Trabajo Práctico 4 – Control de un Levitador Magnético

Dinámica de los Sistemas Físicos

Año 2023

En este Trabajo Práctico modelaremos, simularemos y analizaremos un dispositivo de levitación magnética, consistente en una pelotita metálica suspendida en el aire mediante un electroimán, como el que se muestra en la Figura 1. El dispositivo tendrá además un sistema de control que comandará la corriente del electroimán para estabilizar la pelotita en una posición de referencia.

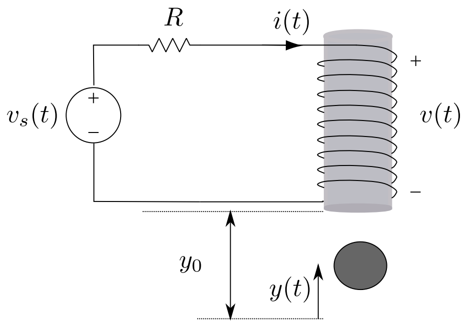

Figura 1: Dispositivo de Levitación Magnética.

En el transcurso del trabajo iremos creando distintas clases de Modelica que las iremos colocando en un paquete denominado `TP4Apellido` (donde `Apellido` deberá reemplazarse por su apellido).

Problema 1. Modelado de la Interacción Electromagnética-Mecánica

Para modelar la interacción entre el electroimán y la pelotita crearemos una nueva clase de Modelica que denominaremos `CoilBall` siguiendo los siguientes pasos:

1. La clase contendrá un conector mecánico y dos pines eléctricos, pudiendo por lo tanto utilizarse herencia de la clase `OnePort`. El conector mecánico tendrá asociada la posición $y(t)$ de la pelotita y la fuerza $f(t)$ ejercida por el electroimán.

2. Para plantear las relaciones constitutivas, tendremos en cuenta lo siguiente:

   - Consideraremos que el arrollamiento tiene una inductancia $L(y)$ que varía con la posición $y(t)$ de la pelotita.
   - El voltaje en el arrollamiento cumplirá con la ecuación:

   $$v(t) = \frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[L(y(t))\ i(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial y}\dot{y}(t)\ i(t) + L(x(t))\ \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

   siendo $\dot{y}(t)$ la velocidad de la pelotita.
   - La potencia eléctrica entregada es $p_e(t) = v(t)\ i(t)$ mientras que la mecánica es $p_m(t) = f(t)\ \dot{y}(t)$. Por lo tanto, utilizando la Ec.(1) la potencia total entregada al componente es:

   $$p_T(t) = \frac{\partial L}{\partial y}\ \dot{y}(t)\ i^2(t) + L(y(t))\ \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\ i(t) + f(t)\ \dot{y}(t) \tag{2}$$

   - La energía eléctrica acumulada en el componente es $E(t) = \frac{1}{2}\ L(y)\ i^2(t)$, por lo que la potencia que se acumula instantáneamente es

   $$p_a(t) = \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial L}{\partial y}\ \dot{y}(t)\ i^2 + L(y)\ i(t)\ \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

Dado que la potencia total brindada al componente se acumula en forma de energía eléctrica, resulta $p_a(t) = p_T(t)$ o $p_T(t) - p_a(t) = 0$, de donde restando las Ecs.(2) y (3), se obtiene

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial L}{\partial y}\;\dot{y}(t)\;i^2(t) + f(t)\;\dot{y}(t) = 0$$

de donde,

$$f(t) = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial L}{\partial y}\;i^2(t) \tag{4}$$

- Consideraremos que la inductancia tiene la siguiente ley:

$$L(y) = L_0\,\frac{y_0}{y_0 - y} \tag{5}$$

donde y_0 es la distancia del núcleo al eje de coordenadas y L_0 es la inductancia cuando la pelotita está en el origen (notar que se deberá cumplir la restricción $y(t) < y_0$). Luego, reemplazando $L(y)$ con la Ec.(5) en las Ecs.(1) y (4) resultan las siguientes relaciones constitutivas:

$$v(t) = L_0\frac{y_0}{(y_0 - y(t))^2}\;\dot{y}(t)\;i(t) + L_0\;\frac{y_0}{y_0 - y(t)}\;\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\;L_0\frac{y_0}{(y_0 - y(t))^2}\;i^2(t) \tag{7}$$

De esta manera, utilizaremos como relaciones constitutivas del componente las ecuaciones (6) y (7) que vincularán el voltaje, la corriente, la posición y la fuerza del mismo.

3. De acuerdo a lo visto, los parámetros de la clase `CoilBall` deberán ser la distancia y_0 y la inductancia L_0. Para los mismos utilizaremos como valores por defecto $y_0 = 9\;10^{-3}$m y $L_0 = 5.5181\cdot10^{-3}$Hy.

Problema 2. Modelo del sistema sin control

Se pide ahora construir el modelo del sistema a lazo abierto. Para esto, crearemos una nueva clase llamada `MaglevSys` utilizando elementos de la DSFLib y la clase `CoilBall` desarrollada en el punto anterior. Tendremos en cuenta lo siguiente:

1. La pelotita tiene masa $m = 0.02$ Kg y la misma, además de recibir la fuerza electromagnética, está sujeta a la acción de la gravedad. Se considera despreciable el rozamiento con el aire.

2. La resistencia del circuito valdrá $R = 1\Omega$.

3. La tensión de alimentación $v_s(t)$ proviene de una fuente controlada que recibe la suma de dos señales:

$$v_s(t) = u_0 + u(t) \tag{8}$$

donde $u(t)$ será la entrada de control y u_0 es el voltaje de equilibrio para que la pelotita quede en la posición $y(t) = 0$.

Para calcular u_0 podemos tener en cuenta que en el equilibrio resulta $\dot{y}(t) = 0$, $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ y además $\ddot{y}(t) = 0$ para lo cual deberán igualarse la fuerza de la gravedad y la del electroimán. Luego, usando la Ec.(4) resulta:

$$m\;g = \frac{1}{2}\;L_0\frac{y_0}{(y_0 - y(t))^2}\;i^2(t) = \frac{1}{2}\;L_0\frac{y_0}{y_0^2}\;i_0^2 = \frac{1}{2}\;L_0\frac{1}{y_0}\;i_0^2$$

de donde la corriente en el equilibrio i_0 resulta

$$i_0 = \pm\sqrt{\frac{2\;m\;g\;y_0}{L_0}} \tag{9}$$

Teniendo en cuenta que en el equilibrio el voltaje $v(t)$ es nulo, la tensión de equilibrio u_0 resulta

$$u_0 = \pm R\;\sqrt{\frac{2\;m\;g\;y_0}{L_0}} \tag{10}$$

4. Para verificar que el modelo funcione correctamente simularemos el mismo con la entrada de control $u(t) = 0$ y con la condición inicial $i(t) = i_0$. Debería verificarse (aproximadamente) que el punto $\bar{x} = [y = 0,\ \dot{y} = 0,\ i = i_0]^T$ es un punto de equilibrio del sistema para la entrada $u(t) = 0$.

Problema 3. Linealización y Análisis del Modelo

Se pide obtener una aproximación lineal del modelo en torno al punto de equilibrio procediendo de la siguiente forma:

1. Agregar al modelo un conector de señal de entrada de donde provenga la señal $u(t)$ y un conector de señal de salida por donde salga la posición de la pelotita (deberá para esto utilizar el sensor correspondiente).
2. Obtener el modelo linealizado utilizando desde OMShell el comando
   ```
   linearize(TP4Apellido.MaglevSys,stopTime=0.0)
   ```
3. Copiar las matrices A, B, C y D del modelo linealizado en un script de Matlab u Octave.
4. Estudiar la estabilidad del modelo linealizado y sacar, si es posible, conclusiones sobre la estabilidad del punto de equilibrio del sistema no lineal.

Problema 4. Control Lineal de Posición

Se pide ahora estudiar el uso de un control PID para comandar la posición de la pelotita. Para esto, procederemos siguiendo los siguientes pasos:

1. Obtener la función transferencia del modelo linealizado. Puede usar los siguientes comandos en Matlab u Octave:
   ```
   sys1=ss(A,B,C,D);   G=tf(sys1);
   ```
2. Teniendo en cuenta que el controlador PID tendrá la siguiente forma:
   $$G_c(s) = K\ \frac{(\frac{s}{20} + 1)^2}{s} \tag{11}$$
   se pide analizar la posición de los polos para distintos valores de K, eligiendo finalmente un valor no muy grande de K que permita que la constante de tiempo más lenta sea menor que 60ms. Puede utilizar para esto el lugar de las raíces o alternativamente probar con distintos valores de K el comando
   ```
   pole(feedback(K*G*Gc,1))
   ```
3. Construir un modelo del sistema controlado en OpenModelica para una referencia de entrada $y_{\mathrm{ref}} = 0$ utilizando un esquema como el de la Figura 2.

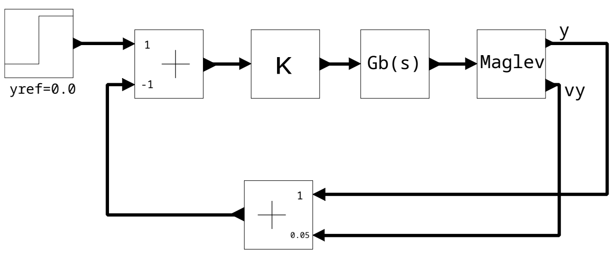

Figura 2: Control del Levitador Magnético.

En el esquema, se toma
$$G_b(s) = \frac{\frac{s}{20} + 1}{s} \tag{12}$$

y para evitar usar derivadores, se mide directamente la velocidad. Notar que la entrada del levitador magnético resulta

$$
\begin{aligned}
U(s) &= K\ \frac{(\frac{s}{20}+1)}{s}\ \left(Y_{\text{ref}}(s) - (Y(s) + \frac{V_y(s)}{20})\right) = K\ \frac{(\frac{s}{20}+1)}{s}\ \left(Y_{\text{ref}}(s) - (Y(s) + \frac{s\ Y(s)}{20})\right) \\
&= K\ \frac{(\frac{s}{20}+1)}{s}\ \left(Y_{\text{ref}}(s) - (\frac{s}{20}+1)\ Y(s)\right) = K\ \frac{(\frac{s}{20}+1)}{s}\ Y_{\text{ref}}(s) - K\ \frac{(\frac{s}{20}+1)^2}{s}\ Y(s) \\
&= Gc(s)\left(\frac{Y_{\text{ref}}(s)}{(\frac{s}{20}+1)} - Y(s)\right)
\end{aligned}
$$

lo que implica que a lazo cerrado el controlador se corresponde al PID $G_c(s)$ de la Ec.(11) sin la necesidad de utilizar derivadores.

4. Simular el sistema a lazo cerrado y verificar que funcione correctamente. Observar además que ocurre al colocar una condición inicial nula en la corriente del electroimán.

5. Observar que ocurre al cambiar la referencia de posición y_{ref} para valores positivos y negativos que no superen la restricción $y(t) < y_0 = 0.009$ m.

6. Observar que ocurre al cambiar la posición inicial de la masa $y(t = 0)$ manteniendo la referencia $y_{\text{ref}} = 0$.

Problema 5. Control No Lineal de Posición

En ciertas aplicaciones es necesario tener control con garantías de estabilidad no sólo en las inmediaciones del equilibrio, sino también en regiones más amplias. Una manera de lograr garantizar esto es utilizar una función de Lyapunov $V(x)$ definida positiva tal que para la ley de entrada utilizada, su derivada resulte definida (o semidefinida) negativa.

En el caso del levitador magnético, es relativamente simple encontrar una función de Lyapunov asumiendo que la entrada es directamente la corriente $i(t)$ del electroimán (no la tensión de la fuente). Bajo tal hipótesis, el modelo queda como sigue:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{L_0\ y_0\ (u(t)+i_0)^2}{2\ m\ (y_0 - x_1)^2} - g
\end{aligned}
\tag{13}
$$

donde x_1 es la posición de la pelotita, x_2 es la velocidad y el término $i_0+u(t)$ es la corriente del electroimán.

Luego, se puede plantear la siguiente candidata de Lyapunov

$$
V(x) = \frac{x_1^2}{y_0 - x_1} + \frac{x_2^2}{2} \tag{14}
$$

de donde la derivada resulta

$$
\dot{V}(x) = \frac{2\ x_1\ (y_0 - x_1)\ \dot{x}_1 + x_1^2\ \dot{x}_1}{(y_0 - x_1)^2} + x_2\ \dot{x}_2 = \frac{2\ x_1\ (y_0 - x_1)\ x_2 + x_1^2\ x_2}{(y_0 - x_1)^2} + x_2\ (\frac{L_0\ y_0\ (u(t)+i_0)^2}{2\ m\ (y_0 - x_1)^2} - g)
$$

Luego, de esta expresión se puede calcular $u(t) = g(x_1(t), x_2(t))$ tal que resulte

$$
\dot{V}(x) = -c\ x^2 \tag{15}
$$

o, equivalentemente, que

$$
\frac{\dot{V}(x)}{x_2} = -c\ x_2 \tag{16}
$$

es decir,

$$
\frac{2\ x_1\ (y_0 - x_1) + x_1^2}{(y_0 - x_1)^2} + \frac{L_0\ y_0\ (u(t)+i_0)^2}{2\ m\ (y_0 - x_1)^2} - g = -c\ x_2 \tag{17}
$$

Es decir, despejando u de la Ec.(17) para cierto parámetro c el control resultante garantizará que $V(x)$ es semidefinida negativa. Se pide entonces:

1. Demostrar que el origen es un punto de equilibrio de la Ec.(13) cuando $u(t) = 0$. **Ayuda:** Utilizar la Ec.(9) que vincula los parámetros.

2. Implementar en OpenModelica el sistema de Ecuaciones (13) con la ley de control definida por la Ec.(17). Recordar que no es necesario despejar $u(t)$ de dicha expresión, ya que con Modelica se pueden utilizar DAEs. Utilizar el parámetro $c = 30$.

3. Simular para distintas condiciones iniciales y verificar que efectivamente se garantiza estabilidad asintótica.

4. Modificar ahora la ley de control según la siguiente:

$$\frac{2\ (x_1 - y_{\text{ref}})\ (y_0 - x_1) + (x_1 - y_{\text{ref}})^2}{(y_0 - x_1)^2} + \frac{L_0\ y_0\ (u(t) + i_0)^2}{2\ m\ (y_0 - x_1)^2} - g = -c\ x_2 \tag{18}$$

   que resulta de modificar la Ec.(14) por

$$V(x) = \frac{(x_1 - y_{\text{ref}})^2}{y_0 - x_1} + \frac{x_2^2}{2} \tag{19}$$

   Simular para distintos valores de y_{ref} y tratar de explicar lo que ocurre.

5. Pensar como habría que hacer para implementar un controlador como este con el modelo orientado a objetos utilizado en el Problema 4. ¿Qué dificultades podrían aparecer?.