Departamento de Geofísica
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tarea 1

Valentina Iturra Rosales

Analice la trayectoria de una partícula de masa M que es liberada desde un estado de reposo sobre un plano rígido inclinado que rota. La velocidad de rotación es Ω y el ángulo que forma el plano con la horizontal es α. La fricción y la fuerza centrífuga son despreciables. Grafique las componentes de la velocidad (u,v) en función del tiempo y la trayectoria de la partícula para los siguientes valores: $\alpha = 15°$ y $\Omega = 0.5$ [s-1]

$$\frac{du}{dt} - fv = 0 \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -g\sin\alpha \tag{2}$$

Realizamos la segunda derivada con respecto al tiempo de la ecuación (1) y reemplazamos la ecuación (2) en nuestro resultado:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2} - f\frac{dv}{dt} &= 0\\ \frac{d^2u}{dt^2} - f(-fu + g\sin\alpha) &= 0\\ \frac{d^2u}{dt^2} + f^2u &= -fg\sin\alpha\end{aligned} \tag{3}$$

Queremos resolver esta ecuación diferencial de segundo grado, de modo que debemos hallar la solución homogénea, a partir de $u(t)'' + f^2u(t) = 0$, consideraremos en este caso

$$\begin{aligned}u(t) &= e^{rt}\\ u(t)' &= re^{rt}\\ u(t)'' &= r^2e^{rt}\end{aligned}$$

Por lo tanto reemplazando esto en la ecuación se obtiene que:

$$\begin{aligned}r^2e^{rt} + f^2e^{rt} &= 0\\ r^2 &= -f^2\\ r &= fi\end{aligned}$$

Y por lo tanto $u(t) = e^{fti}$, si lo desglosamos obtendremos la solución homogénea $u_h(t) = C_1\cos ft + C_2\sin ft$. Ahora en cuanto a la solución particular se tiene que $-fg\sin\alpha$ es una constante que no depende del tiempo, por lo que el ansatz que se usará será:

$$\begin{aligned}u_p &= A\\ u_p' &= 0\\ u_p'' &= 0\end{aligned}$$

De modo que reemplazando todo esto en la ecuación (3) resultará:

$$0 + f^2 A = -fg \sin\alpha$$
$$A = u_p = \frac{-g \sin\alpha}{f}$$

Por lo tanto la ecuación preliminar de la componente 'x' de la velocidad será $u(t) = C_1 \cos ft + C_2 \sin ft - \frac{g \sin\alpha}{f}$
En cuanto a la componente 'y' de la velocidad se puede resolver al despejar v(t) y derivar u(t) en la ecuación (1), de lo que resulta $v(t) = -C_1 \sin ft + C_2 \cos ft$

Con todo esto, resta determinar las constantes C_1 y C_2, lo que se hará considerando, según el enunciado, que en un tiempo $t = 0$ la partícula estaba en reposo, es decir $u(0) = v(0) = 0$. Por lo tanto se obtiene para C_1:

$$u(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - \frac{g \sin\alpha}{f}$$
$$C_1 = \frac{g \sin\alpha}{f}$$

Y para C_2:

$$v(0) = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0$$
$$C_2 = 0$$

De modo que las ecuaciones de velocidad resultante corresponden a:

$$u(t) = \frac{g \sin\alpha}{f} \cos ft - \frac{g \sin\alpha}{f}$$
$$v(t) = -\frac{g \sin\alpha}{f} \sin ft$$

Ahora, para las trayectorias $x(t)$ e $y(t)$ debemos integrar las velocidades, de forma que la trayectoria en el eje x estará dada por:

$$x(t) = \int_0^t u(t)dt$$
$$x(t) = \frac{g \sin\alpha}{f^2} \sin ft - \frac{gt \sin\alpha}{f}$$

Mientras que la trayectoria en el eje y estará dada por

$$y(t) = \int_0^t v(t)dt$$
$$y(t) = \frac{g \sin\alpha}{f^2} \cos ft - \frac{g \sin\alpha}{f^2}$$

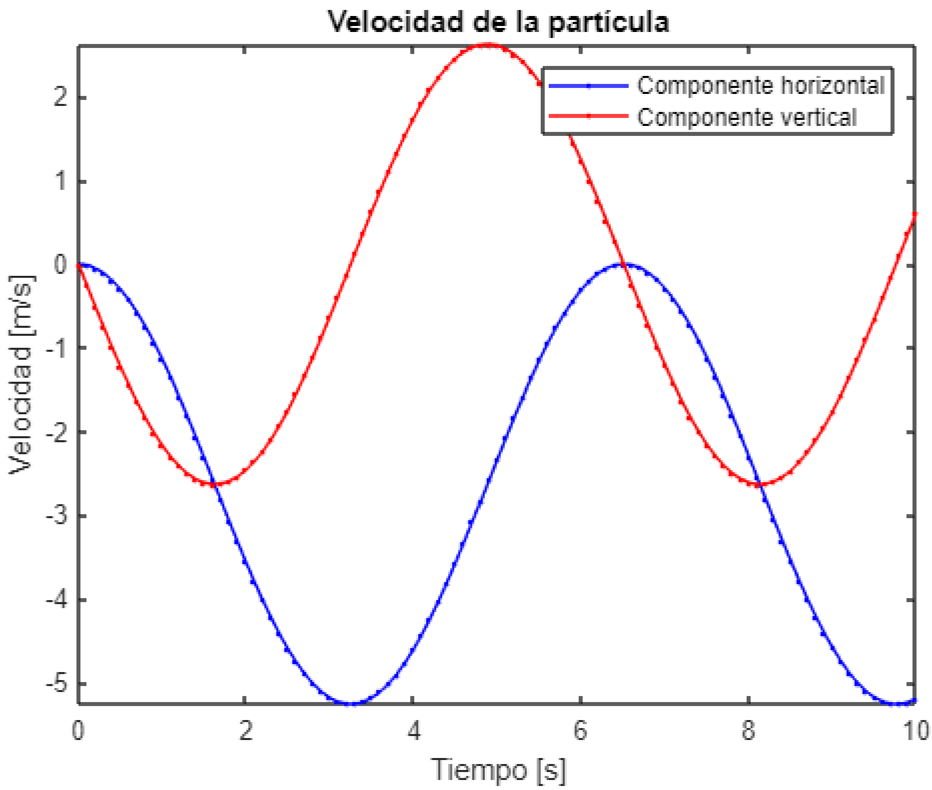
Con toda esta información se puede graficar lo siguiente:

Parámetros

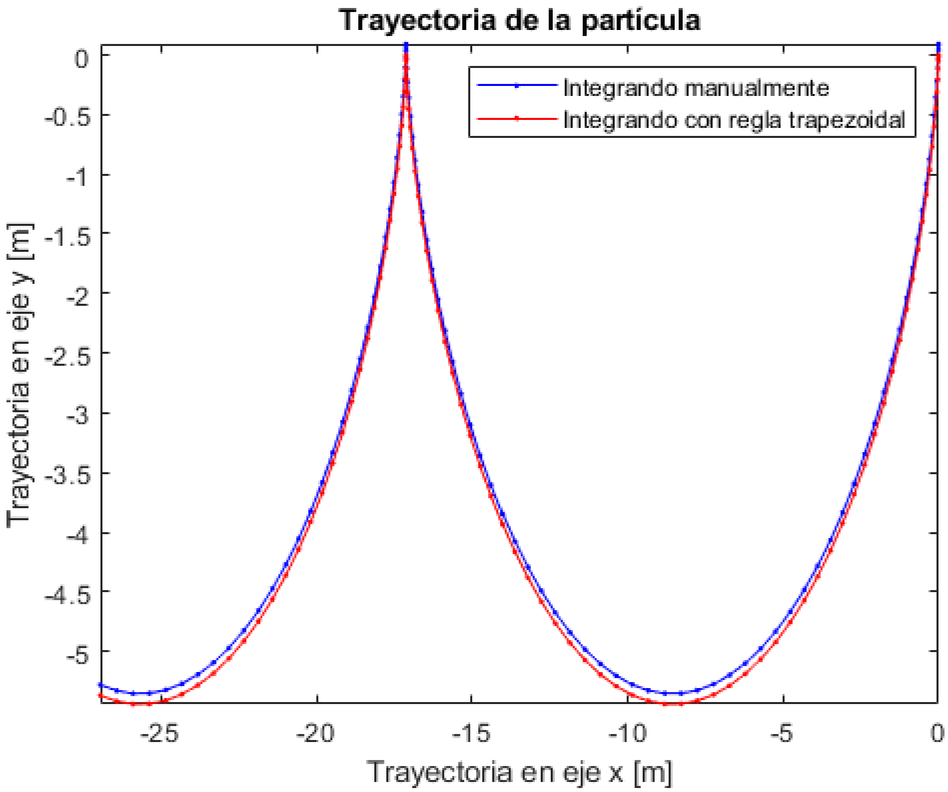
```
g = 9.82; % [m/s^2] gravedad
alfa = 15; % [°] inclinación del plano en grados
alfa = alfa*pi/180; %[rad] alfa en radianes
omega = 0.5; % [s-1] Frecuencia angular (de rotación) del plano inclinado
f = 2*omega*cos(alfa); % [s^-1] 2*componente vertical de omega
ge = g*sin(alfa); % [m/s^2] 2*componente de g en la dir del plano
```

Calcula y grafica las velocidades y trayectorias

```
t= (0:0.1:10)';
u = (ge/f)*cos(f*t)-ge/f; %[m/s] expresión para la componente x de la velocidad
v = -(ge/f)*sin(f*t); %[m/s] expresión para la componente x de la velocidad

% Trayectorias: posición x, y en función del tiempo
x = (ge*sin(f*t))/(f^2)-(ge*t/f); % [m] expresión para la componente x de la velocidad
y = (ge*cos(f*t))/(f^2)-(ge/f); % [m] expresión para la componente x de la velocidad

% Trayectorias calculadas integrando numéricamente las velocidades
xn = cumtrapz(t,u); % cumtrapz es la función para integrar numeric.
yn = cumtrapz(t,v);

% Grafica velocidades
figure
plot(t,u,'.-b')
hold on
plot(t,v,'.-r')
axis tight
legend('Componente horizontal','Componente vertical',Location='northeast')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Velocidad [m/s]')
title('Velocidad de la partícula')
```




```
% Grafica trayectoria
figure
plot(x,y,'b.-')
hold on
plot(xn,yn,'r.-')
axis tight
legend('Integrando manualmente','Integrando con regla trapezoidal',Location='northeast')
xlabel('Trayectoria en eje x [m]')
ylabel('Trayectoria en eje y [m]')
title('Trayectoria de la partícula')
```


Trayectoria de la partícula
Integrando manualmente
Integrando con regla trapezoidal
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
-5
Trayectoria en eje y [m]
-25
-20
-15
-10
-5
0
Trayectoria en eje x [m]