



Universidad Nacional de Rosario  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Escuela de Ingeniería Electrónica  
**Teoría de Control**

**TP N° 2: Diseño de Controladores en el Dominio Frecuencial**

Autor/es:

Alumno	Legajo
<b>BELLINI, Valentin</b>	B-6127/1
<b>SAITTA, Iván</b>	S-5435/6

Corrigió	Calificación

Año 2024

## ÍNDICE

1. Introducción.....	2
1.1 Control por Adelanto de Fase – Corrector PD.....	2
1.2 Control por Atraso de Fase – Corrector PI .....	3
2. Modelo Aproximado de la Planta.....	4
2.1 Respuesta al Escalón de $G_{pa}$ .....	4
3. Diseño del Corrector.....	6
3.1 Corrector PD.....	6
3.1.1 Verificación del Corrector PD .....	9
3.2 Corrector PI .....	10
3.2.1 Verificación del Corrector PID .....	11
4. Ajuste con SISOTool.....	13
5. Conclusiones .....	14

# 1. Introducción

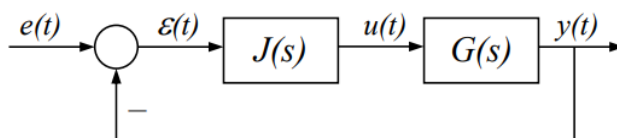
El objetivo de este trabajo es diseñar controladores clásicos para cumplir con ciertos requisitos de precisión dinámicos y estáticos en sistemas SISO que sean continuos, lineales y estacionarios. Los controladores a diseñar pueden ser de tipo PI, PD o PID, dependiendo de lo que se necesite. Para el diseño, se emplearán los métodos del lugar de las raíces y la respuesta en frecuencia, según lo visto en la teoría, resaltando tanto las ventajas como las limitaciones de estas técnicas.

Además, se utilizarán las herramientas disponibles en MATLAB para realizar estos cálculos, enfocándose en las funciones y comandos de la librería "Control Toolbox", que está destinada al control automático. En particular, se hará uso de las herramientas "SISO-Tool" y "LTI Viewer", las cuales facilitan el proceso de diseño, ajuste, análisis y simulación de los sistemas de control planteados.

## 1.1 Control por Adelanto de Fase – Corrector PD

En el sistema mostrado en la Figura 1, el controlador  $J(s)$  utilizado para corregir la respuesta dinámica es del tipo PD aproximado.

Figura 1: Sistema de Control con Realimentación Unitaria.



$$J(s) = K \frac{(1 + a\tau s)}{(1 + \tau s)} ; a > 1$$

$J(s)$  posee un cero en la frecuencia  $1/a\tau$  y un polo en la frecuencia  $1/\tau$ . De este modo, el polo siempre se ubica en frecuencias mayores a la del cero, puesto que es condición de diseño del controlador que el factor  $a$  sea mayor que 1. Así construido, el controlador incorpora un avance de fase máximo  $\phi_m$  a la frecuencia  $\omega_m$ , estos últimos determinados por las ecuaciones:

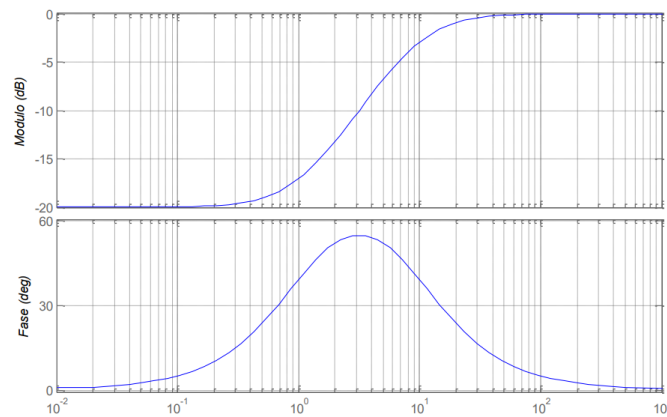
$$\phi_m = \arcsen\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \quad \omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$$

Normalmente se considera a la constante  $K$  igual a  $1/a$ . Este valor conduce a que el módulo de  $J$  sea  $0 \text{ dB}$  en altas frecuencias. Para este caso particular, el controlador es:

$$J(s) = K_{PD} \frac{(1 + a\tau s)}{(1 + \tau s)} ; a > 1$$

En la Figura 2 se muestra el diagrama de Bode de un control PD aproximado para  $a = 10$ ,  $\tau = 0.1$  y  $K = 1/a$ .

Figura 2: Diagrama de Bode del Corrector  $J(s)$ : PD aproximado.



## 1.2 Control por Atraso de Fase – Corrector PI

El controlador PI aproximado tiene la siguiente función transferencia:

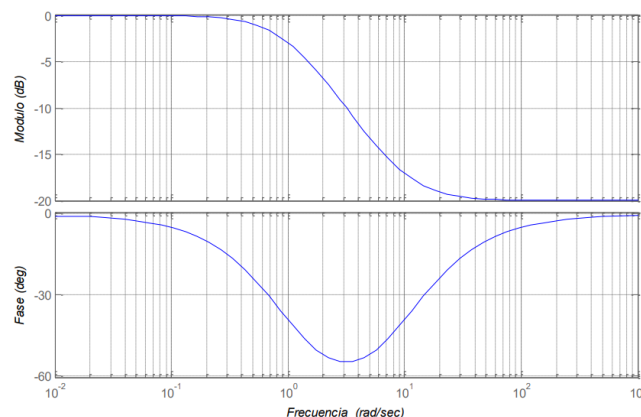
$$J(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + b\tau s} ; b > 1$$

$J(s)$  posee un cero en la frecuencia  $1/\tau$  y un polo en la frecuencia  $1/b\tau$ . De este modo, el cero siempre se ubica en frecuencias mayores a la del polo, puesto que es condición de diseño del controlador que el factor  $b$  sea mayor que 1. Así construido, el controlador incorpora un retraso de fase máximo  $\phi_m$  en la frecuencia  $\omega_m$ , estos últimos determinados por las ecuaciones:

$$\phi_m = \arcsen\left(\frac{b-1}{b+1}\right) \quad \omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{b}}$$

Se muestra el Bode de un corrector PI aproximado con  $b = 10$  y  $\tau = 0.1$ .

Figura 3: Diagrama de Bode del Corrector  $J(s)$ : PI Aproximado.



## 2. Modelo Aproximado de la Planta

El sistema a utilizar será el denominado “*Producción de Biodiesel en un Reactor Agitado*”, sobre el que se ya se han calculado controladores PID y Feed Forward según los métodos clásicos en el Trabajo Práctico 1.

A partir de la respuesta al escalón de la planta real, se utilizó una librería de funciones de identificación y se estimó un modelo cuya función transferencia es:

$$G_{pa}(s) = \frac{0.20827}{(1 + 98.126 s)(1 + 18.916 s)} e^{-8s}$$

**Nota:** Este paso se encuentra resuelto a partir de la librería “*System Identification Toolbox*” de MATLAB y no es objeto de estudio en este trabajo práctico.

Se puede observar que la función transferencia de la planta es de segundo orden con presencia de un retardo con  $\tau_d = 8 \text{ seg}$ . Los polos de la función transferencia son:

$$p_1 = -\frac{1}{98.126} \quad p_2 = -\frac{1}{18.916}$$

El retardo no modifica la amplitud puesto que su módulo es constante e igual a 1, pero su argumento presenta un desfase negativo lineal con la frecuencia. Si se tiene en cuenta que el polo más lento (dominante) se da en  $\tau_1 = 98.126 \text{ seg}$  y, dado que el retardo de  $\tau_d = 8 \text{ seg}$  representa un 8.15% de  $\tau_1$ , se considera despreciable el efecto sobre el sistema.

**Nota:** En el caso de que se encuentre que el retardo afecta de forma inaceptable las características dinámicas previstas en el diseño, se podría implementar un corrector de Smith.

### 2.1 Respuesta al Escalón de $G_{pa}$

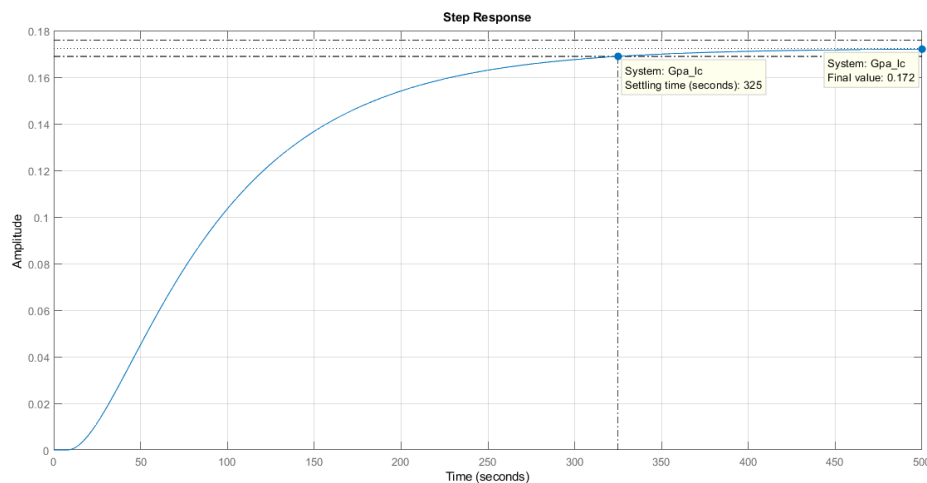
Para obtener la respuesta al escalón del sistema sin corregir, se considera a lazo cerrado con realimentación unitaria, usando la función de transferencia proporcionada. El sistema en lazo cerrado tendrá la forma:

$$G_{LC}(s) = \frac{G_{pa}(s)}{1 + G_{pa}(s)}$$

donde  $G_{pa}(s)$  es la planta no corregida.

Una vez obtenido  $G_{LC}(s)$ , se aplica un escalón de entrada para analizar el comportamiento de su respuesta temporal. Se observan parámetros claves como el error en estado estacionario ( $\epsilon_{01}$ ), el sobrevalor ( $SV\%$ ) y el tiempo de respuesta al 2% ( $t_{r2\%}$ ), junto con los márgenes de estabilidad. Para obtener los primeros tres parámetros se pueden utilizar varias formas, entre ellas: Realizar la respuesta al escalón e indicar los parámetros a través de la interacción con el gráfico (Figura 4), o utilizando el comando “*stepinfo*” de Matlab.

Figura 4: Respuesta al Escalón de la Planta.



```
% Calcular el error en estado estacionario
Kp = dcgain(Gpa); % Ganancia estática
ess = 1/(1 + Kp); % Error en estado estacionario
% Calcular características dinámicas
info = stepinfo(Gpa_lc);
tr2 = info.SettlingTime;
SV = info.Overshoot;
```

Con ambos enfoques se obtienen idénticos resultados que se presentan a continuación.

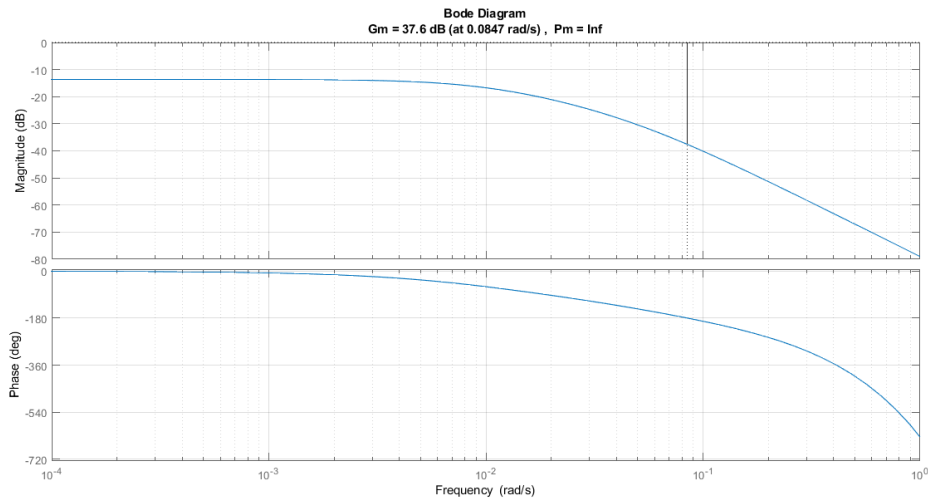
$\epsilon_{01}$	$SV(\%)$	$t_{r(2\%)}$
0.8276	0	324.9784 s

**Nota:** El sobrevalor se ha calculado, pero es sencillo observar a partir de la respuesta al escalón, que su valor es nulo. Por otro lado, el cálculo del error en estado estacionario también podría hacerse aplicando el teorema del valor final y se obtiene el mismo resultado:

$$\epsilon_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1 + G_{pa}} r(s) \right] = \frac{1}{1 + G_{pa}(0)} = 0.8276$$

Los márgenes de estabilidad se obtienen con la función “*margin*” (Figura 5).

Figura 5: Diagrama de Bode y Márgenes de Estabilidad de la Planta.



$$G_m = 37.6 \text{ dB} \left( \text{en } 0.0847 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \quad P_m = \text{inf}$$

### 3. Diseño del Corrector

#### 3.1 Corrector PD

Se requiere diseñar un controlador para que el sistema a lazo cerrado presente una mejor respuesta. Particularmente se debe cumplir:

$$t_{r2\%} < 110 \text{ seg} \quad SV < 20\% \quad \epsilon_{01} = 0$$

Para diseñar el controlador que cumpla con las especificaciones se supondrá que el modelo lineal dado representa fielmente a la planta, ignorando el tiempo muerto tal como se justificó en la Sección 2.

Esta suposición nos permitirá utilizar las restricciones temporales para encontrar los parámetros de la respuesta en frecuencia valiéndonos de algunas aproximaciones. En particular, se pueden relacionar el coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ ) y la frecuencia natural del sistema ( $\omega_n$ ) con el sobrevalor y el tiempo de respuesta tal como sigue:

- $SV(\%) = 100 \times e^{\left( \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)}$
- $t_r(2\%) \cong \frac{4}{\xi\omega_n}$

Además, se tiene que el margen de fase se puede aproximar como  $MF \cong 100\xi$ .

Utilizando la primera expresión y considerando que se desea un  $SV$  menor al 20%:

$$SV(\%) = 100 \times e^{\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} < 20$$

$$\xi > 0.4559$$

$$\text{Se adopta } \xi = 0.46$$

Luego, con el amortiguamiento ( $\xi$ ) adoptado, se obtiene la frecuencia  $\omega_n$ :

$$t_r(2\%) = \frac{4}{\xi\omega_n} < 110 \text{ seg}$$

$$\omega_n > 0.0791 \text{ rad/s}$$

$$\text{Se adopta } \omega_n = 0.08 \text{ rad/s}$$

Por último, se calcula el margen de fase requerido del sistema:

$$MF \cong 100\xi \rightarrow MF = 46^\circ$$

Estos cálculos nos indican que, para asegurar los requerimientos solicitados en la respuesta temporal, debemos lograr un margen de fase de  $46^\circ$  en el sistema para la frecuencia  $\omega_n = 0.08 \text{ rad/s}$ . Se calcula magnitud y fase para el sistema actual a dicha frecuencia a través del Bode en Matlab:

```
[mag, phase] = bode(Gpa,wn);  
mag = 0.0145 -> -36.7668 db  
phase = -175.9523°
```

Para obtener el margen de fase deseado ( $46^\circ$ ), se deberá adelantar la fase de la planta. El corrimiento de fase necesario será:

$$\phi_m = 46^\circ - (180^\circ + \phi_{Gpa}(\omega_n))$$

Podemos agregar un margen de seguridad si sumamos  $9^\circ$  para compensar el desfase que introduce el retardo:

$$\phi_m = 46^\circ - (180^\circ - 175.95^\circ) + 9^\circ = 50.95^\circ$$

De esta forma, para lograr  $46^\circ$  de margen de fase en la frecuencia  $\omega_n$ , se propone adelantar la fase en  $50.95^\circ$ .

Debido a que se debe realizar un adelanto de fase, se elige como controlador un corrector PD cuya expresión será de la forma:

$$G_{PD}(s) = K_{PD} \frac{(1 + a\tau s)}{(1 + \tau s)} ; a > 1$$



Se puede demostrar que:

$$\phi_m = \arcsen\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \quad \omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$$

Se calculan los parámetros del corrector:

$$a = \frac{\sen(\phi_m) + 1}{1 - \sen(\phi_m)} = 7.9524 \quad \tau = \frac{1}{\omega_m\sqrt{a}} = 4.4326 \text{ seg}$$

$$P_{PD} = \frac{1}{\tau} = 0.2256 \quad Z_{PD} = \frac{1}{a\tau} = 0.0284$$

Para calcular  $K_{PD}$  se plantea ganancia unitaria (0 dB) para la frecuencia  $\omega_n$ :

$$|G_{pa}| |G_{PD}|_{\omega=\omega_n} = 1$$

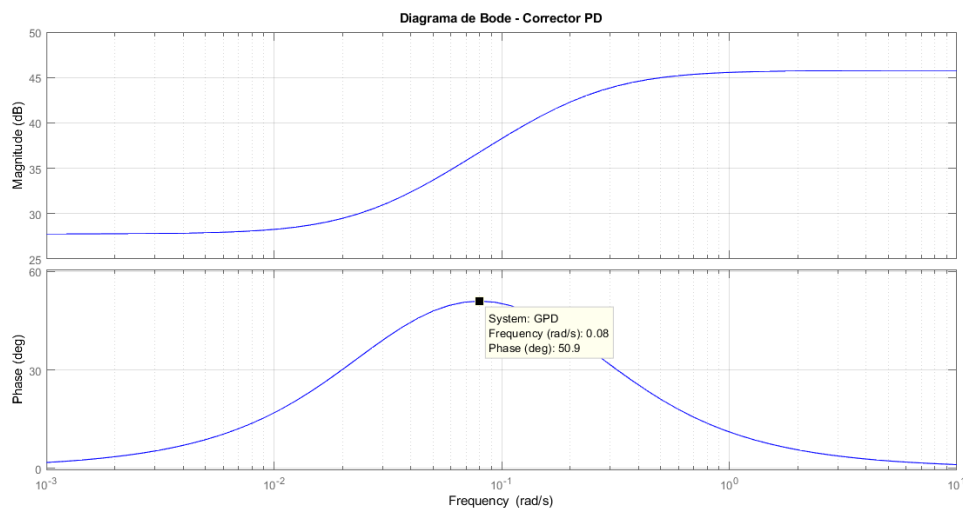
$$K_{PD} = \frac{1}{|G_{pa}(\omega_n)|\sqrt{a}} = \frac{1}{0.0145 \sqrt{7.9524}} = 24.4559$$

Luego, la función transferencia del corrector PD será:

$$G_{PD}(s) = K_{PD} \left( \frac{1 + s/Z_{PD}}{1 + s/P_{PD}} \right) = 24.4559 \left( \frac{1 + 35.25 s}{1 + 4.4326 s} \right)$$

Se verifican las condiciones impuestas para el corrector en el Bode de la Figura 6.

Figura 6: Diagrama de Bode – Corrector PD.

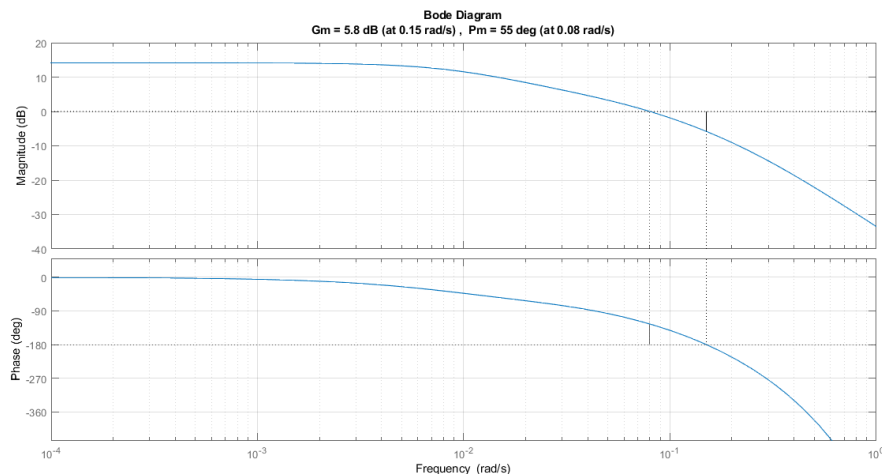


Se corrobora gráficamente que es un corrector PD de avance de fase, y además que tiene un  $\phi_m = 50.9^\circ$  para la frecuencia  $\omega_n = 0.08 \text{ rad/s}$ .

### 3.1.1 Verificación del Corrector PD

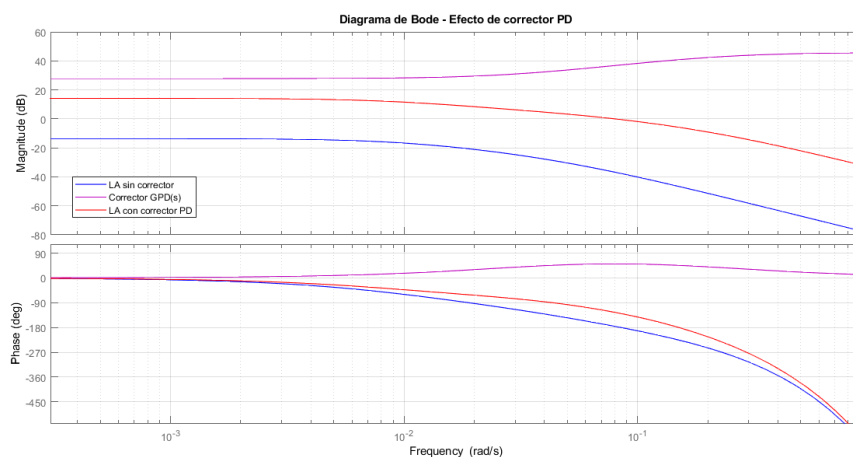
Para verificar la condición de margen de fase requerido, se grafica el diagrama de Bode del sistema corregido a lazo abierto  $T(s) = G_{PD}(s) \times G_{pa}(s)$ .

Figura 7: Márgenes de Estabilidad - Planta Corregida.



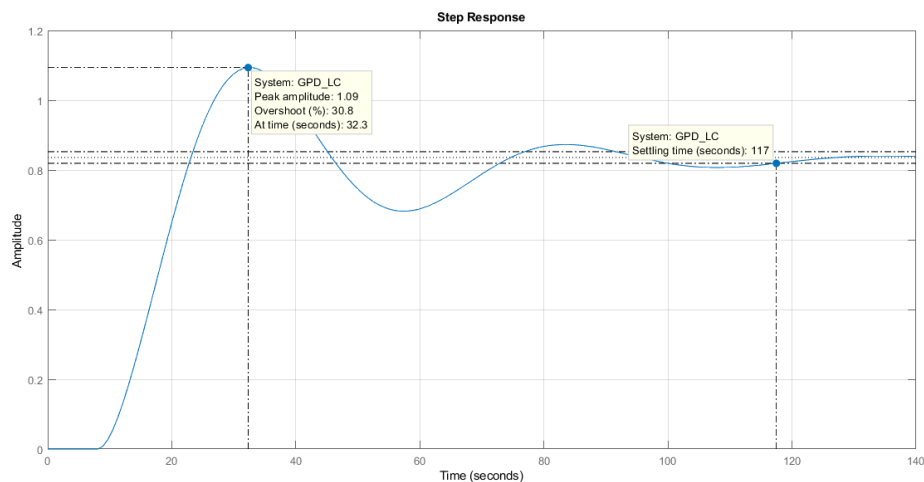
Además, se grafica en un mismo diagrama de bode el corrector PD, la función transferencia sin corregir y la función transferencia corregida para visualizar el cambio obtenido.

Figura 8: Diagrama de Bode – Corrección de Planta PD.



Se puede observar como el Bode del sistema a lazo abierto con corrector PD aumenta su fase en las frecuencias para las cuales trabaja el corrector. Además, el sistema tiene una ganancia mayor, lo que dará como resultado no solo una mejora en los requerimientos dinámicos sino también un menor error estacionario debido a la ganancia  $K_{PD}$ . También puede observarse que, a medida que las frecuencias crecen, el retardo aporta una fase negativa lineal (recordar que está en escala logarítmica). Por último, la Figura 9 muestra la respuesta al escalón del sistema corregido a lazo cerrado.

Figura 9: Respuesta al Escalón de Planta Corregida con PD.



La respuesta con el corrector PD tiene una mejora con respecto a la obtenida sin ningún controlador. Sin embargo, debido al retardo y al cambio de fase lineal que provoca con la frecuencia, no se pudo asegurar el tiempo de respuesta el 2%, ni el sobrevalor deseados. Se realizará un ajuste fino del controlador para obtener los requerimientos dinámicos en la Sección 4.

Si bien el error en estado estacionario tuvo un cambio significativo, el mismo no es nulo luego de la aplicación del controlador, resultado esperable ya que este no es el objetivo del corrector PD. Para obtener un error estacionario nulo se aplicará un corrector PI.

### 3.2 Corrector PI

Para la corrección del error estacionario no será posible simplemente ajustar la ganancia con un control proporcional debido a que se estarían dejando de cumplir los requerimientos dinámicos. Por este motivo, se utiliza una corrección integral que actúa en la zona de bajas frecuencias.

Para garantizar un error al escalón nulo, se diseñará un PI con un polo en el origen, al que se le agrega un cero con el objetivo de tener desfasaje nulo para las zonas donde actúa el corrector PD. Para que el control PI no interfiera con el corrector PD previamente calculado, se coloca el cero  $Z_{PI}$  en una frecuencia 10 veces menor a la frecuencia del polo  $P_{PD}$  situado en  $\omega_n$ .

$$Z_{PI} = \frac{\omega_n}{10} = 0.008 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad \tau_{PI} = \frac{1}{Z_{PI}} = 125 \text{ seg}$$

Para calcular la ganancia del controlador se plantea, de manera similar al corrector PD, mantener una ganancia unitaria para la frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_n$ .

$$|G_{pa}| |G_{PI}| |G_{PD}|_{\omega=\omega_n} = 1$$

Dado que, desde el diseño del PD, ya se cumple el requisito de ganancia unitaria para  $|G_{pa}| |G_{PD}|_{\omega=\omega_n} = 1$ , entonces:  $|G_{PI}|_{\omega=\omega_n} = 1$ .

Calculamos  $K_{PI}$ :

$$K_{PI} = \frac{1}{\left| \frac{(1 + \tau_{PI} j\omega_n)}{j\omega_n} \right|} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 + \tau_{PI}^2 \omega_n^2}} = 0.008$$

Luego, la función transferencia del controlador PI será:

$$G_{PI}(s) = K_{PI} \left( \frac{1 + \tau_{PI} s}{s} \right) = 0.008 \left( \frac{1 + 125 s}{s} \right)$$

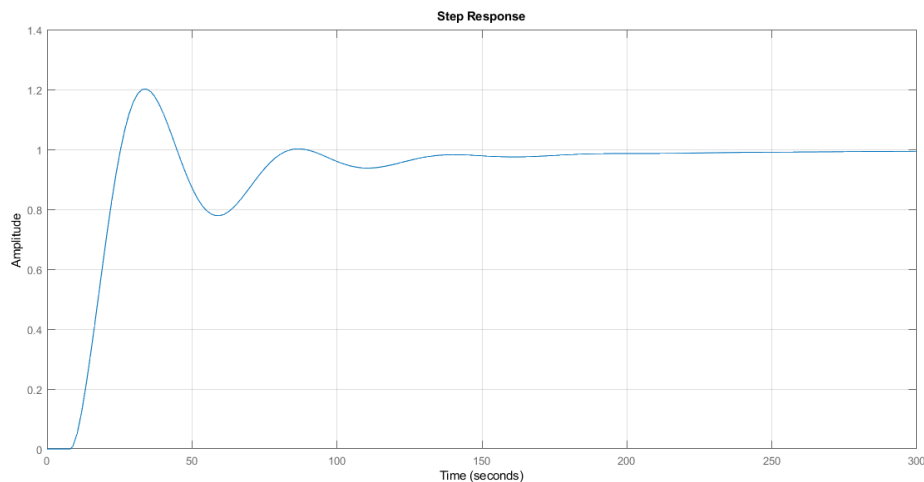
Ahora, el nuevo controlador será el conformado por ambos correctores ( $G_{PD}$  y  $G_{PI}$ ):

$$G_C(s) = G_{PD}(s) G_{PI}(s) = 30.7096 \left( \frac{1 + 27.855 s}{1 + 5.7504 s} \right) \times 0.008 \left( \frac{1 + 125 s}{s} \right)$$

### 3.2.1 Verificación del Corrector PID

A continuación, se grafica la respuesta al escalón para el sistema a lazo cerrado formado por la planta  $G_{pa}(s)$  y el controlador  $G_C(s)$  con realimentación unitaria.

Figura 10: Respuesta al Escalón de Planta Corregida con PID.



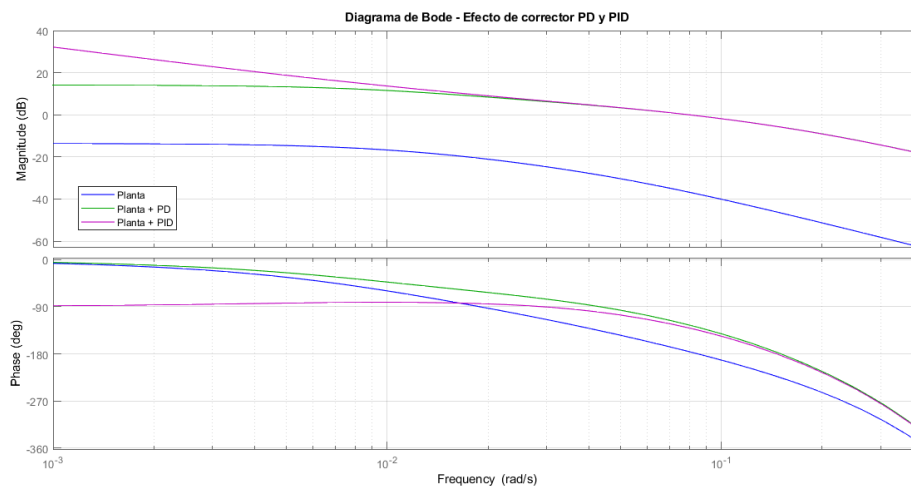
En este caso, debido al controlador PI se pudo asegurar un error estático nulo para un escalón de entrada. Esto afirma la teoría para lazos que poseen una integración.

$$\epsilon_{01} = \epsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \frac{K}{s} G(s)} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

Por otro lado, al aplicar este corrector ha variado un poco el transitorio de la respuesta, cambiando los parámetros dinámicos asociados:

$$SV = 20.5 \% \quad t_{r2\%} = 170.7 \text{ seg}$$

Figura 11: Corrección de Planta PID.



En el diagrama de bode se presenta la planta sin corrección (azul), la planta con el control PD (verde) y la planta con el control PID (magenta). En altas frecuencias, ambos controladores se comportan de manera similar indicando que una de las premisas para el controlador PI se ha cumplido (no afectar la respuesta del PD para altas frecuencias). Luego, para bajas frecuencias, el control PID aporta una ganancia significativa debido a su polo en el origen, logrando obtener un error en estado estacionario nulo.

Los requerimientos dinámicos no cumplidos son atribuidos a las aproximaciones tenidas en cuenta para el cálculo de los controladores. La planta no es estrictamente un modelo de segundo orden y la presencia del retardo ignorado trae aparejada errores. En la siguiente sección se ajustará el controlador PID diseñado mediante un “ajuste fino” utilizando la herramienta “*SISOTool*” de Matlab.

## 4. Ajuste con SISOTool

Se utilizará esta herramienta para el diseño y corrección del controlador PID previamente calculado. Para lograr esto, la herramienta toma como parámetros la función transferencia de la planta ( $G_{pa}$ ) y el controlador ( $G_c$ ). Luego se trabaja desde el *Control System Designer*.

Al pasarle estos dos parámetros, la respuesta al escalón es la misma que la obtenida en la Figura 10, por lo que ajustaremos los parámetros del controlador hasta encontrar una mejor respuesta.

Como primer paso, definimos el formato de la función transferencia del controlador en ZPK. La equivalente es la siguiente:

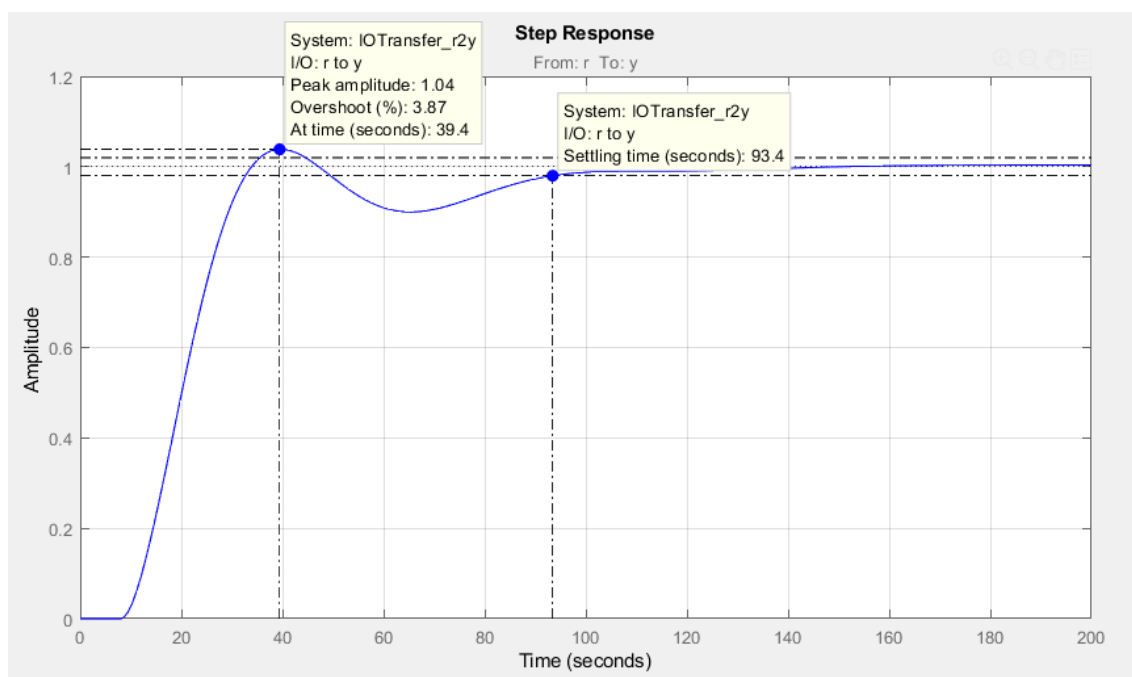
$$C(s) = 193.39 \frac{(s + 0.0284)(s + 0.08)}{s(s + 0.226)}$$

Teniendo en mente los requisitos dinámicos (sobrealor y el tiempo de respuesta), se modificaron dos parámetros: la ganancia del controlador y el cero del corrector PI. Se ubicó el cero en una frecuencia mayor ( $0.012 \text{ rad/s}$ ) y se redujo la ganancia para minimizar el sobrealor. La corrección queda como sigue:

$$G_c(s) = 140 \frac{(s + 0.0284)(s + 0.012)}{s(s + 0.226)}$$

En la Figura 12 se muestra la respuesta al escalón del nuevo sistema y se verifica que cumple con los requisitos de tiempo de respuesta menor a 110 segundos y sobrealor menor al 20%.

Figura 12: Respuesta al Escalón del Sistema con Controlador Corregido en SISOTool.



## 5. Conclusiones

A continuación, se implementará el controlador corregido sobre el sistema real de la planta. Para esto se utiliza el modelo de *Simulink* suministrado por la cátedra. Además, se utiliza un porcentaje de  $K$  de seguridad para disminuir la ganancia en las primeras pruebas y prevenir una posible saturación a la salida (práctica recomendable). Se comienza en un 10% del valor de  $K$  y se aumenta hasta el 100%.

En las siguientes figuras podemos ver la respuesta del controlador ante un cambio en la entrada de la planta real del +2% en el Set Point.

Figura 13: Cambio en el Set Point con el 10% de  $K$ .

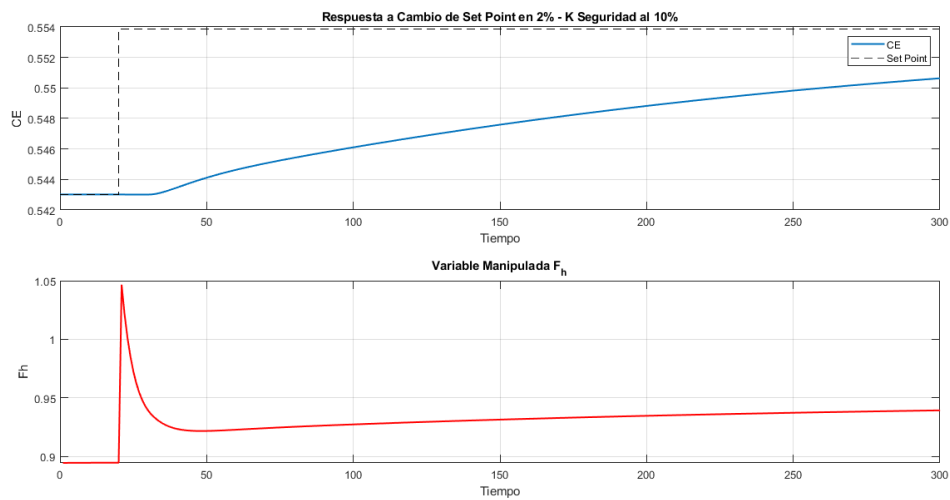


Figura 14: Cambio en el Set Point con el 50% de  $K$ .

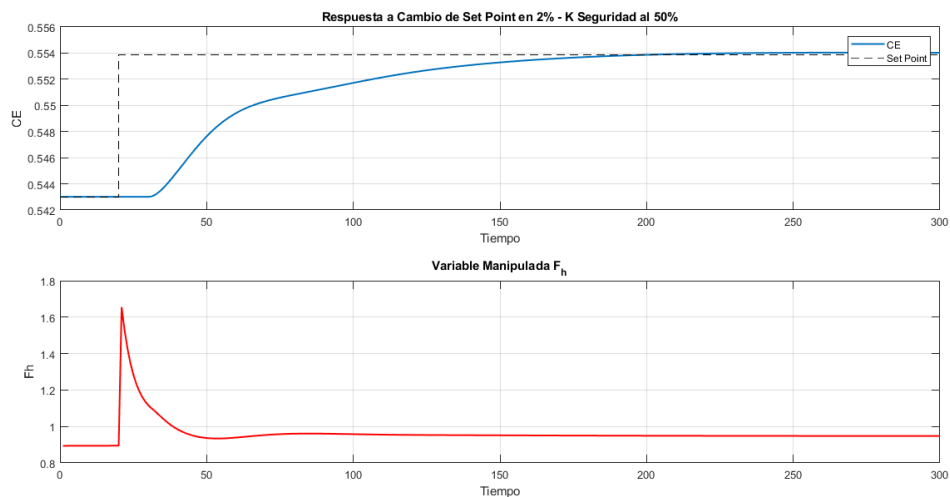
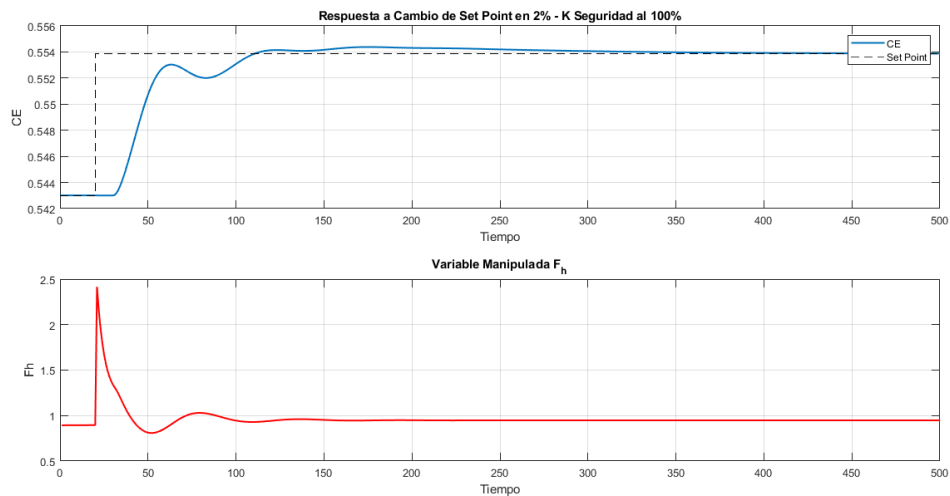


Figura 15: Cambio en el Set Point con el 100% de  $K$ .



La aplicación del controlador sobre el sistema real da como resultado una buena respuesta ante el cambio del Set Point. La respuesta obtenida al aplicar el controlador no es idéntica a la encontrada durante el diseño, pero debe recordarse que el cálculo del controlador se hizo en base a un modelo de la planta representado según la función transferencia  $G_{pa}$ , que tiene discrepancias con el modelo real. Es importante destacar también que para el cálculo del controlador se ignoró la presencia del retardo debido a que el mismo era menor al 10% del tiempo dominante del sistema, induciendo aquí también algunos errores en el modelado que debieron ser ajustados mediante la herramienta SISOTool.

En definitiva, para la aplicación del controlador en la planta real, tanto el sobrevalor como el tiempo de respuesta se encuentran con valores aceptables y si se quisiera mejorar la respuesta del sistema podría rediseñarse el controlador en un proceso iterativo hasta encontrar la respuesta que mejor se adapte a los requerimientos solicitados.