Paradigmas de Lenguajes de Programación
Handout Clase Práctica – Demostración en Lógica Proposicional

Ejercicio 2

Demostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ puede reescribirse a otra fórmula equivalente que usa sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

Demostración. Mediante inducción estructural.
Sea $\mathcal{P}(\varphi) :=$ Existe $\varphi^\star \in$ FORM tal que $\varphi^\star \equiv \varphi$ donde $\varphi^\star$ usa sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

$\mathcal{P}(\text{PROP})$

Sea φ una fórmula tal que $\varphi \in$ PROP, entonces φ no contiene conectivos y por lo tanto trivialmente $\mathcal{P}(\varphi)$. △

$\mathcal{P}(\neg\psi)$ tal que por H.I. sabemos que $\mathcal{P}(\psi)$

Sea $\varphi = \neg\psi$, como $\mathcal{P}(\psi)$ existe $\psi^\star \equiv \psi$ tal que $\psi^\star$ usa sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

Sea v una valuación

$$
\begin{aligned}
& v \models \varphi && \\
\iff & v \models \neg\psi && \text{Ya que } \varphi = \neg\psi. \\
\iff & v \not\models \psi && \text{Por definición de consecuencia semántica } (\neg). \\
\iff & v \not\models \psi^\star && \text{Ya que } \psi \equiv \psi^\star. \\
\iff & v \models \neg\psi^\star && \text{Por definición de consecuencia semántica } (\neg).
\end{aligned}
$$

Luego sea $\varphi^\star = \neg\psi^\star$ entonces $\varphi^\star \equiv \varphi$ donde $\varphi^\star$ usa sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$ por lo tanto $\mathcal{P}(\varphi)$. △

$\mathcal{P}(\psi \wedge \rho)$ tal que por H.I. sabemos que $\mathcal{P}(\psi)$ y $\mathcal{P}(\rho)$

Sea $\varphi = \psi \wedge \rho$, como $\mathcal{P}(\psi)$ y $\mathcal{P}(\rho)$ existen $\psi^\star \equiv \psi$ y $\rho^\star \equiv \rho$ tal que $\psi^\star$ y $\rho^\star$ usan sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

Sea v una valuación

$$
\begin{aligned}
& v \models \varphi && \\
\iff & v \models \psi \wedge \rho && \text{Ya que } \varphi = \psi \wedge \rho. \\
\iff & v \models \psi \ \text{ y } v \models \rho && \text{Por definición de consecuencia semántica } (\wedge). \\
\iff & v \models \psi^\star \text{ y } v \models \rho^\star && \text{Ya que } \psi \equiv \psi^\star \text{ y } \rho \equiv \rho^\star. \\
\iff & \text{no ocurre que } (v \not\models \psi^\star \text{ ó } v \not\models \rho^\star) && \text{Ley de De Morgan (metalenguaje).} \\
\iff & \text{no ocurre que } (v \models \neg\psi^\star \text{ ó } v \models \neg\rho^\star) && \text{Por definición de consecuencia semántica } (\neg). \\
\iff & \text{no ocurre que } (v \models \neg\psi^\star \vee \neg\rho^\star) && \text{Por definición de consecuencia semántica } (\vee). \\
\iff & v \not\models \neg\psi^\star \vee \neg\rho^\star && \text{Por definición de consecuencia semántica.} \\
\iff & v \models \neg(\neg\psi^\star \vee \neg\rho^\star) && \text{Por definición de consecuencia semántica } (\neg).
\end{aligned}
$$

Luego sea $\varphi^\star = \neg(\neg\psi^\star \vee \neg\rho^\star)$ entonces $\varphi^\star \equiv \varphi$ donde $\varphi^\star$ usa sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$ por lo tanto $\mathcal{P}(\varphi)$. △

El resto de los casos son análogos y quedan como **ejercicio**. □

Equivalencia entre $\neg\neg_e$ LEM y PBC

En la teórica se demostró que $\neg\neg_e \iff$ **LEM**, demostremos que $\neg\neg_e \iff$ **PBC**.

$$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\,(\neg\neg_e) \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\,(\textbf{LEM}) \qquad \dfrac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\,(\textbf{PBC})$$

Demostración. $\neg\neg_e \iff$ **PBC**.

- Demostración de $\neg\neg_e \;\Rightarrow\;$ **PBC**.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\,(\neg_i)}{\Gamma \vdash \tau}\,(\neg\neg_e)$$

- Demostración de **PBC** $\;\Rightarrow\;$ $\neg\neg_e$, en clase vimos **PBC** $\;\Rightarrow\;$ **LEM**, usando weakening tenemos esta otra opción.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\tau \vdash \neg\tau}\,(\text{ax}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma, \neg\tau \vdash \neg\neg\tau}\,(\textbf{W})}{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\Gamma \vdash \tau}\,(\textbf{PBC})$$

Quedan demostrados ambos lados de la implicación y se establece la equivalencia. □

Ejercicio 5

Demostrar en **NJ** (lógica intuicionista) que las siguientes fórmulas son teoremas.

Inciso II

Reducción al absurdo $(\rho \to \bot) \to \neg\rho$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\rho \to \bot, \rho \vdash \rho \to \bot}\,(\text{ax}) \qquad \dfrac{}{\rho \to \bot, \rho \vdash \rho}\,(\text{ax})}{\rho \to \bot, \rho \vdash \bot}\,(\to_e)}{\rho \to \bot \vdash \neg\rho}\,(\neg_i)}{\vdash (\rho \to \bot) \to \neg\rho}\,(\to_i)$$

Inciso VIII

De Morgan II $\neg(\rho \wedge \sigma) \leftrightarrow (\neg\rho \vee \neg\sigma)$ Para la dirección $\to$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.
Vamos a demostrar 1. $(\rho \wedge \sigma) \to (\neg\rho \vee \neg\sigma)$ y 2. $(\neg\rho \vee \neg\sigma) \to (\rho \wedge \sigma)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \rho \vee \neg\rho}\,(\textbf{LEM}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \rho, \sigma \vdash \rho}\,(\text{ax}) \quad \dfrac{}{\varphi, \rho, \sigma \vdash \sigma}\,(\text{ax})}{\varphi, \rho, \sigma \vdash \rho \wedge \sigma}\,(\wedge_i) \quad \dfrac{}{\varphi, \rho, \sigma \vdash \neg(\rho \wedge \sigma)}\,(\text{ax})}{\varphi, \rho, \sigma \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\varphi, \rho \vdash \neg\sigma}\,(\neg_i)}{\varphi, \rho \vdash \neg\rho \vee \neg\sigma}\,(\vee_{i_2}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi, \neg\rho \vdash \neg\rho}\,(\text{ax})}{\varphi, \neg\rho \vdash \neg\rho \vee \neg\sigma}\,(\vee_{i_1})}{\varphi = \neg(\rho \wedge \sigma) \vdash \neg\rho \vee \neg\sigma}\,(\vee_e)}{\vdash \neg(\rho \wedge \sigma) \to (\neg\rho \vee \neg\sigma)}\,(\to_i)$$

Demostración de 1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \neg\rho \vee \neg\sigma}\,(\text{ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi, \neg\rho \vdash \rho \wedge \sigma}\,(\text{ax})}{\psi, \neg\rho \vdash \rho}\,(\wedge_{e_1}) \quad \dfrac{}{\psi, \neg\rho \vdash \neg\rho}\,(\text{ax})}{\psi, \neg\rho \vdash \bot}\,(\neg_e) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi, \neg\rho \vdash \rho \wedge \sigma}\,(\text{ax})}{\psi, \neg\sigma \vdash \sigma}\,(\wedge_{e_2}) \quad \dfrac{}{\psi, \neg\sigma \vdash \neg\sigma}\,(\text{ax})}{\psi, \neg\sigma \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\psi \vdash \bot}\,(\vee_e)}{\psi = \neg\rho \vee \neg\sigma \vdash \neg(\rho \wedge \sigma)}\,(\neg_i)}{\vdash (\neg\rho \vee \neg\sigma) \to \neg(\rho \wedge \sigma)}\,(\to_i)$$

Demostración de 2.

Ejercicio 7

Demostrar las siguientes propiedades.

Inciso I

Si existe una derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ entonces existe una derivación de $\Gamma, \tau \vdash \sigma$.

Demostración. Por inducción global en la altura de la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$.

Sea

$$\mathcal{P}(n) \coloneqq \text{Si existe una derivación de } \Gamma \vdash \sigma \text{ de tamaño } n \text{ entonces existe una derivación de } \Gamma, \tau \vdash \sigma.$$

Por inducción global en la altura del árbol de derivación de $\Gamma \vdash \sigma$.

$\mathcal{P}(1)$ Si el árbol de derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ tiene altura 1 entonces necesariamente se trata de un árbol de la forma

$$\frac{\sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash \sigma}.$$

Por lo tanto $\sigma \in \Gamma$ sigue que $\sigma \in \Gamma \cup \{\tau\}$ y entonces

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}\ (\text{ax}).$$

$\mathcal{P}(n+1)$ Sabiendo que $\mathcal{P}(i)$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Si el árbol de derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ tiene altura $n+1$ entonces nos encontramos en uno de doce casos

- Caso $\wedge_\mathrm{i}$

  Tenemos que $\sigma = \varphi \wedge \psi$ para algún par de fórmulas φ y ψ.

  $$\dfrac{\dfrac{\cdots}{\Gamma \vdash \varphi} \quad \dfrac{\cdots}{\Gamma \vdash \psi}}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ (\wedge_\mathrm{i}).$$

  Como las demostraciones de $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \psi$ son de altura menor o igual a n por H.I. existen derivaciones de $\Gamma, \tau \vdash \varphi$ y $\Gamma, \tau \vdash \psi$ luego

  $$\dfrac{\dfrac{\cdots}{\Gamma, \tau \vdash \varphi}\ (\text{H.I.}) \quad \dfrac{\cdots}{\Gamma, \tau \vdash \psi}\ (\text{H.I.})}{\Gamma, \tau \vdash \varphi \wedge \psi}\ (\wedge_\mathrm{i}).$$

- Caso $\vee_\mathrm{e}$

  $$\dfrac{\dfrac{\cdots}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \quad \dfrac{\cdots}{\Gamma, \varphi \vdash \sigma} \quad \dfrac{\cdots}{\Gamma, \psi \vdash \sigma}}{\Gamma \vdash \sigma}\ (\vee_\mathrm{e}).$$

  Como las demostraciones de $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ de $\Gamma, \varphi \vdash \sigma$ y de $\Gamma, \psi \vdash \sigma$ son de altura menor o igual a n por H.I. existen derivaciones de $\Gamma, \tau \vdash \varphi \vee \psi$ de $\Gamma, \varphi, \tau \vdash \sigma$ y de $\Gamma, \psi, \tau \vdash \sigma$ luego

  $$\dfrac{\dfrac{\cdots}{\Gamma, \tau \vdash \varphi \vee \psi}\ (\text{H.I.}) \quad \dfrac{\cdots}{\Gamma, \varphi, \tau \vdash \sigma}\ (\text{H.I.}) \quad \dfrac{\cdots}{\Gamma, \psi, \tau \vdash \sigma}\ (\text{H.I.})}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}\ (\vee_\mathrm{e}).$$

El resto de los casos son análogos y quedan como **ejercicio**. $\square$