

Universitatea Tehnică a Moldovei

Programul de master

Știința Datelor

Modele matematice și optimizări

Raport Laborator 1

Elaborat:

masterandul gr. ȘD-241M Sîrbu Valentina

Chișinău, 2024

Problema 1: Dietă (Minimizare)

Enunțul problemei:

Se dorește determinarea cantităților $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ din următoarele alimente:

- x_1 : Pui la grătar
- x_2 : Orez brun
- x_3 : Legume mixte
- x_4 : Brânză cottage
- x_5 : Cartofi copti

astfel încât să se minimizeze costul total, respectând cerințele nutriționale minime zilnice. Tabelul cu valorile nutriționale și costurile alimentelor este prezentat mai jos:

Aliment	Calorii	Proteine	Grăsimi	Carbohidrați	Fibre	Cost (lei/uni)
Pui la grătar (x_1)	30	30	20	10	7	0.5
Orez brun (x_2)	30	50	15	20	10	0.7
Legume mixte (x_3)	30	30	30	40	25	0.75
Brânză cottage (x_4)	40	20	10	40	15	0.5
Cartofi copti (x_5)	25	15	20	15	20	0.4

Table 1: Valorile nutriționale și costurile alimentelor

Funcția obiectiv:

$$\text{Minimizează: } Z = 0.5x_1 + 0.7x_2 + 0.75x_3 + 0.5x_4 + 0.4x_5$$

Constrângeri:

$$30x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 25x_5 \geq 180 \quad (\text{calorii})$$

$$30x_1 + 50x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 15x_5 \geq 120 \quad (\text{proteine})$$

$$20x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 10x_4 + 20x_5 \geq 70 \quad (\text{grăsimi})$$

$$10x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 40x_4 + 15x_5 \geq 180 \quad (\text{carbohidrați})$$

$$7x_1 + 10x_2 + 25x_3 + 15x_4 + 20x_5 \geq 79 \quad (\text{fibre})$$

Restricții de ne-negativitate:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Analiza soluției de optimizare liniară

Solver-ul a găsit o soluție optimă pentru minimizarea costului total, respectând toate constrângerile impuse.

- **Cost total minimizat:** $Z = 2.7276$ lei
- **Cantitățile de alimente:**
 - x_1 (Pui la grătar): 0.1229 unități
 - x_2 (Orez brun): 0.4452 unități
 - x_3 (Legume mixte): 0.8173 unități
 - x_4 (Brânză cottage): 3.3821 unități
 - x_5 (Cartofi copti): 0.1262 unități

	Calories	Protein	Fat	Carbs	Fiber	X		Cost
Food 1	30	30	20	10	7	0.12292		0.5
Food 2	30	50	15	20	10	0.44518		0.7
Food 3	30	30	30	40	25	0.81728		0.75
Food 4	40	20	10	40	15	3.38206		0.5
Food 5	25	15	20	15	20	0.12625		0.4
Calc	180	120	70	180	79	>=		Final Sum
Min	180	120	70	180	79	0		2.7276

```
Optimal solution found:
Food 1: 0.1229 grams
Food 2: 0.4452 grams
Food 3: 0.8173 grams
Food 4: 3.3821 grams
Food 5: 0.1262 grams
Minimum total cost: $2.7276
```

Constrângeri și statusul acestora:

Toate constrângerile nutriționale sunt **"binding"**, ceea ce înseamnă că sunt atinse limitele minime specificate.

Constrângerile asupra variabilelor x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sunt **"not binding"**, ceea ce înseamnă că solver-ul a ajustat cantitățile pentru a obține costul minim, fără a fi obligate să ia valoarea minimă 0.

Nutrient	Valoare calculată	Limită minimă	Status
Calorii	180	180	Binding
Proteine	120	120	Binding
Grăsimi	70	70	Binding
Carbohidrați	180	180	Binding
Fibre	79	79	Binding

Table 2: Statusul constrângerilor nutriționale

WPS Office Answer Report

Worksheet: [Book1]Mini

Report Created: 1/20/2025 9:58:36 PM

Result: Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied.

Solver Engine

Engine: Simplex LP

Solution Time: 0.018 Seconds.

Iterations: 7 Subproblem: 0

Solver Options

Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Use Automatic Scaling

Max Subproblems Unlimited, Max Integer Solutions Unlimited, Integer Tolerance1%, Solve Without Integer Constraints, Assume NonNegative

Objective Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$I\$12	Min Final Sum	0	2.727574751

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$G\$3	Food 1 X	0	0.122923588	Contin
\$G\$4	Food 2 X	0	0.445182724	Contin
\$G\$5	Food 3 X	0	0.817275748	Contin
\$G\$6	Food 4 X	0	3.382059801	Contin
\$G\$7	Food 5 X	0	0.126245847	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$B\$11	Calc Calories	180	\$B\$11>=\$B\$12	Binding	0
\$C\$11	Calc Protein	120	\$C\$11>=\$C\$12	Binding	0
\$D\$11	Calc Fat	70	\$D\$11>=\$D\$12	Binding	0
\$E\$11	Calc Carbs	180	\$E\$11>=\$E\$12	Binding	0
\$F\$11	Calc Fiber	79	\$F\$11>=\$F\$12	Binding	0
\$G\$3	Food 1 X	0.122923588	\$G\$3>=\$G\$12	Not Binding	0.122923588
\$G\$4	Food 2 X	0.445182724	\$G\$4>=\$G\$12	Not Binding	0.445182724
\$G\$5	Food 3 X	0.817275748	\$G\$5>=\$G\$12	Not Binding	0.817275748
\$G\$6	Food 4 X	3.382059801	\$G\$6>=\$G\$12	Not Binding	3.382059801
\$G\$7	Food 5 X	0.126245847	\$G\$7>=\$G\$12	Not Binding	0.126245847

Interpretarea soluției:

- **Cantitățile alocate:** Alimentele care contribuie cel mai mult la satisfacerea cerințelor sunt:
 - **Brânza cottage** (x_4) – are cea mai mare cantitate (3.3821 unități), datorită raportului său avantajos între nutrienți și cost.
 - Alimentele precum **puiul la grătar**, **cartofii copti** și **legumele mixte** au cantități mici, fiind mai puțin eficiente din punct de vedere

al costului.

- **Cost total minimizat:** Costul minim de $Z = 2.7276$ lei demonstrează că soluția respectă toate constrângerile și optimizează resursele financiare.
- **Eficiența soluției:** Toate cerințele nutriționale sunt exact satisfăcute (*binding*), fără surplusuri. Aceasta înseamnă că resursele sunt utilizate eficient.

Analiza Raportului de Sensibilitate

- Toate variabilele de decizie (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) sunt utilizate optim în soluția curentă.
- **Food 4 (Brânză cottage)** are cea mai mare toleranță la creșterea costului unitar (+0.1182), ceea ce o face stabilă la modificările de preț.
- **Food 5 (Cartofi copti)** este cea mai sensibilă la reducerea costului unitar (−0.0107).
- Toate constrângerile sunt *binding*, adică limitele sunt atinse exact.
- **Proteinele** au cel mai mare impact asupra costului total (*Shadow Price* = 0.0092).
- **Fibrele** au cel mai mic impact asupra costului total (*Shadow Price* = 0.0011).

WPS Office Sensitivity Report
Worksheet: [Book1]Mini
Report Created: 1/20/2025 9:59:33 PM

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$G\$3	Food 1 X	0.122923588	0	0.5	0.012621359	0.015971223
\$G\$4	Food 2 X	0.445182724	0	0.7	0.035350318	0.026
\$G\$5	Food 3 X	0.817275748	0	0.75	0.013120567	0.149038462
\$G\$6	Food 4 X	3.382059801	0	0.5	0.118181818	0.017156105
\$G\$7	Food 5 X	0.126245847	0	0.4	0.108391608	0.010655738

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$11	Calc Calories	180	0.000460963	180	23.26241135	4.258992806
\$C\$11	Calc Protein	120	0.009165282	120	6.651685393	11.99105145
\$D\$11	Calc Fat	70	0.007607973	70	3.166666667	1.85
\$E\$11	Calc Carbs	180	0.005149502	180	2.657342657	23.65384615
\$F\$11	Calc Fiber	79	0.001079734	79	1.436893204	1.245901639

Problema 2: Optimizarea producției (Maximizare Profits)

Enunțul Problemei

Un antreprenor produce cinci tipuri de produse, fiecare cu cerințe specifice de forță de muncă și materiale, precum și profit per unitate. Obiectivul este de a maximiza profitul total, respectând următoarele constrângeri:

- Resursele totale de forță de muncă disponibile sunt de maximum **400 ore**.
- Resursele totale de materiale disponibile sunt de maximum **350 kilograme**.
- Se impun cerințe minime pentru producția anumitor produse.
- Producția totală pentru $P3$, $P4$ și $P5$ nu poate depăși **50 de unități**.
- Numărul produselor produse trebuie să fie pozitiv sau nul.

Datele problemei sunt prezentate în tabelul următor:

Produs	F. de muncă (ore/unitate)	Material (kg/unitate)	Cerință minimă	Profit/unitate (R)
P1	5	5	10	50
P2	6	5	10	60
P3	2	5	0	65
P4	7	4	0	53
P5	5	7	0	90

Table 3: Resurse necesare, cerințe și profit per unitate pentru fiecare produs.

Funcția Obiectiv

Funcția obiectiv este:

$$\text{Maximizați: } Z = 50x_1 + 60x_2 + 65x_3 + 53x_4 + 90x_5 \quad (1)$$

Constrângeri

Constrângerile problemei sunt:

$$5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 5x_5 \leq 400 \quad (\text{Forță de muncă totală}) \quad (2)$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 7x_5 \leq 350 \quad (\text{Material total}) \quad (3)$$

$$x_3 + x_4 + x_5 \leq 50 \quad (\text{Limita combinată pentru P3, P4, P5}) \quad (4)$$

$$x_1 \geq 10 \quad (\text{Minim pentru P1}) \quad (5)$$

$$x_2 \geq 10 \quad (\text{Minim pentru P2}) \quad (6)$$

Restricții de Ne-negativitate

Restricțiile de ne-negativitate sunt:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad (7)$$

Analiza Soluției de Optimizare Liniară:

- **Rezultatul Soluției:** Solver-ul a găsit o soluție care satisface toate constrângerile și condițiile de optimalitate. Funcția obiectivă a atins valoarea maximă de 4364.615385.
- **Timp de Calcul:** Optimizarea a fost realizată în 0.018 secunde, folosind algoritmul Simplex LP cu 4 iterații.
- **Variabilele de Decizie:** Nivelurile optime ale variabilelor sunt următoarele:
 - P1 : 10
 - P2 : 10

- $P3$: 6.1538
- $P4$: 29.2308
- $P5$: 14.6154

	Labor	Material	X				Profit
P1	5	5	10.0000	>=	10		50
P2	6	5	10.0000	>=	10		60
P3	2	5	6.1538	>=	0		65
P4	7	4	29.2308	>=	0		53
P5	5	7	14.6154	>=	0		90
			50.0000	sum of P3:P5 <=	50		
Calc	400	350					Final Sum
Op	<=	<=					4,364.62
	400	350					

```
Objective (Maximum Profit): 4364.61541
x1 (P1 Production): 10.0
x2 (P2 Production): 10.0
x3 (P3 Production): 6.1538462
x4 (P4 Production): 29.230769
x5 (P5 Production): 14.615385
```

Constrângeri și Statusul Acestora:

- **Constrângerea privind forța de muncă:** Valoarea finală este 400, ceea ce indică utilizarea completă a resurselor disponibile. Prețul umbră asociat este 0.0769, ceea ce sugerează că o creștere cu 1 unitate a resursei ar crește profitul total cu aproximativ 0.0769.
- **Constrângerea privind materialele:** Valoarea finală este 350, utilizând complet resursele disponibile. Prețul umbră este 12.3846, ceea ce indică faptul că fiecare unitate suplimentară ar adăuga 12.3846 la profit.
- **Constrângerea totală pentru $P3, P4, P5$:** Valoarea finală este 50, ceea ce indică atingerea limitei maxime. Prețul umbră de 2.9231 arată că o unitate suplimentară pentru această constrângere ar crește profitul cu 2.9231.

Interpretarea Soluției:

- **Produsele $P1$ și $P2$:** Ambele sunt produse la nivelul cerinței minime de 10 unități. Costurile reduse pentru $P1$ și $P2$ sunt negative, sugerând că

WPS Office Answer Report

Worksheet: [Book1]Max

Report Created: 1/20/2025 9:47:42 PM

Result: Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied.

Solver Engine

Engine: Simplex LP

Solution Time: 0.018 Seconds.

Iterations: 4 Subproblem: 0

Solver Options

Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Use Automatic Scaling

Max Subproblems Unlimited, Max Integer Solutions Unlimited, Integer Tolerance1%, Solve Without Integer Constraints, Assume NonNegative

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$I\$12	<= Final Sum	0	4364.615385

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$E\$3	P1 X	0	10	Contin
\$E\$4	P2 X	0	10	Contin
\$E\$5	P3 X	0	6.153846154	Contin
\$E\$6	P4 X	0	29.23076923	Contin
\$E\$7	P5 X	0	14.61538462	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$B\$11	Calc Labor	400	\$B\$11<=\$B\$13	Binding	0
\$C\$11	Calc Material	350	\$C\$11<=\$C\$13	Binding	0
\$E\$8	X	50	\$E\$8<=\$G\$8	Binding	0
\$E\$3	P1 X	10	\$E\$3>=\$G\$3	Binding	0
\$E\$4	P2 X	10	\$E\$4>=\$G\$4	Binding	0
\$E\$5	P3 X	6.153846154	\$E\$5>=\$G\$5	Not Binding	6.153846154
\$E\$6	P4 X	29.23076923	\$E\$6>=\$G\$6	Not Binding	29.23076923
\$E\$7	P5 X	14.61538462	\$E\$7>=\$G\$7	Not Binding	14.61538462

producerea mai multor unități nu ar aduce beneficii economice în condițiile actuale.

- **Produsele P3, P4, P5:** Numărul optim de unități este 6.1538, 29.2308 și 14.6154, respectiv. Costurile reduse sunt 0, ceea ce indică o utilizare eficientă a resurselor disponibile pentru aceste produse.
- **Profit Total:** Soluția optimă maximizează profitul total la 4364.62.

Analiza Raportului de Sensibilitate

- **Resursele:**
 - **Forța de muncă:** Este utilizată la capacitate maximă. O unitate suplimentară ar aduce un mic beneficiu.
 - **Materialele:** Sunt folosite complet. O unitate în plus ar adăuga un beneficiu semnificativ.
 - **Produsele P3, P4, P5:** Sunt produse la limita maximă. O unitate suplimentară ar aduce un beneficiu semnificativ.
- **Produse:**

- *P1*: Se produce la minimul impus de 10 unități. Reducerea producției ar duce la pierderi semnificative.
- *P2*: Se produce la minimul impus de 10 unități. Reducerea producției ar duce la pierderi, dar nu la fel de mari ca în cazul *P1*.
- *P3*: Producția este optimă (6.1538 unități), nu mai sunt pierderi.
- *P4*: Producția este optimă (29.2308 unități), utilizând complet resursele.
- *P5*: Producția este optimă (14.6154 unități), utilizând complet resursele.

• **Profitul unitar:**

- *P1*: Profitul poate crește semnificativ sau poate scădea nelimitat fără a afecta soluția.
- *P2*: Profitul poate crește semnificativ, dar nu va fi afectat dacă scade foarte mult.
- *P3*: Profitul poate crește puțin sau scădea semnificativ fără a afecta soluția.
- *P4*: Profitul poate crește semnificativ, dar o scădere nu ar afecta mult soluția.
- *P5*: Profitul poate crește ușor sau scădea ușor fără a afecta soluția.

WPS Office Sensitivity Report
Worksheet: [Book1]Max
Report Created: 1/20/2025 9:48:6 PM

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$E\$3	P1 X	10	-12.30769231	50	12.30769231	1E+30
\$E\$4	P2 X	10	-2.384615385	60	2.384615385	1E+30
\$E\$5	P3 X	6.153846154	0	65	0.333333333	1.310344828
\$E\$6	P4 X	29.23076923	0	53	10.33333333	0.5
\$E\$7	P5 X	14.61538462	0	90	1.407407407	1

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$11	Calc Labor	400	0.076923077	400	26.66666667	190
\$C\$11	Calc Material	350	12.38461538	350	40	38
\$E\$8	X	50	2.923076923	50	7.037037037	2.75862069

Concluzie

Laboratorul realizat a fost extrem de util pentru aprofundarea cunoștințelor despre problemele liniare de optimizare, utilizarea solverului din Excel și interpretarea analizei de sensibilitate. Prin aplicarea concretă a acestor concepte, am reușit să înțelegem mai bine cum se construiesc, se rezolvă și se interpretează modelele liniare.

Problemele liniare sunt utilizate pentru optimizarea unei funcții obiectiv, cum ar fi maximizarea profitului sau minimizarea costurilor, sub rezerva unui set de constrângeri liniare. Aceste constrângeri reprezintă limitări ale resurselor disponibile, cum ar fi materiale, forță de muncă sau timp. Modelul general al unei probleme liniare este:

$$\text{Maximizați (sau Minimizați)} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{Sub restricțiile:} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \vdots \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

Solverul din Excel este un instrument practic pentru rezolvarea acestor probleme, deoarece permite formularea rapidă a modelelor și obținerea soluției optime. Analiza de sensibilitate este, de asemenea, un aspect important, deoarece ajută la înțelegerea modului în care modificările resurselor disponibile sau ale coeficienților funcției obiectiv afectează soluția.

Prin acest laborator, am învățat să interpretăm concepte precum:

- **Prețul umbră:** Valoarea marginală a unei resurse suplimentare și impactul acesteia asupra funcției obiectiv.
- **Costul redus:** Impactul reducerii unui produs asupra soluției optime.
- **Intervalele de variație:** Limitele în care coeficienții funcției obiectiv pot varia fără a modifica soluția optimă.

Aceste cunoștințe vor fi utile în rezolvarea problemelor economice, financiare și de gestionare a resurselor, atât în mediul academic, cât și în practică.