_2 + \dots + w_{i0}PAG_k \quad (2)$$

donde X_i y P_i denotan las i -ésimas columnas de X y PAG respectivamente. Así, cada vector de datos en X es una combinación lineal de los componentes principales. La proporción de la variación total en X que se explica por la m -ésima componente principal es $\lambda_{metro}/(\text{suma de valores propios})$.



El método de los componentes principales se ilustra primero con un ejemplo estándar: un análisis de los tasas de cupón cero anualizadas utilizando datos mensuales de 1944 a 19924, que se muestra en la figura 1. La entrada de estos datos a un PCA es la matriz de correlación de rendimientos $X'X$ (tabla 1). Para los datos de EE. UU., esta matriz muestra la estructura típica de la curva de rendimiento: las correlaciones tienden a disminuir con el diferencial, y la tasa de 1 mes y la tasa de largo plazo tienen correlaciones más bajas con otras tasas ya que están más influenciadas por la política fiscal y monetaria.

Tabla 1: Matriz de correlación para tasas de cupón cero de EE. UU.

	1 mes	3 meses	6 meses	9 meses	12 meses	18 meses	2 años	3 años	4 años	5 años	7 años	10 años	15 años	largo
1 mes	1													
3 meses	0.78739	1												
6 meses	0.72919	0.93306	1											
9 meses	0.69303	0.88567	0.96762	1										
12 meses	0.65619	0.83888	0.92607	0.99126	1									
18 meses	0.63125	0.80718	0.90502	0.96856	0.9767	1								
2 años	0.60375	0.77336	0.87517	0.93652	0.94421	0.9928	1							
3 años	0.53997	0.71008	0.82236	0.89329	0.90723	0.96247	0.97383	1						
4 años	0.4898	0.6561	0.77169	0.84662	0.86392	0.92133	0.9347	0.99091	1					
5 años	0.47581	0.634	0.74939	0.82487	0.84294	0.90431	0.92026	0.97895	0.9897	1				
7 años	0.43925	0.58092	0.69222	0.76613	0.78478	0.84915	0.86793	0.92848	0.94151	0.97988	1			
10 años	0.39309	0.53476	0.64898	0.72019	0.73871	0.80584	0.82737	0.88376	0.89529	0.94095	0.97211	1		
15 años	0.30855	0.44558	0.55781	0.61993	0.63647	0.69972	0.72162	0.76671	0.77426	0.81206	0.8361	0.93883	1	
largo	0.21933	0.35774	0.43355	0.49401	0.51243	0.54815	0.5573	0.61202	0.62941	0.67691	0.71954	0.74812	0.70197	1

El resultado de PCA se resume en la tabla 2: La tabla 2a proporciona los valores propios y la cantidad correspondiente de variación en el sistema original que se explica, para los primeros tres componentes principales.

Tabla 2a: Análisis de vectores propios

Componente	valor propio	R acumulada ²
P1	11.01	0.786
P2	1.632	0.903
P3	0.4963	0.938

⁴Copyright Thomas S. Coleman, Lawrence Fisher, Roger G. Ibbotson, Curvas de rendimiento del Tesoro de EE. UU., edición de 1993, Ibbotson Associates, Chicago.

el rastro de la $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matriz anterior es 15, la suma de los elementos de la diagonal, que es el número de variables en el sistema. La matriz diagonal de sus valores propios tiene la misma traza que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ (porque la traza es invariante bajo transformadas de similitud), por lo que la suma de los valores propios también es 15. El valor propio más grande es 11,01, por lo que la proporción de la variación total que explica es $11,01/15$, o 78,6 %. El segundo valor propio más grande, 1.632, explica otro $1.632/15$ que es 11.7% y el tercer valor propio más grande (0.4963) explica otro 3.5% de la variación total. Así, el 93,8% de la variación total de la rentabilidad de los bonos cupón cero se explica por el modelo lineal con sólo 3 componentes principales.

La segunda parte de la salida de PCA es una matriz $k \times k$ de pesos factoriales, \mathbf{W} , en el cuadro 2b. A continuación, solo se muestran las ponderaciones de los factores correspondientes a los tres primeros componentes principales, que exhiben ciertos hechos estilizados. Primero tenga en cuenta que los pesos en el primer componente principal w_{1i} son similares, excepto quizás por los vencimientos muy cortos y muy largos que tienen menor correlación con el resto del sistema. Pero en general las correlaciones son bastante altas, y esto se refleja en la similitud de los pesos factoriales w_{1i} . Bajo correlación perfecta $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ es simplemente una matriz de 1, con rango 1 y el vector propio único $(1, 1, \dots, 1)'$. Para sistemas con rango completo, el primer vector propio correspondiente al valor propio más grande tomará valores menores que 1, pero cuanto más correlacionadas estén las variables, mayores y más similares serán los valores del vector propio correspondientes al vector propio más grande. Dicho de otra manera, las ponderaciones de los factores en el primer componente principal serán grandes y similares para todas las variables en un sistema altamente correlacionado. Por lo tanto, un desplazamiento hacia arriba del primer componente principal induce un desplazamiento aproximadamente paralelo de la curva de rendimiento y, por esta razón, el primer componente principal se denomina *componente de tendencia* de la curva de rendimiento, y en este ejemplo explica el 78,6% de la variación total del período.

Tabla 2b: Pesos de los factores

	P1	P2	P3
1 mes	0.63451	0.57207	0.34291
3 meses	0.80172	0.50173	0.16278
6 meses	0.89228	0.37901	0.033712
9 meses	0.94293	0.27852	- 0.04566
12 meses	0.9451	0.21936	- 0.08602
18 meses	0.97481	0.11973	- 0.12606
2 años	0.97181	0.061225	- 0.14593
3 años	0.97585	- 0.07672	- 0.1628
4 años	0.95465	- 0.15533	- 0.1684
5 años	0.95542	- 0.22317	- 0.10985
7 años	0.9234	- 0.31032	- 0.02539
10 años	0.89628	- 0.39553	0.056755
15 años	0.79469	- 0.4439	0.12832
largo	0.65674	- 0.48628	0.46605

El factor pondera sobre el segundo componente principal, w_{i2} , están disminuyendo monótonamente desde 0,57207 en la tasa de 1 mes hasta -0,48628 en la tasa de largo plazo. Por lo tanto, un movimiento ascendente en el segundo componente principal induce un cambio en la pendiente de la curva de rendimiento, donde los vencimientos cortos se mueven hacia arriba pero los vencimientos largos se mueven hacia abajo. El segundo componente principal se denomina *inclinación* y en este ejemplo el 11,7% de la variación total se atribuye a cambios de pendiente.

El factor pondera sobre el tercer componente principal, w_{i3} , son positivos para los tipos a corto plazo, pero disminuyen y se vuelven negativos para los tipos a medio plazo, y luego aumentan y vuelven a ser positivos para los plazos más largos. Así que el tercer componente principal influye en la *convexidad* de la curva de rendimiento, y en este ejemplo el 3,5% de la variación durante el período de datos se debe a cambios en la convexidad.

3. Generación de una matriz de covarianza para una sola categoría de factor de riesgo

Ahora considere cómo se pueden usar los componentes principales para generar una matriz de covarianza pequeña, como la matriz de covarianza para una curva de rendimiento, o la matriz de covarianza para un conjunto de acciones, o un conjunto de índices de acciones. Primero suponga que el i -ésimo rendimiento del activo es y_i , de modo que las variables normalizadas son $X_i = (y_i - \mu_i) / \sigma_i$ donde μ_i

y σ_i son la media y la desviación estándar de y_i para $i = 1, \dots, k$. Escriba la representación de los componentes principales como

$$y_i = \mu_{y_i} + \omega_{i1} p_{1i} + \omega_{i2} p_{2i} + \dots + \omega_{im} p_{mi} + \epsilon_i \quad (3)$$

donde $\omega_{i0} = w_{y_i}$ y el término de error en (3) toma la aproximación usando solo m del principal k componentes

Dado que los componentes principales son ortogonales, su matriz de covarianza es diagonal. Las varianzas de los componentes principales se pueden transformar rápidamente en una matriz de covarianza del sistema original usando los factores de ponderación: Tomando las varianzas de (3) se obtiene

$$V = ADA' + V_\epsilon \quad (4)$$

dónde $A = (\omega_{i0} \dots \omega_{im})$ es la matriz de ponderaciones factoriales normalizadas, $D = \text{diag}(V(p_1), \dots, V(p_m))$ es la diagonal matriz de varianzas de componentes principales y V_ϵ es la matriz de covarianza de los errores. Por lo tanto, la matriz de covarianza $k \times k$ completa de los rendimientos de los activos V es obtenido a partir de unas pocas estimaciones de las varianzas de los componentes principales y las covarianzas de los errores.

Sin embargo V puede no ser definida positiva. A pesar de D es definida positiva porque es una matriz diagonal con elementos positivos, no hay nada que garantice que ADA' será definida positiva cuando $m < k$. Para ver esto escribe

$$x'ADA'x = y'Dy$$

dónde $A'x = y$. Desde y puede ser cero para algunos distintos de cero x , $x'ADA'x$ no será estrictamente positivo para todo distinto de cero x . Por supuesto V sería positivo definido si ADA' fueron definidas positivas, porque V_ϵ es definida positiva. Entonces, si se ha logrado una buena aproximación con $m < k$ componentes principales, existe una probabilidad razonable de que V_ϵ será estrictamente definida positiva. Sin embargo, si solo es positivo semidefinido, algunos pesos x podría dar una varianza de cartera cero. Pero cuando las matrices de covarianza se basan en (4) con $m < k$, siempre se pueden ejecutar a través de una verificación de valores propios para garantizar una definición positiva estricta. La única forma de garantizar una definición positiva estricta sin tener que verificar es tomar todos los k componentes principales en el modelo factorial, en cuyo caso no hay término de error y $V_\epsilon = 0$.

Solo para ilustrar el procedimiento, considere los rendimientos de tres acciones en el CAC 40: Paribas, SocGen y Danone utilizando datos diarios de 1^o de enero 1994 a 9^o de febrero de 1999. El cálculo directo de su matriz de covarianza, utilizando datos igualmente ponderados durante todo el período, es

Una matriz simétrica A es definida positiva si $\lambda_i > 0$ para todo distinto de cero λ_i . A es definida positiva si y solo si todos sus valores propios son positivos (como se puede ver al escribir $A = C' \Lambda C$ donde Λ es la matriz diagonal de valores propios de A).

Tabla 3a: Matriz de correlación

	Paribas	SocGen	Danone
Paribas	1.5728	2.00601	1.28405
SocGen	2.00601	7.39971	2.7741
Danone	1.28405	2.7741	7.50572

La misma matriz se puede obtener usando $\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}'$ donde \mathbf{A} es la matriz de pesos factoriales de componentes principales reescalados y \mathbf{D} es la matriz diagonal de varianzas de los componentes principales. Para ver esto, primero realice PCA con el número completo de componentes, y esto da el siguiente resultado:

Tabla 3b: Análisis de valores propios

Componente	valor propio	R acumulada
P1	1.897885	0.632628
P2	0.690134	0.862673
P3	0.411982	1

Tabla 3c: Pesos de los factores

	P1	P2	P3
Paribas	0.84027	0.29563	0.45447
SocGen	0.83958	0.29946	- 0.45325
Danone	0.69781	- 0.71628	- 0.00192

La matriz \mathbf{A} se obtiene multiplicando el peso de cada factor por la desviación estándar correspondiente:

	Desv estándar
Paribas	1.25411
SocGen	2.72024
Danone	2.73966

Entonces la matriz \mathbf{A} es:

1.053791	0.370753	0.569955
2.283859	0.814603	- 1.23295
1.911762	- 1.96236	- 0.00526

Dado que en este caso solo estamos tomando estimaciones de varianza igualmente ponderadas durante todo el período, y dado que los datos se normalizaron antes del análisis, todos los componentes principales tienen varianza unitaria. Eso es, $D = I$, la matriz identidad de 3x3. Entonces $ADA' = AUTOMÓVIL CLUB BRITÁNICO$ y el lector puede verificar que esto da la misma matriz de covarianza que la calculada directamente arriba.

El ejemplo anterior puede ser reproducido por el lector usando el programa [ex1.cucharadita](#). Se ha incluido simplemente para ilustrar el método, pero está claro que no se gana nada con el método cuando se emplean varianzas medias igualmente ponderadas. Los promedios igualmente ponderados de los cuadrados son estimaciones no sesgadas de la varianza incondicional,⁶ y cada componente principal tendrá una estimación de varianza de 1 si la estimación se realiza durante el mismo período de datos que el PCA. Pero supongamos que en su lugar se emplearon estimaciones promedio ponderadas exponencialmente de la varianza incondicional. Éstos tienen la ventaja sustancial de responder mejor a las circunstancias actuales del mercado y de verse menos afectados por eventos de estrés del pasado lejano que los promedios igualmente ponderados (ver Alexander, 1998). Por otro lado, tienen la desventaja de que no existe un mejor método para elegir un valor óptimo de la constante de suavizado.

4. Generación de Matrices de Covarianza usando Varianzas de Promedios Móviles Ponderados Exponencialmente de los Componentes Principales.

Cuando las volatilidades y correlaciones del promedio móvil ponderado exponencialmente (EWMA, por sus siglas en inglés) se estiman directamente, el factor de decaimiento, definido por la constante de suavizado, debe ser el mismo para todas las series en una matriz de covarianza grande; de lo contrario, puede no ser positivo semidefinido (ver el Documento Técnico de RiskMetrics sobre www.riskmetrics.com). Pero cuando las volatilidades y correlaciones del promedio móvil ponderado exponencialmente se estiman indirectamente utilizando el método del factor ortogonal que se acaba de describir, cada volatilidad y correlación tendrá un factor de disminución diferente. Incluso si las varianzas EWMA de los componentes principales tuvieran todas la misma constante de suavizamiento, la transformación de estas varianzas usando pesos factoriales, por la ecuación (4), inducirá diferentes tasas de decaimiento para las varianzas y covarianzas de las variables en el sistema original. Por lo tanto, siempre que se conserven todos los componentes principales, el método proporciona una forma sencilla de aplicar EWMA para generar una gran matriz de covarianza definida positiva.

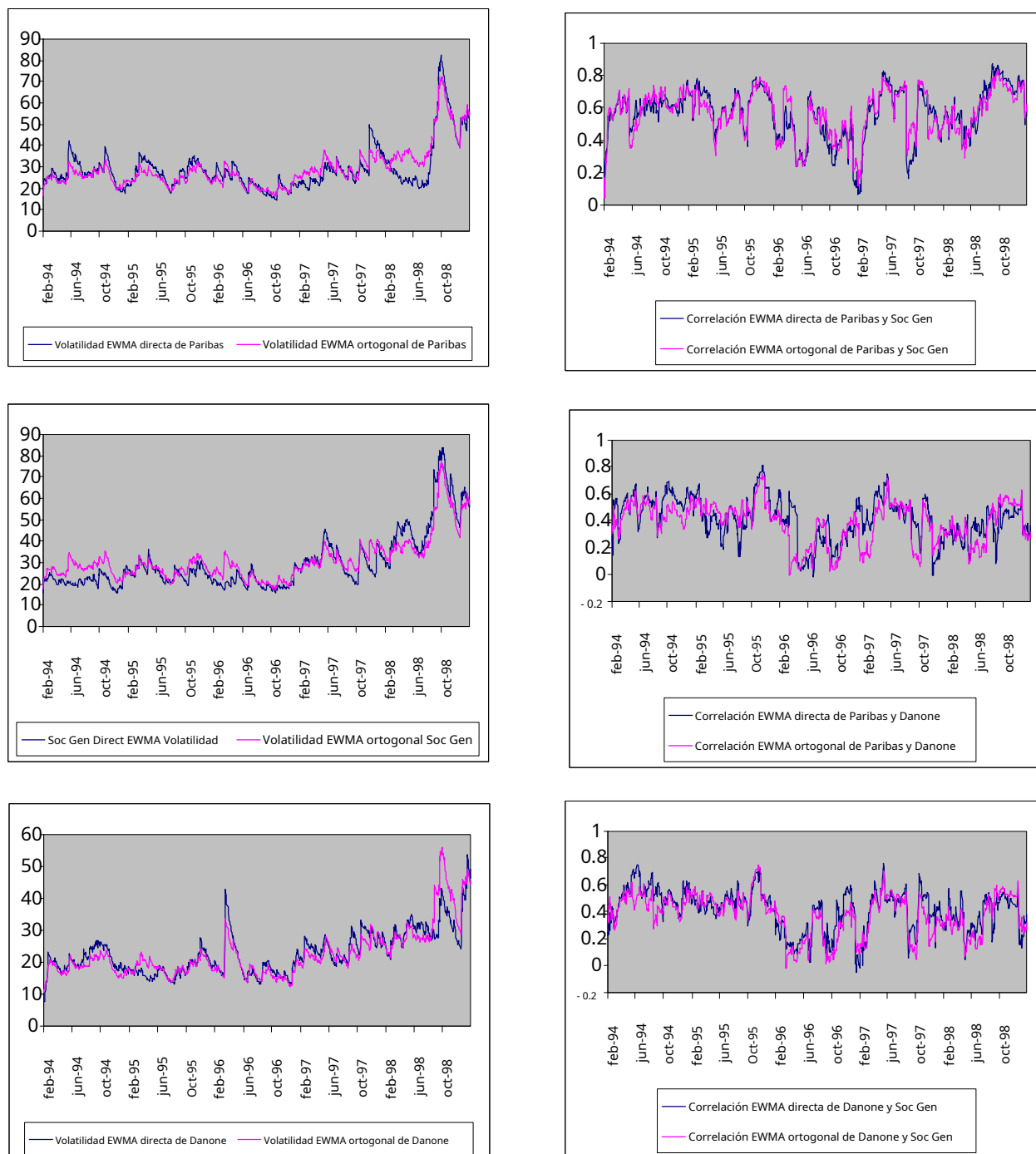
El programa [ex2.cucharadita](#) utiliza los mismos datos de renta variable francesa que [ex1.cucharadita](#) pero con medias móviles exponencialmente ponderadas. La Figura 2 representa las volatilidades y correlaciones que se obtienen usando el método ortogonal con las volatilidades y correlaciones que se obtienen usando promedios móviles exponencialmente ponderados directamente sobre los rendimientos al cuadrado. Este es un ejemplo muy básico, por lo que la constante de suavizado simplemente se ha establecido en 0,95 para todos los promedios móviles ponderados exponencialmente (los ejemplos posteriores usarán diferentes valores de la constante de suavizado para los componentes principales).

⁶Normalmente no se toman desviaciones medias al cuadrado con una corrección de sesgo (n-1) en el denominador, ya que no hace ninguna diferencia perceptible para los estimadores de varianza basados en los rendimientos financieros diarios.

7

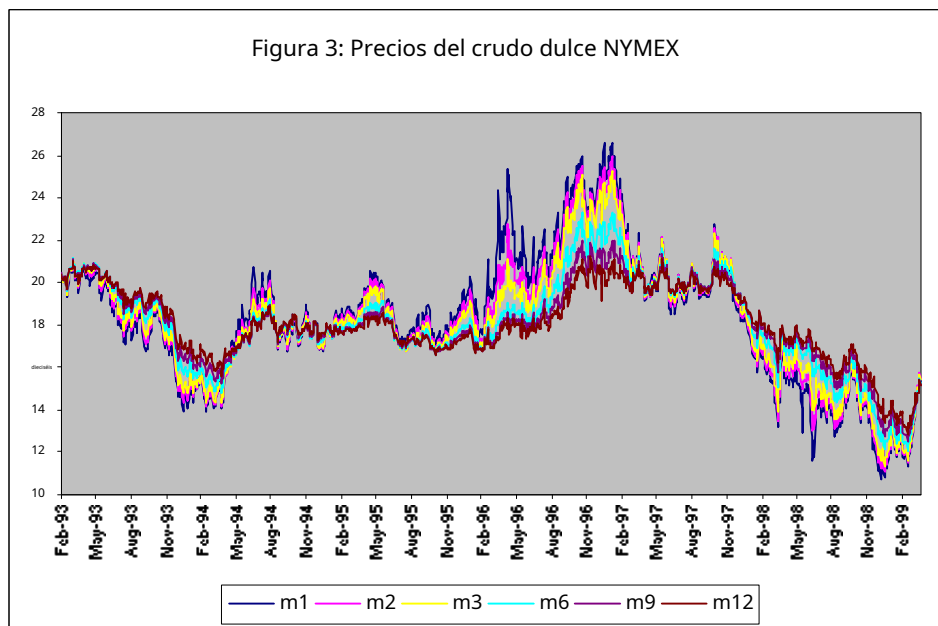
De hecho, elegir constantes de suavizado idénticas para todos los componentes principales no es necesario para resultados positivos. Definición ni deseable para un pronóstico óptimo. Las constantes de suavizado óptimas pueden ser más bajas para los componentes principales más altos y menos importantes, mientras que la volatilidad del primer componente de tendencia puede ser la más persistente de las volatilidades del componente principal en un sistema altamente correlacionado.

Figura 2: Comparación de volatilidades y correlaciones directas y ortogonales de EWMA



Una comparación de estos gráficos es una parte crucial de la calibración del modelo ortogonal. Si estas volatilidades y correlaciones no son similares será porque (a) el período de datos utilizado para el PCA es demasiado largo, o (b) hay variables que están incluidas en el sistema que están distorsionando las volatilidades y correlaciones de otras variables calculadas utilizando el método ortogonal. Ambos problemas surgen si no hay suficiente correlación en el sistema para que el método se aplique correctamente. Si una o más de las variables tienen un bajo grado de correlación con las otras variables durante el período de datos, las ponderaciones de los factores en el ACP carecerán de solidez a lo largo del tiempo. El modelo podría mejorarse usando un período de datos más corto y/o omitiendo las variables menos correlacionadas del sistema.

Habiendo detallado el método, veamos ahora su fuerza real aplicándolo a un sistema más grande y altamente correlacionado. El programa [ex3.cucharadita](#) aplica el método ortogonal utilizando solo 3 componentes principales a los datos de futuros de petróleo crudo WTI en todos los vencimientos mensuales de 1 mes a 12 meses, muestreados diariamente entre 4^o febrero de 1993 y 24^o marzo de 1999. Los precios de futuros con vencimiento a 1, 2, 3, 6, 9 y 12 meses se muestran en la figura 3, y consulte Alexander (1999) para una discusión completa de estos datos y de las correlaciones en los mercados energéticos en general.⁸



⁸Muchas gracias a Enron por proporcionar estos datos.

Este sistema altamente correlacionado es ideal para el uso de PCA. El resultado de PCA que se muestra en la tabla 4 a continuación muestra que el 99,8% de la variación en el sistema puede explicarse por solo 3 componentes principales. De hecho sólo el primer componente principal explica casi el 96% de la variación del período, y con dos componentes principales se explica más del 99% de la variación. Por supuesto, las ponderaciones de los factores muestran que, al igual que con cualquier estructura temporal, las interpretaciones de los primeros tres componentes principales son los componentes de tendencia, inclinación y curvatura, respectivamente.

Tabla 4a: Análisis de valores propios

Componente	valor propio	R acumulada
P1	11.51	0.9592
P2	0.397	0.9923
P3	0.069	0.9981

Tabla 4b: Pesos de los factores

	P1	P2	P3
1 mes	0.89609	0.40495	0.18027
2 meses	0.96522	0.24255	- 0.063052
3 meses	0.98275	0.15984	- 0.085002
4 meses	0.99252	0.087091	- 0.080116
5 meses	0.99676	0.026339	- 0.065143
6 meses	0.99783	- 0.020895	- 0.046369
7 meses	0.99702	- 0.062206	- 0.023588
8 meses	0.99451	- 0.098582	0.00018279
9 meses	0.99061	- 0.13183	0.020876
10 meses	0.98567	- 0.16123	0.040270
11 meses	0.97699	- 0.19269	0.064930
12 meses	0.97241	- 0.21399	0.075176

La gran ventaja de utilizar el método ortogonal en los datos de la estructura de plazos es que todas las volatilidades y correlaciones del sistema se pueden derivar de solo 3 varianzas de medias móviles exponencialmente ponderadas. Es decir, en lugar de estimar directamente 78 volatilidades y correlaciones de medias móviles ponderadas exponencialmente, utilizando el mismo valor de la constante de suavizado, solo es necesario generar 3 varianzas de medias móviles ponderadas exponencialmente de los componentes principales de tendencia, inclinación y curvatura. En algunas estructuras de plazos, incluida la estructura de plazos de futuros de petróleo crudo utilizada en el ejemplo 3, solo 2 componentes ya

explicar más del 99% de la variación, por lo que sumar un 3.º El componente no hace una diferencia perceptible en los resultados de la covarianza.

Todas las volatilidades y varianzas de correlación del sistema original pueden recuperarse usando transformaciones simples de la matriz diagonal de varianzas de componentes principales, como se hace en [ex3.cucharadita](#). Además, las varianzas de los componentes principales pueden utilizar diferentes constantes de suavizado. En el ejemplo 3 el valor predeterminado de 0.95 para el 1.ª calle, 2.ª Dakota del Norte y 3.ª Se han utilizado componentes principales, pero el lector puede estar interesado en experimentar con el uso de diferentes constantes de suavizado para las varianzas de los componentes principales. Incluso si las varianzas de los componentes principales tienen todas la misma constante de suavizamiento, las volatilidades de diferentes vencimientos en la estructura de plazos tendrían diferentes propiedades de suavizamiento exponencial. Esto se debe, por supuesto, a que tienen pesos de factores diferentes en la representación del componente principal.

Las cifras de la figura 4 muestran algunas de las volatilidades que se generan utilizando el método ortogonal en comparación con las volatilidades de media móvil ponderada exponencialmente estimadas directamente. La coincidencia de los resultados obtenidos por el método ortogonal con los obtenidos por estimación directa muestra la potencia de este método. A partir de solo 2 o 3 medias móviles exponencialmente ponderadas, se recupera toda la matriz de covarianza de 12x12 del sistema original con una pérdida de precisión insignificante. La Figura 5 muestra algunas de las correlaciones obtenidas por el método ortogonal para diferentes pares de vencimientos. El lector puede ver fácilmente más de ellos desde los elementos fuera de la diagonal de la matriz de covarianza en [ex3.cucharadita](#).

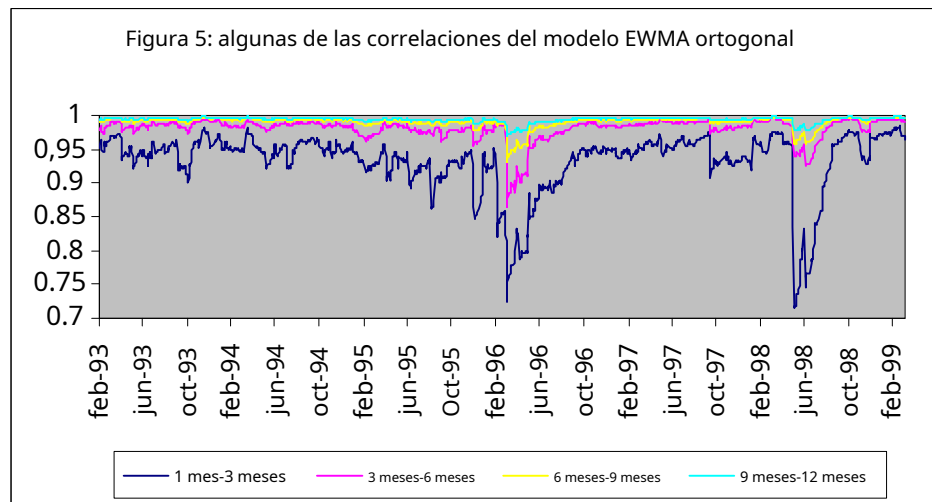
Las correlaciones ortogonales de EWMA que se muestran en la figura 5 son muy similares a las correlaciones generadas por EWMA directo. Pero hay un problema con el uso de promedios ponderados exponencialmente en el mercado de futuros de petróleo crudo. Aunque contienen menos "características fantasma" y otros efectos artificiales que resultan del uso de promedios móviles igualmente ponderados, todavía hay una preocupante falta de correlación entre algunos de los futuros de vencimiento cercano. Este problema será un punto de discusión basado en la figura 8 a continuación, donde se miden las mismas correlaciones mediante el modelo GARCH ortogonal.

Hay muchas ventajas con el método ortogonal para generar matrices de covarianza, incluso cuando se aplica utilizando solo estimaciones de varianza de promedio móvil ponderadas exponencialmente. Obviamente, la carga computacional es mucho más liviana cuando todas las volatilidades y correlaciones $k(k+1)/2$ son transformaciones de matrices simples de solo 2 o 3 varianzas de promedio móvil exponencialmente ponderadas. Pero también puede ser difícil obtener datos directamente, en particular sobre algunos activos financieros que no se negocian mucho. Cuando los datos son escasos o poco fiables sobre algunas de las variables del sistema, puede ser muy difícil realizar una estimación directa de las volatilidades y la correlación. Pero si hay suficiente información para inferir sus pesos factoriales en la representación de componentes principales, sus volatilidades y correlaciones pueden obtenerse utilizando el método ortogonal.

Por ejemplo, algunos bonos o futuros pueden ser relativamente poco líquidos para ciertos vencimientos, y los pronósticos estadísticos de sus volatilidades pueden ser difíciles de generar directamente a diario. Pero las varianzas de los componentes principales de toda la estructura de plazos pueden transformarse utilizando las ponderaciones de los factores en una matriz de covarianza completa que genera pronósticos flexibles de todos los vencimientos, incluidos los ilíquidos.

Figura 4: Comparación de volatilidades EWMA directas y ortogonales





5. Introducción al modelo GARCH ortogonal

Los modelos univariados de heteroscedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH) que fueron introducidos por Engle (1982) y Bollerslev (1986) han tenido mucho éxito para la estimación y pronóstico de la volatilidad en los mercados financieros. La base matemática de los modelos GARCH se compara favorablemente con algunas de las alternativas utilizadas por los profesionales financieros, y esta coherencia matemática hace que los modelos GARCH sean fáciles de adaptar a las nuevas aplicaciones financieras. También hay evidencia de que los modelos GARCH generan pronósticos a largo plazo más realistas, ya que los pronósticos de volatilidad y estructura temporal de correlación convergerán al nivel promedio a largo plazo (ver Alexander, 1998, 2000). En cuanto a las previsiones de volatilidad a corto plazo, los resultados estadísticos son mixtos (véanse, por ejemplo, Brailsford y Faff, 1996, Dimson y Marsh, 1990, Figlewski, 1994, Alexander y Leigh (1997)). Esto no es sorprendente ya que toda el área de evaluación estadística de los pronósticos de volatilidad está plagada de dificultades (ver Alexander, 2000). Otra prueba de un modelo de pronóstico de volatilidad está en su desempeño de cobertura: y hay mucho que decir sobre el uso del marco de volatilidad GARCH para la fijación de precios y las opciones de cobertura (ver Duan 1995, 1996). Engle y Rosenberg (1995) brindan una evaluación operativa de los modelos GARCH en valoración de opciones y cobertura, donde su superioridad sobre los métodos de Black-Scholes proviene del hecho de que la volatilidad estocástica ya está integrada en el modelo. y hay mucho que decir sobre el uso del marco de volatilidad GARCH para las opciones de fijación de precios y cobertura (ver Duan 1995, 1996). Engle y Rosenberg (1995) brindan una evaluación operativa de los modelos GARCH en valoración de opciones y cobertura, donde su superioridad sobre los métodos de Black-Scholes proviene del hecho de que la volatilidad estocástica ya está integrada en el modelo. y hay mucho que decir sobre el uso del marco de volatilidad GARCH para las opciones de fijación de precios y cobertura (ver Duan 1995, 1996). Engle y Rosenberg (1995) brindan una evaluación operativa de los modelos GARCH en valoración de opciones y cobertura, donde su superioridad sobre los métodos de Black-Scholes proviene del hecho de que la volatilidad estocástica ya está integrada en el modelo.

Las matrices de covarianza grandes que se basan en modelos GARCH tendrían, por lo tanto, claras ventajas. Pero investigaciones previas en esta área han tenido un éxito bastante limitado. Es sencillo generalizar los modelos GARCH univariados a parametrizaciones multivariadas, como en Engle y Kroner (1993). Pero la implementación real de estos modelos es extremadamente difícil. Con tantos parámetros, la función de verosimilitud se vuelve muy plana, por lo que los problemas de convergencia son muy comunes en la rutina de optimización. Si el modelador necesita 'cuidar' el modelo para sistemas con solo unas pocas variables, hay pocas esperanzas de una implementación completamente funcional de un modelo GARCH multivariante directo para trabajar en sistemas de gran riesgo.

La idea de utilizar modelos factoriales con GARCH no es nueva. Engle, Ng y Rothschild (1990) utilizan el modelo de valoración de activos de capital para mostrar cómo las volatilidades y correlaciones entre acciones individuales pueden generarse a partir de la varianza GARCH univariada del factor de riesgo de mercado. Sus resultados tienen una extensión directa a modelos multifactoriales, pero a menos que los factores sean ortogonales, se requerirá un modelo GARCH multivariado, con todos los problemas asociados.

Una representación de componentes principales es un modelo multifactorial. De hecho, el modelo GARCH ortogonal es una generalización del modelo GARCH factorial introducido por Engle, Ng y Rothschild (1990) a un modelo multifactorial con factores ortogonales. El modelo GARCH ortogonal permite generar matrices de covarianza GARCH $k \times k$ a partir de solo m modelos GARCH univariados. Aquí k es el número de variables en el sistema y m es el número de componentes principales utilizados para representar el sistema. Puede ser que m sea mucho menor que k , y muy a menudo uno desearía que m fuera menor que k para que el 'ruido' extraño se excluya de los datos. Pero dado que solo se utilizan modelos GARCH univariados, realmente no importa: no hay restricciones dimensionales como las que existen con las parametrizaciones directas de GARCH multivariado.⁹

Por supuesto, los componentes principales solo están incondicionalmente no correlacionados, por lo que una matriz de covarianza GARCH de componentes principales no es necesariamente diagonal. Sin embargo, se debe hacer la suposición de correlaciones condicionales cero, de lo contrario, se pierde el punto central del modelo, que es generar matrices de covarianza GARCH grandes solo a partir de las volatilidades GARCH.

Antes de presentar algunos ejemplos empíricos sobre GARCH ortogonal, reformulemos los resultados de la sección 3 en el marco de la volatilidad estocástica. Por lo tanto, la matriz diagonal de varianzas de los componentes principales $m \times m$ es una matriz variable en el tiempo denotada D_t y la matriz de covarianza variable en el tiempo V_t del sistema original se aproxima por

$$V_t = A D_t A' \quad (5)$$

dónde A es la matriz $k \times m$ de pesos factoriales reescalados. La representación (5) dará una matriz semidefinida positiva en todo momento, incluso cuando el número m de componentes principales sea mucho menor que el número k de variables en el sistema. Sin embargo, la precisión de la representación (5) depende de que el número de componentes principales utilizados sea suficiente para explicar una gran parte de la variación del sistema. Por lo tanto, el método funcionará bien cuando el análisis de componentes principales funcione bien, es decir, en estructuras de términos y otros sistemas altamente correlacionados.

El modelo (5) se llama GARCH ortogonal cuando la matriz diagonal D_t de las varianzas de los componentes principales se estima utilizando un modelo GARCH. En los ejemplos dados aquí, se utiliza el modelo GARCH(1,1) 'vainilla' estándar. La varianza condicional en el tiempo t se define como:

$$\sigma_{\varepsilon_t}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (6)$$

donde el parámetro α de 'reacción del mercado' y el parámetro β de 'persistencia de la volatilidad' deben sumar menos de uno (para la convergencia de los pronósticos de volatilidad de la estructura temporal). En el modelo de promedio móvil exponencialmente ponderado, estos parámetros siempre suman uno, por lo que la estructura de términos de volatilidad será constante.

El modelo GARCH ortogonal es especialmente útil para estructuras de plazos en los que los vencimientos menos líquidos pueden impedir la estimación de la dirección de las volatilidades GARCH. Cuando el comercio del mercado es más bien escaso, puede haber poca heterocedasticidad condicional autorregresiva en los datos, y lo que hay puede ser bastante poco confiable.

⁹La tesis doctoral de 1994 de Zhuanxin Ding con Rob Engle en UCSD introdujo por primera vez la idea de utilizar el análisis de componentes principales con GARCH univariante en todos los componentes principales. La diferencia importante entre el modelo de Ding y el GARCH ortogonal es el uso de solo un pequeño número de componentes principales; esto es crucial para que las correlaciones sean estables y las volatilidades sean robustas ante cambios importantes en los factores de riesgo.

El modelo GARCH ortogonal tiene la ventaja de que las volatilidades de dichos activos y sus correlaciones con otros activos en el sistema se derivan de las volatilidades de los componentes principales que son comunes a todos los activos y las ponderaciones de los factores que son específicas de ese activo en particular.

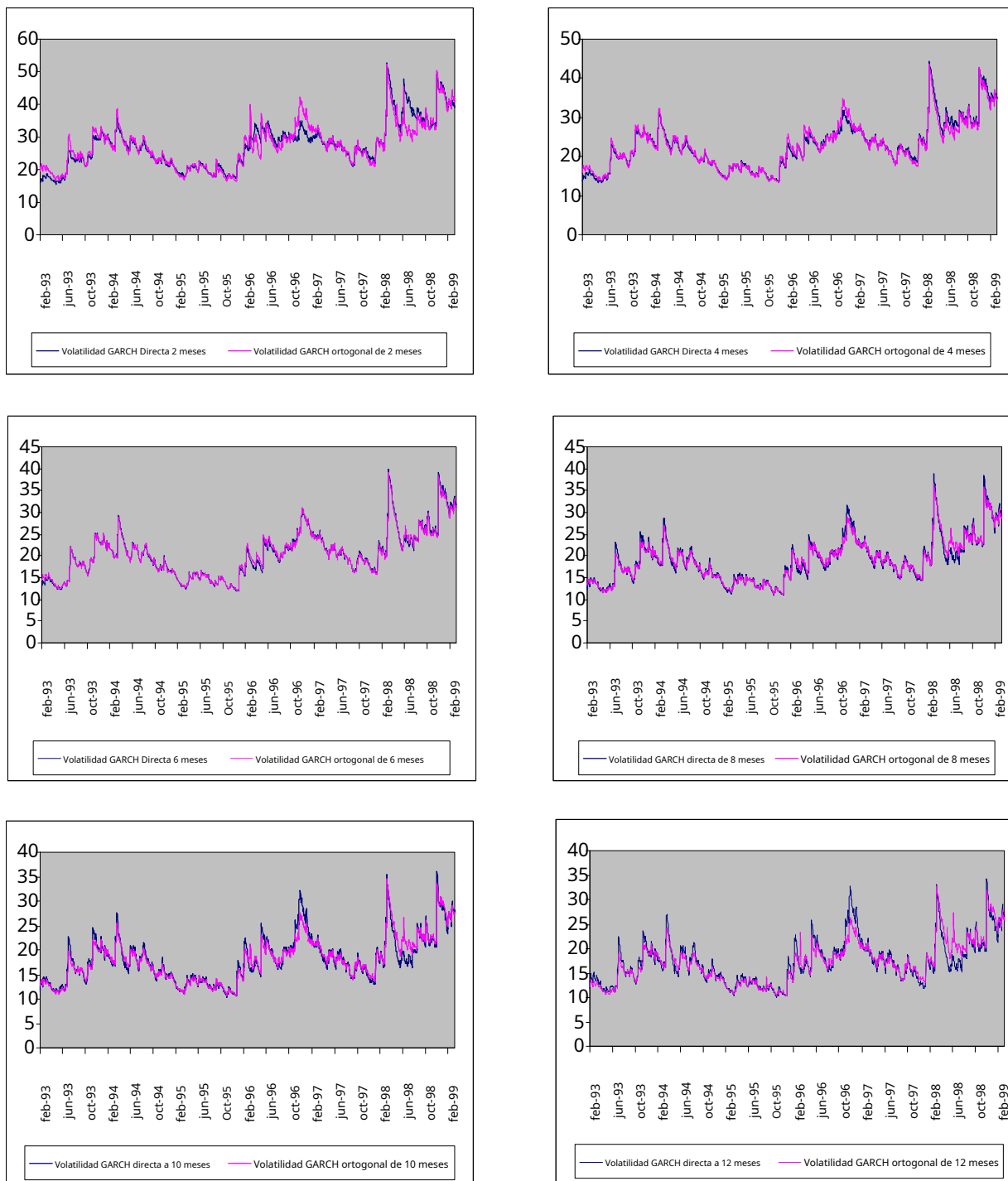
El primer ejemplo del modelo GARCH ortogonal es una extensión directa del ejemplo 3, que usa varianzas GARCH(1,1) de los componentes principales en lugar de promedios móviles ponderados exponencialmente. El [ex4.cucharadita](#) utiliza los mismos datos de estructura temporal de futuros de petróleo crudo que el ejemplo 3 y la tabla 5 informa los coeficientes estimados en los modelos GARCH(1,1) de los primeros 2 componentes principales.

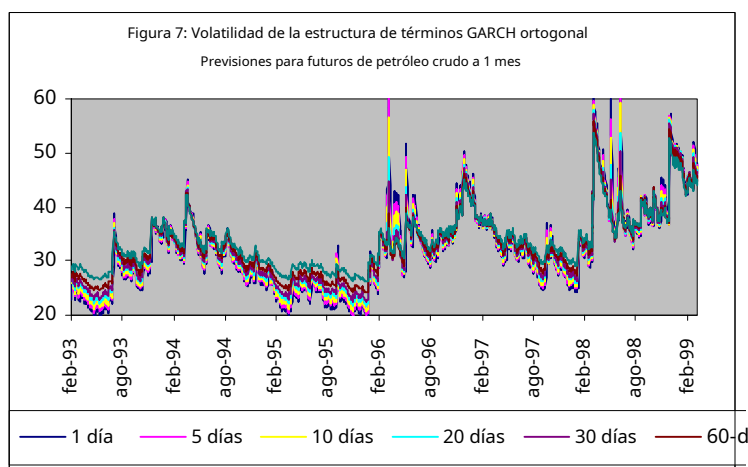
Tabla 5: Modelos GARCH(1,1) del Primer y Segundo Componente Principal

	1 calleComponente principal		2Dakota del NorteComponente principal	
	Coeficiente	t-stat	Coeficiente	t-stat
constante	. 650847E-02	. 304468	. 122938E-02	. 066431
ω	. 644458E-02	3.16614	. 110818	7.34255
α	. 037769	8.46392	. 224810	9.64432
β	. 957769	169.198	. 665654	21.5793

La figura 6 es similar a la figura 4, con la única diferencia de que los modelos GARCH(1,1) se usaron para generar la figura 6 donde se usaron promedios móviles ponderados exponencialmente para las figuras 4. Las volatilidades ortogonales y directas que se comparan en la figura 6 son muy cerca de hecho. De hecho, son casi idénticas a las volatilidades EWMA que se ilustran en la figura 4. ¿Entonces por qué molestarse con GARCH? Hay dos razones importantes. La primera es que los pronósticos de la estructura temporal de la volatilidad EWMA no convergen al promedio a largo plazo, pero los pronósticos GARCH sí lo hacen, siempre que $\alpha + \beta < 1$. De hecho, el modelo GARCH ortogonal se puede extender con bastante facilidad para proporcionar pronósticos de la volatilidad promedio a lo largo del tiempo. los próximos n días, para cualquier n (ver Alexander 1998, 2000). El [ex5.cucharadita](#) hace precisamente esto para los datos de la estructura temporal del petróleo crudo, produciendo series de pronósticos de volatilidad de la estructura temporal que convergen a un promedio a largo plazo. Las estructuras de términos de volatilidad para el futuro de 1 mes se muestran en la figura 7.

Figura 6: Comparación de volatilidades GARCH directas y ortogonales

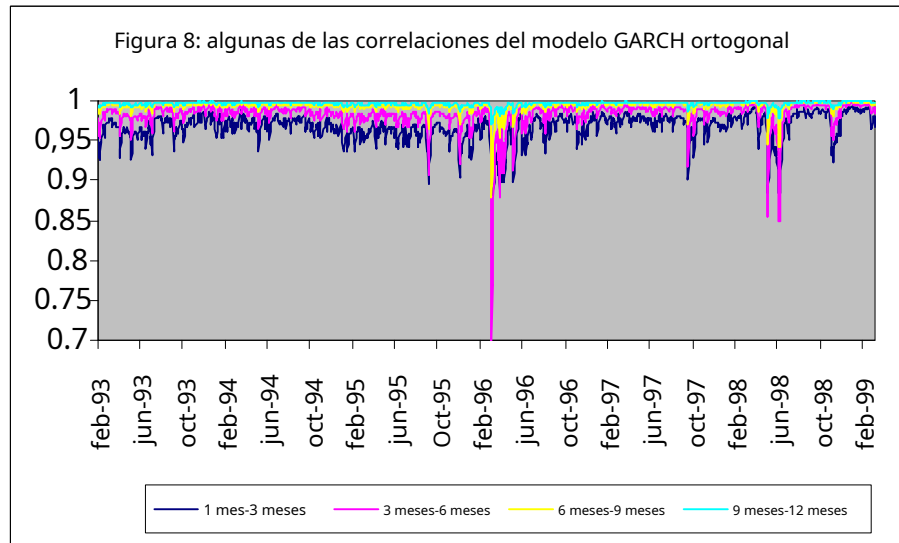




La segunda buena razón para usar GARCH ortogonal en lugar de EWMA ortogonal es que las correlaciones GARCH ortogonales reflejarán de manera más realista lo que está sucediendo en el mercado. Como ya se mencionó, las correlaciones que se muestran en la figura 5 que fueron generadas por el EWMA ortogonal son un poco preocupantes. Cabría esperar que las correlaciones entre los futuros de materias primas fueran más o menos perfectas la mayor parte del tiempo, pero las correlaciones EWMA entre los futuros a 1 mes y otros futuros, y entre otros pares a corto plazo, pueden ser considerablemente inferiores a 1 durante largos períodos de tiempo. Por ejemplo, durante largos períodos de 1996 y 1998, las correlaciones EWMA están más cerca de 0,8 que de 1.

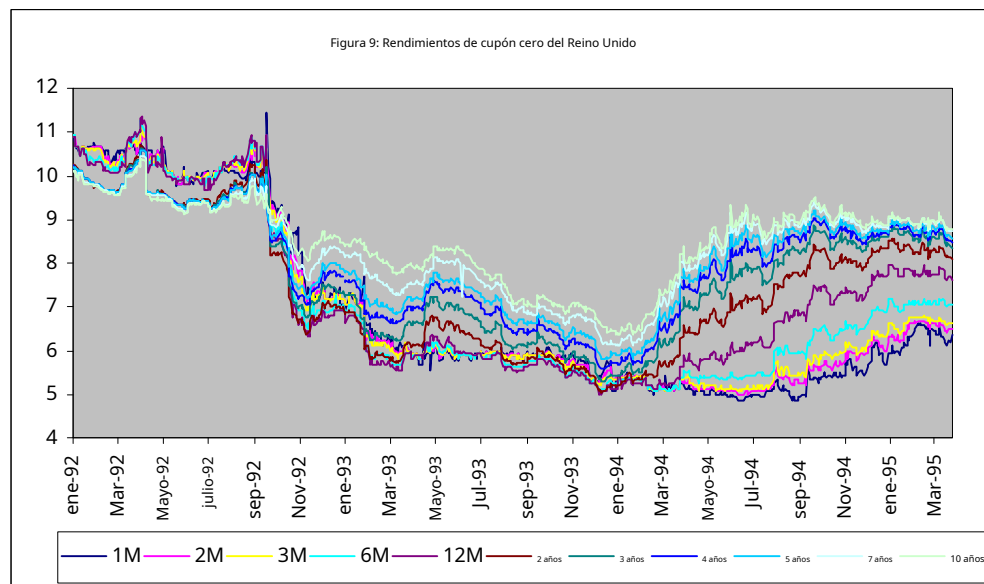
La razón de esto es la constante de suavizado de 0,95, que es una elección adecuada para las volatilidades (como sabemos por la comparación de la figura 4 con los modelos GARCH optimizados de la figura 6), pero es claramente demasiado grande para las correlaciones. Desafortunadamente, si se redujeran los valores de las constantes de suavizado utilizadas en el modelo EWMA ortogonal, de modo que las correlaciones fueran menos persistentes, las volatilidades también serían menos persistentes. Uno solo puede adivinar por prueba y error cuáles son los valores apropiados para las constantes de suavizado, y puede ser que no haya una respuesta clara a esta pregunta.

En el mercado de futuros de petróleo crudo, el desacoplamiento de precios solo ocurre en períodos de tiempo muy cortos, por lo que las correlaciones pueden desviarse por debajo de 1, pero solo por un período breve. Ahora, si se usara el modelo ortogonal con un solo componente principal (lo cual es posible ya que los resultados de la sección 4 indican que este componente de tendencia explica más del 95% de la variación), las correlaciones serían, por supuesto, la unidad. Entonces, toda la variación en las correlaciones GARCH ortogonales proviene de los movimientos en el segundo componente principal. Este segundo componente principal es el componente de inclinación y explica alrededor del 4% del movimiento (ver sección 4). Los modelos GARCH(1,1) de los dos primeros componentes principales de esta estructura de términos, que se muestran en la tabla anterior, indican que el segundo componente principal tiene mucha reacción (α es aproximadamente 0.22) pero poca persistencia (β es de alrededor de 0,66). En otras palabras, estos movimientos de inclinación en la estructura temporal de los precios de futuros son intensos pero de corta duración. Por lo tanto, uno esperaría que las correlaciones proporcionadas por el modelo GARCH ortogonal en la figura 8 reflejen con mayor precisión las condiciones reales del mercado que las correlaciones EWMA ortogonales en la figura 5.



Para resumir los resultados hasta el momento, este documento ha demostrado cómo se pueden generar 78 volatilidades y correlaciones diferentes de la estructura temporal de los futuros de petróleo crudo entre 1 mes y 12 meses, de manera muy simple y precisa, a partir de solo dos modelos GARCH univariados de los dos primeros componentes principales. También ha mostrado cómo los pronósticos de volatilidad de diferentes vencimientos también pueden generarse como transformaciones simples de estas dos varianzas GARCH básicas.

Ahora, avancemos un poco con la complejidad de los datos. Sigue siendo una estructura de términos, pero bastante difícil. El programa dado en [ex6.cucharadita](#) ha sido entrenado en datos diarios de rendimiento de cupón cero en el Reino Unido con 11 vencimientos diferentes entre 1 mes y 10 años desde 1^{er} de Enero de 1992 al 24^{er} de marzo de 1995, que se muestra en la figura 9.



No es una tarea fácil estimar modelos GARCH univariados sobre estos datos directamente porque los rendimientos pueden permanecer relativamente fijos durante varios días. Particularmente en los vencimientos más ilíquidos, puede haber una heterocedasticidad condicional insuficiente para que los modelos GARCH converjan bien. El lector que utiliza [ex6.cucharadita](#) Veremos cuán problemática es la estimación directa de modelos GARCH sobre estos datos. Por lo tanto, las volatilidades GARCH ortogonales de la figura 10 se han comparado en su lugar con volatilidades medias móviles exponencialmente ponderadas (con una constante de suavizado de 0,9). Las volatilidades GARCH ortogonales no están tan estrechamente alineadas con las volatilidades del promedio móvil ponderado exponencialmente como lo estaban en el ejemplo anterior, pero hay suficiente acuerdo entre ellas para depositar un grado bastante alto de confianza en el modelo GARCH ortogonal. De nuevo, se usaron dos componentes principales en el GARCH ortogonal, pero el análisis de componentes principales a continuación muestra que estos dos componentes solo representan el 72 % de la variación total (en oposición a más del 99 % en la estructura temporal del petróleo crudo).

Tabla 6a: Análisis de valores propios

Componente	valor propio	R acumulada ²
P1	5.9284117	0.53894652
P2	1.9899323	0.71984946
P3	0.97903180	0.80885235

Tabla 6b: Pesos de los factores

	P1	P2	P3
1 mes	0.50916	0.60370	0.12757
2 meses	0.63635	0.62136	- 0.048183
3 meses	0.68721	0.57266	- 0.10112
6 meses	0.67638	0.47617	- - 0.10112
12 meses	0.83575	0.088099	- 0.019350
2 años	0.88733	- 0.21379	0.033486
3 años	0.87788	- 0.30805	- 0.033217
4 años	0.89648	- 0.36430	0.054061
5 años	0.79420	- 0.37981	0.14267
7 años	0.78346	- 0.47448	0.069182
10 años	0.17250	- 0.18508	- 0.95497

Claramente, el menor grado de precisión de una representación de 2 componentes principales es una de las razones de las diferencias observadas entre las volatilidades GARCH ortogonales y las volatilidades EWMA. Otro es

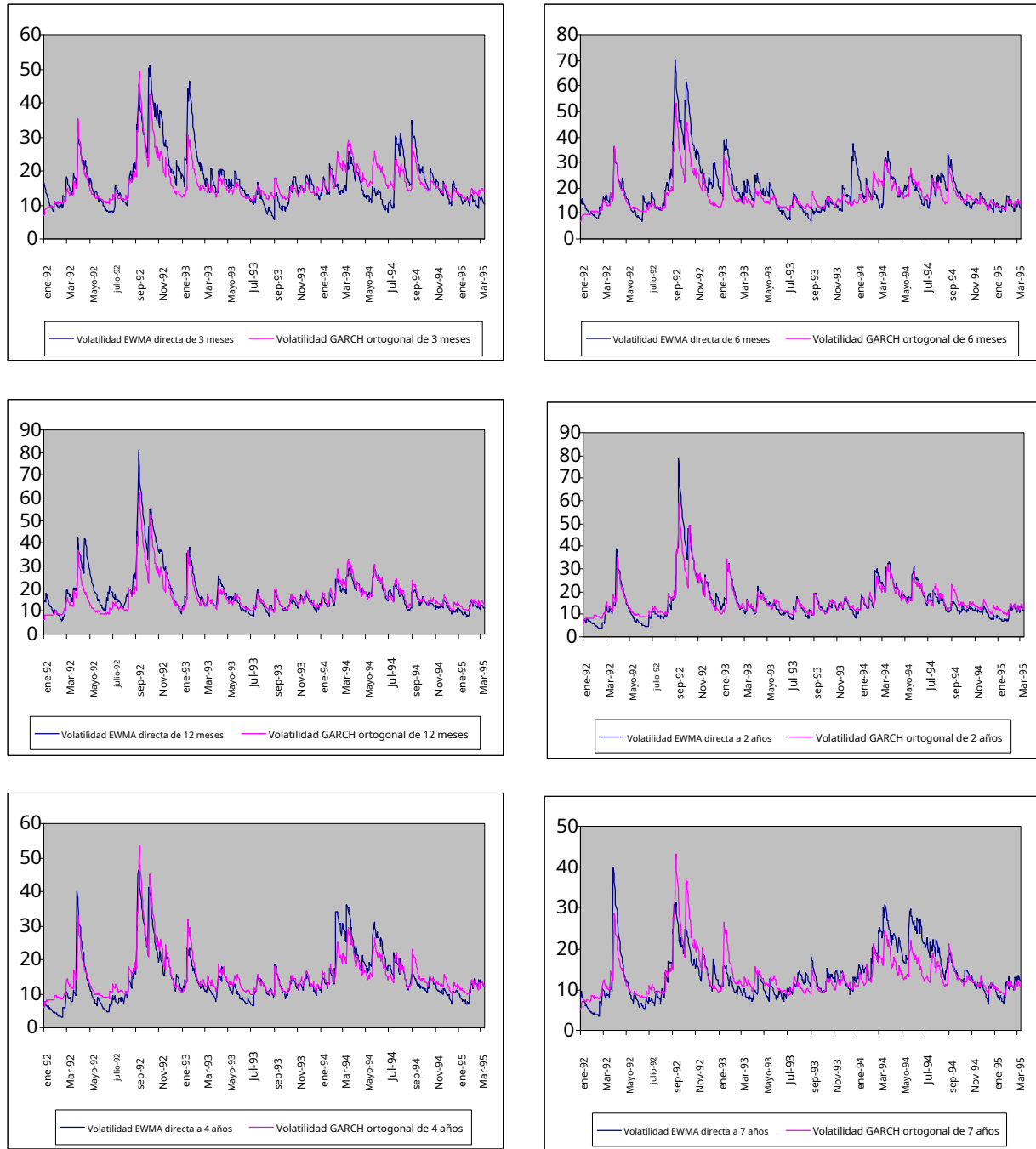
que el rendimiento a 10 años tiene una correlación muy baja con el resto del sistema, como lo refleja su peso factorial en el 1^o componente principal, que está bastante fuera de línea con el resto de las ponderaciones factoriales de este componente. El ajuste del modelo ortogonal es bueno, pero podría mejorarse aún más si se excluyera del sistema el bono a 10 años.

Las estimaciones del modelo GARCH(1,1) para los dos primeros componentes principales se proporcionan en la tabla 7 a continuación. Esta vez el segundo componente principal tiene un modelo GARCH mejor condicionado. Por lo tanto, las inclinaciones en la curva de rendimiento del Reino Unido son menos temporales y más importantes que en la estructura temporal del petróleo crudo discutida anteriormente. Una consecuencia de esto es que las correlaciones GARCH ortogonales tendrán menos saltos y serán más estables que las correlaciones de la figura 8.

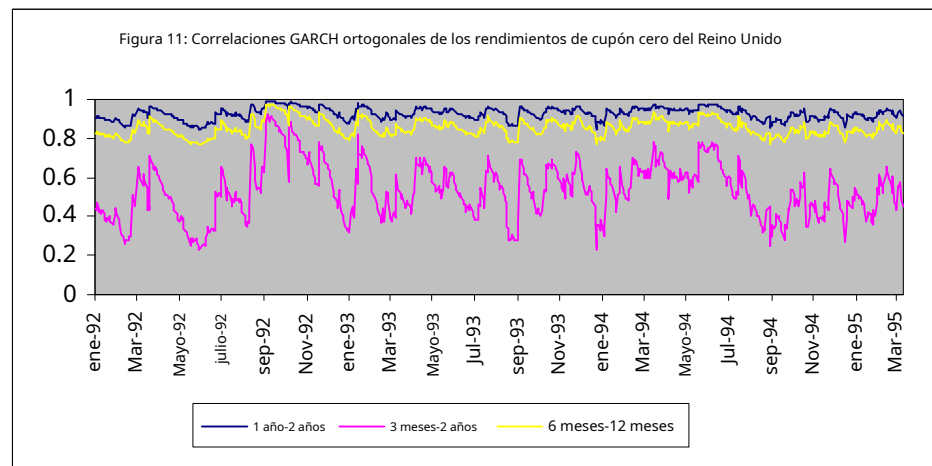
Tabla 7: Modelos GARCH(1,1) del Primer y Segundo Componente Principal

	1 ^o Componente principal		2 ^o Componente principal	
	Coeficiente	t-stat	Coeficiente	t-stat
constante	. 769758E-02	. 249734	. 033682	1.09064
ω	. 024124	4.50366	. 046368	6.46634
α	. 124735	6.46634	. 061022	9.64432
β	. 866025	135.440	. 895787	50.8779

Figura 10: Comparación de EWMA directo con volatilidades GARCH ortogonales



La Figura 11 muestra algunas de las correlaciones GARCH ortogonales para los rendimientos cupón cero del Reino Unido. El método ortogonal no solo proporciona una forma de estimar las volatilidades GARCH y las estructuras temporales de volatilidad que pueden ser difíciles de obtener mediante la estimación GARCH univariada directa.¹⁰ También dan correlaciones GARCH muy sensibles, que serían muy difíciles de estimar utilizando GARCH multivariado directo. Y todo esto se obtiene de solo 2 componentes principales que representan las fuentes importantes de información: todo el resto de la variación se atribuye al "ruido" y no se incluye en el modelo.



Una técnica útil para parametrizar modelos GARCH multivariantes es comparar las estimaciones de volatilidad GARCH del GARCH multivariante con las obtenidas de la estimación GARCH univariante directa. De manera similar, al calibrar un modelo GARCH ortogonal, se podrían comparar las estimaciones de volatilidad y correlación con las obtenidas de otros modelos, como un modelo de correlación EWMA u otros modelos GARCH multivariados. Por supuesto, hay problemas con esto. ¿Qué elección de constantes de suavizado se debe hacer cuando la comparación es con volatilidades de promedio móvil exponencialmente ponderadas? Si el sistema es grande, es muy posible que se presenten problemas de convergencia, entonces, ¿qué tan seguro se puede estar acerca de la validez de las estimaciones de los parámetros GARCH multivariados de BEKK o vech diagonal?

Dado que el GARCH multivariado no es fácil de usar para sistemas grandes, se utiliza un sistema relativamente pequeño de seis índices bursátiles europeos. Se debe tener cierto cuidado con la calibración inicial de GARCH ortogonal. Los factores que hay que tener en cuenta son:

- *Los activos que se incluyen en el sistema.* El análisis de componentes principales funciona mejor en un sistema altamente correlacionado. Un activo que tiene propiedades muy idiosincrásicas en comparación con otros activos del sistema (como el bono a 10 años en [ex6.cucharadita](#)) corromperá las volatilidades y correlaciones de los otros activos en el sistema, porque todos se basan en los componentes principales que son comunes a todos los activos.

¹⁰Estos no se muestran, pero pueden generarse fácilmente adaptando el [ex5.cucharadita](#) a estos datos

- *El período de tiempo utilizado para la estimación.* Las volatilidades GARCH de los componentes principales cambian con el tiempo, pero solo sus valores actuales son los que importan para pronosticar la matriz de covarianza. Sin embargo, las ponderaciones de los factores también se utilizan en este pronóstico, y estas son constantes que toman diferentes valores según el período de estimación. Entonces, cambiar el período de tiempo para la estimación afecta los pronósticos actuales de la matriz de covarianza principalmente porque afecta la matriz de ponderaciones de los factores \mathbf{A} , en lugar de las volatilidades de los componentes principales en \mathbf{D}_t .

Los modelos GARCH(1,1) univariados se estiman para cada componente principal, dando una matriz de covarianza diagonal variable en el tiempo \mathbf{D}_t . Entonces las varianzas y covarianzas GARCH ortogonales se obtienen de la matriz \mathbf{V}_t dada por

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{A} \mathbf{D}_t \mathbf{A}'$$

dónde \mathbf{A} es la matriz normalizada de pesos factoriales que vuelve a escalar cada elemento de \mathbf{W} mediante la multiplicación por la desviación estándar adecuada, como se describe en la sección 3. Los resultados son las 4 volatilidades y las 6 gráficas de correlación que se muestran en la figura 12. (Anderson et al., 1993). Primero está el modelo diagonal de Vech, que en dos dimensiones toma la forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,t} &= \omega_1 + \alpha_1 \varepsilon_{1,t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{1,t-1}^2 \\ \sigma_{2,t} &= \omega_2 + \alpha_2 \varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{2,t-1}^2 \\ \sigma_{12,t} &= \omega_{12} + \alpha_3 \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} + \beta_3 \sigma_{12,t-1}\end{aligned}$$

o, en notación matricial

$$\text{vech}(\mathbf{V}_t) = \mathbf{A} + \mathbf{B} \text{vech}(\mathbf{V}_{t-1}) + \mathbf{C} \text{vech}(\mathbf{V}_{t-1}) \quad (7)$$

dónde \mathbf{V}_t es la matriz de covarianza condicional en el tiempo t , $\text{vech}(\mathbf{V}_t) = (\sigma_{11,t}, \sigma_{22,t}, \sigma_{12,t})'$, $\xi_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})'$, $\mathbf{A} = (\omega_1, \omega_2, \omega_{12})'$, $\mathbf{B} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y $\mathbf{C} = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Pero aunque puede ser relativamente fácil de estimar, la parametrización diagonal vech (7) impone severas restricciones de ecuaciones cruzadas a los parámetros. Una parametrización más general de GARCH multivariante es el modelo BEKK

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{u} \mathbf{u}' + \mathbf{B}' \xi_{t-1} \xi_{t-1}' \mathbf{B} + \mathbf{C}' \mathbf{V}_{t-1} \mathbf{C} \quad (8)$$

dónde \mathbf{u} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son matrices $n \times n$ y \mathbf{A} es triangular. La parametrización (8) garantiza una definición positiva, pero el número de parámetros a estimar crece rápidamente con la dimensión del sistema, por lo que las superficies de verosimilitud se vuelven muy planas. En consecuencia, el modelo BEKK a menudo encuentra problemas de convergencia a menos que se establezca algún tipo de restricción en los parámetros.

El último ejemplo de calibración del modelo GARCH ortogonal utiliza 6 índices bursátiles europeos: Francia (CAC40), Alemania (DAX30), Holanda (AEX), España (IBEX), Suecia (OMX) y el Reino Unido (FTSE100).¹¹

Un análisis de componentes principales sobre los datos de rentabilidad diaria de los precios del Índice Morgan Stanley, del 1^{er} de Abril 1993 al 31^{er} de Diciembre muestra correlaciones con IBEX y OMX algo menores que entre los demás índices. Entonces es mejor dividir los 6 índices en dos grupos: AEX, CAC, DAX y FTSE, en un grupo e IBEX y OMX en el otro. Para el primer grupo, los pesos de los factores del componente principal son

	Tabla 8a: Pesos de los factores			
	AEX	CAC	DAX	FTSE
P1	0.866	0.834	0.755	0.818
P2	0.068	- 0.238	0.615	- 0.397
P3	0.224	- 0,496	- 0,027	0,294
P4	0.441	- 0,226	- 0,296	0,036

Los pesos del primer componente principal son comparables y bastante altos. Dado que este es el componente de la tendencia, el sistema, en general, se mueve junto, y el análisis de valores propios a continuación indica que los movimientos comunes en la tendencia explican el 67 % de la variación total durante el período de 4 años:

Tabla 8b: Análisis de valores propios		
Componente	valor propio	R acumulada ²
P1	2.686141	0.671535
P2	0.596853	0.820749
P3	0.382549	0.916386
P4	0.334456	1

Los 3^{er} y 4^{er} El componente principal suele ser relativamente más importante en los sistemas de acciones que en las estructuras temporales, y este caso no es una excepción. Entonces, los 4 componentes principales se han utilizado en el modelo GARCH ortogonal, es decir, la matriz D es una matriz diagonal de 4x4. La Tabla 9 a continuación informa los resultados de la estimación de modelos GARCH(1,1) univariados en cada uno de los cuatro componentes principales, para dar los elementos de D en cada momento.¹²

¹¹Muchas gracias al Dr. Aubrey Chibumba por producir estos resultados como parte de su tesis de maestría en Filosofía en la Universidad de Sussex.

¹²Los modelos GARCH(1,1) asimétricos serían más apropiados debido al efecto de apalancamiento en los mercados de acciones. No hay ningún problema con el uso de modelos GARCH(1,1) univariados asimétricos en el GARCH ortogonal, pero se encontraron dificultades de convergencia al intentar estimar modelos GARCH asimétricos con ambas parametrizaciones multivariantes.

Tabla 9: Modelos GARCH(1,1) de los Componentes Principales

	1ordenador personal		2ordenador personal		3ordenador personal		4ordenador personal	
	Coeficiente	t-stat	Coeficiente	t-stat	Coeficiente	t-stat	Coeficiente	t-stat
constante	0.00613	0.19446	0.00262	0.09008	- 0.0801	- 0.26523	0.00267	0.087511
ω	0.032609	1.90651	0.066555	3.10594	0.089961	2.12915	0.203359	1.80057
α	0.033085	2.69647	0.086002	4.57763	0.067098	2.92511	0.070417	2.00423
β	0.934716	35.9676	0.846648	25.9852	0.841618	14.4038	0.726134	5.22888

Este sistema tiene solo 4 variables, por lo que no hay problemas de convergencia con ninguno de los modelos GARCH multivariados. El modelo vech diagonal de 4 dimensiones tiene 10 ecuaciones, cada una con 3 parámetros. Las estimaciones de 30 parámetros y sus estadísticas t (en cursiva) se informan en la tabla 10. El modelo BEKK de 4 dimensiones tiene 42 parámetros y las estimaciones de las matrices **A**, **B**, y **C** se dan en la tabla 11.

Tabla 10: Estimaciones de parámetros diagonales de Vech

Ecuaciones de varianza				Ecuaciones de covarianza					
AEX	CAC	DAX	FTSE	AEX-CAC	AEX-DAX	AEX-FTSE	CAC-DAX	FTSE-CAC	FTSE-DAX
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
5.8x10 ⁻⁶	3.4x10 ⁻⁶	5.0x10 ⁻⁶	1.8x10 ⁻⁶	1.9x10 ⁻⁶	9.3x10 ⁻⁶	1.8x10 ⁻⁶	8.6x10 ⁻⁶	3.0x10 ⁻⁶	1.6x10 ⁻⁶
<i>3.11</i>	<i>2.19</i>	<i>1.71</i>	<i>2.11</i>	<i>2.45</i>	<i>1.63</i>	<i>2.25</i>	<i>3.24</i>	<i>1.58</i>	<i>2.28</i>
α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}
.054900	0.028889	0.028264	0.024601	0.021826	0.031806	0.028069	0.059739	0.022341	0.028377
<i>4.14</i>	<i>3.15</i>	<i>2.28</i>	<i>2.68</i>	<i>3.75</i>	<i>2.40</i>	<i>3.68</i>	<i>3.56</i>	<i>2.18</i>	<i>2.88</i>
β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}
0.82976	0.89061	0.83654	0.91227	0.95802	0.74503	0.926414	0.829753	0.861387	0.934363
<i>18.23</i>	<i>21.17</i>	<i>9.58</i>	<i>25.2</i>	<i>79.49</i>	<i>5.20</i>	<i>36.36</i>	<i>17.93</i>	<i>10.67</i>	<i>38.74</i>

Tabla 11: Estimaciones de parámetros BEKK

	AEX	CAC	DAX	FTSE
A	0.00160	0	0	0
	0.00008	- 0.00176	0	0
	0.00094	0.00197	- 0.00087	0
	0.00142	- 0.00003	- 0.00051	2.5x10 ⁻⁶
B	0.22394	- 0.04156	0.019373	0.04785
	- 0.07147	0.18757	- 0.05247	0.031895
	- 0.06286	- 0.04764	0.29719	0.07003
	- 0.016277	- 0.027589	- 0.017405	0.178563
C	0.951805	0.027231	- 0.050236	0.026130
	0.033141	0.9615723	0.023822	0.013623
	0.067985	0.053024	0.844291	0.005211
	0.022278	0.029257	- 0.014482	0.948453

Figura 12: Comparación de GARCH ortogonal con modelos GARCH multivariados

Figura 12a: Comparación de volatilidad de modelos GARCH (AEX)

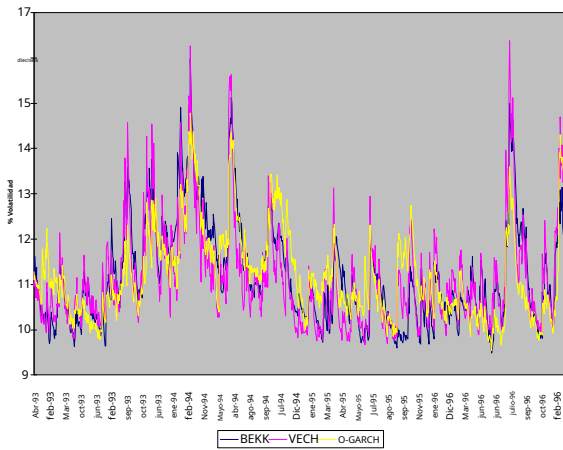


Figura 12b: Comparación de volatilidad de modelos GARCH (CAC)

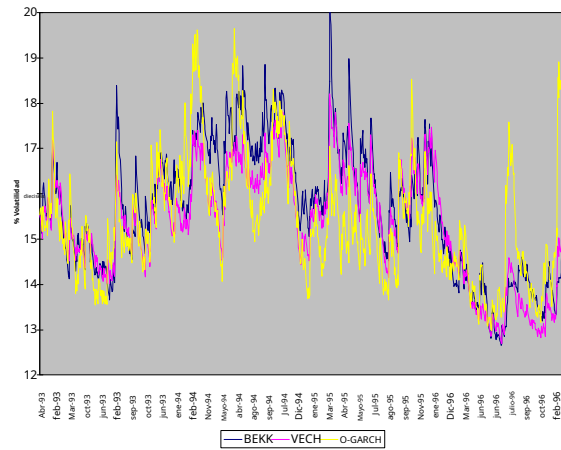


Figura 12c: Comparación de volatilidad de modelos GARCH (DAX)

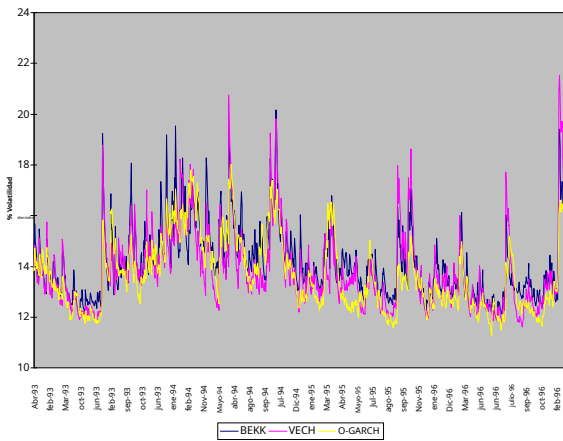


Figura 12d: Comparación de volatilidad de modelos GARCH (FTSE)

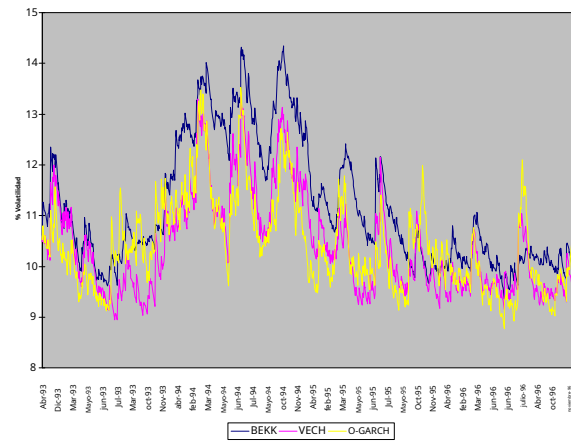


Figura 12e: Comparación de correlación de modelos GARCH (AEX-CAC)

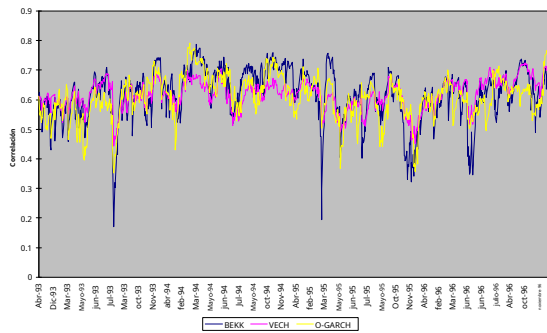


Figura 12f: Comparación de correlación de modelos GARCH (AEX-DAX)

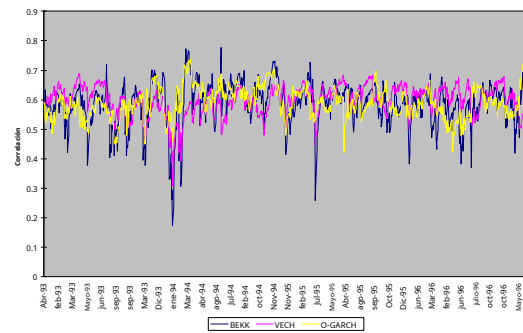


Figura 12g: Comparación de correlación de modelos GARCH (AEX-FTSE)

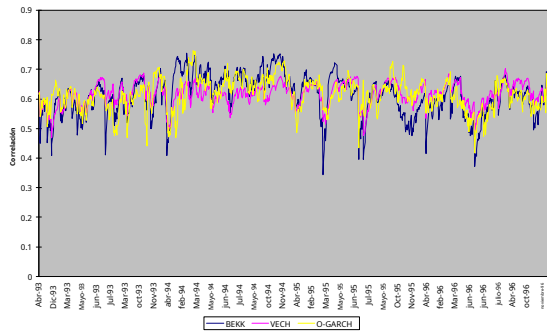


Figura 12h: Comparación de correlación de modelos GARCH (CAC-DAX)

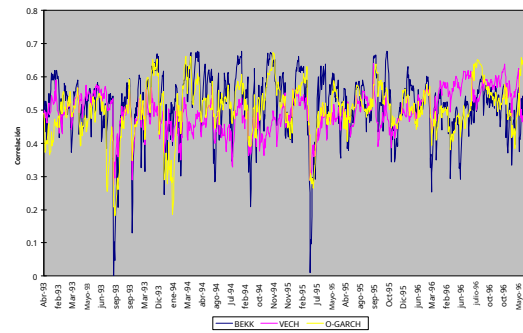


Figura 12i: Comparación de correlación de modelos GARCH (CAC-FTSE)

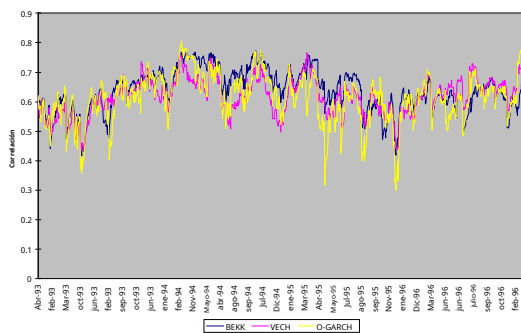
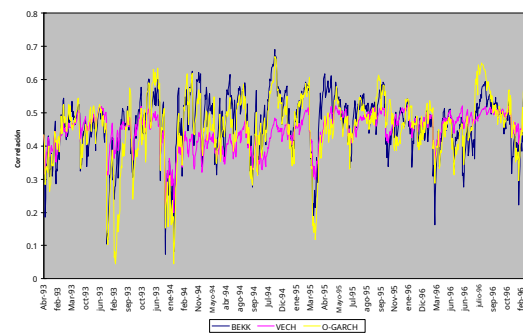


Figura 12j: Comparación de correlación de modelos GARCH (DAX-FTSE)



Es importante darse cuenta de que los 10 gráficos de la figura 12 provienen de los modelos informados en las tablas 9 a 11 anteriores. Entonces, las volatilidades y correlaciones de BEKK provienen del modelo BEKK estimado en la tabla 11. De manera similar, solo hay un modelo vech diagonal que genera la serie VECHE para los gráficos (tabla 10) y un modelo GARCH ortogonal para los gráficos GARCH ortogonales (tablas 9). Sin embargo, hay casos en los que las volatilidades GARCH ortogonales coinciden bastante con las volatilidades BEKK pero no con las volatilidades vech (gráficos f, h y j). En algunos casos, las volatilidades GARCH ortogonales son más similares a las volatilidades vech que las volatilidades BEKK (gráficos d, e e i) y en algunos casos las volatilidades difieren notablemente (gráficos a, b, c y g). Dicho esto, no hay una gran diferencia entre los tres modelos en ninguna de las gráficas. *poder* difieren cuando se utilizan diferentes modelos, estos gráficos no son nada anormales.

6. Generación de una matriz de covarianza grande en todas las categorías de factores de riesgo

Esta sección describe el uso del análisis de componentes principales para generar matrices de covarianza de grandes dimensiones. El método evita muchos de los problemas conocidos con los datos de RiskMetrics: se puede asegurar una definición positiva sin usar la misma constante de suavizado para todos los mercados; no hay necesidad de reducir las dimensiones utilizando la interpolación a lo largo de la curva de rendimiento; y el método se ajustará a los requisitos de los reguladores sobre datos históricos si se utiliza al menos un año de datos para calcular los componentes principales y sus ponderaciones factoriales.

Los factores de riesgo (índices del mercado de acciones, tipos de cambio, materias primas, bonos del gobierno y tasas del mercado monetario, etc.) se dividen primero en categorías razonablemente altamente correlacionadas, de acuerdo con las ubicaciones geográficas y los tipos de instrumentos. A continuación, se utiliza el análisis de componentes principales para ortogonalizar cada subsistema de factores de riesgo y se aplica una media móvil exponencialmente ponderada a cada uno de los componentes principales para obtener la matriz de covarianza diagonal. Luego, las ponderaciones de los factores del análisis de componentes principales se utilizan para 'empalmar' una gran matriz de covarianza para el sistema original.

El método se explica solo para dos categorías de factores de riesgo, luego la generalización a cualquier número de categorías de factores de riesgo es sencilla. Supongamos que hay n factores de riesgo en el primer sistema, digamos que son índices de acciones europeas, por lo que los factores de riesgo son los índices del mercado de acciones en n países europeos diferentes. Supongamos que el segundo sistema, digamos los tipos de cambio europeos, tenga m factores de riesgo, siendo los tipos de cambio nacionales/extranjeros para los mismos n países (entonces $m = n$ o $m = n-1$ en este ejemplo dependiendo de si 'nacional' es un país europeo). Más generalmente, n y m pueden ser cualquier cosa; no son las dimensiones lo que importa. Lo que importa es que cada sistema de factores de riesgo sea adecuadamente codependiente, de modo que justifique la categorización como un subsistema de factores de riesgo separado y coherente.

El primer paso es encontrar los componentes principales de cada sistema, $\mathbf{PAG} = (\mathbf{PAG}_1, \dots, \mathbf{PAG}_r)$, y por separado $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_s)$ donde r y s son el número de componentes principales que se utilizan en la representación de cada sistema. Denotamos por $\mathbf{A}(n \times r)$ y $\mathbf{B}(m \times s)$ las matrices de ponderaciones factoriales normalizadas obtenidas en el ACP de los sistemas de renta variable y tipo de cambio europeos respectivamente. Entonces, las covarianzas 'dentro de los factores', es decir, la matriz de covarianza para el sistema de equidad y para el sistema de tipo de cambio por separado, están dadas por $\mathbf{A} \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}'$ y $\mathbf{B} \mathbf{\Lambda} \mathbf{B}'$ respectivamente. Aquí $\mathbf{\Lambda}_1$ y $\mathbf{\Lambda}_2$ son las matrices diagonales de las varianzas de los componentes principales de cada sistema. Pueden estimarse usando promedios móviles ponderados exponencialmente como se describe anteriormente, o modelos GARCH como se describe a continuación.

Las covarianzas de los factores cruzados son $\mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{B}'$ donde \mathbf{C} denota la matriz $r \times s$ de covarianzas de los componentes principales en los dos sistemas, es decir

$$\mathbf{C} = \{\text{COV}(P_i, q_j)\}$$

Entonces la matriz de covarianza completa del sistema de factores de riesgo de renta variable europea y tipo de cambio es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{NUNCIO}\mathbf{A}' & \mathbf{ACB}' \\ -(\mathbf{ACB})' & \mathbf{BD}_2\mathbf{B}' \end{bmatrix}$$

Las matrices de covarianza intrafactorial $\mathbf{A}\mathbf{NUNCIO}\mathbf{A}'$ y $\mathbf{BD}_2\mathbf{B}'$ siempre será positivo semidefinido. Pero no siempre es posible garantizar la semidefinición positiva de la matriz de covarianza completa del sistema original, a menos que los bloques fuera de la diagonal \mathbf{ACB}' se establecen en cero. Esto no es necesariamente una tontería; de hecho, puede ser bastante sensato a la luz de las enormes inestabilidades que a menudo se observan en las covarianzas de factores cruzados. Si el modelo de riesgo requiriera covarianzas de factores cruzados distintas de cero, sería posible estimar la covarianza entre los componentes principales de diferentes subsistemas de factores de riesgo utilizando promedios móviles ponderados exponencialmente o GARCH ortogonal bivariado, dando la estimación requerida para \mathbf{C} . Pero sería necesario verificar la semidefinición positiva de la matriz completa, utilizando una rutina de valor propio estándar.

7. Resumen y Conclusiones

El objetivo principal de este artículo es explicar y validar empíricamente un nuevo método para obtener matrices de correlación GARCH grandes utilizando solo técnicas de estimación GARCH univariadas en los componentes principales de la serie de rendimiento original. Se han presentado ejemplos empíricos sobre futuros de materias primas, tasas de interés e índices bursátiles internacionales, y se han utilizado para explicar la mejor manera de emplear el método en diferentes circunstancias. Se encuentra que cuando los sistemas se adaptan adecuadamente, el método ortogonal se compara muy favorablemente con los modelos GARCH multivariantes generales. En muchos casos, la divergencia entre las estimaciones GARCH ortogonales y las estimaciones BEKK es mucho menor que entre las estimaciones VECH y BEKK.

Los ejemplos presentados en este documento ilustran algunas de las muchas ventajas de esta metodología: Ø

- Ø Las matrices de covarianza siempre serán semidefinidas positivas: no hay necesidad de imponer restricciones de parámetros como en los datos de RiskMetrics o los modelos GARCH multivariados estándar; Las dificultades computacionales se reducen al mínimo (ya que solo son necesarios modelos GARCH univariados) y el tiempo computacional se reduce muy significativamente;
- Ø Elegir menos componentes principales para representar el sistema puede controlar la cantidad de 'ruido', y esto puede ser ventajoso para producir estimaciones de correlación más estables;
- Ø El método producirá volatilidades y correlaciones para todas las variables en el sistema, incluidas aquellas para las que la estimación GARCH directa es computacionalmente difícil;

La flexibilidad y la precisión de las técnicas de pronóstico de GARCH las colocan en una posición única para satisfacer muchas de las necesidades de la gestión de riesgos y los comerciantes. Pero sin un método factible para calcular matrices de covarianza grandes usando técnicas GARCH, este potencial no se realizará. Dados los problemas insuperables en la estimación directa de matrices de covarianza GARCH grandes, pero también dada la necesidad de proporcionar pronósticos de covarianza de reversión a la media para usar en modelos de valor en riesgo y análisis de riesgo de cartera, la metodología de modelado presentada en este documento es de importancia.

El modelo GARCH ortogonal se basa en una buena idea: simplemente capturar la variabilidad en un sistema de retornos por unos pocos factores causales no correlacionados y atribuir el resto de la variación al 'ruido'. El uso de factores ortogonales permite que las rutinas de optimización GARCH se ejecuten solo en series temporales univariadas. Esto reducirá considerablemente la complejidad computacional, y las varianzas y covarianzas GARCH completas del sistema se derivan como transformaciones simples de las varianzas de los factores. Los ejemplos empíricos presentados aquí muestran que el GARCH ortogonal se puede calibrar con bastante facilidad para que las varianzas y covarianzas coincidan estrechamente con las obtenidas de otros modelos.

Si bien este documento brinda una validación empírica exhaustiva de los modelos GARCH ortogonales para acciones, materias primas y tasas de interés, no intenta brindar ningún resultado teórico sobre las propiedades estadísticas de los modelos GARCH ortogonales. Se espera que el trabajo presentado aquí motive a algunos lectores hacia un trabajo más teórico sobre el modelo.

Profesora Carol Alexander
 Cátedra de Gestión de Riesgos
 Centro ISMA, Escuela de Negocios para Mercados Financieros de la
 Universidad de Reading,
 Whiteknights, PO BOX 242
 Lectura, RG6 6BA

c.alexander@ismacentre.reading.ac.uk

www.ismacentre.reading.ac.uk

Línea Directa: 00 44 1189 31 6431

Línea General: 00 44 1189 31 6675

Bibliografía

Alexander, CO (1992) "El mundo según GARCH" *RIESGO* 5nº8 120-125

Alexander CO (1996) "Evaluando el uso de RiskMetrics™ como una herramienta de medición de riesgo para su operación: Cuáles son sus ventajas y limitaciones" *Uso, Negociación y Regulación de Derivados* 2Núm. 3 págs. 277-285

Alexander, CO y C. Leigh (1997) "Sobre las matrices de covarianza utilizadas en los modelos VaR" *Diario de Derivados* 4No. 3 (Primavera) pp 50-62

Alexander, CO (1998) "Volatilidad y correlación: Métodos, modelos y aplicaciones" en *Análisis y Gestión de Riesgos: Medición y modelado del riesgo financiero* (CO Alexander, Ed) Wileys

Alexander, CO (1999) "Correlación y cointegración en los mercados de energía" en *Gestión del riesgo del precio de la energía* (2Dakota del Norte Edición) Publicaciones RISK pp291-304

Alexander, CO (2000) "Métodos ortogonales para generar matrices de covarianza semidefinidas positivas grandes" *Documentos de debate del Centro ISMA sobre finanzas 2000-06* Disponible de www.ismacentre.rdg.ac.uk

Alexander, CO (2001) "GARCH ortogonal" en *Dominando el Riesgo Volumen 2* (CO Alexander, Ed.) Financial Times-Prentice Hall

Alexander, CO y A. Chibumba (1996) "Factor ortogonal multivariante GARCH" *Documentos de debate de la Universidad de Sussex en Matemáticas*

Baillie, RT y T. Bollerslev (1989) "El mensaje en los tipos de cambio diarios: un cuento de varianza condicional". *Revista de Estadísticas Económicas y Empresariales* 7:3 págs. 297-305.

Baillie, RT y T. Bollerslev (1990) "Volatilidad intradía e intermercado en los tipos de cambio". *Revisión de Estudios Económicos* 58 págs. 565-85.

Bollerslev, T. (1986) "Heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizada". *Diario de Econometría* 31 págs. 307-327.

Bollerslev, T., RF Engle y DB Nelson (1994) "Modelos ARCH" en *manual de econometría* vol. 4, ed. RF Engle y DL McFaddan, Holanda Septentrional

Brailsford, TJ y Faff, RW (1996) "Una evaluación de las técnicas de pronóstico de volatilidad" *Revista de Banca y Finanzas*, 20:3 págs. 419-438

Dimson, E. y Marsh, P. (1990) "Pronóstico de volatilidad sin espionaje de datos" *Revista de Banca y Finanzas*, 14 págs. 399-421

Duan, JC (1995) "El modelo de valoración de opciones GARCH" *Finanzas Matemáticas* 5:1, págs. 13-32.

Duan, JC (1996) 'Rompiendo la sonrisa' *RIESGO* 9 págs. 55-59

Engle, RF (1982) "Heterocedasticidad condicional autorregresiva con estimaciones de la varianza de la inflación del Reino Unido". *Econometría* 50:4 págs. 987-1007.

Engle, RF (2000) "Correlación condicional dinámica: una clase simple de modelos GARCH multivariantes" versión en pdf disponible en <http://weber.ucsd.edu/~mbacci/engle/cv.html>

Engle, RF y T. Bollerslev (1986) "Modelado de la persistencia de varianzas condicionales". *Revisión econométrica* 55:1 págs. 1-50.

Engle, RF, Ng, V. y Rothschild, M. (1990) "Valoración de activos con una estructura de covarianza factorial ARCH: Estimaciones empíricas para letras del tesoro" *Diario de Econometría*, 45 págs. 213-238

Engle, RF y KF Kroner (1993) "ARC generalizado simultáneo multivariado" *Teoría Económica* 11 págs. 122-150

Engle, RF y GGJ Lee (1993) "Pronóstico de volatilidad a largo plazo para acciones individuales en un modelo de un factor" Universidad de California, San Diego, Documento de trabajo del Departamento de Economía: 93-30, julio de 1993, p. 20

Engle, RF y Mezrich J (1995) "Lidiando con GARCH" *RIESGO*, 8:9 págs. 112-117 Engle, RF y

J. Rosenberg (1995) "GARCH gamma" *Diario de Derivados* 2 págs. 47-59

Figlewski, S. (1994) "Pronóstico de volatilidad utilizando datos históricos" Centro Salomon de la Universidad de Nueva York (Leonard N. Stern School of Business) Serie de documentos de trabajo no. S-94-13

Kroner, KF y S. Claessens (1991) "Carteras de cobertura dinámica óptima y composición monetaria de la deuda externa". *Revista de dinero y finanzas internacionales* 10 págs. 131-48.