



Modelos GARCH multivariado para el cálculo de valor en riesgo de activos financieros utilizando R y Python

SIMPOSIO
INTERNACIONAL DE ESTADÍSTICA

José Manuel Pérez Pérez, Valentina Tamayo Guarín,
Mauricio Alejandro Mazo Lopera.

Escuela de Estadística - Universidad Nacional de Colombia sede Medellín.

Resumen

Este proyecto tiene como objetivo analizar la aplicación de modelos GARCH multivariados en el cálculo del Valor en Riesgo (VaR) de un portafolio de activos financieros. El VaR es un concepto fundamental en finanzas que permite evaluar y gestionar el riesgo. Se utilizarán herramientas y software libre como R y Python para llevar a cabo este análisis. Además, se explorará la teoría detrás de los modelos GARCH y su extensión al caso multivariado.

1. Introducción

Los modelos GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) son ampliamente utilizados en el análisis de la volatilidad en series de tiempo, especialmente en el campo de las finanzas. Estos modelos han ganado popularidad debido a su capacidad para capturar patrones de variabilidad heterocedástica, donde la varianza no es constante a lo largo del tiempo. Esto los convierte en una herramienta valiosa para la medición y gestión de riesgos financieros, ya que reflejan de manera más precisa las fluctuaciones reales en los mercados.

2. Obtención de datos

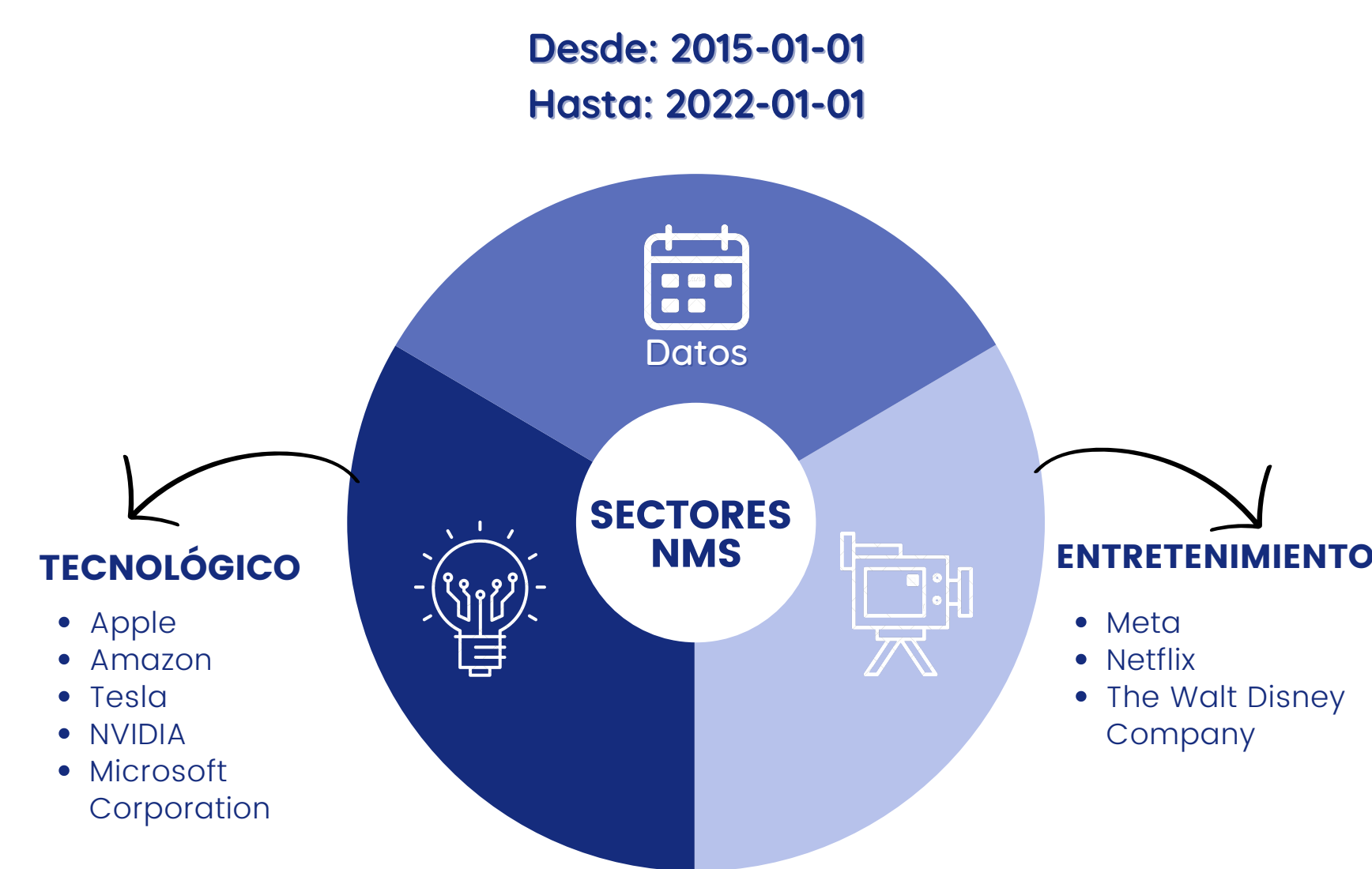


Figura 1: Acciones del Sistema de Mercado Nacional(NMS).

Se han analizado ocho activos de renta variable que destacan por su importante capitalización bursátil. Los datos pertinentes se obtuvieron utilizando el software R y se descargaron desde Yahoo Finance.

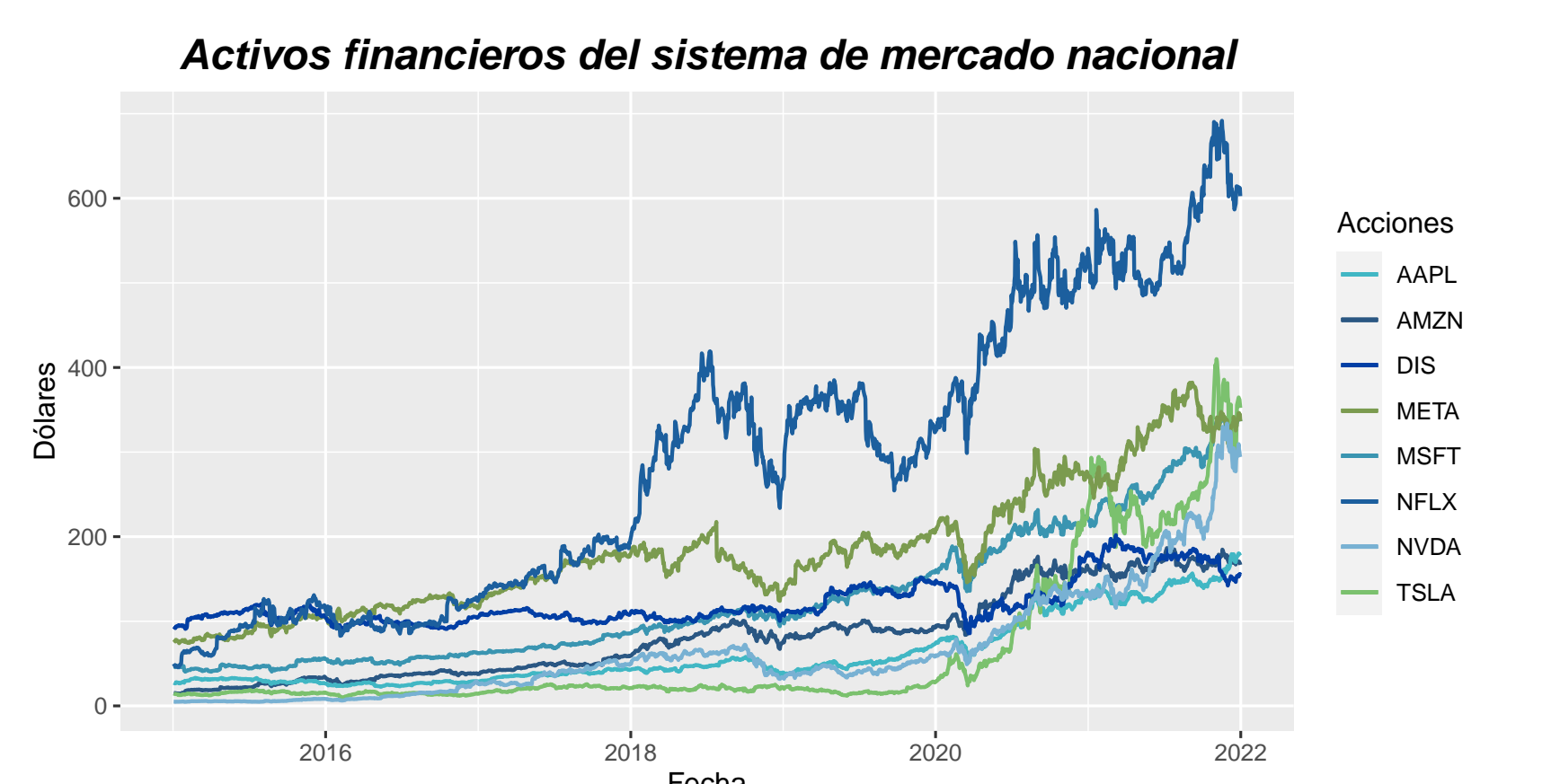


Figura 2: Acciones a considerar del sistema de mercado nacional(NMS).

3. Retornos logarítmicos

Se encargan de medir la rentabilidad de una inversión, puede ser expresada como un porcentaje que indica el aumento o disminución en relación con el día anterior.

$$r_t = \text{Log} \left(\frac{y_t}{y_{t-1}} \right)$$

Con el propósito de realizar un análisis adecuado, se ha desarrollado una función para detectar aumentos o disminuciones en los retornos que superen el 20%. Posteriormente, se lleva a cabo un proceso de imputación utilizando una ventana de medias móviles.

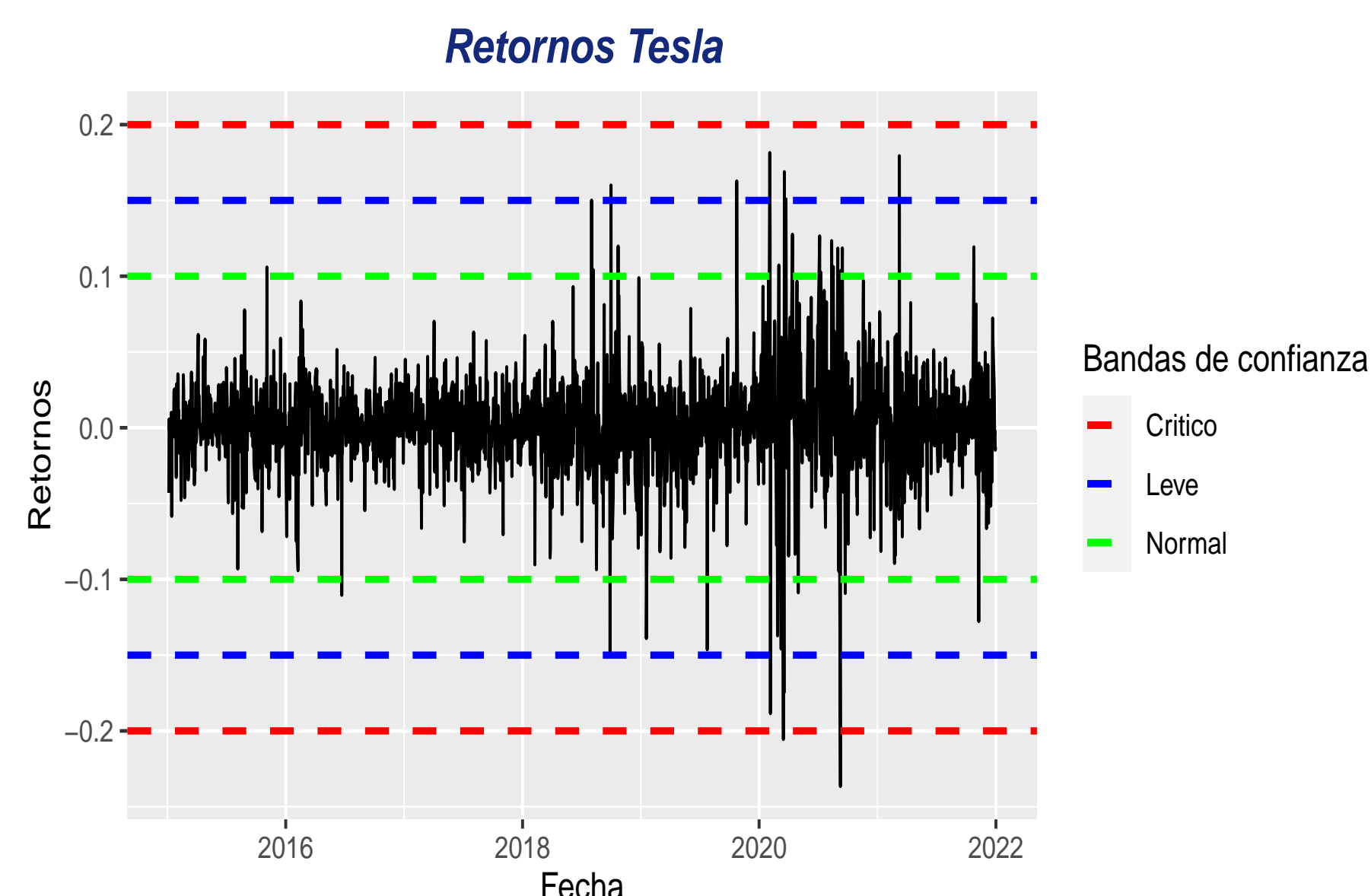


Figura 3: Bandas de confianza para los retornos de la acción Tesla.

4. Modelos GARCH

Modelo GARCH Univariado: Los modelos GARCH son una clase de modelos econométricos que se utilizan para modelar la volatilidad de una serie temporal financiera. A diferencia de los modelos tradicionales que asumen que la varianza es constante, los modelos GARCH permiten que la varianza cambie con el tiempo.

Modelo estadístico:

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Modelamiento de la variabilidad de las acciones:

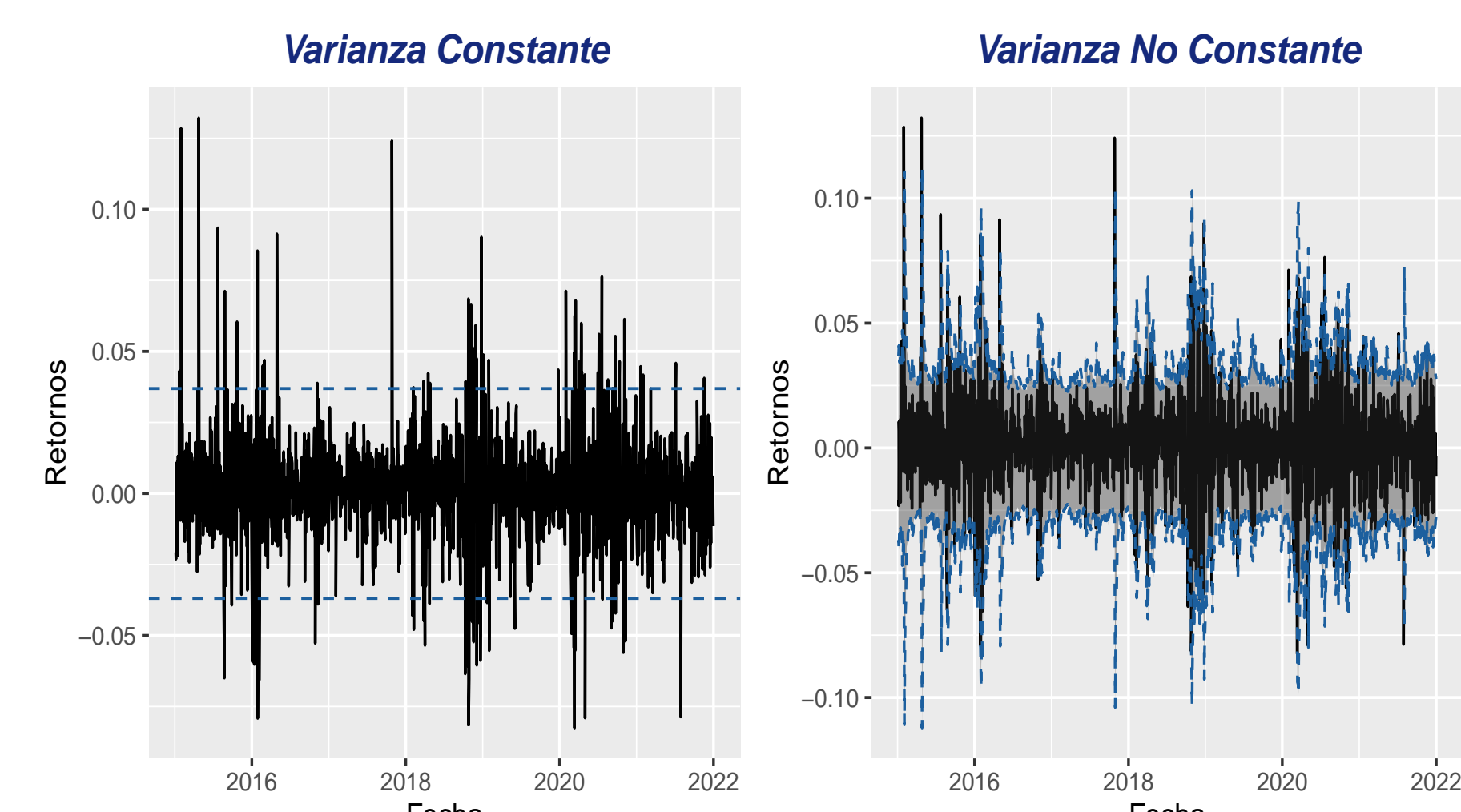


Figura 4: Comparación de la varianza para los retornos de la acción Amazon.

Modelo GARCH ortogonal:

El procedimiento para ajustar un modelo GARCH ortogonal es el siguiente:

- Para el conjunto de vectores de series r_1, r_2, \dots, r_T , considere la matriz $Y = [r_1, r_2, \dots, r_T]$.
- Estandarizar la matriz Y , restando la media y dividiendo por la desviación típica de cada columna, obteniendo la matriz X .
- Obtener las matrices de valores propios Λ , y de vectores propios W , de la matriz de covarianzas y varianzas, la cual está dada por: $\frac{X^T X}{T}$.
- Obtener la matriz de componentes principales, P de dimensiones $(T \times k)$, que se puede escribir como:

$$P = XW,$$

$$P_1 = w_{1,1}X_1 + w_{1,2}X_2 + \dots + w_{1,T}X_T$$

- Para cada componente ajustar un modelo GARCH univariante para la volatilidad, y generar las matrices diagonales D_t , $t = 1, \dots, T$.
- Obtenga la matriz de pesos factoriales reescalada A , y para cada instante t considere la matriz de covarianzas condicional:

$$V_t = AD_t A'$$

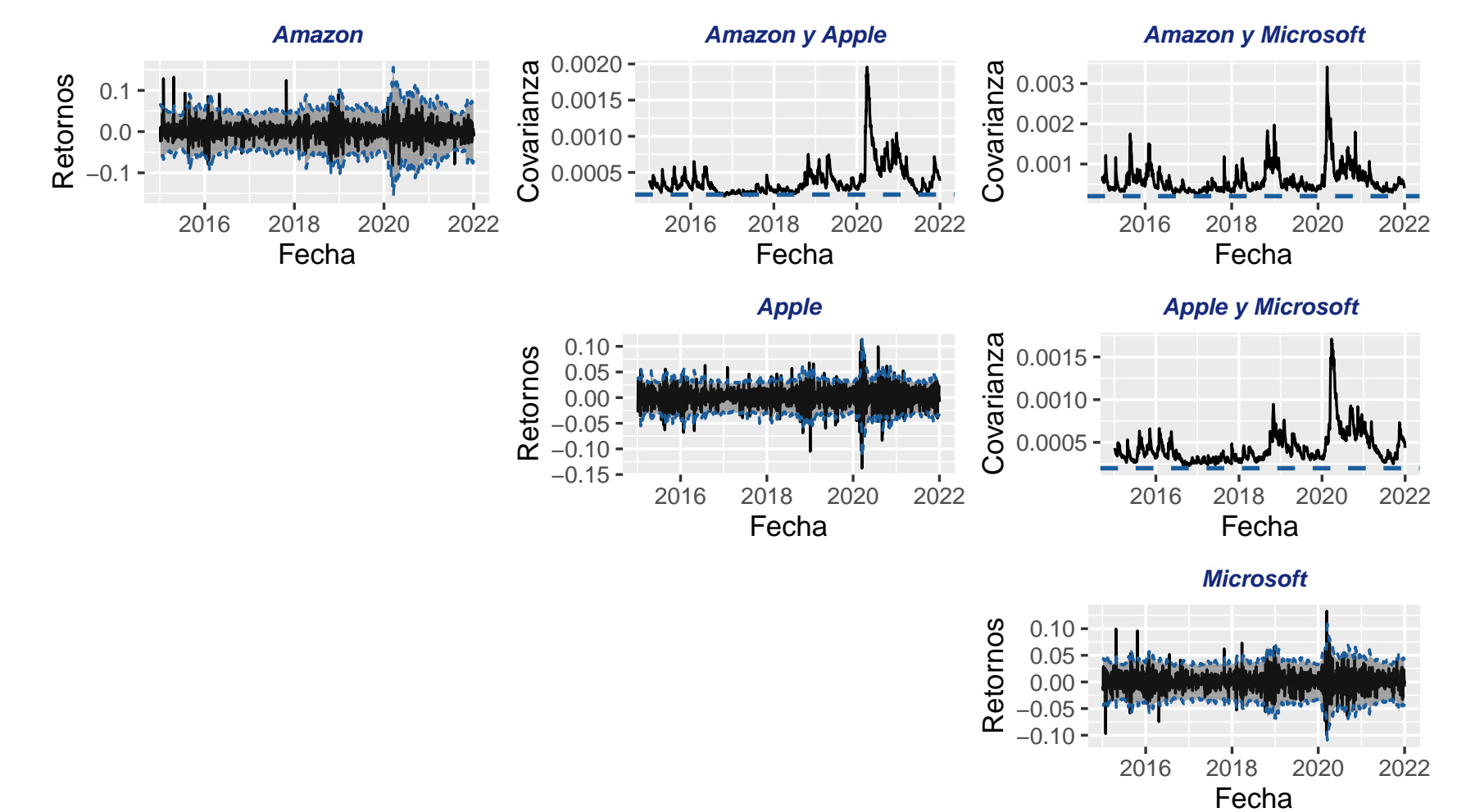


Figura 5: Matriz de varianzas y covarianzas obtenida con el modelo GARCH ortogonal.

Portafolio

El objetivo central consiste en generar 5000 portafolios con el fin de calcular su rentabilidad y riesgo, con el propósito de obtener el portafolio de máxima tangencia, es decir, aquel que posea el mayor Sharpe ratio.

Sharpe Ratio: Es una herramienta cuantitativa para evaluar el retorno de una inversión en relación con el riesgo asumido.

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

R_p : Es la rentabilidad esperada del portafolio.

R_f : Es la rentabilidad esperada del activo sin riesgo.

σ_p : Es la desviación del rendimiento de los activos en cuestión.

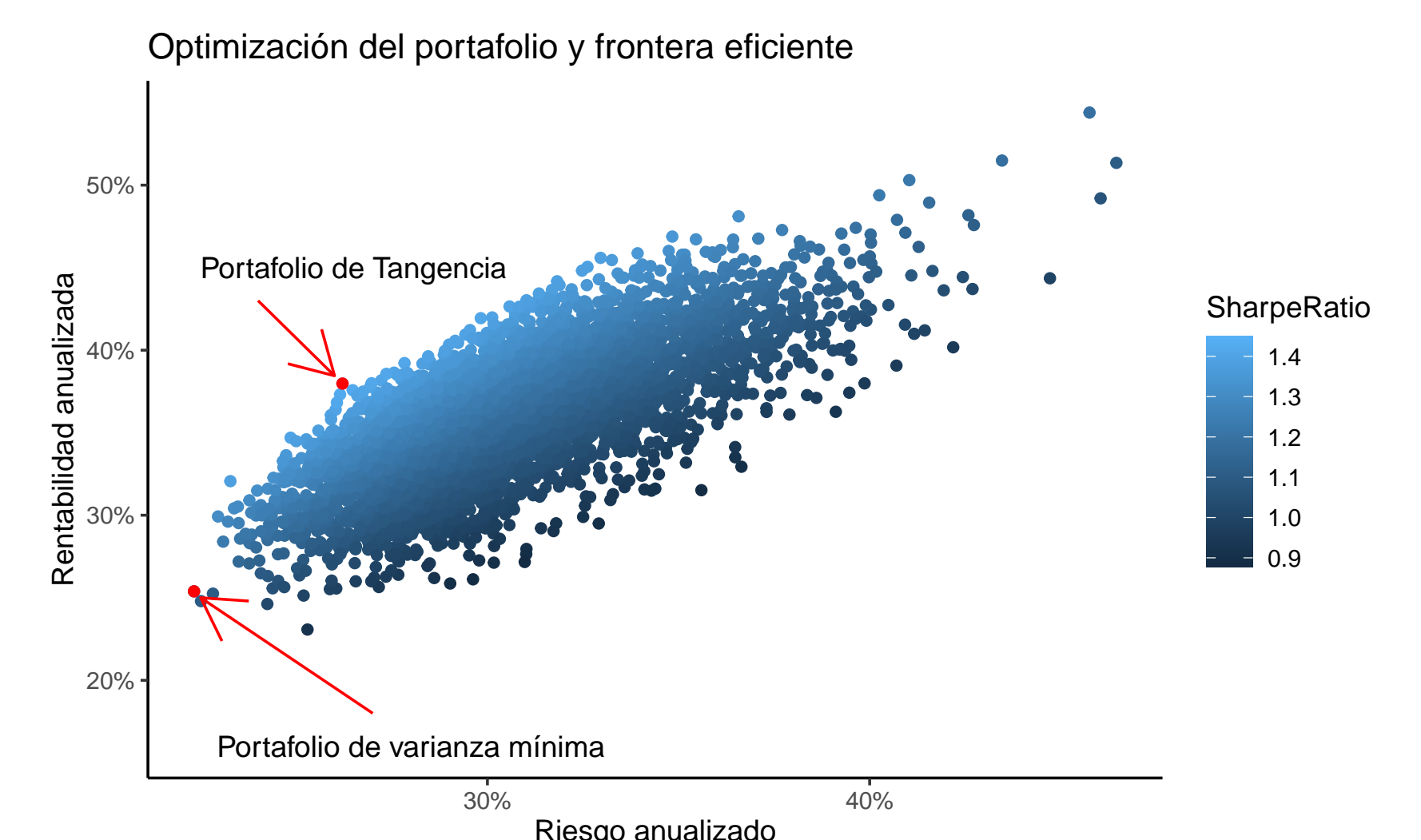


Figura 6: Portafolios simulados.

VaR (Valor en Riesgo)

El valor en riesgo es una técnica estadística para medir el riesgo financiero de una inversión. Indica la probabilidad (normalmente 1 % o 5 %) de sufrir una determinada pérdida durante un periodo de tiempo.

Para el cálculo del VaR se necesita el rendimiento esperado y el riesgo del portafolio que está dado por:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i = w' R, \quad \sigma_p^2 = w' \Sigma w$$

$$\text{VaR} = V \times Z \times \sigma \times \sqrt{T}$$

Después de realizar los cálculos necesarios utilizando el software R, se obtiene un VaR con un nivel de confianza $\alpha = 0.05$, para un horizonte temporal de 252 días y una inversión inicial de $V = 23.995$ USD. El resultado del cálculo del VaR es de 2476.258 USD. En términos prácticos, esto significa que existe un 5 % de probabilidad de perder al menos 2476.258 USD en un período de 252 días.

Referencias

- Peña, D. (2002). Análisis de datos multivariantes, Cambridge: McGraw-Hill España.
- Alexander, C. (2000). A primer on the orthogonal GARCH model. *manuscript ISMA Centre, University of Reading, UK*.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307-327.
- Minutti, C. (2010). Métodos de optimización en la construcción de portafolios (Doctoral dissertation, Tesis de licenciatura). Universidad Autónoma Chapingo.
- Zivot, E. (2016). Introduction to Computational Finance and Financial Econometrics with R, Springer.