

Paradigmas de Programación

Correspondencia de Curry-Howard

2do cuatrimestre de 2024

Departamento de Computación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Sistema de tipos para el cálculo Lambda

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{bool}} \text{T-TRUE}$$

Sistema de tipos para el cálculo Lambda

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{bool}} \text{T-TRUE}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{bool}} \text{T-FALSE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{bool} \quad \Gamma \vdash N : \tau \quad \Gamma \vdash P : \tau}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } N \text{ else } P : \tau} \text{T-IF}$$

Vamos a omitir las reglas para booleanos.

Sistema de tipos para el cálculo Lambda

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{bool}} \text{T-TRUE}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{bool}} \text{T-FALSE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{bool} \quad \Gamma \vdash N : \tau \quad \Gamma \vdash P : \tau}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } N \text{ else } P : \tau} \text{T-IF}$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \text{T-VAR}$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau. M : \tau \rightarrow \sigma} \text{T-ABS}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash MN : \tau} \text{T-APP}$$

Sistema de tipos para el cálculo Lambda

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \text{T-VAR}$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau. M : \tau \rightarrow \sigma} \text{T-ABS}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash MN : \sigma} \text{T-APP}$$

Sistema de tipos para el cálculo Lambda

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau} \text{T-VAR}$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \rightarrow \sigma} \text{T-ABS}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau} \text{T-APP}$$

- Ignoremos los términos del lambda cálculo

Sistema de tipos para el cálculo Lambda

Deducción natural

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau} ax$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \rightarrow \sigma} \rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau} \rightarrow_e$$

- Ignoremos los términos del lambda cálculo
- Notar que las reglas de tipado se corresponden con reglas de deducción natural:

Correspondencia de Curry

- Observación realizada sobre la lógica combinatoria:

Lógica combinatoria

Variante del cálculo lambda que sustituye a las abstracciones por un conjunto limitado de combinadores.

- Curry & Feys observaron que si se lee el tipo $\sigma \rightarrow \tau$ como una implicación $\sigma \Rightarrow \tau$, luego

la regla de tipado de la aplicación de una función es la regla **modus ponens**

Pruebas y Programas

Proposiciones	\leftrightarrow	Tipos
Pruebas	\leftrightarrow	Términos

Pruebas y Programas

Proposiciones	\leftrightarrow	Tipos
Pruebas	\leftrightarrow	Términos

Un juicio $\vdash \tau$ es derivable **sí y sólo sí** el tipo τ está habitado, esto es, existe un término M tal que $\vdash M : \sigma$ es derivable.

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Si, por ejemplo:

$$\frac{\frac{}{\sigma \vdash \sigma} ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Si, por ejemplo:

$$\frac{\frac{}{\sigma \vdash \sigma} ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

Corresponde al siguiente juicio de tipado:

$$\frac{\frac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma} \text{T-VAR}}{\vdash \lambda x : \sigma. x : \sigma \rightarrow \sigma} \text{T-ABS}$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Si, por ejemplo:

$$\frac{\frac{}{\sigma \vdash \sigma} ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

Corresponde al siguiente juicio de tipado:

$$\frac{\frac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma} \text{T-VAR}}{\vdash \lambda x : \sigma. x : \sigma \rightarrow \sigma} \text{T-ABS}$$

El **término** $\lambda x : \sigma. x$ se asocia con la **prueba** de $\sigma \Rightarrow \sigma$ que se muestra en la parte superior

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\frac{\frac{\frac{}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma} ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_e$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\frac{\frac{\frac{}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma} ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_e$$

Corresponde al siguiente juicio de tipado:

$$\frac{\frac{\frac{}{x : \sigma \rightarrow \sigma \vdash x : \sigma \rightarrow \sigma} \text{T-VAR}}{\vdash \lambda x : \sigma \rightarrow \sigma. x : (\sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma} \text{T-ABS} \quad \frac{\frac{\frac{}{y : \sigma \vdash y : \sigma} \text{T-VAR}}{\vdash \lambda y : \sigma. y : \sigma \rightarrow \sigma} \text{T-ABS}}{\vdash (\lambda x : \sigma \rightarrow \sigma. x)(\lambda y : \sigma. y) : \sigma \rightarrow \sigma} \text{T-APP}$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\frac{\frac{\frac{}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma} ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_e$$

Corresponde al siguiente juicio de tipado:

$$\frac{\frac{\frac{}{x : \sigma \rightarrow \sigma \vdash x : \sigma \rightarrow \sigma} \text{T-VAR}}{\vdash \lambda x : \sigma \rightarrow \sigma. x : (\sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma} \text{T-ABS} \quad \frac{\frac{\frac{}{y : \sigma \vdash y : \sigma} \text{T-VAR}}{\vdash \lambda y : \sigma. y : \sigma \rightarrow \sigma} \text{T-ABS}}{\vdash (\lambda x : \sigma \rightarrow \sigma. x)(\lambda y : \sigma. y) : \sigma \rightarrow \sigma} \text{T-APP}$$

El **término** $(\lambda x : \sigma \rightarrow \sigma. x)(\lambda y : \sigma. y)$ se asocia con la **prueba** que se muestra en la parte superior.

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\sigma \vdash \sigma} ax}{\sigma \vdash \sigma} \Rightarrow_i \quad \frac{\overline{\sigma \vdash \sigma} ax}{\sigma \vdash \sigma}}{\sigma \vdash \sigma} \Rightarrow_e}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\sigma \vdash \sigma} ax}{\sigma \vdash \sigma} \Rightarrow_i \quad \frac{}{\sigma \vdash \sigma} ax}{\sigma \vdash \sigma} \Rightarrow_e}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

$$\frac{\frac{\frac{}{x:\sigma, y:\sigma \vdash y:\sigma} \text{T-VAR}}{x:\sigma \vdash \lambda y:\sigma. y:\sigma \rightarrow \sigma} \text{T-ABS} \quad \frac{}{x:\sigma \vdash x:\sigma} \text{T-VAR}}{x:\sigma \vdash (\lambda y:\sigma. y)x:\sigma} \text{T-APP} \quad \frac{}{\vdash \lambda x:\sigma. (\lambda y:\sigma. y)x:\sigma \rightarrow \sigma} \text{T-ABS}$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\sigma \vdash \sigma} ax}{\sigma \vdash \sigma} \Rightarrow_i \quad \frac{}{\sigma \vdash \sigma} ax}{\sigma \vdash \sigma} \Rightarrow_e}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

$$\frac{\frac{\frac{}{x:\sigma, y:\sigma \vdash y:\sigma} \text{T-VAR}}{x:\sigma \vdash \lambda y:\sigma. y:\sigma \rightarrow \sigma} \text{T-ABS} \quad \frac{}{x:\sigma \vdash x:\sigma} \text{T-VAR}}{x:\sigma \vdash (\lambda y:\sigma. y)x:\sigma} \text{T-APP} \quad \frac{}{\vdash \lambda x:\sigma. (\lambda y:\sigma. y)x:\sigma \rightarrow \sigma} \text{T-ABS}$$

El **término** $\lambda x:\sigma. (\lambda y:\sigma. y)x$ se asocia con la **prueba** que se muestra en la parte superior.

Pruebas vs términos

- ▶ Una fórmula puede tener muchas pruebas distintas.
- ▶ Distintas pruebas corresponden a distintos juicios de tipado, es decir distintos términos.
- ▶ Notar que algunas pruebas de la misma proposición son mas complejas que otras:

Distintas pruebas de $\sigma \Rightarrow \sigma$

$$\frac{\overline{\sigma \vdash \sigma}^{ax}}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

$$\frac{\frac{\overline{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}^{ax}}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i \quad \frac{\overline{\sigma \vdash \sigma}^{ax}}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_e$$

Correspondencia de Curry-Howard

- ▶ William Alvin Howard extiende la correspondencia:
 - ▶ Tratando los restantes conectivos lógicos.
 - ▶ Usando el cálculo lambda en lugar de la lógica combinatoria.
 - ▶ Mostrando una correspondencia entre la simplificación de pruebas y la computación.

Simplificación de pruebas

Corte (*Cut*)

Un corte es una afirmación intermedia (un lema) que probamos a pesar de que no es una subfórmula de la afirmación final (el teorema)

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\vdots} \Phi}{\Gamma, \sigma \vdash \rho} \Rightarrow_i \quad \frac{\frac{\vdots}{\vdots} \Psi}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e}{\Gamma \vdash \rho} \Rightarrow_e$$

σ es un corte

- ▶ Asumimos σ para probar ρ
- ▶ Probamos σ (como lemma)

Simplificación de pruebas

Corte (*Cut*)

Un corte es una afirmación intermedia (un lema) que probamos a pesar de que no es una subfórmula de la afirmación final (el teorema)

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\vdots} \Phi}{\Gamma, \sigma \vdash \rho} \Rightarrow_i \quad \frac{\frac{\vdots}{\vdots} \Psi}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e}{\Gamma \vdash \rho} \Rightarrow_e$$

σ es un corte

Caracterizado por el uso de \Rightarrow_i seguido por \Rightarrow_e

Simplificación de pruebas

Eliminación de Corte (*Cut*)

Reescribir una prueba de manera tal que no tenga cortes:

- Eliminamos σ reemplazando cada uso σ en la prueba de ρ por una copia de la prueba de σ .

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\vdots}\Phi}{\Gamma, \sigma \vdash \rho} \Rightarrow_i \quad \frac{\frac{\vdots}{\vdots}\Psi}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e}{\Gamma \vdash \rho} \Rightarrow_e$$

Eliminación del corte

$$\frac{\frac{\vdots}{\vdots}\Psi}{\Gamma \vdash \sigma} \quad \frac{\vdots}{\vdots}\Phi}{\Gamma \vdash \rho}$$

Eliminación de corte : Ejemplo

Eliminación de corte

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \} \Phi}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma} ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i \quad \frac{\frac{\frac{}{\sigma \vdash \sigma} ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \} \Psi}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_e$$

Eliminación de corte : Ejemplo

Eliminación de corte

$$\frac{\frac{\frac{}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma} ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_e$$

$$\frac{\frac{\frac{}{\sigma \vdash \sigma} ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

Computación como simplificación de pruebas

Eliminación de corte y reducción β

Un paso de reducción β (esto es, aplicar E-APPABS) se corresponde con una eliminación de corte.

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma, \sigma \vdash M : \rho}}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \rho} \text{T-ABS} \quad \frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \sigma}}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma. M) N : \rho} \text{T-APP}}{\Gamma \vdash M\{x := N\} : \rho} \rightarrow \frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \sigma}}{\vdots}}{\Gamma \vdash M\{x := N\} : \rho}$$

Normalización

Forma normal

Una prueba está en **forma normal** si no posee cortes.

Theorem (Normalización de pruebas)

Toda prueba puede ser “normalizada” mediante la eliminación sucesiva de cortes.

Conjunción

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\sigma \vdash} \quad \frac{\Gamma \vdash \tau}{\sigma \wedge \tau} \wedge_i}{\frac{\Gamma \vdash \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e1} \quad \frac{\Gamma \vdash \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e2}}$$

Conjunción

Extendemos la sintaxis

$$\begin{aligned}\sigma, \tau, \dots &::= \dots \mid \sigma \times \tau \\ M, N, \dots &::= \dots \mid \langle M, N \rangle \mid \text{fst } M \mid \text{snd } N\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\sigma \vdash} \quad \frac{\Gamma \vdash \tau}{\sigma \wedge \tau} \wedge_i}{\frac{\Gamma \vdash \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e1} \quad \frac{\Gamma \vdash \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e2}}$$

Producto

Extendemos la sintaxis

$$\begin{aligned}\sigma, \tau, \dots &::= \dots \mid \sigma \times \tau \\ M, N, \dots &::= \dots \mid \langle M, N \rangle \mid \text{fst } M \mid \text{snd } N\end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\sigma \vdash \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \text{fst } M : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \text{snd } M : \tau}$$

Conjunción : Corte

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma} \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash \tau}}{\Gamma \vdash \sigma \wedge \tau} \wedge_i$$
$$\frac{\Gamma \vdash \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e1}$$

τ es un corte

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma} \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash \tau}}{\Gamma \vdash \sigma \wedge \tau} \wedge_i$$
$$\frac{\Gamma \vdash \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e2}$$

σ es un corte

Conjunción : Eliminación de corte

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma} \quad \frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \tau}}{\sigma \wedge \tau} \wedge_i}{\Gamma \vdash \sigma \wedge \tau} \wedge_i}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e1} \quad \rightarrow \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma}$$

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma} \quad \frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \tau}}{\sigma \wedge \tau} \wedge_i}{\Gamma \vdash \sigma \wedge \tau} \wedge_i}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e2} \quad \rightarrow \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash \tau}$$

Producto : Reducción

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma} \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \tau}}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau} \wedge_i}{\Gamma \vdash \text{fst } \langle M, N \rangle : \sigma} \wedge_{e_1} \quad \rightarrow \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma}$$

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma} \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \tau}}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau} \wedge_i}{\Gamma \vdash \text{snd } \langle M, N \rangle : \tau} \wedge_{e_2} \quad \rightarrow \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \tau}$$

Disjunción

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma \vee \tau} \vee_{i_1} \quad \frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma \vee \tau} \vee_{i_2}}{\frac{\Gamma \vdash \sigma \vee \tau \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho \quad \Gamma, \tau \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e}$$

Disjunción

Extendemos la sintaxis

$$\begin{aligned}\sigma, \tau, \dots &::= \dots \mid \sigma + \tau \\ M, N, P, \dots &::= \dots \mid \text{left}^\sigma M \mid \text{right}^\sigma M \\ &\quad \mid \text{case } M \text{ with } \{\text{left } x \rightarrow N, \text{right } x \rightarrow P\}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma \vee \tau} \vee_{i_1} \quad \frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma \vee \tau} \vee_{i_2} \\[2ex] \frac{\Gamma \vdash \sigma \vee \tau \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho \quad \Gamma, \tau \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e \end{array}$$

Extendemos la sintaxis

$$\begin{aligned}
 \sigma, \tau, \dots &::= \dots \mid \sigma + \tau \\
 M, N, P, \dots &::= \dots \mid \text{left}^\sigma M \mid \text{right}^\sigma M \\
 &\quad \mid \text{case } M \text{ with } \{\text{left } x \rightarrow N, \text{right } x \rightarrow P\}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \text{left}^\tau M : \sigma + \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \text{right}^\sigma M : \sigma + \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma + \tau \quad \Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho \quad \Gamma, x : \sigma \vdash N : \rho}{\Gamma \vdash \text{case } M \text{ with } \{\text{left } x \rightarrow N, \text{right } x \rightarrow P\} : \rho}$$

Disjunción : Corte

$$\frac{
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma \vdash M : \sigma
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma, x : \sigma \vdash N : \rho
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma, x : \tau \vdash P : \rho
 \end{array}
 }{
 \Gamma \vdash \text{case left}^\tau M \text{ with } \{\text{left } x \rightarrow N, \text{right } x \rightarrow P\} : \rho
 }
 \begin{array}{l}
 \vee_{i_1} \\
 \vee_e
 \end{array}$$

\vee_{i_1} seguido de
 \vee_e es un corte

$$\frac{
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma \vdash M : \tau
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma, x : \sigma \vdash N : \rho
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma, x : \tau \vdash P : \rho
 \end{array}
 }{
 \Gamma \vdash \text{case right}^\tau M \text{ with } \{\text{left } x \rightarrow N, \text{right } x \rightarrow P\} : \rho
 }
 \begin{array}{l}
 \vee_{i_2} \\
 \vee_e
 \end{array}$$

\vee_{i_2} seguido de
 \vee_e es un corte

Suma : Reducción (1)

$$\frac{
 \frac{
 \vdots
 }{
 \Gamma \vdash M : \sigma
 }
 \quad
 \frac{
 \vdots
 }{
 \Gamma, x : \sigma \vdash N : \rho
 }
 \quad
 \frac{
 \vdots
 }{
 \Gamma, x : \tau \vdash P : \rho
 }
 }{
 \Gamma \vdash \text{case left}^\tau M \text{ with } \{\text{left } x \rightarrow N, \text{right } x \rightarrow P\} : \rho
 }
 \text{V}_e$$

\rightarrow

$$\frac{
 \frac{
 \vdots
 }{
 \Gamma \vdash M : \sigma
 }
 }{
 \Gamma \vdash N\{x := M\} : \rho
 }$$

Suma : Reducción (2)

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma \vdash M : \tau \\
 \hline
 \Gamma \vdash \text{right}^\sigma M : \sigma + \tau \quad \vee_{i_2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma, x : \sigma \vdash N : \rho
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma, x : \tau \vdash P : \rho \\
 \hline
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma \vdash \text{case right}^\tau M \text{ with } \{\text{left } x \rightarrow N, \text{right } x \rightarrow P\} : \rho \quad \vee_e
 \end{array}$$

$$\rightarrow
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma \vdash M : \sigma \\
 \hline
 \vdots \\
 \hline
 \Gamma \vdash P\{x := M\} : \rho
 \end{array}$$

Absurdo

$$\frac{\Gamma \vdash \quad \perp}{\Gamma \vdash} \sigma \perp_e$$

Absurdo

Extendemos la sintaxis

$$\begin{array}{ll} \sigma, \tau, \dots & ::= \dots \mid \perp \\ M, N, P, \dots & ::= \dots \mid \text{case } M \text{ with } \{ \} \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \quad \perp}{\Gamma \vdash} \sigma \perp_e$$

Extendemos la sintaxis

$$\begin{array}{lcl} \sigma, \tau, \dots & ::= & \dots \mid \perp \\ M, N, P, \dots & ::= & \dots \mid \text{case } M \text{ with } \{ \} \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \perp}{\Gamma \vdash \text{case } M \text{ with } \{ \} : \sigma} \perp_e$$

- ▶ Notar que no hay constructores para el tipo \perp .
- ▶ El tipo \perp (Void) es el tipo vacío.
- ▶ Se puede definir como un tipo de dato algebraico sin constructores.

Correspondencia de Curry-Howard

Theorem (Correspondencia de Curry-Howard)

$A_1, \dots, A_n \vdash \sigma$ es derivable en NJ **ssi** existe un término M donde $fv(M) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash M : \sigma$.

Consistencia de la lógica

La relación entre reducción y pruebas permite concluir que la lógica es consistente.

Corollary

$\not\vdash \perp$ (en NJ).

Se obtiene a partir del siguiente razonamiento:

- ▶ Debe existir M , tal que $\vdash M : \perp$.
- ▶ Por terminación y preservación de tipos, debería existir un valor V , tal que $\vdash V : \perp$. Por análisis de casos en los posibles valores, se puede concluir que no existe.

Sobre la negación

- ▶ La negación se puede codificar como:

$$\neg \sigma \equiv \sigma \rightarrow \perp$$

- ▶ Notar que la regla:
 - ▶ \neg_i corresponde a \Rightarrow_i
 - ▶ \neg_e corresponde a \Rightarrow_e
- ▶ De esta manera no hay necesidad de extender al sistema de tipos

Tipo Unit

- ▶ Se puede considerar que la lógica está extendida con la fórmula \top (fórmula válida).
- ▶ Se considera NJ extendido con la siguiente regla:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$$

- ▶ En el cálculo lambda extendemos la sintaxis con el tipo \top que tiene un único elemento.

$$\begin{array}{ll} \sigma, \tau, \dots & ::= \dots \mid \top \\ M, N, P, \dots & ::= \dots \mid \top \end{array}$$

- ▶ Una única regla de tipado (que se corresponde con \top_i)

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top : \top} \text{T-UNIT}$$

- ▶ El tipo \top es un tipo algebraico con un único constructor \top .

Sobre los booleanos

- Los ignoramos porque se pueden codificar.

Booleanos como sumas

$$\begin{aligned}\text{Bool} &\equiv \top + \top \\ \text{true} &\equiv \text{left}^\top \\ \text{false} &\equiv \text{right}^\top \\ \text{if } M \text{ then } N \text{ else } P &\equiv \text{case } M \text{ with } \{\text{left}^\top _ \rightarrow N, \text{right}^\top _ \rightarrow P\}\end{aligned}$$

- Existen codificaciones en el fragmento implicativo (booleanos de Church)

Recursión

- Extendemos la sintaxis con un nuevo operador

$$M ::= \dots \mid \text{fix } M$$

- No se precisan nuevos tipos pero sí una regla de tipado.

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \sigma}{\Gamma \vdash \text{fix } M : \sigma} \text{T-FIX}$$

Semántica operacional small-step

- No hay valores nuevos pero sí reglas de evaluación nuevas.

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{fix } M \rightarrow \text{fix } M'} \text{E-FIX}$$

$$\frac{}{\text{fix } (\lambda x : \sigma. M) \rightarrow M\{x := \text{fix } (\lambda x : \sigma. M)\}} \text{E-FIXBETA}$$

Ejemplos

Sea M el término

$\lambda f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}.$

$\lambda x : \text{nat}.$

if iszero(x) *then* $\underline{1}$ *else* $x * f(\text{pred}(x))$

en

$\text{fix } M \underline{3}$

Ejemplos

- ▶ Ahora podemos definir funciones parciales:

$$\text{fix } (\lambda x : \sigma. x)$$

- ▶ Notar que $\vdash \text{fix } (\lambda x : \sigma. x) : \sigma$ para cualquier σ .
- ▶ En particular, vale para $\sigma = \perp$.
- ▶ En consecuencia, si se extiende NJ con un operador fix , la lógica sería inconsistente ($\vdash \perp$ sería derivable)

i i i i i i i i i i ? ? ? ? ? ? ? ?