



Universidad Nacional de Rosario  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Escuela de Ingeniería Electrónica  
**Teoría de Control**

**TP N° 3: Diseño de Controladores en el Dominio Discreto**

Autor/es:

Alumno	Legajo
<b>BELLINI, Valentín</b>	B-6127/1
<b>SAITTA, Iván</b>	S-5435/6

Corrigió	Calificación

Año 2024

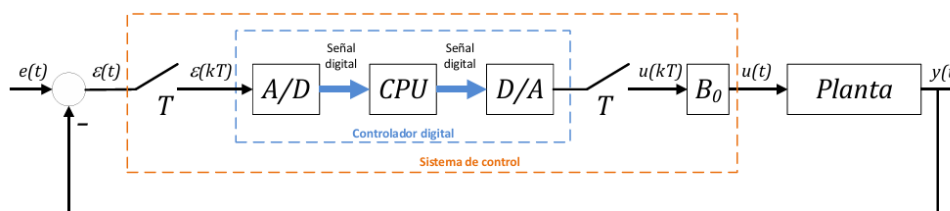
## ÍNDICE

1. Introducción.....	3
2. Método de Equivalentes Discretos .....	4
2.1 Polos y Ceros .....	5
2.2 Respuesta en Frecuencia .....	6
2.3 Respuesta Temporal .....	7
2.4 Conclusiones.....	8
3. Método de Ragazzini.....	8
3.1 Diseño y Principales Limitaciones .....	10
3.2 Propuesta de Mejora .....	12
4. Compensador Smith con Transformada W.....	14
4.1 Validez del Método .....	15
4.2 Diseño del Controlador.....	15
5. Comparación y Conclusiones.....	19

# 1. Introducción

La implementación de control discreto parte de la necesidad de realizar control digital a través de un microprocesador ( $\mu C$ ), el cual solo puede procesar señales discretas. En este caso, las señales continuas del sistema deben ser convertidas a señales discretas para ser tratadas por el  $\mu C$ . Esta necesidad da lugar a procesos de muestreo, discretización de señales y diseño de controladores discretos. Para aplicar control discreto, la estructura del sistema se muestra a continuación.

Figura 1: Diagrama de Bloques de un Control Digital.



En la Figura 1 se ingresa al sistema con una señal de entrada continua que representa la referencia del lazo de control. Luego, se muestrea la señal continua en intervalos regulares definidos por un período de muestreo  $T$ , obteniendo una secuencia de valores discretos que representan a la señal original. Esta señal discreta se convierte a digital mediante un CAD para poder ser procesada por el controlador digital. El controlador implementa la lógica de control y su señal digital de salida es convertida en un valor analógico discreto mediante un CDA. Esta señal debe convertirse en continua nuevamente, por lo que se utiliza un bloqueador de orden cero (ZOH), dispositivo que retiene el valor de la señal de salida entre cada muestra para entregarla a la planta como una señal analógica constante durante el tiempo de muestreo. Luego de que la señal es procesada por la planta, se realiza una realimentación negativa como lazo típico de control.

Se plantean diferentes enfoques para diseñar el controlador en sistemas discretos:

## ➤ Controlador en el Dominio S

En este enfoque, el diseño del controlador se realiza en el dominio  $s$ , obteniendo una función de transferencia  $H(s)$ . Para poder implementarlo en un  $\mu C$ , se transforma la función  $H(s)$  en un equivalente discreto que mantenga las características del diseño continuo. Se tienen varios métodos para obtener el equivalente discreto, como por ejemplo:

- Reglas de integración numérica
- Mapeo de polos y ceros
- Bloqueador equivalente

## ➤ Controlador en el Dominio Z

Para esta técnica se utiliza el modelo de la planta discretizada ( $H(z)$ ) y se diseña el controlador directamente en el plano  $z$  para cumplir con las especificaciones del sistema.

### ➤ Controlador en el Dominio W

Se parte desde el modelo de la planta discretizada y se utiliza la transformación bilineal (W) para obtener  $H(w)$ . Puede diseñarse el controlador siguiendo los mismos pasos que en el dominio frecuencial, debido a que la nueva función transferencia es racional en términos de  $w$ . Finalmente, se antitransforma para obtener el controlador en el dominio  $z$ .

Durante el desarrollo del informe se trabajará con los enfoques de controladores mencionados sobre la planta “Producción de Biodiesel en un Reactor Agitado”.

## 2. Método de Equivalentes Discretos

Durante el desarrollo de los Trabajos Prácticos 1 y 2 se calcularon diferentes controladores para el sistema “Producción de Biodiesel en un Reactor Agitado” en el dominio temporal y en el dominio frecuencial, respectivamente. En particular, en el Trabajo Práctico 2 se calculó un controlador  $J(s)$  del tipo PI+PD para cumplir con las especificaciones de error estático, tiempo de respuesta y sobrevalor:

$$J(s) = 140 \frac{(s + 0.0284)(s + 0.012)}{s(s + 0.226)}$$

Sabiendo que este controlador en tiempo continuo cumple con los requerimientos impuestos para el sistema, se obtiene el controlador equivalente discreto a partir de los cinco métodos conocidos en la teoría, con las funciones de Matlab correspondientes. Se utilizarán dos períodos de muestreo distintos (2,5 s y 25 s) con el objetivo de realizar comparaciones entre ambos y obtener conclusiones.

Tabla 1: Equivalentes Discretos de  $J(s)$  para  $T = 2,5$  segundos.

Método	Transformación	Equivalente Discreto
Regla Trapezoidal	$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$	$114.73 \frac{(z-0.9314)(z-0.9704)}{(z-1)(z-0.5595)}$
Regla Rectangular por Adelanto	$s = \frac{z-1}{T}$	$140 \frac{(z-0.929)(z-0.97)}{(z-1)(z-0.435)}$
Regla Rectangular por Atraso	$s = \frac{z-1}{Tz}$	$98.683 \frac{(z-0.9707)(z-0.9337)}{(z-1)(z-0.639)}$
Mapeo de Polos y Ceros	$z = e^{sT}$	$112.47 \frac{(z-0.9315)(z-0.9704)}{(z-1)(z-0.5684)}$
Bloqueador Equivalente Orden 0	$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[ \frac{G(s)}{s} \right]$	$140 \frac{z^2 - 1.922z + 0.9236}{(z-1)(z-0.5684)}$

Tabla 2: Equivalentes Discretos de  $J(s)$  para  $T = 25$  segundos.

Método	Transformación	Equivalente Discreto
Regla Trapezoidal	$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$	$57.034 \frac{(z-0.476)(z-0.7391)}{(z-1)(z+0.4771)}$
Regla Rectangular por Adelanto	$s = \frac{z-1}{T}$	$140 \frac{(z-0.29)(z-0.7)}{(z-1)(z+4.65)}$
Regla Rectangular por Atraso	$s = \frac{z-1}{Tz}$	$46.8 \frac{(z-0.7692)(z-0.5848)}{(z-1)(z-0.1504)}$
Mapeo de Polos y Ceros	$z = e^{sT}$	$39.927 \frac{(z-0.4916)(z-0.7408)}{(z-1)(z-0.003518)}$
Bloqueador Equivalente Orden 0	$G(z) = (1 - Z^{-1})Z \left[ \frac{G(s)}{s} \right]$	$140 \frac{z^2 - 1.791z + 0.8284}{(z-1)(z-0.003518)}$

## 2.1 Polos y Ceros

A partir de los equivalentes discretos obtenidos sobre el controlador  $J(s)$ , se grafica un diagrama de polos y ceros para cada tiempo de muestreo utilizando el comando `pzmap(sys)` en Matlab.

Figura 2: Polos y Ceros con  $T = 2,5$  segundos.

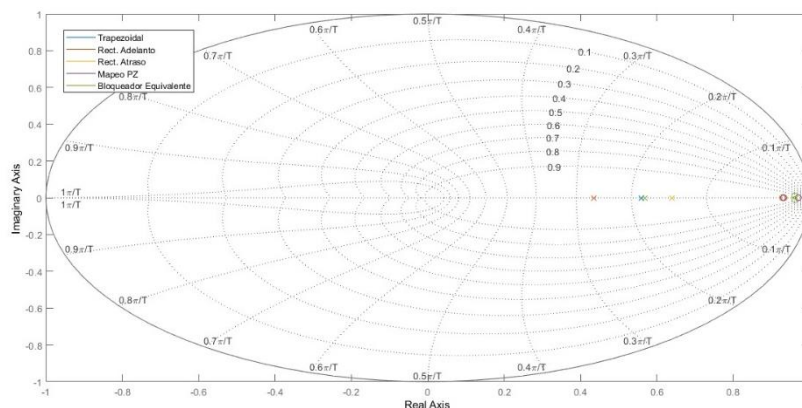
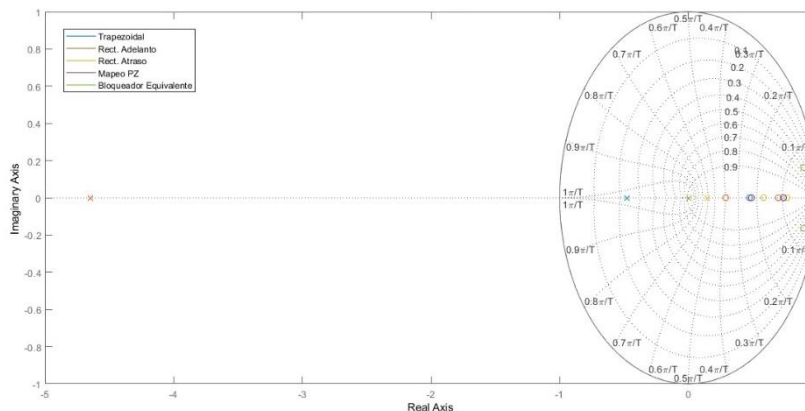


Figura 3: Polos y Ceros con  $T = 25$  segundos.



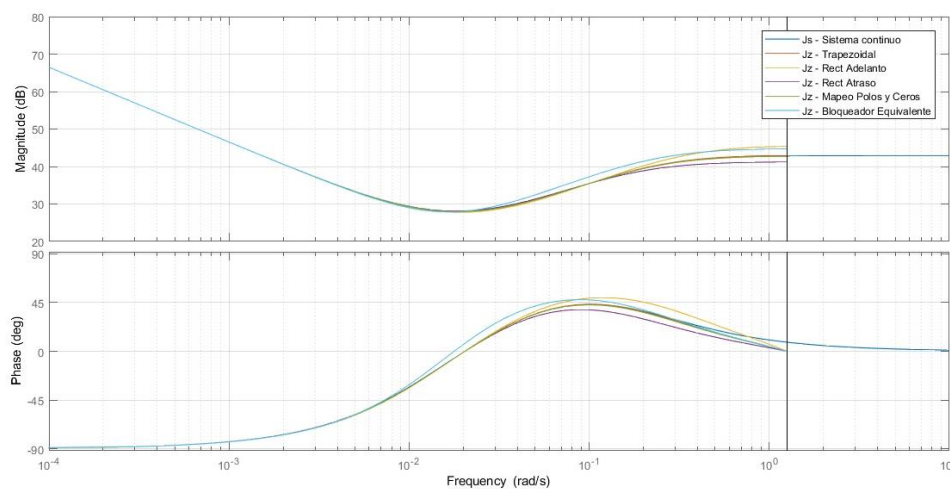
En el mapa de polos y ceros para un tiempo de muestreo  $T_1 = 2,5 \text{ s}$  (Figura 2), se puede observar que todos los métodos encuentran una respuesta similar, con singularidades cercanas al mismo punto dentro de la parte real positiva de la circunferencia unitaria, logrando mantener la estabilidad. Como se ha visto en teoría, las reglas de rectangulares por adelanto y por atraso no hacen un mapeo perfecto del semiplano negativo de  $s$  hacia la circunferencia unitaria en  $z$ .

Cuando se aumenta el tiempo de muestreo (Figura 3) se puede observar que, en el equivalente discreto según la regla rectangular por adelanto, un polo que era estable en el sistema continuo se vuelve inestable en el discreto (polo en  $-4,65$ ). Además, al aumentar el tiempo de muestreo, algunos métodos comienzan a tener corrimientos en la ubicación de los polos y ceros. Este es el caso del método trapezoidal que, para  $T_2 = 25 \text{ seg}$ , tiene un polo que se mueve a  $-0,4771$  indicando que la respuesta a lazo cerrado se volverá más oscilatoria.

## 2.2 Respuesta en Frecuencia

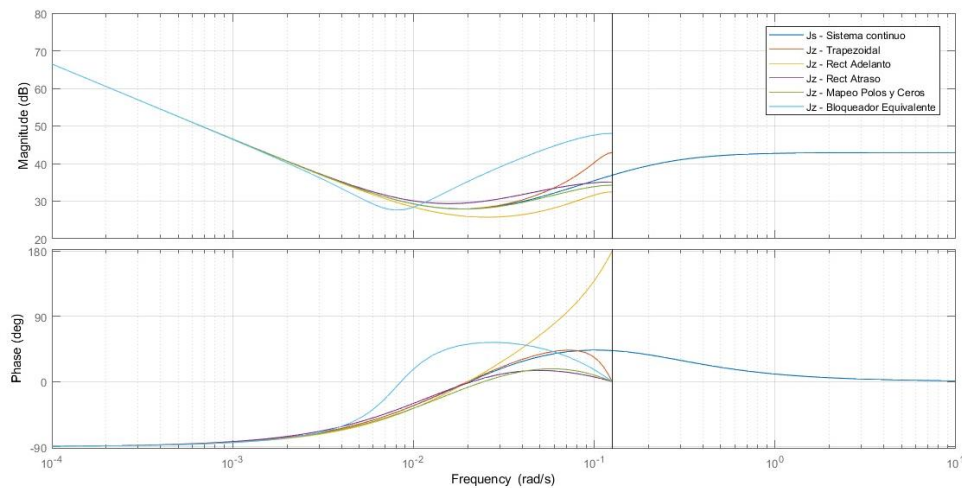
Se analiza la respuesta en frecuencia a lazo abierto del sistema según los distintos métodos de equivalente discreto a través de un diagrama de Bode.

Figura 4: Diagrama de Bode para  $T = 2,5 \text{ segundos}$ .



El diagrama de Bode muestra que la respuesta en frecuencia, considerando un tiempo de muestreo bajo, es muy parecida en todos los métodos. Si se observa la Tabla 1, todas las funciones transferencia contienen el polo en  $z = 1$ , por lo que la respuesta para frecuencias bajas coincide en todos los casos. A medida que se aumenta la frecuencia, se observan discrepancias debido a la posición de los polos según el método de discretización (Figura 2) que en estas condiciones consideraremos aceptables.

Figura 5: Diagrama de Bode para  $T = 25$  segundos.



Considerando la respuesta en frecuencia con un muestreo de  $T_2 = 25$  s, se observa que algunas aproximaciones no coinciden con el sistema continuo. Se puede destacar como la regla por adelanto se vuelve inestable debido al polo fuera de la circunferencia unitaria (Figura 3), en el cual el sistema llega a una fase de  $180^\circ$  con ganancia positiva.

**Nota:** La respuesta en frecuencia del bode para los sistemas de equivalente discreto tiene una representación hasta la frecuencia de Nyquist y es por esto que, luego de dicha frecuencia, ya no aparecen sus gráficas.

## 2.3 Respuesta Temporal

Para representar la respuesta temporal y compararla con el sistema continuo se ha seleccionado la regla trapezoidal debido a que es el método que mejor respuesta representa según las simulaciones realizadas. Se presenta el diagrama de Simulink utilizado, sobre el cual se puede seleccionar mediante dos switches el controlador que accionará sobre la planta.

Figura 6: Diagrama en Simulink.

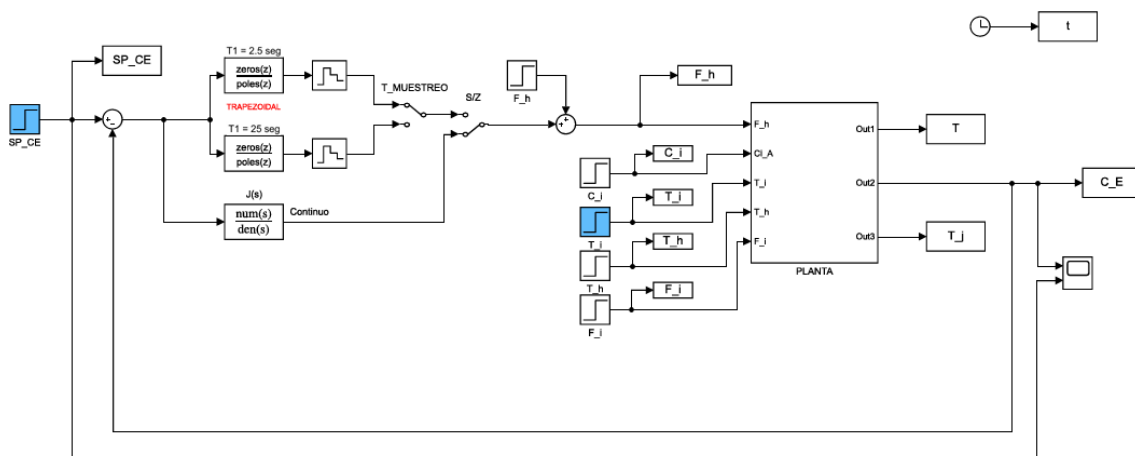
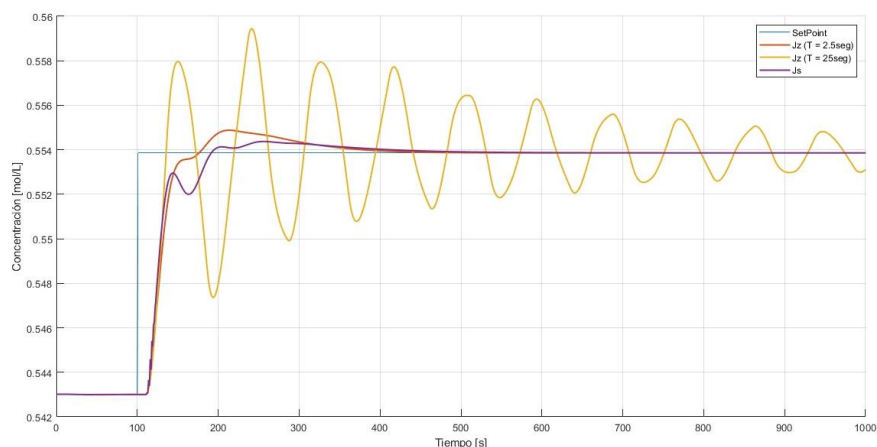


Figura 7: Respuesta del Sistema con Distintos Controladores.



## 2.4 Conclusiones

A partir de los cálculos y simulaciones realizadas se puede concluir que el periodo de muestreo  $T$  debe ser lo suficientemente pequeño en relación con las constantes de tiempo más rápidas del sistema para capturar adecuadamente la dinámica del mismo. Con un periodo de muestreo tan largo como  $T = 25\text{ s}$ , el sistema está más expuesto a los efectos del aliasing. Esto ocurre porque la frecuencia de muestreo es demasiado baja en comparación con las frecuencias presentes en la dinámica del sistema. Como resultado, las frecuencias altas se interpretan incorrectamente, y esto puede provocar oscilaciones no previstas en la respuesta temporal.

Para  $T = 2,5\text{ s}$ , los polos del equivalente discreto están cercanos a los del sistema continuo, lo que garantiza una respuesta estable y similar a la del controlador original. Sin embargo, para  $T = 25\text{ s}$ , se observa que algunos métodos, como el de adelanto, generan polos fuera de la circunferencia unitaria. Esto indica un sistema inestable en el dominio discreto, lo que coincide con las simulaciones realizadas. El cambio significativo en la ubicación de los polos también es una señal clara de que el periodo de muestreo no es adecuado.

## 3. Método de Ragazzini

En esta sección se trabajará con el modelo del sistema “*Producción de Biodiesel en un Reactor Agitado*” caracterizado por la siguiente función transferencia:

$$G(s) = \frac{0.20827}{(1 + 98.126\text{ s})(1 + 18.916\text{ s})} e^{-8\text{ s}}$$

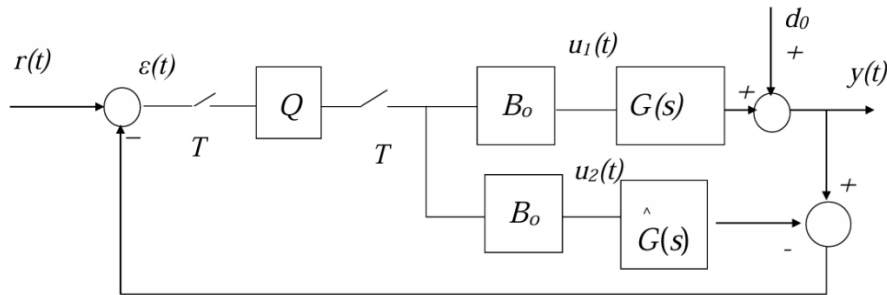
Las especificaciones deseadas para la dinámica a lazo cerrado son:  $SV < 20\%$ ,  $t_r(2\%) = 110\text{ segundos}$  y  $\varepsilon_{01} = 0$ .



A partir de la función transferencia discretizada  $G(z)$ , y considerando un tiempo de muestreo  $T = 8$  s, se realiza el diseño de un controlador en el dominio  $z$  utilizando el método de Ragazzini.

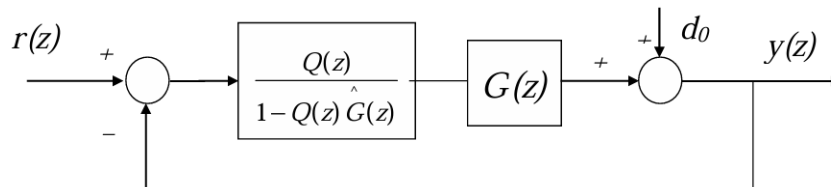
El método de Ragazzini es una técnica de diseño de controladores en el dominio discreto que nos permite obtener un controlador  $D(z)$  para cumplir con las especificaciones deseadas. Este método está basado en una estructura de control con modelo interno IMC (Internal Model Control). En esta forma de control, partiendo del esquema clásico representado por el diagrama de la Figura 1, se define el siguiente diagrama funcional:

Figura 8: Diagrama de Bloques de Controlador Discreto con IMC.



Aplicando la transformada Z y manipulando los bloques del sistema original, se obtiene la siguiente representación para el método de Ragazzini:

Figura 9: Diagrama de Bloques Equivalente.



Si  $Q(z) = H(z)[\hat{G}(z)]^{-1}$  (con  $H(z)$  la función transferencia a lazo cerrado), y considerando que el modelo representa fielmente a la planta ( $\hat{G}(z) \approx G(z)$ ), se puede dimensionar la función transferencia  $H(z)$  para cumplir con las especificaciones de respuesta transitoria dadas y diseñar un controlador  $D(z)$ . El controlador discreto según el método será:

$$D(z) = \frac{H(z)}{1 - H(z)} \frac{1}{\hat{G}(z)}$$

Se deben tener en cuenta las limitaciones de  $H(z)$  para que el problema tenga una solución posible, y al mismo tiempo encontrar un controlador  $D(z)$  tal que sea físicamente realizable y lo más simple posible.

### 3.1 Diseño y Principales Limitaciones

Como primer paso, se discretiza el modelo de la planta con el bloqueador equivalente mediante el comando de *Matlab* `c2d(G, T_muestreo, 'zoh')`. El resultado obtenido es:

$$\hat{G}(z) = z^{-1} \frac{0.003047 (z + 0.8453)}{(z - 0.9217)(z - 0.6551)}$$

A partir de los requisitos dinámicos, se dimensionan las características de la respuesta a lazo cerrado para vincularlos con la función transferencia de  $H(z)$ .

$$SV = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 0.20 \quad \rightarrow \quad \xi > 0.456, \quad \text{se adopta } \xi = 0.5$$

$$t_{r2\%} < 110 \text{ seg} \quad \rightarrow \quad \omega_n = \frac{4}{\xi t_{r2\%}} = 0.0727$$

#### Precisión Dinámica:

La dinámica requerida está asociada con la ubicación de los polos de  $H(z)$ . A continuación, se plantea el denominador de la función transferencia asumiendo una dinámica de segundo orden  $z^2 - 2r \cos(\theta)z + r^2$ , donde:

$$\begin{cases} r = e^{-\xi\omega_n T} \\ \theta = \omega_n T \sqrt{1 - \xi^2} \end{cases} \xrightarrow{T=8 \text{ s}} \begin{cases} r = 0.7476 \\ \theta = 0.5039 \end{cases}$$

De esta forma, el denominador de  $H(z)$  queda como  $z^2 - 1.3093z + 0.5589$ .

#### Causalidad de $D(z)$ :

Para que  $D(z)$  sea causal debe cumplirse que, cuando  $z \rightarrow \infty$ , entonces  $D(z)$  tiende a un valor finito. Dada esta condición del controlador de Ragazzini, para asegurar la causalidad será necesario que ambas funciones transferencias  $G(z)$  y  $H(z)$  tengan el mismo grado relativo (equivalente a pensar que tanto  $H(z)$  como  $G(z)$  tienen el mismo número de ceros en el infinito).

En este caso,  $G(z)$  tiene tres polos y un cero, por lo que su grado relativo es dos. Dado que para el diseño de  $H(z)$  se modeló un denominador de segundo orden, se plantea un numerador de la forma:  $\text{num}[H(z)] = b_0$ .

### Precisión Estática:

Para encontrar el valor de  $b_0$  se recurre a la precisión estática:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)[r(z) - H(z)r(z)] \xrightarrow{r(z) = \frac{z}{z-1}} \lim_{z \rightarrow 1} z[1 - H(z)]$$

$$\text{Si } H(z=1) = 1 \rightarrow \varepsilon_{01} = 0$$

$$H(z=1) = \frac{b_0}{1 - 1.3093 + 0.5589} = 1 \rightarrow b_0 = 0.2496$$

Finalmente, se obtiene la función transferencia del sistema a lazo cerrado:

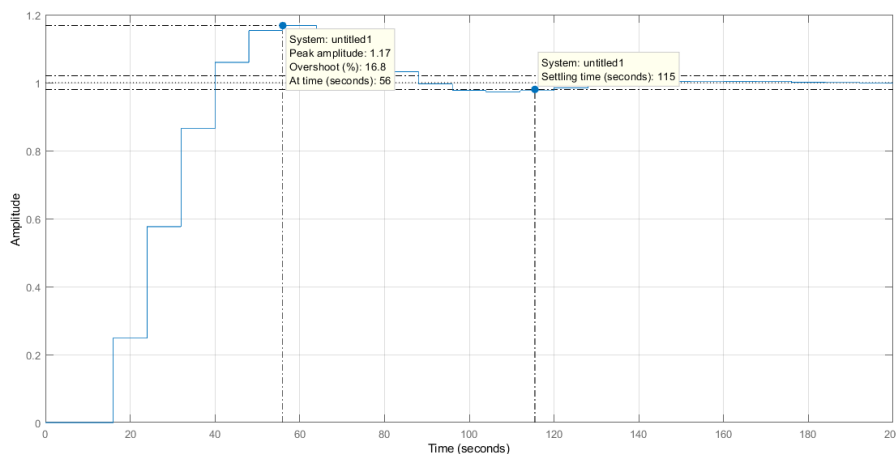
$$H(z) = \frac{0.2496}{z^2 - 1.3093z + 0.5589}$$

Luego de simplificaciones de polos y ceros se obtiene el siguiente controlador:

$$D(z) = \frac{H(z)}{1 - H(z)} \frac{1}{G(z)} = 81.833 \frac{(z - 0.9217)(z - 0.6551)}{(z + 0.8453)(z - 1)(z - 0.3093)}$$

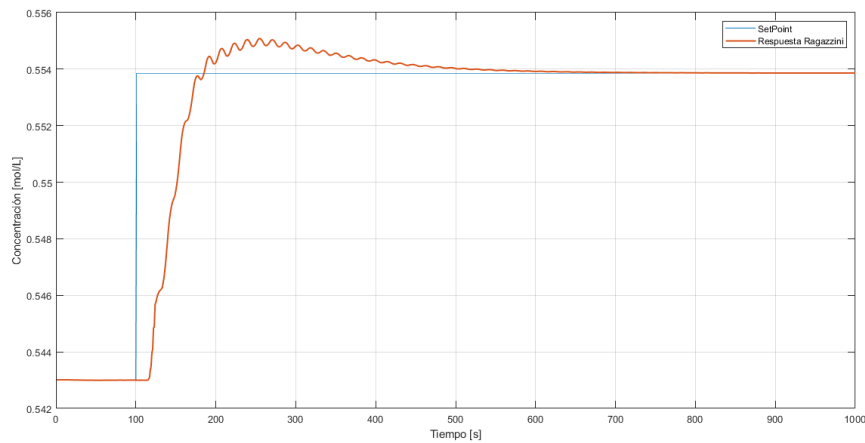
Antes de probar el controlador sobre la planta, se realiza una simulación en el dominio discreto para verificar la respuesta del sistema  $G(z)$  realimentado con el controlador  $D(z)$ . El resultado se puede ver en la Figura 10.

Figura 10: Respuesta del Controlador de Ragazzini.



Se comprueba que el sobrevalor se encuentra debajo del 20%, mientras que el tiempo de establecimiento al 2% es un poco superior a los 110 s. A continuación, se puede observar la respuesta temporal del controlador  $D(z)$  sobre la planta ante un cambio en el valor del setpoint de CE en un 2%.

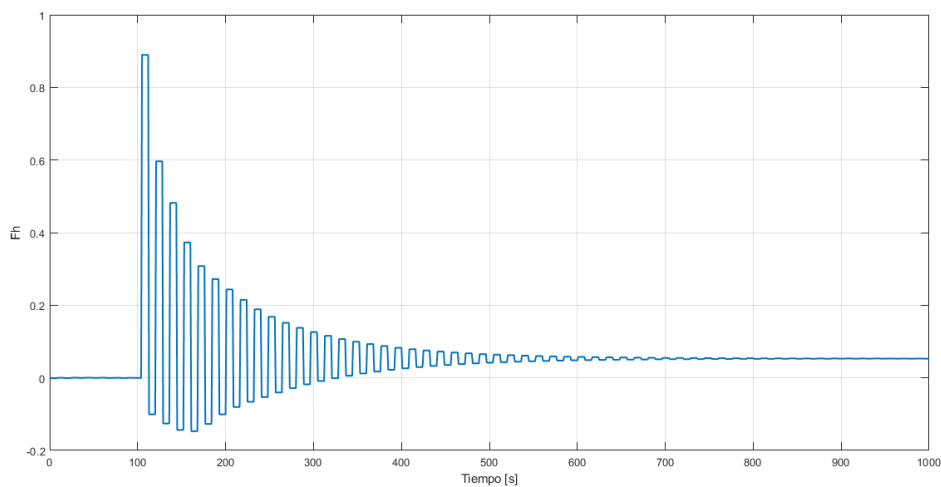
Figura 11: Respuesta controlador Ragazzini para cambio en CE +2%.



### 3.2 Propuesta de Mejora

El controlador obtenido mediante el método de Ragazzini nos entrega una respuesta que, aunque es estable, tiene oscilaciones que son atribuidas al cero negativo de  $G(z)$  en  $z = -0.8453$ .

Figura 12: Salida del Controlador de Ragazzini.



Una posible solución es plantear una nueva función transferencia de lazo cerrado  $H(z)$  donde el numerador de este tenga el mismo cero que la función transferencia de la planta con el objetivo de cancelarlos.

$$D(z) = \frac{H^*(z)(z + p)}{1 - H(z)} \frac{1}{G^*(z)(z + p)}$$

Se propone un nuevo numerador para el lazo cerrado:  $num[H(z)] = b_0 + b_1 z^{-1}$ .

Para hallar los valores  $b_0$  y  $b_1$  se debe resolver un sistema de ecuaciones armado bajo las siguientes condiciones:

- I. El controlador debe contrarrestar el efecto del cero problemático de  $G(z)$ . Esto se logra haciendo que  $H(z)$  tenga un cero en el mismo lugar para que se cancelen.

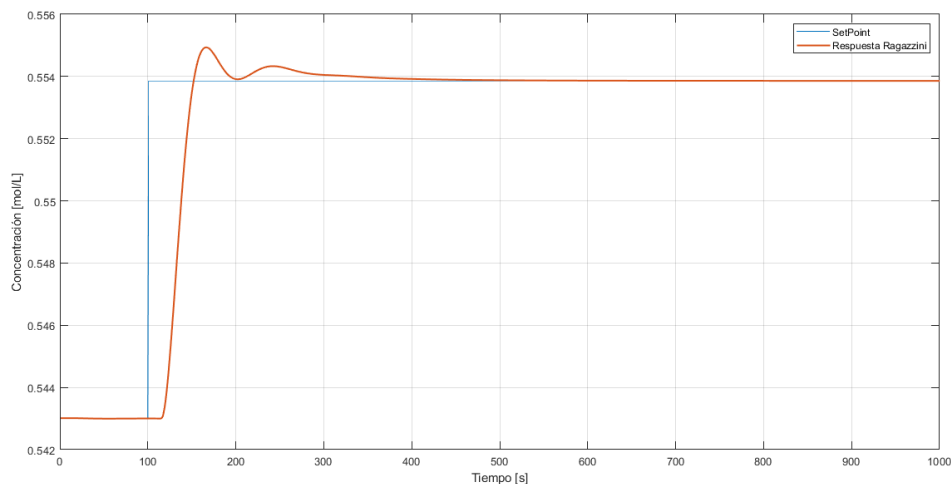
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{\text{Den}[H(z)]} \rightarrow H(Gz_{\text{zero}}) = 0$$

- II. Para garantizar un error estático nulo, el sistema a lazo cerrado debe tener ganancia unitaria en  $z = 1$  como se demostró anteriormente.

$$\begin{cases} b_0 + \frac{b_1}{0.8453} = 0 \\ \frac{b_0 + b_1}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2} = 1 \end{cases} \rightarrow D^*(z) = \frac{44.373 z (z - 0.9217)(z - 0.6551)}{(z - 1)(z^2 - 0.3093z + 0.1143)}$$

Con el nuevo controlador, se simula la respuesta a lazo cerrado ante un escalón en la entrada para el lazo de control sobre la planta implementado en Simulink.

Figura 13: Respuesta del Controlador de Ragazzini Mejorado para Cambio en CE del 2%.

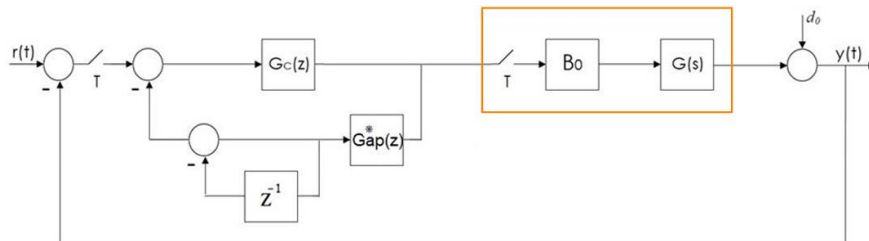


El nuevo controlador a partir del método de Ragazzini tiene una mejor respuesta, cumple con los requisitos estáticos y dinámicos solicitados y además ya no tiene las oscilaciones que se veían en la primera implementación (Figura 11). En la Sección 5 se compara este controlador contra los otros desarrollados en el presente informe y se extraen conclusiones al respecto.

## 4. Compensador Smith con Transformada W

En esta sección se diseñará un controlador discreto utilizando la estructura del compensador de Smith. Para esto, se descompone el sistema en dos partes: la dinámica sin retardo por un lado, y el retardo del sistema por el otro, que se controla en un lazo de realimentación como se ve en la siguiente figura:

Figura 14: Control con Compensador de Smith.



A partir del modelo discretizado de la función transferencia del proceso (sin considerar el tiempo muerto), se utiliza la transformada bilineal (W) para obtener una función transferencia racional. Esto permite que se realice el diseño del controlador en el dominio W aplicando métodos de respuesta en frecuencia. Una vez que el controlador cumpla los requisitos, se antitransforma y se obtiene el controlador discreto. La transformación bilineal se encuentra definida según:

$$W \equiv \frac{2z-1}{Tz+1} \quad \rightarrow \quad z \equiv \frac{1+WT/2}{1-WT/2}$$

A partir de la función transferencia de la planta sin tiempo muerto en el dominio s, se utiliza el método del bloqueador equivalente con un período de muestreo de 8 segundos para discretizar la planta:

$$G^*(s) = \frac{0.20827}{(1+98.126s)(1+18.916s)} \quad \rightarrow \quad G_{ap}^*(z) = \frac{0.0030474(z+0.8453)}{(z-0.9217)(z-0.6551)}$$

A  $G_{ap}^*(z)$  se le aplica la transformada W utilizando la función *transfw(Gz)* en Matlab.

$$W[G_{ap}^*(z)] = G(w) = -0.00014819 \frac{(w+2.983)(w-0.25)}{(w+0.01019)(w+0.05209)}$$

Con respecto a  $G^*(s)$ , vemos que se cumplen ciertas características:

- Las ganancias estáticas coinciden,  $G^*(s=0) = G(w=0)$ .
- Los denominadores tienen igual forma, los polos difieren ligeramente.
- Lo mismo ocurre con la ubicación de los ceros, pero se agregan dos.

Estos nuevos ceros que aparecen en la función transferencia de la planta luego de aplicar la transformación bilineal se deben al proceso de muestreo y retención: uno de ellos es un cero no mínima fase en  $w = 2/T$  y el otro es un cero negativo de alta frecuencia.

## 4.1 Validez del Método

Para el diseño del controlador se elimina el cero de alta frecuencia y será necesario recalcular la ganancia de forma tal que se cumpla:

$$KG'(W = 0) = G^*(s = 0) \quad \rightarrow \quad G(w) = \frac{-0.000442 (w - 0.25)}{(w + 0.01019)(w + 0.5209)}$$

Antes de continuar, se evalúa una condición fundamental para poder desarrollar el controlador en el dominio  $W$ . La intención es que la función transferencia sea racional en términos de  $\omega$ , pero si desarrollamos la transformada se observa que depende de la tangente de  $\omega$ :

$$w \equiv \frac{2z - 1}{Tz + 1} \quad \text{con } z = e^{sT} \text{ y } s = j\omega \quad \rightarrow \quad w \equiv j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) = j\gamma$$

Se verifica que si  $\frac{\omega T}{2} \ll 1$  (suficientemente pequeño), entonces  $\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \approx \frac{\omega T}{2}$ . De esta forma queda que  $\gamma \rightarrow \omega$  para  $T \rightarrow 0$ :

$$\gamma \approx \frac{2}{T} \frac{\omega T}{2} = \omega$$

Los requerimientos dinámicos para el sistema son que el sobrevalor sea menor al 20% y el tiempo de respuesta al 2% se menor a 110 s. Previamente se adoptó  $\xi=0.5$  para lograr las especificaciones, por lo que:

$$\omega_n = \frac{4}{\xi t_r} = \frac{4}{0.5 \times 110} = 0.0727$$

Luego  $\omega_n T/2 = 0.0727 \times 4 = 0.2908$  y, si bien no es mucho menor a uno, se acepta la aproximación de la tangente asumiendo que habrá errores. Si se quisieran reducir los errores, se puede considerar un tiempo de muestreo menor.

## 4.2 Diseño del Controlador

Se realiza el diseño del controlador en el dominio  $W$  con el método frecuencial. Primero se calcula la fase de la función transferencia transformada  $G(w)$  para la frecuencia  $\omega_n$ , y el margen de fase requerido a partir de  $\xi$ . Luego se determina el adelanto de fase necesario para llevar el sistema a tener el margen de fase deseado.

$$\begin{cases} \Phi_{Gw}(\omega_n) = -151.2388^\circ \\ MF = 100\xi = 50^\circ \end{cases} \quad \rightarrow \quad \Phi_m = 21.2388^\circ$$

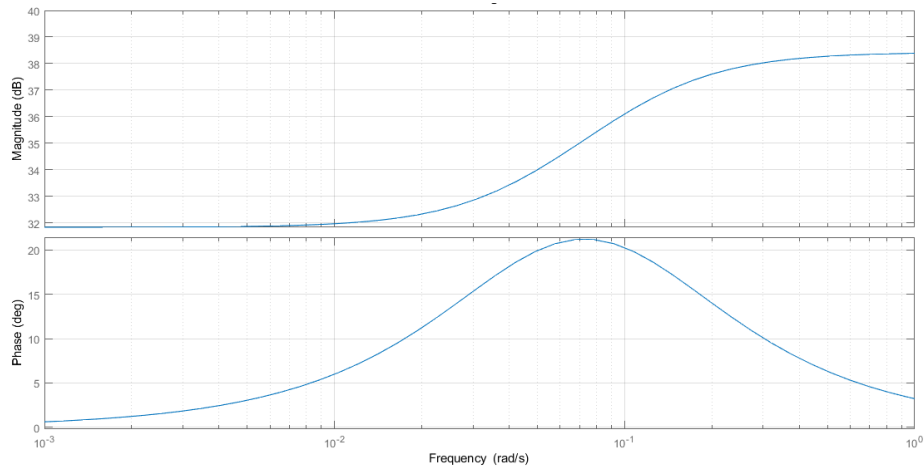
Se procede a diseñar un controlador PD aproximado:

$$\begin{cases} a = \frac{1 + \sin(\Phi_m)}{1 - \sin(\Phi_m)} = 2.1361 \\ \tau = \frac{1}{\omega_n \sqrt{a}} = 9.4080 \\ |G_{PD}(\omega_n)| |G(\omega_n)| = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Z_{PD} = \frac{1}{a\tau} = 0.0498 \\ P_{PD} = \frac{1}{\tau} = 0.1063 \\ K_{PD} = \frac{1}{\sqrt{a}|G(\omega_n)|} = 39.0474 \end{cases}$$

Se obtiene el controlador y se verifica el avance de fase para  $\omega_n$  en la Figura 15.

$$G_{PD}(w) = 83.408 \frac{(w + 0.04976)}{(w + 0.1063)}$$

Figura 15: Diagrama de Bode Corrector PD.



Para mejorar las características estáticas, se diseña un controlador PI que aumente la ganancia del sistema en bajas frecuencias. La forma del corrector PI propuesta es la siguiente:

$$G_{PI}(w) = K_{PI} \frac{(1 + \tau_{PI}w)}{w}$$

Es importante colocar el cero del controlador en una frecuencia mucho menor al polo del controlador PD calculado anteriormente para evitar modificar las características logradas de avance de fase. Se propone entonces  $Z_{PI} = \omega_n/20$ .

La ganancia total del sistema para la frecuencia  $\omega_n$  debe ser unitaria, por lo que:

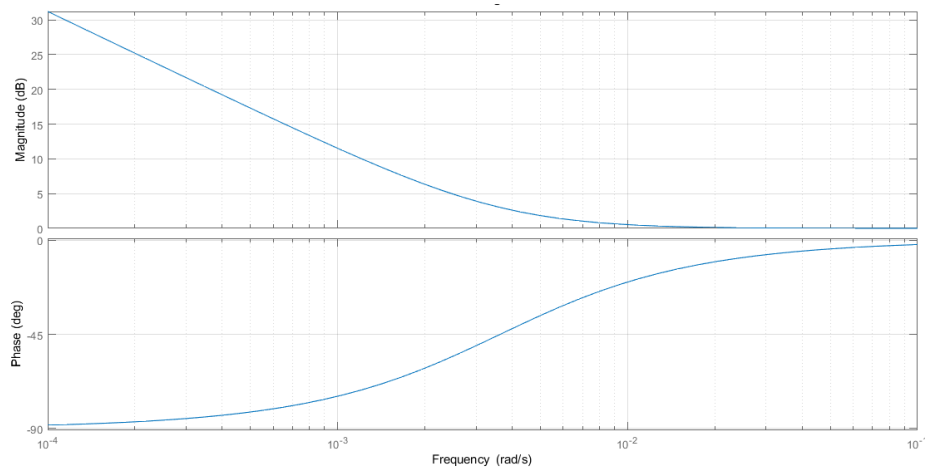
$$|G(\omega_n)| |G_{PD}(\omega_n)| |G_{PI}(\omega_n)| = 1 \rightarrow |G_{PI}(\omega_n)| = \frac{1}{|G(\omega_n)| |G_{PD}(\omega_n)|}$$

Se obtiene el controlador y se verifica el bode a bajas frecuencias en la Figura 16.

$$G_{PI}(w) = 0.99875 \frac{(w + 0.003636)}{w}$$



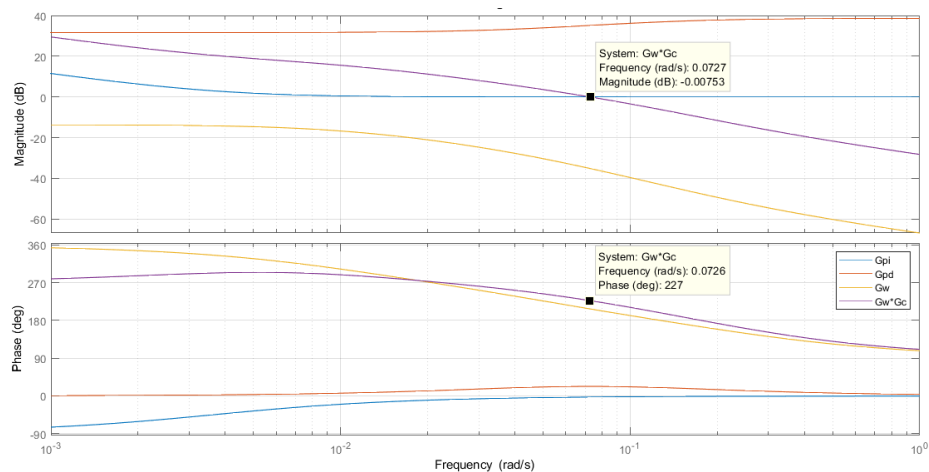
Figura 16: Diagrama de Bode Corrector PI.



El controlador compuesto por los correctores PD+PI, queda definido como:

$$G_c(w) = 85.547 \frac{(w + 0.04847)(w + 0.003636)}{w(w + 0.1091)}$$

Figura 17: Diagrama de Bode del Sistema a Lazo Abierto.



El diagrama de Bode a lazo abierto del sistema corregido mediante el controlador PD+PI demuestra que se ha logrado corregir el margen de fase. Se observa que, para la frecuencia  $\omega_n = 0.0727$ , se tiene ganancia de 0 dB y un margen de fase de 47°.

**Nota:** La fase en el diagrama comienza desde los 360°, por lo que una fase de 227° es equivalente a -133°.

Finalmente, se antitransforma el corrector obtenido en el dominio W para obtener el controlador  $G_c(z)$  mediante la función  $antitransform(G_c, T_{\text{muestreo}})$ :

$$G_c(z) = 72.133 \frac{(z - 0.6752)(z - 0.9713)}{(z - 1)(z - 0.3923)}$$

Para la implementación del controlador sobre el modelo de la planta se realiza un diagrama de Simulink incluyendo el compensador de Smith en la Figura 18.

Figura 18: Diagrama de Simulink.

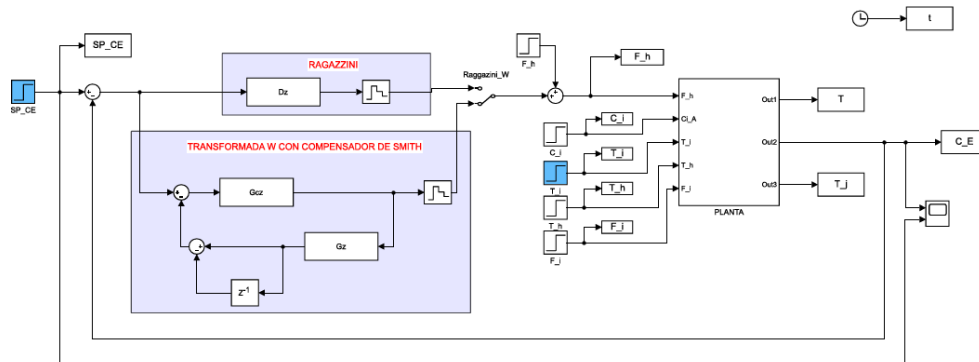
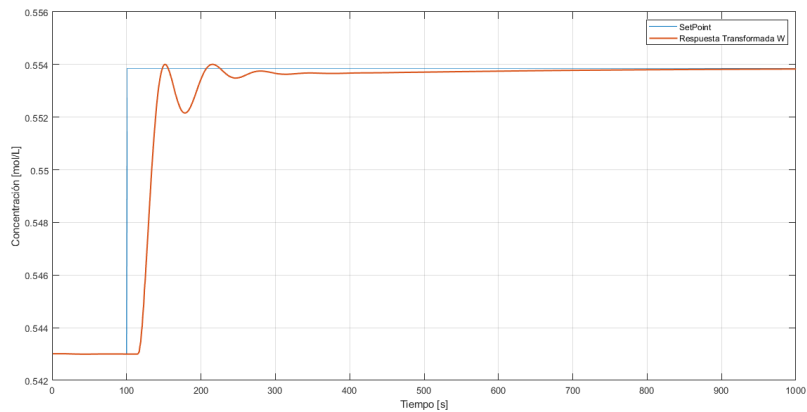


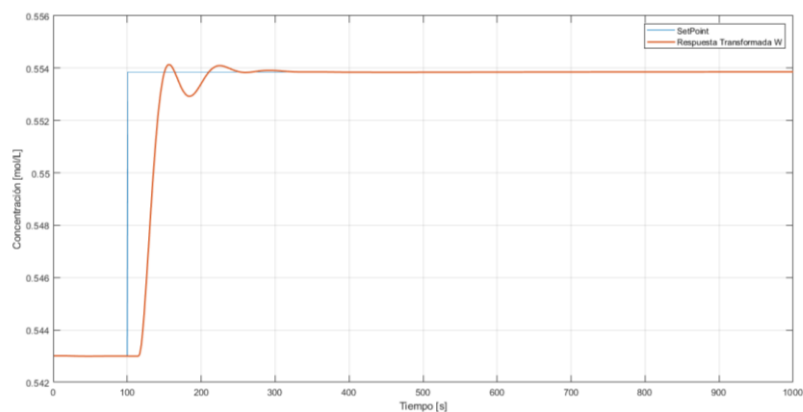
Figura 19: Respuesta ante Variación de +2% en CE.



Se realiza un “ajuste fino” utilizando el *Control System Designer*. La función transferencia del controlador corregido y su respuesta se ven a continuación:

$$G_{cc}(z) = 60 \frac{(z - 0.9513)(z - 0.6752)}{(z - 1)(z - 0.3923)}$$

Figura 20: Respuesta ante Variación de +2% en CE para Controlador Corregido.



## 5. Comparación y Conclusiones

Se compara el desempeño de todos los controladores diseñados para dos situaciones de interés: un cambio escalón en el Set Point del 2% y un cambio escalón en la perturbación  $T_i$  de 1%.

Figura 21: Respuesta ante Variación del 2% en el Set Point.

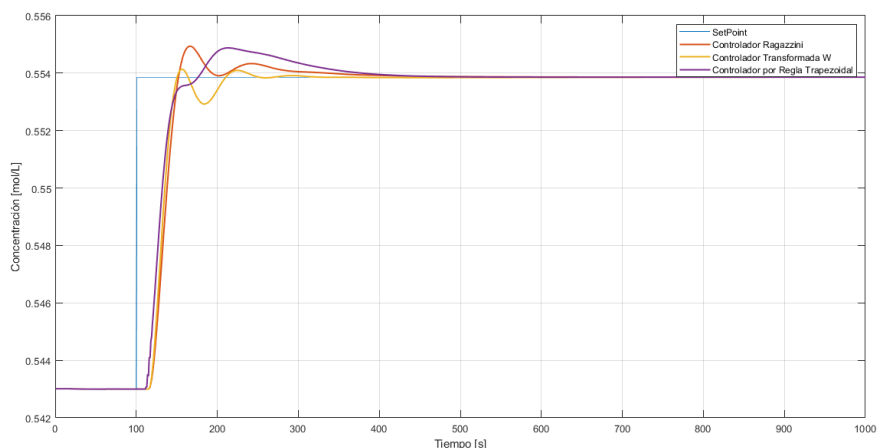
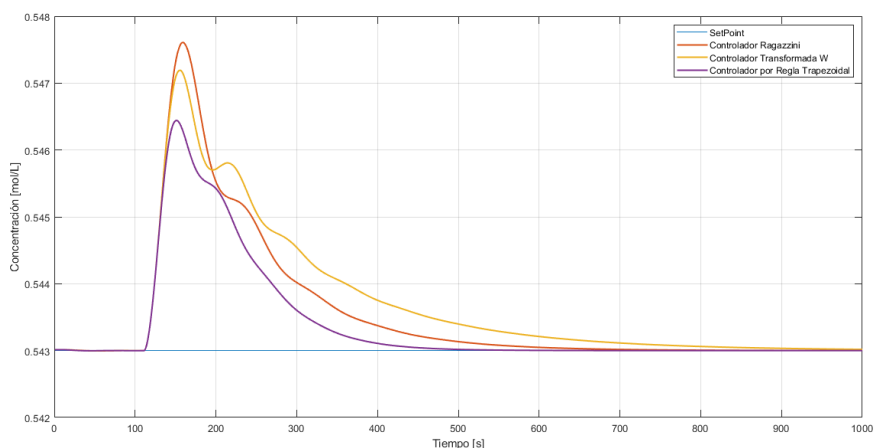


Figura 22: Respuesta ante Variación del 1% en la Variable  $T_i$ .



Es importante destacar que la respuesta mediante el equivalente discreto por el método trapezoidal se ha realizado a partir de un tiempo de muestreo menor (2,5 s) en comparación con los otros controladores (8 s) y es por esto que logra una respuesta similar. Se ha visto en la Figura 7 que, si se aumenta el tiempo de muestreo en este método, la respuesta del sistema se vuelve oscilatoria.

Las respuestas dadas por el controlador diseñado mediante el método de Ragazzini y el diseñado a través de la transformada W con el predictor de Smith tienen tiempos de respuesta similares. Dado que el primero muestra un mayor sobrevalor tanto en las pruebas realizadas para el cambio en el Set Point como en la incidencia de una perturbación, se concluye que la respuesta mediante el predictor de Smith es más efectiva que la del método de Ragazzini.

En cuanto a la comparación con la respuesta del sistema continuo para el controlador  $J(s)$  diseñado en el trabajo práctico anterior (Figura 7), se debe tener en cuenta que el lazo de control no contaba con un predictor de Smith, por lo que el controlador contemplaba el tiempo muerto de la planta y requería un mayor avance de fase para cumplir con los márgenes de estabilidad.

Es fundamental concluir que los tiempos de muestreo juegan un papel fundamental en el diseño de controladores en el dominio discreto. La elección del período de muestreo no solo depende de las características del sistema a controlar, sino también de los objetivos de diseño. En sistemas donde la rapidez es crítica, un muestreo más corto puede ser preferible. Por otro lado, en sistemas con retardos importantes o donde la estabilidad sea prioridad, un período de muestreo más largo puede ofrecer un mejor desempeño.

Por último, como se ha visto, todos los métodos podrían lograr respuestas aceptables dependiendo los requisitos de control. Es por esto que el uso del método quedará también condicionado por cada problema particular.