Universitatea Tehnică a Moldovei

Programul de master

Știința Datelor

Modele matematice şi optimizări

Raport Laborator 4

Elaborat:

masterandul gr. ȘD-241M Sîrbu Valentina

Chișinău, 2025

Optimizarea unui Portofoliu de Investiții folosind Teoria Modernă a Portofoliilor

Un administrator de fonduri dorește să aloce investiții în șase clase de active: **Acțiuni (S), Obligațiuni (B), Imobiliare (RE), Mărfuri (C), Criptomonede (Crypto) și Numerar (Cash)**. Scopul este de a maximiza **randamentul așteptat** reducând în același timp **riscul portofoliului** (varianța), respectând următoarele constrângeri:

- **Constrângere de buget**: Alocarea totală trebuie să fie de 100% (sau 1).
- **Constrângere de risc**: Riscul (varianța portofoliului) nu trebuie să depășească un anumit prag.
- **Constrângere de lichiditate**: Cel puțin 10% din portofoliu trebuie să fie în active lichide (numerar și obligațiuni).
- **Constrângere de diversificare**: Niciun activ nu poate depăși 40% din portofoliu.
- **Maximizarea Randamentului Așteptat**: Portofoliul trebuie optimizat pentru a maximiza **raportul Sharpe** (randament per unitate de risc).

Modelul matematic

Fie $n = 6$ numărul de active financiare disponibile, care sunt următoarele: Acțiuni, Obligațiuni, Imobiliare, Mărfuri, Criptomonede și Numerar. Vectorul ponderilor alocate portofoliului este:

$$w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)^T,$$

unde fiecare w_i reprezintă ponderea activului i în portofoliu, cu w_1 corespunzând acțiunilor, w_2 obligațiunilor, w_3 imobiliarelor, w_4 mărfurilor, w_5 criptomonedelor și w_6 numerarului. Ponderea totală alocată portofoliului trebuie să fie de 1, adică:

$$\sum_{i=1}^{6} w_i = 1.$$

Scopul este maximizarea raportului Sharpe, care este dat de raportul dintre randamentul așteptat și riscul asociat, unde riscul este măsurat prin varianța portofoliului. Funcția obiectiv de optimizare este dată de:

$$\max_{w} \quad \mu^T w - \lambda w^T \Sigma w,$$

unde:

Asset Class	Expected Return	Weight Constraint
Stocks	0.12	≤ 40%
Bonds	0.05	≤ 40%
Real Estate	0.08	≥ 10%, ≤ 40%
Commodities	0.1	≤ 40%
Crypto	0.2	≤ 40%
Cash	0.02	≤ 40%

Covariance Matrix	Stocks	Bonds	Real Estate	Commodities	Crypto	Cash
Stocks	0.10	0.02	0.04	0.03	0.05	0.01
Bonds	0.02	0.08	0.03	0.02	0.01	0.02
Real Estate	0.04	0.03	0.12	0.05	0.04	0.01
Commodities	0.03	0.02	0.05	0.09	0.06	0.02
Crypto	0.05	0.01	0.04	0.06	0.25	0.01
Cash	0.01	0.02	0.01	0.02	0.01	0.02

	Weight		
Stocks	0.30200000		
Bonds	0.11200000		
Real Estate	0.10000000		
Commodities	0.15000000		
Crypto	0.21594635		
Cash	0.12005365		
Sum	1.00000000		
E[r]	0.11043034		
Variance	0.04998814	<=	0.05
Stdev	0.22358029		
Rf Romania	0.07710000		
Sharpe	0.46518118		

Figure 1: Diagrama portofoliului de investiții

- $\mu \in \mathbb{R}^6$ este vectorul randamentelor anuale așteptate ale activelor:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.05 \\ 0.08 \\ 0.10 \\ 0.20 \\ 0.02 \end{pmatrix},$$

- $\Sigma \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ este matricea de covarianță a activelor:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.02 & 0.04 & 0.03 & 0.05 & 0.01 \\ 0.02 & 0.08 & 0.03 & 0.02 & 0.01 & 0.02 \\ 0.04 & 0.03 & 0.12 & 0.05 & 0.04 & 0.01 \\ 0.03 & 0.02 & 0.05 & 0.09 & 0.06 & 0.02 \\ 0.05 & 0.01 & 0.04 & 0.06 & 0.25 & 0.01 \\ 0.01 & 0.02 & 0.01 & 0.02 & 0.01 & 0.02 \end{pmatrix},$$

- $\lambda = 0.0771$ este parametrul de aversiune față de risc,
- $w \in \mathbb{R}^6$ reprezintă vectorul ponderilor alocate fiecărui activ.

Constrângeri

Problema de optimizare este supusă unor constrângeri care garantează că portofoliul va respecta anumite reguli de diversificare și limitare a riscului:

$$\sum_{i=1}^{6} w_i = 1, \quad \text{(buget total alocat)} \tag{1}$$

$$w_2 + w_6 \geq 0.1, \quad \text{(lichiditate: obligațiuni și numerar trebuie să fie cel puțin 10\% din portofoliu)} \tag{2}$$

$$0 \leq w_i \leq 0.4, \quad \forall i \in \{1, \ldots, 6\}, \quad \text{(limita de diversificare, niciun activ nu poate depăși 40\% din portofoliu)} \tag{3}$$

$$w^T \Sigma w \leq 0.05, \quad \text{(limita de risc, varianta portofoliului nu trebuie să depășească 5\%).} \tag{4}$$

Aceste constrângeri sunt impuse pentru a asigura un portofoliu diversificat, cu o alocare optimă a resurselor, care să minimizeze riscurile și să maximizeze randamentele așteptate.

Implementare în Python

Implementarea problemei în Python folosind `cvxpy` este prezentată mai jos:

```
import cvxpy as cp
import numpy as np

np.random.seed(42)
n_assets = 6

mu = np.array([0.12, 0.05, 0.08, 0.10, 0.20, 0.02])
sigma = np.array([
    [0.10, 0.02, 0.04, 0.03, 0.05, 0.01],
    [0.02, 0.08, 0.03, 0.02, 0.01, 0.02],
    [0.04, 0.03, 0.12, 0.05, 0.04, 0.01],
    [0.03, 0.02, 0.05, 0.09, 0.06, 0.02],
    [0.05, 0.01, 0.04, 0.06, 0.25, 0.01],
    [0.01, 0.02, 0.01, 0.02, 0.01, 0.02]
])

w = cp.Variable(n_assets)

risk = cp.quad_form(w, sigma)
expected_return = mu @ w
risk_aversion = 0.5

objective = cp.Maximize(expected_return - risk_aversion * risk)
constraints = [cp.sum(w) == 1, w[2] >= 0.1, w <= 0.4, w >= 0, risk <= 0.05]

problem = cp.Problem(objective, constraints)
```

```
problem.solve()

print("Optimal Portfolio Weights:")
for i, asset in enumerate(["Stocks", "Bonds", "Real Estate", "Commodities", "Crypto", "Cash'
    print(f"{asset}: {w.value[i]:.4f}")
\print("\nExpected Portfolio Return:", expected_return.value)
print("Portfolio Risk (Variance):", risk.value)
```

Analiza Rezultatelor

```
Optimal Portfolio Weights:
Stocks: 0.30279117
Bonds: 0.11209655
Real Estate: 0.10000000
Commodities: 0.15018013
Crypto: 0.21549528
Cash: 0.11943686

Expected Portfolio Return: 0.11044557491683982
Portfolio Risk (Variance): 0.05000000005413122
Portfolio Risk (Std Dev): 0.22360679787102006
Sharpe Ratio: 0.46519415289351146
```

Metric	Valori	
	Excel	**Python**
Greutatea acțiunilor	0.30164757	0.30279117
Greutatea obligațiunilor	0.11246114	0.11209655
Greutatea imobiliarelor	0.10000000	0.10000000
Greutatea mărfurilor	0.15224675	0.15018013
Greutatea criptomonedelor	0.21506419	0.21549528
Greutatea numerarului	0.11858035	0.11943686
Rentabilitatea așteptată (E[r])	0.11042989	0.11044557
Varianța	0.04998805	0.05000000
Deviația standard	0.22358007	0.22360680
Raportul Sharpe	0.46517959	0.46519415

Table 1: Comparația rezultatelor optimizării portofoliului între Excel (IPOP Nonlinear) și Python (CVXPY)

- Sum Weight este binding la 1, ceea ce înseamnă că suma greutăților respectă exact constrângerea.

WPS Office Answer Report
Worksheet: [MMOtema4.xlsx]Portofoliu
Report Created: 1/30/2025 6:6:36 PM
Result: Solver has converged to the current solution. All constraints are satisfied.
Solver Engine
Engine: Ipopt Nonlinear
Solution Time: 0.281 Seconds.
Iterations: 27 Subproblem: 0
Solver Options
Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Use Automatic Scaling
Convergence 0.0001, Population Size 10000, Random Seed 0, Derivatives Forward, RequireBounds
Max Subproblems Unlimited, Max Integer Solutions Unlimited, Integer Tolerance1%, Solve Without Integer Constraints, Assume NonNegative

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
K25	Sharpe Weight	0.460157061	0.451135471

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
K12	Stocks Weight	1	0.301648	Contin
K13	Bonds Weight	1	0.112461	Contin
K14	Real Estate Weight	1	0.100000	Contin
K15	Commodities Weight	1	0.152247	Contin
K16	Crypto Weight	1	0.2150641	Contin
K17	Cash Weight	1	0.1185803	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
K19	Sum Weight	1	K19=1	Binding	0
K21	Variance Weight	0.049996438	K21<=0.05	Not Binding	3.56221E-06
K12	Stocks Weight	0.4	K12>=0	Not Binding	0.4
K12	Stocks Weight	0.4	K12<=0.4	Binding	0
K13	Bonds Weight	0.1	K13>=0	Binding	0
K13	Bonds Weight	0.1	K13<=0.4	Not Binding	0.3
K13	Bonds Weight	0.1	K13>=0.1	Binding	0
K14	Real Estate Weight	0.1	K14>=0	Binding	0
K14	Real Estate Weight	0.1	K14<=0.4	Not Binding	0.3
K14	Real Estate Weight	0.1	K14>=0.1	Binding	0
K15	Commodities Weight	0.15224675	K15>=0	Not Binding	0.15224675
K15	Commodities Weight	0.15224675	K15<=0.4	Not Binding	0.17611132
K16	Crypto Weight	0.2150641	K16>=0	Not Binding	0.21506419
K16	Crypto Weight	0.2150641	K16<=0.4	Not Binding	0.08658337
K17	Cash Weight	0.1185803	K17>=0	Not Binding	0.183067221
K17	Cash Weight	0.1185803	K17<=0.4	Not Binding	0.183067220

- Varianța a rămas sub 0.05, dar nu este binding (marjă de 3.56×10^{-6}).
- Greutatea acțiunilor a atins limita superioară de 0.4, ceea ce înseamnă că orice creștere suplimentară ar încălca constrângerile.
- Greutatea obligațiunilor și imobiliarelor sunt binding la limita inferioară de 0.1.
- Mărfurile, criptomonedele și cash-ul nu sunt binding, ceea ce indică flexibilitate în alocare.

Concluzie

În ciuda utilizării unor metode diferite de optimizare—IPOP Nonlinear în Excel și CVXPY în Python—rezultatele obținute sunt remarcabil de asemănătoare, evidențiind consistența și robustetea procesului de optimizare a portofoliilor. Ambele metode produc greutăți ale portofoliilor, rentabilități așteptate, riscuri (varianță și deviație standard) și rapoarte Sharpe foarte apropiate, sugerând că logica de optimizare de bază este implementată eficient în ambele platforme.

Această comparație consolidează ideea că teoria modernă a portofoliilor și tehnicile de optimizare sunt aplicabile și fiabile pe diverse platforme software, permițând investitorilor și analiștilor să folosească oricare dintre aceste instrumente cu încredere pentru construcția și luarea deciziilor în ceea ce privește portofoliul.